Matemática de las Ciencias Sociales y de la Educación

Autor: Danilo De Jesús Ariza Agámez

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina

MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Matemática de las Ciencias Sociales y de la Educación / Danilo De Jesús Ariza Agámez, / Bogotá D.C., Fundación Universitaria del Área Andina. 2017

978-958-5459-84-7

Catalogación en la fuente Fundación Universitaria del Área Andina (Bogotá).

Edición:
Fondo editorial Areandino
Fundación Universitaria del Área Andina
Calle 71 11-14, Bogotá D.C., Colombia
Tel.: (57-1) 7 42 19 64 ext. 1228
E-mail: publicaciones@areandina.edu.co
http://www.areandina.edu.co

Primera edición: noviembre de 2017

Corrección de estilo, diagramación y edición: Dirección Nacional de Operaciones virtuales
Diseño y compilación electrónica: Dirección Nacional de Investigación

Hecho en Colombia
Made in Colombia

Matemática de las Ciencias Sociales y de la Educación

Autor: Danilo De Jesús Ariza Agámez

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina
MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Índice

Índice

Unidad 1

Principios de lógica proposicional

Matemáticas para educación

Autor: Danilo Ariza

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina

MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Introducción

En la cotidianidad vemos la gran flexibilidad con la que frecuentemente usamos el término lógica, encontramos expresiones como: "lógicamente", "por simple lógica", "según tu lógica", o "desde mi lógica", sin embargo, la extensa literatura existente en relación con la lógica nos muestra que el objeto de estudio de esta rama se refiere a las formas de razonamiento amparadas en principios formales. Al igual que la matemática, la lógica está catalogada como una de las ciencias formales y sus fundamentos son empleados, así sea implícitamente, en áreas como comunicaciones, toma de decisiones, gestión del conocimiento, ciencias jurídicas, entre otras. Encontramos por ejemplo el riguroso uso de la lógica por parte de abogados que a fuerza de argumentos defienden sus tesis en favor de una causa.

Tal como sucede con la matemática, la lógica se basa en un conjunto de términos y símbolos que hacen parte de su estructura conceptual, en el centro de esta conceptualización se encuentra la idea de proposiciones y las diferentes operaciones que con ellas se pueden realizar. En esta semana nos disponemos a estudiar algunos principios básicos de lógica, entre los que se destacan los argumentos y su estructura, la conceptualización alrededor de las proposiciones y sus operaciones, valor de verdad de proposiciones compuestas. Los fundamentos de la lógica se encuentran en el centro de principios formales de demostración.

Recomendaciones metodológicas

Claramente, el estudiante como arquitecto de su formación, tiene total autonomía de llevar a cabo el estudio de las temáticas de esta semana acudiendo a los recursos en el orden que lo desee, sin embargo pensamos que el acercamiento y apropiación de los temas presentados en esta cartilla, se debe buscar inicialmente a través de su cuidadosa lectura, donde se presenta los conceptos y principios básicos de la lógica, lo que se puede complementar mediante la visualización de video capsulas y la revisión de las lecturas complementarias, estos recursos contemplan, además de los temas propios de la cartilla, explicaciones y ejercicios resueltos sobre operaciones con proposiciones, valor de verdad y tablas de verdad de proposiciones compuestas. Luego de abordar los recursos antes señalados resulta conveniente afrontar los ejercicios de repaso, verificación de algunas implicaciones y equivalencias lógicas, a través de los cuales el estudiante puede validar sus avances en los temas como parte de la preparación para enfrentarse a otros temas del curso.

Desarrollo temático

Principios de lógica proposicional

Argumentos lógicos

Siempre que queremos justificar o establecer la veracidad o valides de nuestros planteamientos, acudimos a razonamientos, argumentos o evidencia que los respalden. Un argumento es un conjunto de afirmaciones, llamadas premisas, que conducen a una conclusión. Las premisas son la evidencia o razones que han de convencer acerca de la veracidad de la conclusión, el argumento es la concatenación de las primeras con la conclusión.

Desde el punto de vista de la lógica, un argumento se considera correcto si en toda situación en la que sus premisas son verdaderas, su conclusión también lo es. Lo anterior equivale a decir que un argumento es correcto si no puede producir una conclusión falsa a partir de premisas verdaderas. Si un argumento es correcto decimos que la conclusión dada es consecuencia lógica del mismo.

En aras de evitar confusiones, es importante resaltar que en un argumento correcto ni las premisas ni la conclusión debe ser obligatoriamente verdaderas, lo que realmente se debe dar es que si las premisas son verdaderas, también debe serlo la conclusión.

Ejemplo 1.1:

Todos los hombres son mortales.

Sócrates es hombre.

Luego Sócrates es mortal.

Si Sócrates es hombre, entonces Sócrates es mortal.

Sócrates es hombre.

Luego Sócrates es mortal.

Juan irá al cine o dormirá.

Juan irá al cine.

Luego Juan no dormirá.

Algunos hombres son mortales.

Algunos mortales son mamíferos.

Luego algunos hombres son mamíferos.

Nótese que en el tercer argumento las premisas no necesariamente son verdaderas, ya que, por ejemplo, Juan podría quedarse estudiando principios de lógica proposicional, en cuyo caso la conclusión también sería falsa, pero si las premisas son verdaderas, la conclusión es verdadera.

Estructura lógica de los argumentos

El que un argumento sea correcto depende realmente de la forma en que se relacionan las proposiciones que lo componen, más no del tema del que se trata, por ejemplo, en el cuarto argumento del ejemplo 1.1 podría ser confuso o poco claro el conjunto de premisas (a fin de cuentas todos los hombres son mamíferos), de tal manera que si alguien no conoce el significado de una palabra, igual debe poder determinar si el argumento es correcto. Reforzamos esta idea con el siguiente argumento, en el cual hay términos extraños, no entendemos el significado de las premisas y las conclusiones, pero el argumento es correcto:

Todos los plum son pran.

Frafran es un plum.

Luego Frafran es un pran.

Un paso más adelante en este análisis nos lleva al uso de términos genéricos o variables.

Todos los A son B.

C es un A.

Luego c es un B.

Dependiendo de que sea A y que sea un B, podría darse que sea cierto que todos los A son B, y que c sea un B, en cuyo caso necesariamente c es un B.

Proposiciones

En el contexto de la lógica, las proposiciones son afirmaciones o expresiones gramaticales para las cuales tiene sentido indicar si son verdaderas o falsas, es claro que en el lenguaje cotidiano no todas las expresiones pueden clasificarse como tal. Por ejemplo, las preguntas abiertas formuladas a una persona o las órdenes que se nos imparten no son proposiciones. Una buena manera de determinar si una expresión *X* es o no una proposición, es preguntarse ¿Es verdad que *X*?, Si esta pregunta no tiene sentido, entonces *X* no es una proposición.

Por ejemplo, la expresión ¡salga de esta habitación! no es una proposición, es simplemente una orden sobre la cual no tiene sentido señalar si su contenido es verdadero o falso, es decir, no tiene sentido preguntarse ¿es verdad que: salga de esta habitación? Otro ejemplo de expresión que no es proposición corresponde a la pregunta: ¿Qué día es hoy?, esta no es proposición porque no se está haciendo una afirmación, en este caso la pregunta ¿es verdad que: que día es hoy? No tiene sentido.

En el caso de la pregunta ¿está lloviendo? Vemos que tampoco es una proposición, sin importar que puede ser verdad o mentira que esté lloviendo. El carácter de proposición o no se lo da el mismo contenido de la expresión, no la de la respuesta a la pregunta.

Lo anterior no significa que debamos ser capaces de determinar si una proposición *X* es verdadera o falsa, por ejemplo, la expresión: "Hay vida en Saturno" es una proposición, su contenido podría ser falso o verdadero aunque no tengamos manera de saberlo. Generalmente las proposiciones se abrevian mediante letras como p, q, r, tal como se usará más adelante.

Consistencia lógica

Se dice que un conjunto de oraciones es consistente o tiene consistencia lógica si existe alguna situación en la cual todas ellas son verdaderas, en caso contrario se dice que es inconsistente. Por ejemplo, el conjunto de proposiciones siguientes es inconsistente.

Hace frío.

Llueve.

Debo ir a clases y no hace frío.

La razón para que el anterior conjunto sea inconsistente es que no es posible que, para la persona que habla, al mismo tiempo haga frio y no haga frio.

Consideremos ahora las proposiciones:

El profesor me recomendó hacer ejercicios de álgebra el semestre pasado.

El año pasado reprobé dos veces la materia

Pero tengo buen rendimiento académico.

Vemos que es consistente ya que es posible que todas las afirmaciones sean verdaderas.

Relación entre argumento correcto y consistencia lógica

A partir de un argumento dado podemos hallar el argumento contraejemplo, el cual consiste en el mismo conjunto de premisas del argumento original y la negación de la conclusión. Por ejemplo, consideremos a continuación el siguiente argumento y su contraejemplo.

Todo número par es divisible por 2 **84 es un número par** **84 es divisible por 2**	**Todo número par es divisible por 2** **84 es un número par** **84 no es divisible por 2**
Argumento 1	Argumento 2: contraejemplo del 1

Cuadro 1
Fuente: Propia.

En el par de argumentos anteriores vemos claramente que el argumento 1 es consistente, mientras que su contraejemplo es inconsistente, esta idea ilustra la valides de un teorema en relación con ello, el teorema es el siguiente:

Teorema 1. Un argumento es correcto siempre que contraejemplo es inconsistente.

Lógica proposicional

Los argumentos son correctos o incorrectos dependiendo su estructura lógica basada en un lenguaje formal L en el que no existan ambigüedades, el lenguaje L está formado fundamentalmente por:

1. Proposicionales, que generalmente se abrevian mediante letras como *p, q, r.*

2. Conectivos lógicos o términos de enlace entre las proposiciones.

3. Paréntesis que ayudan a definir la estructura de expresiones más complejas.

La interpretación o significado de una proposición del lenguaje L es su valor de verdad, es decir, si es verdadera o falsa.

Proposiciones compuestas. Operaciones simples

En esta sección nos disponemos a estudiar la composición de proposiciones a partir de proposiciones más simples y el uso de conectores lógicos, también se hará el análisis de la veracidad de una proposición compuesta dependiendo del valor de verdad de las componentes.

Negación de una proposición

Dada una proposición p la negación de p se representa mediante $\sim p$ y corresponde a otra proposición que afirma lo contrario que p.

Ejemplo 1.2

Se tiene la proposición p dada por:

$$p: F\ es\ un\ rectángulo$$

Entonces la respectiva negación es:

$$\sim p: F\ no\ es\ un\ rectángulo\ (o\ no\ es\ cierto\ que\ F\ es\ un\ rectángulo)$$

Valor de verdad y tabla de verdad de la negación

Si la negación de una proposición p es otra proposición que afirma lo contrario que p, es claro que si p es verdadera, su negación ($\sim p$) es falsa, y si p es falsa, su negación será verdadera. La tabla adjunta es la tabla de verdad que resume estas dos posibilidades en relación con una proposición p y su negación.

p	$\sim p$
V	F
F	V

Tabla 1
Fuente: Propia.

Conjunción de dos proposiciones

La conjunción de dos proposiciones p, q corresponde a una proposición compuesta por la concatenación o enlace de las proposiciones p y q mediante el elemento de enlace "y". En la lógica proposicional este elemento de enlace se representa mediante el símbolo o conector lógico "$\wedge$", con lo cual la conjunción de la proposiciones p, q se representa mediante $p \wedge q$ y se lee "p y q".

Ejemplo 1.3:

Consideremos los siguientes pares de proposiciones p y q y su conjunción. Nótese que no se hace referencia a la veracidad de las proposiciones, nos interesa tener claridad del significado de lo que se afirma.

a) p: $F\ es\ un\ rectángulo.$

q: $F\ es\ un\ paralelogramo.$

$p \wedge q$: $F\ es\ un\ rectángulo\ y\ F\ es\ un\ paralelogramo.$

b) p: $F\ es\ un\ paralelogramo.$

q: $F\ es\ un\ rectángulo.$

$p \wedge q$: $F\ es\ un\ paralelogramo\ y\ F\ es\ un\ rectángulo.$

c) p: $Hace\ calor.$

q: $Tengo\ sed.$

$p \wedge q$: $Hace\ calor\ y\ tengo\ sed.$

d) $p: El\ agua\ es\ cristalina.$

$q: la\ luna\ es\ un\ satelite.$

$p \wedge q: El\ agua\ es\ cristalina\ y\ la\ luna\ es\ un\ satelite.$

Valor de verdad y tabla de verdad de la conjunción

Para analizar la veracidad o falsedad de una proposición compuesta mediante la conjunción de dos proposiciones, consideremos las siguientes proposiciones p y q y su conjunción:

$p: Los\ pájaros\ son\ oviparos.$

$q: Las\ plantas\ pertenecen\ al\ reino\ vegetal.$

$p \wedge q: Los\ pájaros\ son\ oviparos\ y\ las\ plantas\ pertenecen\ al\ reino\ vegetal.$

Acudiendo a nuestros conocimientos básicos en ciencias naturales, vemos que las dos proposiciones son verdaderas, además, vista en conjunto, no resulta difícil comprender que la conjunción $p \wedge q$ es una proposición es verdadera.

Si en cambio, las proposiciones p y q son:

$p: Los\ pájaros\ son\ oviparos.$

$q: El\ caucho\ es\ conductor\ de\ elctricidad.$

Entonces:

$p \wedge q: Los\ pájaros\ son\ oviparos\ y\ El\ caucho\ es\ conductor\ de\ elctricidad.$

Vista como un todo se ve claramente en este caso que la conjunción es una proposición falsa.

Consideremos ahora el caso de dos proposiciones falsas, estas son:

$p: Los\ pájaros\ son\ mamíferos.$

$q: Los\ caballos\ tienenn\ alas.$

Vemos que la proposición
$p \wedge q$: $Los\ pájaros\ son\ mamíferos\ y\ los\ caballos\ tienen\ alas$ es en conjunto una proposición falsa.

Los ejemplos anteriores dejan ver en general que el valor de verdad de la conjunción $p \wedge q$ de dos proposiciones, es una proposición verdadera solo si las dos proposiciones dadas son verdaderas, en cualquier otro caso la conjunción es falsa. La tabla adjunta es la tabla de verdad de la conjunción para las diferentes combinaciones posibles de los valores de verdad de las proposiciones p y q.

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Tabla 2.
Fuente: Propia.

Disyunción de dos proposiciones

La disyunción de dos proposiciones p, q es una proposición compuesta por la concatenación de las proposiciones p y q usando el elemento de enlace "o", el cual se representa en lógica proposicional usando el símbolo o conector lógico "$\vee$", la conjunción de la proposiciones p, q se representa entonces mediante $p \vee q$ y se lee "$p\ o\ q$".

Ejemplo 1.4:

Consideremos los siguientes pares de proposiciones y su conjunción.

a) p: $F\ es\ un\ rectángulo$.

q: $F\ es\ un\ paralelogramo$.

$p \vee q$: $F\ es\ un\ rectángulo\ o\ F\ es\ un\ paralelogramo$.

b) p: $F\ es\ un\ paralelogramo$.

q: $F\ es\ un\ rectángulo$.

$p \vee q$: $F\ es\ un\ paralelogramo\ o\ F\ es\ un\ rectángulo$.

c) p: $Hace\ calor$.

q: $Tengo\ sed$.

$p \vee q$: $Hace\ calor\ o\ tengo\ sed$.

d) $p: El\ agua\ es\ cristalina.$

$q: la\ luna\ es\ un\ satelite.$

$p \vee q: Si\ el\ agua\ es\ cristalina\ o\ la\ luna\ es\ un\ satelite.$

Valor de verdad y tabla de verdad de la disyunción

Consideramos el valor de verdad de la disyunción. Tenemos las siguientes proposiciones $p,\ q$ y su disyunción:

$p: Los\ pájaros\ son\ oviparos.$

$q: Las\ plantas\ pertenecen\ al\ reino\ vegetal.$

$p \vee q: Los\ pájaros\ son\ oviparos\ o\ las\ plantas\ pertenecen\ al\ reino\ vegetal.$

En este caso también es claro que vista en conjunto la disyunción $p \vee q$ es una proposición es verdadera.

Si las proposiciones p y q son:

$p: Los\ pájaros\ son\ oviparos.$

$q: El\ caucho\ es\ conductor\ de\ elctricidad.$

Entonces $p \vee q: Los\ pájaros\ son\ oviparos\ o\ El\ caucho\ es\ conductor\ de\ elctricidad$ es la proposición que puede aceptarse como cierta ya que una de sus componentes lo es, esto lo sugiere la existencia del conector lógico "o" ($\vee$), lo cual es consistente con el significado dado en el lenguaje usado cotidianamente.

Si tenemos las dos proposiciones falsas:

$p: Los\ pájaros\ son\ mamíferos.$

$q: Los\ caballos\ tienen\ alas.$

Vemos que la proposición $p \vee q: Los\ pájaros\ son\ mamíferos\ o\ los\ caballos\ tienen\ alas$ sugiere que al menos una de las dos proposiciones componentes es verdadera, lo cual no es cierto, en conjunto se tiene una proposición falsa.

En este caso, amparados en los ejemplos podemos decir en general que el valor de verdad de la disyunción $p \vee q$ de dos proposiciones, es una proposición verdadera si una de las dos proposiciones, p o q es verdadera o si las dos son verdaderas, y es falsa cuando las proposiciones p y q son ambas falsas. La tabla adjunta es la tabla de verdad de la disyunción, resume sus posibles valores de verdad dependiendo de los valores de las proposiciones p y q.

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Tabla 3.
Fuente: Propia.

Teniendo en cuenta la descripción de la conjunción y disyunción de proposiciones, así como los ejemplos ilustrativos presentados, observamos que el orden en que se lea las proposiciones no tiene relevancia alguna sobre el significado del resultado. A continuación, analizaremos una operación entre dos proposiciones, en la cual es relevante el orden de las proposiciones componentes.

Condicional o implicación de dos proposiciones

Si tenemos dos proposiciones p y q podemos establecer una proposición compuesta conocida como implicación. La implicación de p y q se denota mediante $p \Rightarrow q$ y se lee " $si\ p\ entonces\ q$" o "$p\ implica\ q$", cuando se afirma que "$p\ implica\ q$", se quiere indicar que si ocurre p se tiene como consecuencia que también ocurre q. A la proposición p se le llama antecedente y a q, consecuente.

Ejemplo 1.5:

a) $p: F\ es\ un\ rectángulo.$

$q: F\ es\ un\ paralelogramo.$

$p \Rightarrow q: Si\ F\ es\ un\ rectángulo\ entonces\ F\ es\ un\ paralelogramo.$

b) $p: F\ es\ un\ paralelogramo.$

$q: F\ es\ un\ rectángulo.$

$p \Rightarrow q: Si\ F\ es\ un\ paralelogramo\ entonces\ F\ es\ un\ rectángulo.$

c) $p: Hace\ calor.$

$q: Tengo\ sed.$

$p \Rightarrow q$: $Si\ hace\ calor\ entonces\ tengo\ sed.$

d) p: $El\ agua\ es\ cristalina.$

q: $la\ luna\ es\ un\ satelite.$

$p \Rightarrow q$: $Si\ el\ agua\ es\ cristalina\ entonces\ la\ luna\ es\ un\ satelite.$

Dado que $p \Rightarrow q$ significa que "$p\ implica\ q$", se puede decir que siempre que se da p también se da q, o que es suficiente que ocurra p para que también ocurra q o más específicamente se dice que p es condición suficiente para que ocurra q, por otra parte, la afirmación "$p\ implica\ q$" también la podemos entender como: si ocurre p obligatoria o necesariamente ocurre q, la terminología empleada en este caso es que q es condición necesaria para que ocurra p.

La proposición $q \Rightarrow p$ se le llama la recíproca de $p \Rightarrow q$. Es claro que $p \Rightarrow q$ no garantiza que q ⇒ p. Por ejemplo, si una figura plana es un rectángulo, necesariamente es un paralelogramo, sin embargo el hecho que una figura sea un paralelogramo no garantiza que sea un rectángulo ¿por qué?

Valor de verdad y tabla de verdad de la condicional o implicación

Para analizar el valor de verdad de la condicional o implicación consideremos una situación diferente a los ejemplos ilustrativos antes presentados, la situación es la siguiente. Un profesor de matemáticas se precia de ser una persona de palabra y cumple lo que promete. El profesor plantea a cada uno de sus estudiantes lo siguiente:

$$\text{“}Si\ cumple\ más\ de\ tres\ retos, su\ calificación\ es\ excelente\text{”}$$

El planteamiento puede verse como una proposición compuesta $p \Rightarrow q$ donde las proposiciones p y q son:

$$p: Cumple\ más\ de\ tres\ retos$$

$$q: Su\ calificación\ es\ excelente$$

Un grupo de estudiantes en particular cumplen cuatro o más retos, haciendo que la proposición p sea verdadera, con lo cual el profesor efectivamente asigna calificación excelente a cada uno de estos estudiantes, es decir hace que q sea verdadera. La pregunta en es ¿el profesor hace honor a su palabra?, es decir ¿se puede afirmar que dice la verdad cuando hace su planteamiento? Claramente la respuesta es sí, el profesor cumple su palabra, y vemos que, siendo verdaderas las proposiciones p y q, la proposición $p \Rightarrow q$ es verdadera.

A otro grupo de estudiantes que también cumplen cuatro o más retos, haciendo que p sea verdadera, el profesor no asigna la calificación prometida, haciendo que q sea falsa. En cuyo caso claramente se ve que el planteamiento del profesor no se cumple, es decir la proposición $p \Rightarrow q$ es falsa siendo p verdadera y q falsa.

A otro grupo de estudiantes que solo cumple dos retos, haciendo que p sea falsa, el profesor asigna calificación excelente. ¿Hay algún problema en este caso con el cumplimiento de la palabra del profesor? La respuesta es No, el profesor solo falta a su palabra cuando no asigna al estudiante la nota que le promete, el hecho de asignarle la calificación excelente aunque no cumpla la condición no lo hace un falso promesero, lo cual quiere decir que con la falsedad de p y la veracidad de q su planteamiento $p \Rightarrow q$ es verdadero.

Finalmente, otro grupo de estudiantes no alcanza más de tres el profesor no asigna calificación excelente, lo que está de acuerdo con su planteamiento, lo que significa que si p y q son falsas, $p \Rightarrow q$ es verdadera.

Con base en los razonamientos anteriores nos permiten concluir que el valor de verdad de la implicación o condicional $p \Rightarrow q$ es falso solo cuando p es verdadera y q es falsa, en los demás casos posibles es verdadera. La tabla de verdad correspondiente a la implicación es la tabla adjunta.

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Tabla 4
Fuente: Propia

Bicondicional o doble implicación de dos proposiciones

Dadas dos proposiciones p y q podemos formar una proposición compuesta conocida como Bicondicional o doble implicación o equivalencia, denotada mediante $p \Leftrightarrow q$ y leída "p *si y solo si* q", lo cual significa que "p *implica* q" y "q *implica* p", es decir, las dos proposiciones se implican mutuamente.

Ejemplo 1.6

a) p: *F es un rectángulo.*

q: *F es un paralelogramo.*

$p \Leftrightarrow q$: F *es un rectángulo si y solo si* F *es un paralelogramo*.

b) p: F *es un paralelogramo*.

q: F *es un rectángulo*.

$p \Leftrightarrow q$: F *es un paralelogramo si y solo si* F *es un rectángulo*.

c) p: *Hace calor*.

q: *Tengo sed*.

$p \Leftrightarrow q$: *hace calor si y solo si tengo sed*.

d) p: *El agua es cristalina*.

q: *la luna es un satelite*.

$p \Leftrightarrow q$: *el agua es cristalina esi y solo si la luna es un satelite*.

Dado que $p \Leftrightarrow q$ q significa que "p *implica* q" y "q *implica* p" se puede decir p es condición suficiente y necesaria para que ocurra q y que q es condición suficiente y necesaria para que ocurra p. La veracidad de proposiciones compuestas mediante la bicondicional se estudia a continuación.

Valor de verdad y tabla de verdad de la doble implicación

Para analizar el valor de verdad de la bicondicional o doble implicación consideramos ahora que un docente de matemática plantea a cada uno de sus estudiantes lo siguiente:

"*cumple más de tres retos si y solo si su calificación es excelenete*"

Esto significa que si se cumplen tres o más retos se obtiene calificación excelente y si un estudiante obtiene calificación excelente es porque se cumple tres o más retos. En este caso el planteamiento se puede ver como la proposición $p \Leftrightarrow q$ donde las proposiciones p y q son:

p: *Cumple más de tres retos*.

q: *Su calificación es excelente*.

Se da el caso de un grupo de estudiantes que cumplen cuatro o más retos, haciendo que la proposición p sea verdadera, y el profesor asignó calificación excelente a cada uno de ellos, lo que significa que cumple su palabra, es decir, su planteamiento $p \Leftrightarrow q$ es verdadero siendo verdaderas las proposiciones p y q.

A otro grupo de estudiantes que también cumplen cuatro o más retos, haciendo que p sea verdadera, el profesor no asigna la calificación excelente, por tanto q es falsa. En este caso el planteamiento del profesor no se cumple, es decir la proposición $p \Leftrightarrow q$ es falsa siendo p verdadera y q falsa.

A otro grupo de estudiantes que alcanzan menos de tres retos, que hacen que p sea falsa, el profesor asigna calificación excelente, con lo cual el profesor no estaría cumpliendo su palabra, lo cual quiere decir que con la falsedad de p y la veracidad de q su planteamiento $p \Leftrightarrow q$ es falso.

Finalmente está el grupo de estudiantes que no alcanza más de tres retos y el profesor no asigna calificación excelente, estando así de acuerdo con su planteo, es decir con la falsedad de las proposiciones p y q se da la veracidad de $p \Leftrightarrow q$.

Lo anterior permite concluir que el valor de verdad de la bicondicional o doble implicación $p \Leftrightarrow q$ es verdadera cuando las dos proposiciones p y q son verdaderas o cuando ambas son falsas. La tabla de verdad correspondiente a la bicondicional es la tabla adjunta.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Tabla 1.5

Proposiciones compuestas. Operaciones combinadas

Las definiciones de las operaciones anteriores y los respectivos valores resumidos en las tablas de verdad se pueden usar para hallar tablas de verdad de proposiciones compuestas mediante la combinación de varias operaciones. A continuación se presenta algunos ejemplos de tablas de verdad construidas.

Ejemplo 1.7

Usar las definiciones y tablas de verdad de las operaciones simples para construir las tablas de verdad de las siguientes proposiciones:

$a)\ (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \vee \sim q)$

$b)\ \big(p \Rightarrow (q \vee r)\big) \wedge ((q \vee r) \Rightarrow p)$

Solución:

La tabla de verdad de toda proposición compuesta cuenta con un conjunto de posibilidades de valores de verdad que depende del número de proposiciones. Si se tiene dos proposiciones simples, se sabe que para la primera proposición existen dos posibilidades, verdadero y falso, y por cada una de ellas se tiene dos posibles valores de la segunda, lo que da en total cuatro posibilidades. Si se tiene 3 proposiciones, es claro que para las dos primeras hay cuatro posibles combinaciones, y por cada una de ellas hay dos posibilidades de la tercera, lo que da en total 8 posibilidades. En general, si se tiene n proposiciones habrá 2^n posibles combinaciones diferentes de valores de verdad del conjunto de proposiciones.

Para la construcción de la tabla se va hallando los resultados parciales, desde lo más simple a lo más complejo. En el caso a) la tabla de verdad es la tabla 1.6. Iniciamos hallando los resultados correspondientes a $(p \Rightarrow q)$ dados en la columna 3, luego en las columnas 4 y 5 se registra las negaciones de q y p respectivamente, para hallar luego el resultado de la disyunción $(\sim q \vee \sim q)$, registrados en la columna 6 y finalmente usar los resultados de las columnas 3 y 6 para hallar $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \vee \sim q)$.

1	2	3	4	5	6	7
		$\Rightarrow$			$\vee$	$\Rightarrow$ $\Leftrightarrow$ $\vee$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

Tabla 6

Fuente: Propia.

En el caso b) la tabla 7 muestra su desarrollo.

1	2	3	4	5	6	7
			$\vee$ r	$\Rightarrow$ $\vee$ r	$\vee$ r $\Rightarrow$	$\Rightarrow$ $\vee$ r $\wedge$ $\vee$ r $\Rightarrow$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	F	F	V	F
F	V	V	V	V	F	F
F	V	F	V	V	F	F
F	F	V	V	V	F	F
F	F	F	F	V	V	V

Tabla 7

Fuente: Propia.

Tautologías

Una proposición compuesta se dice que es una tautología si es verdadera para todas las posibilidades de valores de verdad de las proposiciones que la componen. Esto significa que en la tabla de verdad, la columna correspondiente a la proposición, tiene solo valores verdaderos.

Ejemplo 1.8:

Verificar si la proposición $(p \wedge q) \Rightarrow p$ es una tautología.

Solución: la Tabla 1.8 es la tabla de verdad correspondiente.

p	q	$(p \wedge q)$	$(p \wedge q) \Rightarrow p$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

Tabla 8
Fuente: Propia.

Vemos que la columna que da los resultados de valores de verdad contiene solo valores verdaderos, por tanto la proposición es una tautología.

Implicaciones lógicas

Hemos estudiado antes lo que significa la operación $p \Rightarrow q$, correspondiente a la condicional o implicación de dos proposiciones. Ahora nos interesa tratar un tema directamente relacionado, el de implicaciones lógicas. Una proposición p implica lógicamente a una proposición q si y solo si la proposición $p \Rightarrow q$ es una tautología. Generalmente encontraremos que las proposiciones p y q son proposiciones compuestas.

Ejemplo: dadas dos proposiciones p y q, la proposición $\sim(p \vee q)$ implica lógicamente a la proposición $\sim p$, para verificarlo elaboramos la tabla de verdad de $\sim(p \vee q) \Rightarrow \sim p$ (Tabla 1.9) , esta se muestra a continuación y se ve que es una tautología.

p	q	$(p \vee q)$	$\sim(p \vee q)$	$\sim p$	$\sim(p \vee q) \Rightarrow p$
V	V	V	F	F	V
V	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V
F	F	F	V	V	V

Tabla 9
Fuente: Propia.

Implicaciones lógicas más comunes

En el campo de la lógica existe un conjunto de implicaciones lógicas notables o de uso común en procesos relacionados con inferencia lógica y procesos de demostración, estas implicaciones lógicas se relacionan a continuación y algunas serán propuestas al estudiante como ejercicio de repaso.

Dadas las proposiciones P y Q tenemos el siguiente conjunto de implicaciones lógicas.

- Ley de adición: $p \Rightarrow (p \vee q)$.
- Ley de simplificación: $(p \wedge q) \Rightarrow p$.
- Ley del modus ponendo ponens: $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$ esto significa que si tenemos un condicional y la afirmación del antecedente (ponendo), se puede afirmar el consecuente (ponens).
- Ley del *modus Tollendo Tollens*: $[(p \Rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$ esto significa que si tenemos un condicional y la negación del consecuente (Tollendo), se puede negar el antecedente (*Tollens*).
- Leyes del silogismo hipotético:

$$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$$

$$[(p \Leftrightarrow q) \wedge (q \Leftrightarrow r)] \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)$$

- Leyes del silogismo disyuntivo:

$$[\sim p \wedge (p \vee q)] \Rightarrow q$$

$$[p \wedge (\sim p \vee \sim q)] \Rightarrow \sim q$$

- Leyes del silogismo disyuntivo:

$$[(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s) \wedge (p \vee r)] \Rightarrow (q \vee s)$$

Equivalencia lógica

Dos proposiciones compuestas p y q son lógicamente equivalentes si y solo si tienen los mismos valores de verdad, es decir, si la proposición $p \Leftrightarrow q$ es una tautología. Para indicar que las proposiciones son lógicamente equivalentes escribimos $p \equiv q$.

Ejemplo 1.9:

Las leyes de Morgan establecen que la proposición $\sim(p \vee q)$ es equivalente a la proposición $\sim p \wedge \sim q$ y que $\sim(p \wedge q)$ es equivalente a $\sim p \vee \sim q$, es decir:

a) $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$

$b) \sim(p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$

Verificamos la parte a construyendo la tabla de verdad que se muestra a continuación (Tabla 1.10).

p	q	$(p \vee q)$	$\sim(p \vee q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$	$\sim(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$
V	V	V	F	F	F	F	V
V	F	V	F	F	V	F	V
F	V	V	F	V	F	F	V
F	F	F	V	V	V	V	V

Tabla 9

Fuente: Propia.

La verificación de la parte b se deja al estudiante como ejercicio de repaso.

Equivalencias lógicas más comunes

Al igual que sucede con las implicaciones lógicas, existe un conjunto notable de equivalencias lógicas relacionadas a continuación. La verificación de algunas de ellas se propone posteriormente como ejercicio de repaso.

Dadas las proposiciones P y Q tenemos el siguiente conjunto de implicaciones lógicas.

- Leyes de idempotencia:

$$(p \wedge p) \Leftrightarrow p$$

$$(p \vee p) \Leftrightarrow p$$

- Leyes conmutativas:

$$(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$$

$$(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$$

- Leyes asociativas:

$$[(p \wedge q) \wedge \mathrm{r}] \Leftrightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$$

$$[(p \vee q) \vee \mathrm{r}] \Leftrightarrow [p \vee (q \vee r)]$$

- Leyes distributivas:

$$[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$$

$$[p \vee (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$$

- Leyes de Morgan:

$$\sim(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$$

$$\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$$

- Ley contrarecíproca:

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$$

Proposiciones abiertas

Una proposición abierta es un enunciado $P(x)$ sobre una variable x que se convierte en una proposición cada vez que la variable x se sustituye por un valor particular x_o.

Ejemplo 1.10:

$P(x)$: $2x + 3 < 0$ es una proposición abierta. Se convierte en proposición para cada número x_0. En particular, $P(-2)$ es verdadera porque al remplazar a x por -2 $P(x)$ se convierte en $-1 < 0$, mientras que $P(0)$ es falsa.

Cuantificadores lógicos

Con frecuencia las proposiciones abiertas van acompañadas de expresiones que hacen referencia a que en todas las situaciones o en algunas se cumple una condición. Estas expresiones se conocen como cuantificadores, y están estrechamente relacionados con el valor de verdad de la proposición resultante. Los cuantificadores lógicos son los siguientes:

Cuantificador universal: $(\forall \boldsymbol{x})$ $\boldsymbol{o\ para\ todo\ x}$.

Este cuantificador se usa en general para indicar que para todo x se cumple $P(x)$, A manera de ejemplo, sabemos que todo número par es divisible por 2, usando el cuantificador universal se puede escribir $(\forall x\ par)(x\ es\ divisible\ por\ 2)$.

Cuantificador existencial: $(\exists \boldsymbol{x})$ $\boldsymbol{existe\ x\ o\ para\ algun\ x}$.

Es el cuantificador usado para indicar para algún x se cumple $P(x)$, Ejemplo, sabemos hay números pares que son divisibles por 3, usando el cuantificador existencial se puede escribir $(\exists x\ par)(x\ es\ divisible\ por\ 3)$.

1

Unidad 1

Conjuntos: conceptos y operaciones

Matemáticas para educación

Autor: Danilo Ariza

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina

MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Introducción

En la cartilla de la semana anterior tuvimos la oportunidad de estudiar las generalidades de la lógica, abordando inicialmente breves conceptos relacionados con la argumentación lógica, el concepto de proposición y las operaciones entre proposiciones simples que dan lugar a proposiciones compuestas. Una parte importante en el contexto de proposiciones es el de valor de verdad y las tablas de verdad que resumen las diferentes posibilidades de valor de verdad de una proposición compuesta dependiendo del valor de verdad de las componentes.

En esta semana dedicaremos nuestros esfuerzos al estudio de fundamentos propios del contexto de conjuntos, particularmente se presenta los primeros conceptos relacionados con la idea intuitiva de conjunto, la forma de referirse a ellos, las diferentes relaciones y las operaciones. Veremos que significa las operaciones de unión, intersección, diferencia y diferencia simétrica entre conjuntos. Finalizamos la cartilla abordando algunas de las propiedades fundamentales de estas operaciones.

Recomendaciones metodológicas

La lectura de esta cartilla constituye el punto de partida en el desarrollo del trabajo de la segunda semana del curso de matemáticas. Su contenido es fundamentalmente alrededor del tema de conjuntos. La propuesta metodológica en la que se basa el curso hace necesario tener esta lectura como referencia permanente y leerla de manera muy cuidadosa.

En esta cartilla parte del trabajo sobre conjuntos se presenta de forma sencilla e intuitiva de tal manera que sirva al futuro licenciado como base o insumo para su trabajo con estudiantes de educación primaria. Otra parte de la fundamentación sobre el tema de la semana se encuentra en otras fuentes, por lo que se insiste al estudiante en la necesidad de remitirse a las lecturas complementarias, donde encontrará más explicaciones y ejercicios resueltos que le permitirán ampliar las posibilidades de comprensión de las temáticas aquí tratadas.

Dado que siempre es importante escuchar y observar las explicaciones de expertos, se propone un conjunto de videos, en la sección video capsulas, en las cuales se presenta explicación y desarrollo de ejercicios sobre el tema de conjuntos. Se recomienda al estudiante la visualización de estos videos.

Además de lo anterior es muy recomendable que haya realizado propuestos en la sección de ejercicios de repaso de la primera semana, de tal manera que pueda afrontar con mayor propiedad los ejercicios propuestos de esta semana, la realización de los ejercicios propuestos como ejercicios de repaso brindará oportunidad de mejor preparación para la presentación del quiz de esta semana.

Desarrollo temático

Conjuntos: conceptos y operaciones

Noción de conjunto

El estudio de los conjuntos constituye una de las ramas básicas de la matemática, se encarga del estudio de las diferentes propiedades y relaciones entre los conjuntos. La primera idea formal de lo que hoy conocemos como Teoría de Conjuntos fue formulada por el matemático alemán George Cantor. El concepto de conjunto es realmente intuitivo y se podría definir como una «agrupación bien definida de objetos no repetidos y no ordenados»; así, se puede hablar de conjuntos de personas, ciudades, números, entre otros ejemplos.

Un conjunto está bien definido si se sabe con absoluta claridad si un determinado elemento pertenece o no al conjunto. Por ejemplo el conjunto de números naturales está bien definido, porque claramente se puede decir si un número dado es o no un número natural. El conjunto de personas buenas no está bien definido, debido a la subjetividad de "bondad de una persona" podría darse que una persona dada sea clasificada como buena o mala por observadores diferentes.

La noción de conjunto, como una colección de elementos se basa en las siguientes ideas:

- La colección de elementos a la que nos referimos debe estar bien definida: debe haber claridad si un elemento dad pertenece o no al conjunto.
- Cada elemento del conjunto se cuenta solo una vez:
- Tratándose de un conjunto, el orden en que nombremos sus elementos no altera el conjunto.

Desde el desarrollo de este curso se invita al estudiante a reflexionar sobre algunos ejemplos de conjuntos, atendiendo a las ideas que acabamos de exponer. Es importante también reflexionar sobre ejemplos que trataría con sus futuros estudiantes en el desarrollo de su labor docente.

Notación de conjuntos

Generalmente un conjunto se representa o denota mediante letras mayúsculas tales como $A, B, C, \dots X, Y, Z$, o cualquier otro símbolo que se considere apropiado según el contexto. A los elementos de un conjunto se acostumbra denotarlos con letras minúsculas, tales como $a, b, c, \dots x, y, z$ o incluso símbolos del alfabeto griego como $\delta,\ \alpha,\ \mu$, entre otros, sin que ello signifique que sólo sean letras, por ejemplo, si nos referimos al conjunto A cuyos elementos son los números que pueden obtenerse como resultado de lanzar un dado, el conjunto en este caso es:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Nótese que los elementos se escriben separados por comas y entre llaves $\{\}$.

Conjuntos finitos e infinitos

La clasificación de un conjunto como finito o infinito obedece a la cantidad de elementos que tenga. Un conjunto se dice que es finito (tiene fin) si está compuesto por un número determinado de elementos, por ejemplo, el conjunto de días de la semana. Por otra parte, se dice que un conjunto es infinito (no tiene fin) si la cantidad de sus elementos es ilimitada, es decir, nunca terminaríamos de nombrar todos sus elementos, por ejemplo, el conjunto de los números naturales es un conjunto infinito.

Determinación de conjuntos

La determinación de conjuntos corresponde a la forma en que nos referimos a ellos, una manera de hacerlo podría ser mediante el lenguaje habitual, sin embargo formalmente existen dos formas fundamentales descritas a continuación:

Determinación de un conjunto por extensión

Cuando se dice que un conjunto está dado por extensión lo que se indica es que el conjunto queda definido o establecido cuando se nombra o se dice cada uno de sus elementos, por ejemplo:

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

En el caso de conjuntos infinitos no es posible nombrar cada uno de los elementos, pero según el caso podría escribirse una expresión que represente la idea de representación por extensión, por ejemplo, el conjunto B de todos los números naturales se indica por extensión mediante:

$$B = \{0, 1, 2, \dots\}$$

La presencia de los puntos suspensivos indica que se continúa con la secuencia marcada por los elementos anteriores.

Determinación de un conjunto por comprensión

Un conjunto está dado o determinado por comprensión cuando se indica, sin lugar a ambigüedades las propiedades o características comunes que cumplen todos sus elementos, por ejemplo, para expresar por comprensión el conjunto $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ escribimos:

$$A = \{x \mid x \text{ } es \text{ } un \text{ } dígito \text{ } impar\}$$

Con la anterior expresión se indica que el conjunto A está formado por una colección de elementos tales que cada uno es un dígito impar, es decir, si se toma cualquier elemento x del conjunto A, tal elemento es un dígito impar, esto no significa que el conjunto A esté compuesto por un solo elemento.

Vale la pena aclarar que la característica común que cumple cada elemento de un conjunto dado por comprensión se puede expresar de diferentes maneras, por ejemplo, el conjunto de dígitos impares se puede escribir como:

$$A = \{x \mid x \text{ } es \text{ } un \text{ } número \text{ } impar \text{ } menor \text{ } que \text{ } 10\}$$

A continuación presentamos dos ejemplos adicionales de conjuntos dados en lenguaje cotidiano, por extensión y por comprensión.

Ejemplo 2.1:

En lenguaje cotidiano: $A = \ los\ números\ primos\ menores\ que\ 20$

Por extensión: $A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$

Por comprensión: $A = \{x\ |x\ es\ un\ número\ primo\ y\ x < 20\}$

Se recuerda al estudiante que los números primos son aquellos números que solamente se pueden dividir por ellos mismos y por el número 1.

Ejemplo 2.2:

En lenguaje cotidiano: $V = \ vocales\ de\ areandina$

Por extensión: $V = \{a, e, i\}$

Por comprensión: $V = \{x\ |x\ es\ una\ vocal\ de\ areandina\}$

Nótese en este ejemplo que, aunque la vocal a se repite en $areandina$, en el conjunto A solo es necesario escribirla una vez.

En este punto se invita al estudiante a pensar en la manera formal de expresar por comprensión algunos ejemplos de conjuntos propios de su contexto personal o académico, y algunos que considere hacen parte del ámbito escolar en el que a futuro se pueda desarrollar profesionalmente.

Relación de pertenencia

En apartes anteriores nos hemos referido a un conjunto como una colección o agrupación de elementos, con lo que tiene sentido hablar entonces de los elementos que componen un conjunto. Esta es una forma intuitiva de tratar lo que formalmente corresponde a la relación de pertenencia entre elementos y conjuntos. Tenemos entonces que, dado un conjunto A, se dice que un elemento x pertenece a A, si tal elemento hace parte de la colección de elementos que componen al conjunto A. para expresar simbólicamente la relación de pertenencia entre un elemento x y un conjunto A se emplea el símbolo ∈ el cual se lee "pertenece a". En caso que un elemento no pertenezca a un conjunto se utiliza el símbolo "∉", el cual se lee como "no pertenece a".

Ejemplo 2.3: si $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, tenemos que $1 \in A$ (1 pertenece a A), pero 6 ∉ A (6 no pertenece a A).

Ejemplo 2.4: si U es el conjunto de todos los países del mundo y S es el conjunto definido por comprensión mediante:

$$S = \{x \mid x \text{ es un país de Suramérica}\}$$

Entonces $Colombia \in S$; $Argentina \in S$; $Cuba \notin S$

Dos conjuntos especiales

En la teoría de conjuntos hay dos conjuntos muy importantes en todo el estudio de las relaciones y operaciones que hacen parte de este tema, son los conjuntos vacío y universal definidos a continuación:

Conjunto vacío

En un contexto dado, el conjunto vacío es todo conjunto al cual no pertenece elemento alguno. Generalmente se simboliza el conjunto vacío mediante ϕ o $\{\}$, se debe tener cuidado con no confundir el conjunto vacío con el conjunto $\{\phi\}$, ya que a este último pertenece un elemento.

Ejemplo 2.4 de conjunto vacío:

Para ver la valides de la idea de conjunto vacío, conviene considerar, por ejemplo el caso en que se nos pide hallar los valores de x para los cuales se cumple que $x^2 + 1 = 0$, aunque esta situación la estudiaremos en detalle en la unidad 3 (semana 6) podemos sin mayores dificultades ver que no hay valores reales de x que cumplan la condición especificada, en ese caso decimos que el conjunto de valores pedido es vacío.

Conjunto universal

En un ámbito de estudio específico relacionado con conjuntos, el conjunto universal es aquel al cual pertenecen todos los posibles elementos existentes considerados en el contexto de estudio. El conjunto universal se representa mediante la letra U. No se puede decir que existe un solo conjunto universal, dependiendo del contexto se podría tener diferentes conjuntos que se cataloguen como tal, por ejemplo, para niños de primero o segundo de primaria, el universal en situaciones numéricas bien puede ser el conjunto de números naturales, esto en razón a que a tan temprana edad los únicos números conocidos son los que sirven para contar. Otro ejemplo de conjunto universal cobra sentido cuando se comprende la existencia y razón de cantidades enteras negativas, en cuyo caso el conjunto de los enteros es el conjunto universal.

Relaciones de igualdad e inclusión

En el estudio de conjuntos encontramos un conjunto de relaciones que intuitivamente se resultan evidentes, las tratamos a continuación.

Relación de igualdad

De manera informal podemos decir que dos conjuntos A y B son iguales si tiene los mismos elementos, más formalmente esto se expresa mediante la siguiente definición:

Definición de igualdad entre de conjuntos: Dados dos conjuntos A y B, se dice que A es igual a B si cada elemento de A es también elemento de B y si cada elemento de B es también elemento de A, en símbolos:

$$A = B \; si \; y \; sólo \;\; \forall x \in A, \quad x \in B \quad y \quad \forall x \in B, \quad x \in A$$

La expresión $\forall \boldsymbol{x}$ se lee "$\boldsymbol{Para\ todo\ x}$"

Ejemplo 2.5:

Sean los conjuntos:

$$V = \{x \mid x \text{ } es \text{ } una \text{ } vocal \text{ } de \text{ } "areandina"\}$$

$$M = \{x \mid x \text{ } es \text{ } una \text{ } vocal \text{ } de \text{ } "matematica"$$

Vemos en este caso que los dos conjuntos V y M son iguales.

Relación de inclusión. Subconjunto de un conjunto

Se dice que un conjunto A está contenido en un conjunto B si todo elemento de A es también elemento de B, en este caso también se dice que A es un subconjunto de B, de manera formal se expresa mediante el siguiente concepto:

Definición de subconjunto: dados dos conjuntos A y B, se dice que A está contenido o incluido en B o que A es subconjunto de B, si cada elemento que pertenece a A, también pertenece a B, la representación simbólica es:

$A \subseteq B$ si y sólo $\forall x \in A,\ x \in B$

El símbolo $\subseteq$ se lee "$es\ subconjunto\ de$".

Propiedades de la relación de inclusión

La relación de inclusión cumple las siguientes propiedades importantes:

Dado un conjunto cualquiera A se tiene:

a) $\phi \subseteq A$: el conjunto A está contenido en cualquier conjunto.

b) $A \subseteq U$: cualquier conjunto está contenido en el conjunto universal.

c) $A \subseteq A$: cualquier conjunto está contenido en sí mismo.

Cardinalidad de un conjunto y conjunto potencia

Es muy común hablar de la cantidad de elementos de un conjunto, sin embargo el término formal para referirse a ello es el de cardinalidad. La cardinalidad de un conjunto A se representa mediante $\#(A)$.

Por otra parte se define el conjunto potencia de un conjunto A como el conjunto de todos los subconjuntos de A, el conjunto potencia de A se representa mediante $\wp(A)$. Atendiendo a las propiedades de la relación de inclusión, se puede ver que el conjunto vacío y el mismo conjunto A hacen parte del conjunto potencia de A.

Ejemplo 2.6: para el conjunto vacío, cuya cardinalidad es cero, el único subconjunto es el mismo conjunto vacío, entonces $\wp(\phi) = \{\phi\}\ y\ \#(\wp(\phi)) = 1$.

Ejemplo 2.7: si $A = \{5\}$, los subconjuntos de A son el conjunto vacío ϕ y el mismo conjunto A, por tanto:

$$\wp(A) = \{\phi,\ A\} = \{\{\ \},\ \{5\}\}\ y\ \#(\wp(A)) = 2$$

Ejemplo 2.8: si $A = \{2, 4\}$, además del conjunto vacío $\phi = \{\}$ y el mismo conjunto $A = \{2, 4\}$, los otros subconjuntos de A son $\{2\}$ y $\{4\}$, por tanto:

$$\wp(A) = \{\{\ \},\ \{2\}, \{4\}, \{2, 4\}\}\ y\ \#(\wp(A)) = 4$$

Ejemplo 2.9: sea el conjunto $K = \{2, 7, 9\}$, además del conjunto vacío $\phi = \{\}$ y el mismo conjunto $K = \{2, 7, 9\}$, los otros subconjuntos de K son $\{2\}, \{7\}, \{9\}, \{2, 7\}, \{2, 9\}\ y\ \{7, 9\}$ por tanto:

$$\wp(A) = \{\{\ \},\ \{2\}, \{7\}, \{9\}, \{2, 7\}, \{2, 9\}, \{7, 9\},\ \{2, 7, 9\}\ \}\ y\ \#(\wp(8)) = 8$$

En los ejemplos 2.6 a 2.9 vemos la siguiente correspondencia entre la cardinalidad de un conjunto y la cardinalidad de su conjunto potencia.

Para $\#(A) = 0, \quad \#(\wp(A)) = 1$

Para $\#(A) = 1, \quad \#(\wp(A)) = 2$

Para $\#(A) = 2, \quad \#(\wp(A)) = 4$

Para $\#(A) = 3, \quad \#(\wp(A)) = 8$

En general, si un conjunto A es finito y de cardinalidad $\#(A) = n$, es decir, si A tiene n elementos, su conjunto potencia es de cardinalidad 2^n, es decir, $\#(\wp(A)) = 2^n$, o equivalentemente, $\#(\wp(A)$ está formado por un total de 2^n subconjuntos.

Conjuntos disjuntos

Dados dos o más conjuntos es posible que tengan ninguno, uno o más elementos en común, si no tienen elementos en común se dice que son disjuntos, es decir, cuando no existen elementos que pertenezcan a todos.

Ejemplo 2.10: los conjuntos F y G dados a continuación son disjuntos porque no hay elemento alguno que pertenezca a los dos:

$$F = \{1, 3, 5, 7\}$$

$$G = \{2, 4, 6, 8\}$$

Partición de un conjunto

Al hablar de partición seguramente asociamos el término con la idea de partir o parcelar, esto es parte de lo que realmente corresponde. Una partición de un conjunto A es cualquier colección de subconjuntos de A para la cual todos los subconjuntos son disjuntos y en ellos se encuentran todos los elementos del conjunto. Un subconjunto puede tener varias particiones.

Ejemplo 2.11: si: si $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$, tenemos las siguientes particiones:

$$P_1 = \{\{1,3\}, \{5, 7, 9, 11\ 13\}\}$$

$$P_2 = \{\{1,3, 5\}, \{7, 9, 11\ 13\}\}$$

Por otro lado los subconjuntos $\{1,3\}, \{5, 7\}$ y $\{ 9, 13\}$ no forman una partición del conjunto A debido a que, si bien son conjuntos disjuntos, la unión de ellos no da como resultado el conjunto A, vemos que en ninguno de ellos está el elemento 11.

Si vemos los subconjuntos $\{1,3\}, \{5, 7, 9\}$ y $\{ 9, 11, 13\}$ tampoco forma una partición de A porque los conjuntos no son disjuntos. Finalmente, los subconjuntos $\{1,5\}, \{5, 7, 9\}$ y $\{ 9, 11, 13\}$ tampoco forman una partición del conjunto A porque ni los conjutos son disjuntos ni la unión de ellos corresponde al conjunto A.

Operaciones entre conjuntos

En esta sección nos disponemos a estudiar diferentes operaciones entre conjuntos, lo que es una de las partes más importante de esta rama de la matemática, Las operaciones entre conjuntos han sido una temática muy importante en la matemática durante muchísimo tiempo. A continuación definimos las operaciones entre conjuntos A y B contenidos en un conjunto universal U.

Unión entre conjuntos

Dados dos conjuntos A y B, la unión de ellos se representada mediante $A \cup B$, y corresponde al conjunto formado por todos aquellos elementos que cumplen la condición de pertenecer a A o pertenecer a B, o a ambos. Simbólicamente se representa mediante:

$$A \cup B = \{x / \, x \in A \vee x \in B\}$$

Lo anterior significa que si un elemento pertenece a la unión de dos conjuntos, debe pertenecer al menos a uno de los dos conjuntos.

Ejemplo 2.12: si tenemos los conjuntos

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$$

$$B = \{4, 5, 6,7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

La unión de ellos es:

$$A \cup B = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

Intersección entre conjuntos

Dados dos conjuntos A y B, su intersección se representa mediante $A \cap B$, y corresponde al conjunto formado por todos aquellos elementos que cumplen la condición de pertenecer a A y también pertenecen a B. Simbólicamente se representa mediante:

$$A \cap B = \{x / x \epsilon A \wedge x \epsilon B\}$$

Lo anterior significa que, si un elemento pertenece a la intersección de dos conjuntos, necesariamente pertenece a los dos conjuntos.

Ejemplo 2.13: si tenemos los conjuntos

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$$

$$B = \{4, 5, 6,7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

La unión de ellos es:

$$A \cap B = \{5, 7, 9, 11\}$$

Diferencia entre conjuntos

Dados dos conjuntos A y B, la diferencia $A - B$ corresponde al conjunto formado por todos aquellos elementos que pertenecen al conjunto A pero no pertenecen a B. Simbólicamente se representa mediante:

$$A - B = \{x / x \in A \wedge x \notin B\}$$

Es de aclarar que la diferencia $A - B$ no corresponde a los elementos que diferencian a los dos conjuntos. Si un elemento pertenece a la diferencia $A - B$ es porque pertenece A (al primero) y no pertenece B (al segundo). Es de anotar que en las operaciones de unión e intersección de conjuntos no es relevante el orden en que se plantea la operación, es decir $A \cup B = B \cup A$ y $A \cap B = B \cap A$, lo que significa que las operaciones unión e intersección son conmutativas, esto no sucede en el caso de la diferencia, puesto que $B - A$ es el conjunto de elementos que pertenecen a A y no pertenecen a B.

Ejemplo 2.14: considerando los conjuntos

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$$

$$B = \{4, 5, 6,7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

La diferencias $A - B$ y $B - A$ son:

$$A - B = \{1, 3, \}$$

$$B - A = \{4, 6, 8, 10, 12\}$$

Diferencia simétrica

Dados dos conjuntos A y B, la diferencia simétrica, simbolizada mediante $A \lozenge B$, corresponde al conjunto formado por todos aquellos elementos que pertenecen a A y no pertenecen a B y aquellos que pertenecen a B y no pertenecen a A. Si analizamos detalladamente observamos que la diferencia simétrica es el conjunto de elementos no comunes a los dos elementos, o equivalentemente, los elementos de la unión de A y B que no pertenencen a la intersección de A y B, simbólicamente se tiene:

$$A \lozenge B = \{x / x \in A \cup B \wedge x \notin A \cap B\}$$

Ejemplo 2.15: considerando nuevamente los conjuntos

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$$

$$B = \{4, 5, 6{,}7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

La diferencia simétrica $A \lozenge B$ es:

$$A \lozenge\ B = \{1, 3, 4, 6, 8, 10, 12\}$$

Complemento de un conjunto

La operación complemento se toma con relación al conjunto universal, dado un conjunto A su complemento simbolizado mediante A^c o A', es el conjunto de elementos del conjunto universal que no pertenecen a A, simbólicamente tenemos:

$$A^c = \{x /\ x \epsilon\ U\ y\ x\ \notin\ A\}$$

$$A^c = U - A$$

Ejemplo 2.16: supongamos que el conjunto universal es $U = \{1, 2, 3, \ldots 19, 20\}$ y $D = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$, entonces el complemento de D es:

$$D^c = \{2, 4, 6, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$$

Propiedades de las operaciones entre conjuntos

Las operaciones entre conjuntos cumplen un conjunto de reglas o propiedades que vale la pena tener presentes, estas propiedades se enuncian a continuación acompañando algunas de ellas con ejemplos que ilustran su valides.

Leyes de idempotencia:

Dado cualquier conjunto A se tiene

$A \cup A = A$

$A \cap A = A$

Es evidente que cualquier conjunto unido o intersectado con él da el mismo conjunto.

Leyes asociativas:

Dados tres conjuntos cualesquiera A, B, C se tiene:

$a)\ (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$b)\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Ejemplo 2.17: si tenemos los conjuntos

$$A = \{1, 3, 5, 7\}, \qquad B = \{4, 5, 6,7\}, \qquad C = \{2, 4\ 5, 6, 8\}$$

Hallemos el resultado de $(A \cup B) \cup C$, para ello primero encontramos $(A \cup B)$.

$$(A \cup B) = \{1, 3, 5, 7\} \cup \{4, 5, 6,7\} = \{1, 3, 4,5, 6, 7\}$$

Ahora, con el resultado de $(A \cup B)$ hallamos $(A \cup B) \cup C$, entonces:

$$(A \cup B) \cup C = \{1, 3, 4,5, 6, 7\} \cup \{2, 4\ 5, 6, 8\} = \{1,2, 3, 4,5, 6, 7,8\}$$

Por otro lado podemos también hallar $A \cup (B \cup C)$, pero primero debemos tener $(B \cup C)$.

$(B \cup C) = \{4, 5, 6,7\} \cup \{2, 4\ 5, 6, 8\} = \{2, 4\ 5, 6,7, 8\}$

Con este resultado, y con el conjunto A, podemos hallar $A \cup (B \cup C)$.

$$A \cup (B \cup C) = \{1, 3, 5, 7\} \cup \{2, 4\ 5, 6,7, 8\} = \{1, 2, 3\ 4\ 5, 6,7, 8\}$$

Con lo cual se verifica que los dos resultados son iguales. La verificación de la parte b) de la ley asociativa se deja al estudiante como ejercicio de repaso., con estos mismos

Leyes conmutativas:

Dados dos conjuntos cualesquiera A, B se tiene:

$A \cup B = B \cup A$

$A \cap B = B \cap A$

Leyes distributivas:

Dados tres conjuntos cualesquiera A, B, C se tiene:

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Ejemplo 2.18: Dados los conjuntos

$$A = \{1, 3, 5, 7\}, \qquad B = \{4, 5, 6,7\}, \qquad C = \{2, 4\ 5, 6, 8\}$$

Hallemos el resultado de $A \cup (B \cap C)$. Primero encontramos $(B \cap C)$..

$$(B \cap C) = \{4, 5, 6,7\} \cap \{2, 4\ 5, 6, 8\} = \{4, 5, 6\}$$

Ahora podemos hallar $A \cup (B \cap C)$.

$$A \cup (B \cap C) = \{1, 3, 5, 7\} \cup \{\ 4\ 5, 6\} = \{1, 3, 4,5, 6, 7\}$$

Ahora hallamos $(A \cup B) \cap (A \cup C)$, vemos que:

$$(A \cup B) = \{1, 3, 5, 7\} \cup \{4, 5, 6,7\} = \{1, 3, 4,5, 6, 7\}$$

$$(A \cup C) = \{1, 3, 5, 7\} \cup \{2, 4, 5, 6,8\} = \{1,2, 3, 4,5, 6, 7,8\}$$

Con lo que encontramos que:

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{1, 3, 4,5, 6, 7\} \cap \{1,2, 3, 4,5, 6, 7,8\} = \{1, 3, 4,5, 6, 7\}$$

Con este ejemplo se verifica la igualdad de $A \cup (B \cap C)$ y $(A \cup B) \cap (A \cup C)$. La verificación de la parte b) de la ley asociativa se deja al estudiante como ejercicio de repaso.

Leyes de identidad:

Dado cualquier conjunto A se tiene

$A \cup U = U$

$A \cap U = A$

$A \cup \phi = A$

$A \cap \phi = \phi$

Ley de involución:

Dado cualquier conjunto A se tiene

$(A^c)^c = A$

Leyes de complemento:

Dado cualquier conjunto A se tiene

$A \cup A^c = U$

$A \cap A^c = \phi$

$U^c = \phi$

$\phi^c = U$

Leyes de Morgan:

$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Ejemplo 2.19: dados los conjuntos

$$A = \{1, 3, 5, 7\}, \qquad B = \{4, 5, 6,7\}, \qquad U = \{1, 2, 3, \ldots, 11, 12\}$$

Verificar la igualdad $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

Para verificar la igualdad hallamos primero $(A \cup B)^c$ Tenemos que

$$(A \cup B) = \{1, 3, 5, 7\} \cup \{4, 5, 6,7\} = \{1, 3, 4,5, 6, 7\}$$

Entonces:

$$(A \cup B)^c = \{2, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

Ahora hallamos $A^c \cap B^c$.

$$A^c = \{2, 4, 6, 8, 9,10, 11. 12\}$$

$$B^c = \{1, 2, 3, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

$$A^c \cap B^c = \{2, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

Con este ejemplo se verifica la igualdad de $(A \cup B)^c$ y $A^c \cap B^c$. La verificación de la parte b) de las leyes de Morgan se deja al estudiante como ejercicio de repaso.

Diagramas de Venn

Los diagramas de ven son elementos empleados en la representación gráfica de conjuntos y sus operaciones. El conjunto universal U se representa comúnmente por un rectángulo, cualquier otro conjunto se representa con un círculo. Una operación se representa mediante el sombreado de los elementos del conjunto resultante de la operación. A continuación se ejemplifica las operaciones de conjuntos no disjuntos y las operaciones $A \cup B, A \cap B, A - B$ y A^c

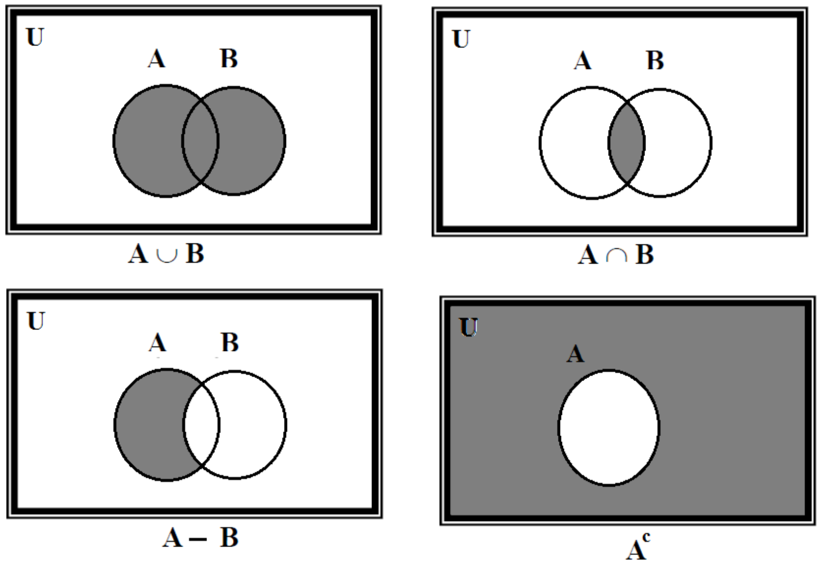


Figura 1: Representación de operaciones entre conjuntos mediante diagramas de Venn
Fuente: Propia.

Unidad 2

El conjunto de los números reales

Matemáticas para educación

Autor: Danilo Ariza

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina

MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Introducción

Hasta antes de esta parte de nuestro curso de Matemáticas hemos abordado en los aspectos introductorios de esta área del conocimiento, hemos abordado principios básicos de lógica y conjunto, que constituyen parte importante del desarrollo de cualquier curso de matemática. Sin embargo, el diseño del curso considera la necesidad de enfrentarse al estudio de temas relacionados con el álgebra básica, para lo cual resulta imprescindible analizar el conjunto de los números reales, los diferentes subconjuntos que lo componen, las operaciones realizables y sus propiedades. Dado que este curso va dirigido a estudiantes de Licenciatura en Educación no especializada en matemática, conviene realizar una presentación de contenidos que permitan al estudiante hacerse a un panorama general de la matemática escolar, afianzar los conocimientos previos sobre el área, de tal manera que ello pueda servir como una preparación básica para quienes posiblemente deban impartir esta área del conocimiento a nivel de educación primaria.

En esta semana nos disponemos a abordar el estudio de los números reales, estudiando primero el conjunto de los números naturales y sus operaciones, el conjunto de los números enteros, los racionales e irracionales. Todos estos conjuntos constituyen en sí lo que conocemos como conjunto de los números reales. Estudiando las operaciones daremos tratamiento a las propiedades que cumplen estas operaciones, lo que en últimas resulta ser las bases sobre las que se desarrolla el álgebra básica que estudiaremos en la unidad 3.

Recomendaciones metodológicas

Tal como lo hicimos en las dos semanas anteriores, en esta semana recomendamos al estudiante la detallada lectura de esta cartilla, en la cual se trata las temáticas relacionadas con los diferentes subconjuntos que forman el conjunto de los números reales. Para la descripción de los diferentes conjuntos, asociamos los mismos con la necesidad que hemos tenido de ellos a lo largo de nuestro desarrollo individual como estudiantes, por ejemplo al comenzar a estudiar solo tenía sentido para nosotros el uso de números que sirvieran para contar, pero, si está leyendo estas notas, ya habrá tenido la oportunidad de enfrentarse a situaciones en las cuales cobra sentido la existencia de números negativos, decimales, irracionales, entre otros. Además de la lectura de los contenidos aquí plasmados, el adecuado acercamiento a la comprensión de los temas requiere del apoyo de recursos adicionales aquí ofrecidos. Entre los recursos a los que nos referimos se encuentran las lecturas complementarias donde se encuentra ejercicios resueltos sobre las temáticas tratadas. Se llama nuevamente la atención en el sentido de aprovechar los recursos de video, donde se trata, mediante la solución y explicación de ejercicios, la aplicabilidad de los temas bajo estudio.

Reiteramos la importancia de desarrollo de los ejercicios propuestos en la sección de ejercicios de repaso, con lo cual se puede enfrentar en mejores condiciones el desarrollo de los ejercicios propuestos en el taller de esta semana y la presentación del quiz de evaluación.

Desarrollo temático

El conjunto de los números reales

Quizá para algunos este significativamente alejado en el tiempo los primeros años escolares, desde los cuales y con el paso de los años, todos hemos tenido, y seguimos teniendo, la oportunidad de tratar situaciones en las que se requiere el uso de elementos pertenecientes a diferentes conjuntos numéricos y las operaciones que sobre ellos se puede realizar, sin embargo, en ocasiones no hemos sido lo suficientemente conscientes de las relaciones de inclusión que entre ellos existen, y podemos presentar la tendencia a aplicar, a las operaciones dentro de un conjunto, propiedades que no corresponden, es por ello que se el desarrollo de esta cartilla se orienta, más que a procesos operativos, hacia el análisis de algunos principios y conceptos fundamentales, así como la aclaración de su ámbito de aplicación, ello con el fin de evitar errores frecuentes a la hora de realizar cálculos.

Conjuntos numéricos

Los diferentes conjuntos numéricos que nos disponemos a estudiar son: conjunto de números naturales, números enteros, números racionales, números irracionales y números reales. Algunas de las operaciones que podemos definir sobre estos conjuntos, así como los elementos que intervienen en ellas son:

Operación	Operandos	Resultado
Adición	sumandos	Total o suma
Sustracción o resta	Minuendo y sustraendo	Diferencia
Multiplicación	Factores	Producto
División	Dividendo y divisor	Cociente (y residuo en división entera)
Potenciación	Base (Elevada a un exponente)	Potencia
Radicación	Radicando (asociado a un índice)	Raíz

Tabla 1

Fuente: Propia.

A continuación presentamos una descripción genérica de cada conjunto y posteriormente nos centraremos en las operaciones que se pueden realizar y las propiedades de las mismas.

Conjunto de Números Naturales $\mathbb{N}$

Intuitivamente se puede ver como el conjunto de números usado para contar objetos, es un conjunto infinito y normalmente se denota mediante:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots, \}$$

Representación de números naturales en una semirrecta

Resulta conveniente tratar la representación de números naturales en una recta numérica, tal representación es de significativa ayuda al estudiar el significado de las operaciones entre números naturales, principalmente si hemos de contar con una estrategia básica para compartir su conocimiento a estudiantes de cursos primarios. La representación consiste en tomar una semirrecta y asignar el origen de la misma al número cero, luego ubicar una secuencia de puntos sobre la semirrecta de tal manera que la distancia entre pares de puntos consecutivos sea la misma, al segmento que une puntos consecutivos le llamamos segmento unidad y la distancia de separación se le denomina medida unidad o simplemente unidad. El punto que sigue al origen de la recta se asigna al número 1, el que sigue se asigna al número 2 y así sucesivamente.

Figura 1: Representación geométrica de números naturales
Fuente: Propia.

En la anterior representación vale destacar que el elemento geométrico usado, la semirrecta, tiene un punto de origen que marca el inicio del conjunto de números naturales, se destaca también que pese a que el conjunto de números naturales es infinito, también hay una infinidad de puntos que no están asociados con ningún número natural.

Por otro lado, es importante tener en cuenta que, si bien las anteriores ideas corresponden a la representación de números naturales en la semirrecta, también se debe tener en cuenta que en situaciones prácticas se debe tener en cuenta el contexto en que estemos trabajando, por ejemplo, si necesitamos representar números como 7000, 7500, 8000, no sería conveniente hacerlo desde cero y tomando unidades sucesivas, debemos valernos del sentido común o de convenciones apropiadas. La figura 2 muestra una adecuada representación de 7000, 7500, 8000.

Figura 2. Representación geométrica de números naturales
Fuente: Propia.

Conjunto de Números Enteros $\mathbb{Z}$

Quizá el estudiante recuerde que en los dos primeros años de estudios primarios el universo numérico conocido se limitaba a los números naturales, recordará también que en ese entonces no tenía sentido una resta o sustracción en la cual el minuendo era menor que el sustraendo, decíamos ¡eso no se puede! Sin embargo la realidad nos marcó después que no es que no se pueda, sino que el conjunto de números que estaban el campo de nuestro conocimiento no era suficiente para afrontar la situación.

Hoy sabemos que una resta puede dar como resultado un número negativo, pero un niño bien podría preguntarse ¿qué otros números podríamos necesitar además de los que sirven para contar? Una respuesta la podemos encontrar en situaciones reales que evidencian la validez de hablar de números negativos, por ejemplo, cuando necesitamos expresar matemáticamente una temperatura de 4 grados usamos el número natural “4”, pero una de 4 grados bajo cero se representa mediante “ -4”, por otro lado un sobregiro de 100000 se representa con “ -100000”, la posición de un que está 3 metros por debajo de la superficie del agua se representa con “ -3”, números como estos se conocen como números enteros negativos y no hay razón para pensar que no existe un número negativo a asociado con cada número natural diferente de cero.

Aunque posteriormente trataremos el tema de ecuaciones de manera más formal, podemos adelantarnos a ver que otra situación en la cual se hace uso de números enteros negativos surge, por ejemplo, si se quiere saber el valor de x tal que $x + 7 = 5$.

La unión del conjunto de números naturales, y los números negativos da lugar al conjunto de números enteros. El conjunto de números enteros es un conjunto infinito y normalmente se escribe mediante:

$$\mathbb{Z} = \{, \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, \}$$

Representación de números enteros en una recta

Al igual que los números naturales, los números enteros se pueden representar geométricamente, pero en este caso se requiere una recta en lugar de una semirrecta. La representación también sirve de ayuda al estudiar el significado de operaciones de suma y resta entre números enteros. La figura 3 muestra la idea de representación de los números enteros en la recta numérica.

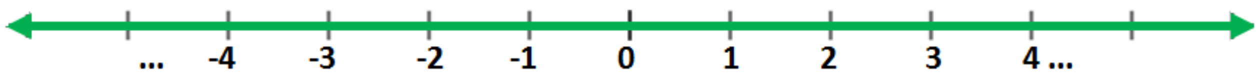


Figura 3. Representación de números enteros en la recta numérica
Fuente: Propia.

Conjunto de Números Racionales Q

Con el fin de ilustrar alguna de las razones de la existencia de números enteros negativos, antes nos hemos valido de la necesidad de resolver una ecuación. En este caso queremos hallar un valor de x de tal manera que $3x - 5 = 2$, aquí vemos que la solución no la podemos encontrar ni en el conjunto de números naturales, ni en el de los números enteros, lo que es una situación que explica la necesidad de utilizar otro conjunto numérico más amplio, el conjunto más amplio en este caso es el conjunto de números racionales, denominados así por corresponder a la razón (o división) de dos números enteros.

La solución al problema antes planteado se puede escribir como $x = 7/3$, o $X = 14/6$ o cualquier otra forma equivalente. Notamos que $7/3$ es la simplificación de $14/6$, y $7/3$ es irreducible (no puede simplificarse más).

El conjunto de números racionales suele representarse mediante:

$$Q = \left\{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, \qquad b \neq 0\right\}$$

Nótese que en la formulación que define el conjunto de números racionales se hace ver la necesidad de que el denominador b sea diferente de cero ¿por qué? Para dar respuesta al anterior interrogante debemos tener en cuenta cual es el razonamiento que realizamos, consideremos los siguientes casos:

Si queremos, por ejemplo, realizar la división $\frac{24}{8}$, lo que realmente queremos hallar es un número x tal que al multiplicar x por el divisor 8 se obtenga 24 como resultado, es decir:

$$\frac{24}{8} = x, lo\ que\ equivale\ a\ decir\ 24 = (8)(x), es\ claro\ que\ x = 3$$

Si en cambio intentamos realizar la división $\frac{24}{0}$ tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{24}{0} &= x, es\ decir\ hallar\ x\ tal\ que\ 24 \\ &= (0)(x), en\ este\ caso\ no\ podemos\ tal\ número\ \ x\end{aligned}$$

Por tanto no tiene sentido intentar realizar una división por cero.

¡La división por cero no existe o no está definida!

Representación de números racionales en una recta

Si queremos representar el número $\frac{3}{4}$, en el cual el numerador es menor que el denominador y por tanto el cociente menor que 1, podemos dividir en cuatro partes iguales el segmento que une al 0 y al 1, el punto correspondiente a $\frac{3}{4}$, en la recta numérica, es el tercero de la secuencia, tal como se muestra en la figura 3.4. Nótese que en este caso el segmento unidad tiene una medida diferente a la de casos anteriores.

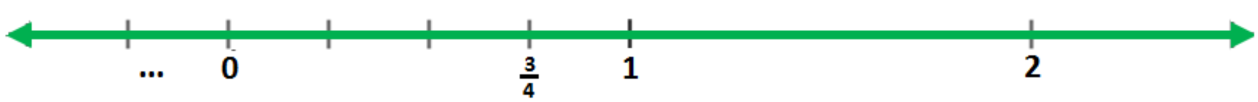


Figura 4. Representación de números racionales en la recta numérica.

Fuente: Propia.

Si en cambio queremos representar el número $\frac{9}{4}$, en el cual el numerador es mayor que el denominador y por consiguiente el cociente es mayor que 1. Aquí el cociente es mayor que 2 pero menor que 3, por tanto dividimos en cuatro partes iguales el segmento que une al 2 y al 3, el punto correspondiente a $\frac{3}{4}$, en la recta numérica, es el primero de la secuencia, tal como se muestra en la figura 3.5.

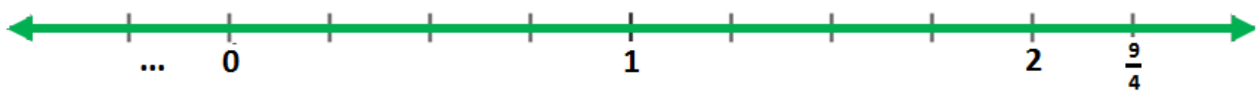


Figura 5. Representación de números racionales en la recta numérica.
Fuente: Propia.

Para representar números racionales negativos se procede de forma similar, pero hacia la izquierda.

Conjunto de Números Irracionales I

Cualquiera, de forma desprevenida, podría decir que con los conjuntos numéricos hasta ahora descritos es suficiente para cuantificar cualquier situación posible, sin embargo, al intentar hallar el valor de x que satisfaga $x^2 - 2 = 0$, obtenemos $x = \sqrt{2}$, nos encontramos con la imposibilidad de hallar la solución en los conjuntos de números naturales, enteros y racionales, es decir. Este es un resultado que no se puede expresar como una razón, por tanto a este tipo de números se les llama números irracionales. Otros números irracionales son por ejemplo $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}$ y el muy importante número π.

Representación de Números Irracionales en una recta

Un número irracional tiene infinitas cifras decimales, por lo que al intentar representarlos gráficamente no es posible ir agregando décimas, centésimas, milésimas y así sucesivamente. También sabemos que los números irracionales no se pueden representar como una razón entre dos enteros, por tanto no se puede usar el procedimiento de representación asociado con números racionales. Con lo anterior fácilmente podríamos indicar que los números irracionales no se pueden representar en una recta numérica, sin embargo hay un procedimiento basado en geometría que permite ubicar irracionales correspondientes a raíz cuadrada. Por ejemplo si queremos representar el número $\sqrt{2}$, inicialmente representamos el número 1 y sobre el punto correspondiente trazamos un segmento de una unidad, con lo cual se puede trazar un triángulo rectángulo como se muestra en la figura 3.6a. la longitud de la hipotenusa del triángulo

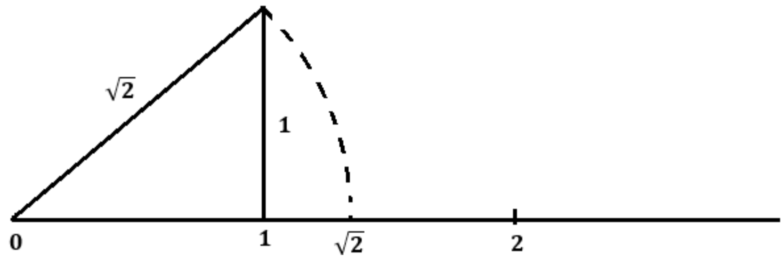


Figura 6: Representación de números irracionales en la recta numérica
Fuente: Propia.

Conjunto de Números Reales $\mathbb{R}$

El conjunto de números reales corresponde a la unión de los conjuntos de números racionales e irracionales.

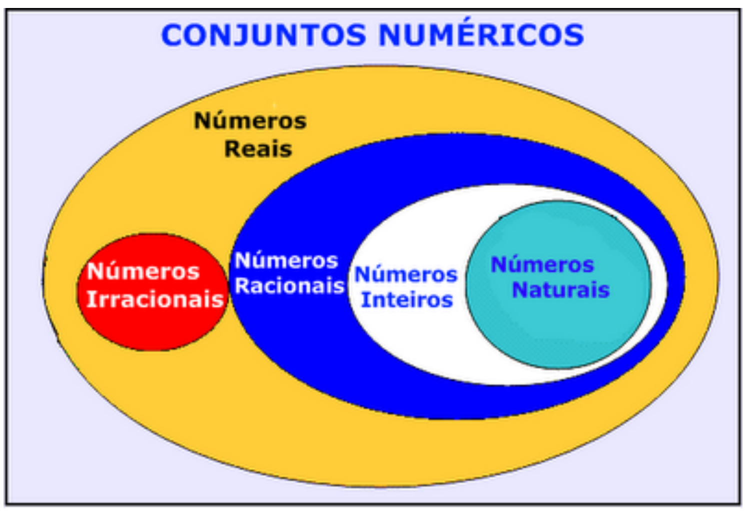


Figura 7. Relaciones de inclusión entre los diferentes conjuntos numéricos.
Fuente: http://cutandpastematematica.blogspot.com.co/2013/12/unidad-1-conjuntos-numericos_28.html

En este punto vale la pena resaltar que todo número natural es un número entero, pero no es cierto que todo entero sea un número natural, de igual manera, cualquier número entero x es un número racional, debido a que x se puede escribir como $\frac{x}{1}$, pero no todo racional es entero.

Antes de seguir avanzando en algunos procesos operativos relacionados con el conjunto de números reales y las operaciones entre ellos, conviene presentar el fundamento de todo ello a través de un conjunto de axiomas (un axioma es una es una verdad tan evidente que no necesita ser demostrada) que definen las propiedades del conjunto y sus operaciones, es decir, son el soporte o base sobre la que se levanta todo el edificio matemático. A continuación se inicia la presentación de los axiomas.

Axiomas de los números reales

En este curso presentamos los axiomas de los números reales, se presentan tales axiomas considerando la operación de adición " $+$ " y la multiplicación ".", en algunos casos usaremos paréntesis para representar la multiplicación. Los axiomas son los siguientes:

Axiomas algebraicos

Los axiomas algebraicos son el soporte de diferentes principios algebraicos sobre los números reales, tales como regla de signos, reglas de signos de agrupación. Se asume que si $a\ y\ b$ son dos números reales, entonces el resultado de la suma y el producto también es un número real, esto es lo que se conoce como propiedad de clausura o cerradura. El conjunto de axiomas algebraicos, así como el nombre que corresponde a cada axioma se muestra a continuación:

$Axioma\ 1. Propiedad\ de\ clausura\ o\ cerradura\ de\ la\ adición.$

$\forall\ a, b\ \in \mathbb{R}, \qquad a + b\ \in \mathbb{R}$

El axioma 1 indica que la suma de cualquier par de números reales es también un número real.

$Axioma\ 2. Propiedad\ asociativa\ de\ la\ adición:$

$\forall\ a, b, c\ \in \mathbb{R}, a + (b + c) = (a + b) + c$

Es importante tener en cuenta que solo podemos sumar dos números a la vez, pero cuando se requiere sumar tres o más números se pueden agrupar o asociar de cualquier manera, es decir si queremos sumar los números a, b y c, podemos sumar a a el resultado de la suma $b + c$, o podemos sumar a la suma $a + b$ el número c, los resultados obtenidos son los mismos.

$Axioma\ 3. Propiedad\ conmutativa\ de\ la\ adición$:

$\forall\ a, b\ \in \mathbb{R}, a + b = b + a.$

El axioma 3 indica que al sumar dos números reales cualesquiera, no interesa el orden en que se realice la suma, el resultado siempre es el mismo.

$Axioma\ 4. Existencia\ de\ elemento\ neutro\ de\ la\ adición$:

$\forall\ a\ \in \mathbb{R}, a + 0 = 0 + a = a$

Dado lo que establece el axioma 4, se dice que el número real 0 es el elemento neutro de la adición, se llama elemento neutro porque, al sumar 0 a cualquier número a, la suma no da un valor diferente de a.

$Axioma\ 5. Existencia\ de\ opuesto\ o\ inverso\ aditivo$:

$\forall\ a\ \in \mathbb{R}, \exists\ (-a)\ \in \mathbb{R}\ tal\ que\ a + (-a) = 0$

Este axioma establece que para cualquier número real a podemos hallar un elemento opuesto $(-a)$ de tal manera que al sumar a y su opuesto $(-a)$ el resultado siempre es 0.

$Axioma\ 6. Propiedad\ de\ clausura\ o\ cerradura\ de\ la\ multiplicación.$

$\forall\ a, b\ \in \mathbb{R}, \qquad a. b\ \in \mathbb{R}$

El axioma 1 indica que el producto obtenido al multiplicar cualquier par de números reales es también un número real.

$Axioma\ 7. Propiedad\ asociativa\ de\ la\ multiplicación:$

$\forall\ a, b, c\ \in \mathbb{R}, a(b. c) = (a. b). c$

Similar a lo que sucede con la suma, en un paso solo es posible multiplicar dos números reales, para multiplicar tres de ellos se puede multiplicar el primero por el producto de los otros dos, o el producto de los dos primeros por el tercero, el resultado siempre es el mismo.

$Axioma\ 8. Propiedad\ conmutativa\ de\ la\ multiplicación:$

$\forall\ a, b\ \in \mathbb{R}, a + b = b + a$

El anterior axioma dice al multiplicar un par de números reales, no interesa el orden en que realizamos la operación, es decir, el orden de los factores no altera el producto.

$Axioma\ 9. Existencia\ de\ elemento\ neutro\ de\ la\ multiplicación.$

$\forall\ a \in \mathbb{R}, \qquad a. 1 = 1. a = a$

En este caso se dice que el número real 1 es el elemento neutro de la multiplicación, porque, al multiplicar 1 por cualquier número a, el producto no es un valor diferente de a.

$Axioma\ 10. Existencia\ de\ recíproco\ o\ inverso\ multiplicativo$:

$$\forall\ a \neq 0\ \in \mathbb{R}, \exists\ \frac{1}{a}\ \in \mathbb{R}\ tal\ que\ a.\frac{1}{a} = 1$$

El axioma 10 dice que para cualquier número real $a \neq 0$ podemos hallar un elemento $\frac{1}{a}$, llamado inverso multiplicativo o recíproco de a de tal manera que al multiplicar a por su recíproco $\frac{1}{a}$ el resultado siempre es 1.

$Axioma\ 11. Propiedad\ distributiva$:

$$\forall\ a, b, c\ \in \mathbb{R}, a.(b + c) = a.b + a.c$$

Este axioma que describe la propiedad distributiva indica que el producto de un número real por la suma de otros dos es igual a la suma de los productos del primer número por cada uno de los dos que se suman.

Axiomas de orden

Los axiomas de orden son un conjunto de propiedades que se refieren a las ideas de ordenación entre números reales en el sentido de que un número real es mayor, menor o igual que otro número real. Específicamente, si tenemos dos números reales a y b diferentes tendremos una relación de desigualdad entre ellos, conocidas como relaciones “$mayor\ que$”, simbolizada con " $>$ " y "$menor\ que$" simbolizada con " $<$ ", si escribimos $a < b$ estamos indicando que "$a\ es\ menor\ que\ b$", mientras que $a > b$ significa que "$a\ es\ mayor\ que\ b$". Continuamos con la numeración anterior para el conjunto de axiomas relacionados con el orden entre números reales:

$Axioma\ 12$: $propiedad\ de\ tricotomía$.

$\forall\ a, b\ \in \mathbb{R}\ se\ cumple\ una\ y\ solo\ una\ de\ las\ siguientes\ situaciones$

$i)\ a < b$ $\quad$ $ii)\ a = b$ $\quad$ $iii)\ a > c$

$Axioma\ 13$: $propiedad\ de\ transitividad\ de\ la\ desigualdad$.

$\forall\ a, b, c\ \in \mathbb{R}\ \ si\ a < b\ y\ b < c, entonces\ a < c$.

$Axioma\ 14$:.

$\forall\ a, b, c\ \in \mathbb{R}\ \ si\ a < b, entonces\ a + c < b + c$.

Este axioma indica que si a cada uno de los miembros de una desigualdad de suma una misma cantidad, se conserva el sentido de la desigualdad.

$Axioma\ 15$:.

$\forall\ a, b, c\ \in \mathbb{R}\ \ si\ a < b, y\ c > 0\ entonces\ a.c < b.c$.

Con la anterior propiedad se ve que si cada uno de los miembros de una desigualdad de multiplica por una cantidad positiva, se conserva el sentido de la desigualdad.

$Axioma\ 16$:.

$Si\ a, b, c\ \in \mathbb{R}\ \ con\ \ a < b, y\ c < 0\ entonces\ a.c > b.c$.

Esta importante propiedad indica que propiedad se ve que si cada uno de los miembros de una desigualdad de multiplica por una cantidad negativa se invierte el sentido de la desigualdad, para ilustrarlo consideremos el siguiente ejemplo: $3 < 5$, si multiplicamos cada número por $c = -2$ se tiene como resultados -6 y -10 y se ve que efectivamente desigualdad se invierte porque $-6 > -10$

Jerarquía de las operaciones

Es frecuente encontrar diferentes operaciones en una misma expresión matemática, frente a lo cual se requiere tener absoluta claridad sobre el orden en que se debe ejecutar, si esto no es así se podría cometer serios errores, por ejemplo, si tenemos una operación como $4 + 2 * 5$, la falta de claro conocimiento nos llevaría a dudar si el resultado es 30 o 14, pero en matemática existe un conjunto de reglas que establecen que operaciones se realizan primero, en este caso se realiza primero la multiplicación y luego la adición, a estas reglas se les conoce como jerarquía de operaciones, y simplemente establece el orden en el cual deben realizarse las operaciones presentes en una expresión. La jerarquía de las operaciones, de mayor a menor es la siguiente:

Potenciación y radicación
Multiplicación y división
Adición y sustracción

Los siguientes ejemplos ilustra la aplicación de este principio:

$$7 + 12 * 3 \div 4 = 7 + \frac{12 * 3}{4} = 7 + \frac{36}{4} = 7 + 9 = 16$$

$$5 + \sqrt{4 + \frac{10}{2}} = 5 + \sqrt{4 + 5} = 5 + \sqrt{9} = 5 + 3 = 8$$

Signos de agrupación

Los signos de agrupación de uso común son los paréntesis (), los corchetes [] y las llaves {}, estos signos son utilizados con fines de organización y para modificar la jerarquía de la operaciones, es decir, sin importar cuál de las operaciones originalmente tiene mayor preferencia, se desarrolla primero las operaciones que se encuentran dentro de los signos de agrupación. El siguiente ejemplo ilustra la secuencia de pasos para llegar al resultado en una expresión con varios agrupamientos.

$$15+\{-2-[3+(8-10)-4]\}+9-\{17-[4-(5+4)]-9\}$$

$$=15+\{-2-[3+(-2)-4]\}+9-\{17-[4-(9)]-9\}$$

$$=15+\{-2-[3-2-4]\}+9-\{17-[4-9]-9\}$$

$$=15+\{-2-[-3]\}+9-\{17-[-5]-9\}$$

$$=15+\{-2+3\}+9-\{17+5-9\}$$

$$=15+\{1\}+9-\{13\}$$

$$=15+1+9-13$$

$$=12$$

Principios relativos a los exponentes. Potenciación y radicación

Si x es un número real y n, es un entero, x^n representa la n-sima potencia de x y corresponde al producto de la multiplicación que toma a x como factor n veces, por ejemplo, para el caso en que $x = 3$ y $n = 4$, tenemos:

$$x^n = (3)^4 = (3)(3)(3)(3) = 81$$

Si $x = -2$ y $n = 5$, encontramos entonces que:

$x^n = (-2)^5 = (-2)(-2)(-2)(-2)(-2) = -32$

Si $x = \frac{2}{3}$ y n=3, entonces:

$$x^n = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{8}{27}\right)$$

Exponentes fraccionarios: Si x es un número real y n, es un entero, positivo se tiene que:

$$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$$

Con lo anterior vemos la estrecha relación existente entre exponentes y radicales, a continuación presentamos en la tabla 3.5 un resumen de propiedades relacionadas con la potenciación y la radicación y finalizamos la presentación de contenidos de esta semana, en los diferente recursos ofrecidos se presenta ejercicios resueltos, ejercicios para resolver, entre otros elementos de apoyo.

	Propiedad	Comentario	Ejemplo.
P1	$\forall x \in \mathbb{R}$ $x^m . x^n = x^{m+n}$	El producto de potencias de igual base equivale a la base elevada a la suma de los exponentes.	$(2)^5 . (2)^3 = (2)^8$ $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^5$
P2	$\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0$ $\boldsymbol{x^0 = 1}$	Todo número, diferente de cero, elevado a la cero equivale a 1.	$(2)^0 = 1,$ $(-3)^0 = 1$
P3	$\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0,$ $\boldsymbol{x^{-n} = \frac{1}{x^n}}$	Una potencia con exponente negativo equivale al recíproco de la base elevada al exponente positivo	$\boldsymbol{5^{-2} = \frac{1}{5^2}}$ $\boldsymbol{3^{-1} = \frac{1}{3}}$
P4	$\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0$ $\boldsymbol{\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}}$	El cociente de potencias de igual base es igual a la base elevada a la diferencia de exponentes en el orden dado. La base no puede ser cero.	$\boldsymbol{\frac{4^2}{4^5} = 4^{2-5} = 4^{-3}}$ $\boldsymbol{\frac{(-5)^6}{(-5)^2} = 5^4}$
P5	$\forall x \in \mathbb{R}$ $\boldsymbol{(x^m)^n = x^{m.n}}$	La potencia de una potencia es igual a otra potencia, con la misma base y el exponente igual al producto de exponentes originales.	$(4^2)^3 = 4^6$
P6	$\forall x, y \in \mathbb{R},$ $\boldsymbol{(x.y)^n = x^n . y^n}$	La potencia de un producto es igual al producto de las potencias.	$[(4)(3)]^n$ $= (4)^3 . (3)^3$
P7	$\forall x, y \in \mathbb{R}, y \neq 0,$ $\boldsymbol{\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}}$	La potencia de un cociente es igual al cociente de las potencias. El denominador debe ser diferente de cero.	$\boldsymbol{\left(\frac{4}{3}\right)^5 = \frac{4^5}{3^5}}$
P8	$\forall x, y \in \mathbb{R}, x.y \neq 0$ $\boldsymbol{\left(\frac{x}{y}\right)^{-n} = \left(\frac{y}{x}\right)^n}$	Una fracción elevada a un exponente negativo equivale al recíproco de la fracción elevado al respectivo exponente positivo.	$\boldsymbol{\left(\frac{4}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{4}\right)^2}$
P9	$\forall x \in \mathbb{R},$ $\boldsymbol{x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}}$	Una base elevada a un exponente fraccionario equivale a una raíz, el índice de la raíz es el denominador del exponente y el radicando es la base elevada al numerador.	$\boldsymbol{4^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4^2}}$ $\boldsymbol{5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}}$
P10	$\forall x \in \mathbb{R}$ $\boldsymbol{\sqrt[n]{x.y} = \sqrt[n]{x} . \sqrt[n]{y}}$	La raíz $n - sima$ de un producto es igual al producto de las raíces.	$\boldsymbol{\sqrt[3]{(4)(3)} =}$ $\boldsymbol{\sqrt[3]{4} . \sqrt[3]{3}}$
P11	$\forall x \in \mathbb{R},$ $\boldsymbol{\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}}$	La raíz $n - sima$ de un cociente es igual al cociente de las raíces, Es necesario que el denominador debe ser diferente de cero.	$\boldsymbol{\sqrt[3]{\frac{4}{3}} = \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3}}}$
P12	$\forall x \in \mathbb{R},$ $\boldsymbol{\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[m.n]{x}}$	La raíz de una raíz es igual a una raíz con el mismo radicando y cuyo índice es el producto de los índices.	$\boldsymbol{\sqrt[3]{\sqrt{3}} = \sqrt[6]{3}}$

Tabla 1: Resumen de propiedades de potencias y raíces

Fuente: Propia.

2

Unidad 2

Operaciones entre fracciones, razones y proporciones

Matemáticas para educación

Autor: Danilo Ariza

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina

MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Introducción

En esta semana complementamos el trabajo sobre números reales abordando algunas de las operaciones que se pueden realizar con fracciones, entendiendo que cada fracción es una forma de expresar un número racional y todas las fracciones equivalentes. Veremos inicialmente el significado de una fracción como partes de la unidad y enfrentando luego las operaciones de suma, resta, multiplicación y división. En el estudio de esto nos valemos de la representación gráfica de las fracciones. Posteriormente se usa las fracciones desde otro punto de vista, el que involucra el concepto de razón, para plantear, a partir de la igualdad de razones, el concepto de proporción.

Debido a que en diferentes situaciones se debe hallar algún término conocido en una proporción, se presenta un conjunto de propiedades de estas, luego de ver tales propiedades se trabaja un importante tema de la matemática básico, la proporcionalidad entre magnitudes.

Recomendaciones metodológicas

Esta cartilla aborda una buena cantidad de temas que involucra conceptos y operaciones entre fracciones y constituye el elemento de entrada para el abordaje de tan importante tema, sería un error del estudiante considerar que para el éxito en su comprensión es suficiente con esta lectura. Recalcamos entonces que, además de su cuidadosa y detallada revisión, es importante que revise las lecturas complementarias, en las cuales se presentan ejemplos que ponen de manifiesto la operatividad asociada con el tema y aplicaciones en situaciones propias de diferentes contextos.

La adecuada comprensión de los temas de esta semana se puede ver favorecida también con el aprovechamiento de los videos cuyos enlaces se proporcionan en la sección Video capsulas, estos videos tratan sobre explicaciones puntuales y desarrollo de ejemplos operativos y aplicaciones.

En la sección ejercicios de repaso se presenta un conjunto de ejercicios que se recomienda sean resueltos a manera de práctica y preparación, atender esta sugerencia puede indicar al estudiante elementos de apropiación del tema bajo estudio al tiempo que lo coloca en mejor posición para enfrentar el parcial al final de esta semana.

Desarrollo temático

Operaciones entre fracciones, razones y proporciones

Operaciones con fracciones

Al hablar del conjunto de números racionales en la semana 3 indicamos que un número racional es aquel que se puede escribir como la razón de dos enteros, en este punto vale la pena agregar que el número racional $\frac{a}{b}$ (con a y b enteros y $b \neq 0$) es realmente el conjunto formado por $\frac{a}{b}$ y todas las fracciones equivalentes.

De todas las operaciones básicas en los diferentes conjuntos numéricos, quizá las que atañen a los números fraccionarios constituyen las mayores dificultades para muchos estudiantes, es por ello que, asumiendo que el estudiante maneja con cierta propiedad las operaciones entre números enteros, abordamos aquí el tratamiento de operaciones sobre el conjunto de los números racionales desde un enfoque básico, de tal manera que sirva de refuerzo temático al estudiante de licenciatura en educación y pueda usarlo como orientación en su desarrollo profesional con estudiantes de educación básica.

Fracciones equivalentes

Para ilustrar los principios asociados con operaciones entre fracciones, vistos como partes de una unidad, conviene inicialmente tratar la noción de fracciones equivalentes, para ello nos valdremos de una idea relacionada con la representación de fraccionarios en una recta, pero no usaremos el segmento unidad sino rectángulos de área unitaria.

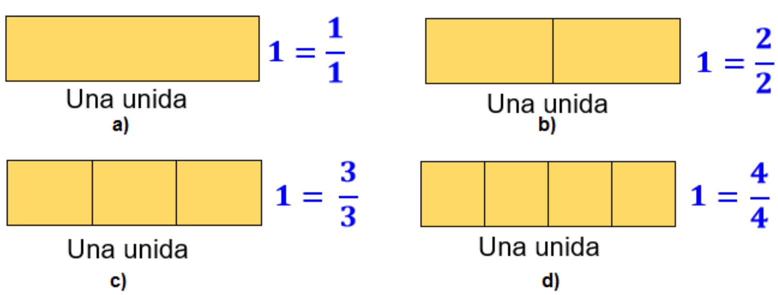


Figura 1: Diferentes formas de representar y expresar una unidad
Fuente: Propia.

La figura 1a, muestra un rectángulo unidad, en la figura 1b, vemos la misma unidad pero dividida en dos mitades, en este caso la unidad es equivalente a $\frac{2}{2}$ (dos medios), en 1c, la unidad está dividida en tres partes (tres tercios) lo que significa que la unidad es equivalente a $\frac{3}{3}$, finalmente la 1d, muestra la unidad dividida en cuatro partes (cuatro cuartos). Tenemos entonces diferentes formas de expresar una unidad.

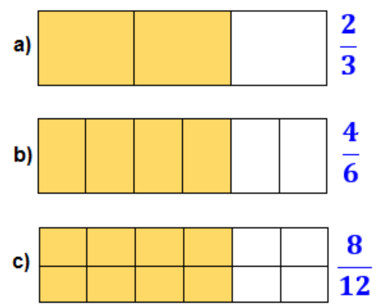


Figura 2. diferentes formas de representar y expresar una fracción
Fuente: Propia.

En la figura 2a, se observa una unidad dividida en tres partes, pero solo se resalta o rellena en amarillo dos de ellas, con lo cual se representa el número $\frac{2}{3}$. En la figura 2b, la misma unidad se divide en seis partes (seis sextos), lo que significa que de cada tercio se obtiene 2 sextos, con lo cual la cantidad $\frac{2}{3}$ representada en la parte a) es equivalente a la cantidad $\frac{4}{6}$ representada en la parte b). Finalmente, en la figura 2c, podemos ver que la unidad está dividida en 12 partes iguales (doce doceavos), el estudiante puede verificar, observando la figura 2, que cada tercio de la parte a) es equivalente a dos sextos de la parte b) y a cuatro doceavos de la parte c. Además, la cantidad resaltada es equivalente a $\frac{8}{12}$, lo que en últimas nos permite expresar las siguientes equivalencias entre fracciones.

$$\mathbf{\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{8}{12}}$$

Amplificación y simplificación de fracciones

Con base en las ideas antes vistas, en relación con fracciones equivalentes podemos ver que a partir de una fracción dada podemos obtener otra fracción equivalente. Si se los términos de la nueva fracción son mayores que los de la fracción original decimos que se ha amplificado la fracción, lo cual se logra multiplicando numerador y denominador por un mismo número mayor que 1. Por ejemplo, la fracción $\frac{4}{6}$ se puede obtener mediante la amplificación de la fracción $\frac{2}{3}$**,** en este caso se multiplica por 2 numerador y denominador.

Si numerador y denominador de una fracción tienen factores o divisores comunes, podemos dividir los elementos de la fracción por alguno de sus divisores comunes y obtenemos una fracción equivalente de términos menores, en este caso decimos que se simplifica la fracción. A continuación abordamos el estudio de operaciones entre fracciones, en lo cual nos valemos de simplificación y amplificación.

Suma y resta de fracciones de igual denominador

Iniciamos el estudio de la suma de fracciones de igual denominador a partir de la interpretación de la representación de las fracciones como partes de una unidad, esto lo ilustramos en la figura 4.3.

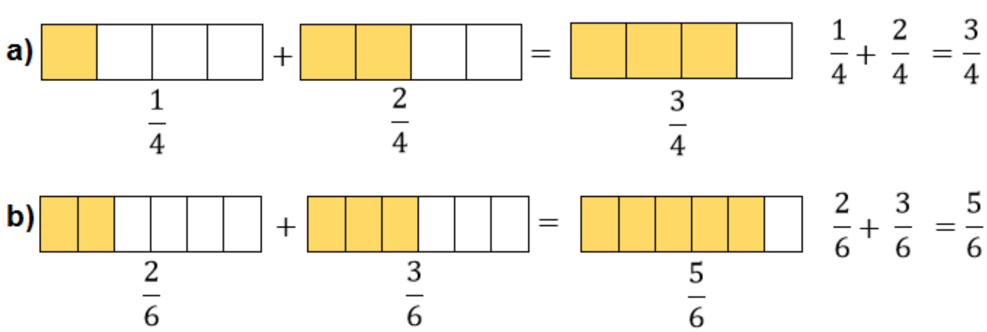


Figura 3. Representación de suma de fracciones de igual denominador

Fuente: Propia.

La parte a) de la figura 3 ilustra la suma de las fracciones $\frac{1}{4}$ y $\frac{2}{4}$. La representación gráfica de esta operación muestra claramente que el resultado es $\frac{3}{4}$ por lo que al lado de la correspondiente imagen hemos escrito $\frac{1}{4}+\frac{2}{4}=\frac{3}{4}$. La parte b) de la figura 3 nos muestra una situación similar en la que claramente se ve que $\frac{2}{6}+\frac{3}{6}=\frac{5}{6}$.

Los dos casos anteriores corresponden a situaciones en las cuales el resultado es una fracción menor que la unidad, pero existen situaciones en las cuales la suma de dos fracciones resulta en una cantidad mayor que la unidad, un par de ejemplos de esto se ilustra en la figura 4.

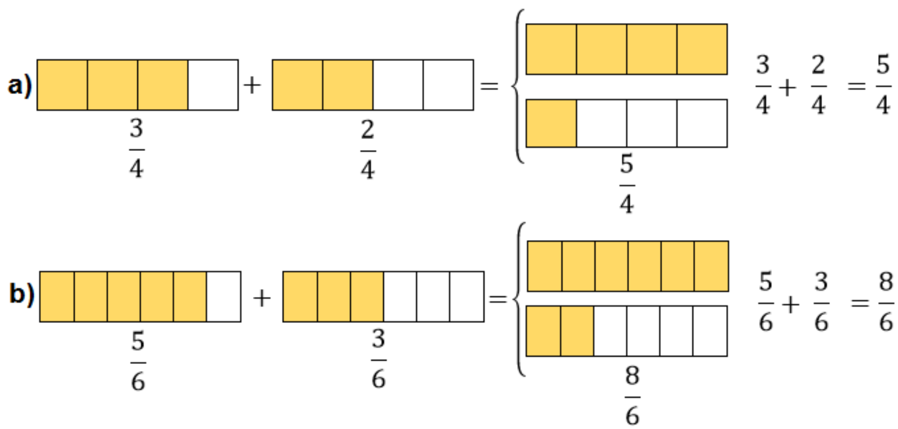


Figura 4. Representación de suma de fracciones de igual denominador

Fuente: Propia.

La figura 4b, muestra que la representación gráfica de la suma $\frac{3}{4}+\frac{2}{4}$, dado que la unidad equivale a $\frac{4}{4}$, claramente se ve que no es suficiente fraccionar en cuartos una sola unidad, situación similar se observa en el caso b), donde el resultado es $\frac{8}{6}$. Respaldados en las respectivas representaciones gráficas resumiendo ahora los resultados de las operaciones anteriores:

$$\frac{2}{6}+\frac{3}{6}=\frac{5}{6}\ ; \qquad \frac{1}{4}+\frac{2}{4}=\frac{3}{4}\ ; \qquad \frac{3}{4}+\frac{2}{4}=\frac{5}{4}\ ; \qquad \frac{5}{6}+\frac{3}{6}=\frac{8}{6}$$

En los cuatro casos claramente se ve que el resultado es otra fracción de igual denominador y el numerador es la suma de los numeradores, esta idea se puede extender a la suma y resta combinada de fracciones de igual denominador, con lo cual tenemos la siguiente generalización.

La suma y resta de fracciones de igual denominador es otra fracción con el mismo denominador de las fracciones originales y el numerador se obtiene mediante las respectivas sumas y resta de los numeradores.

Ejemplo: 4.1: a continuación se muestra dos casos de sumas y restas de fracciones de igual denominador. Nótese en los casos a) y c) el resultado se puede simplificar a una fracción equivalente.

$$\boldsymbol{a)}\ \frac{4}{6}+\frac{5}{6}-\frac{2}{6}+\frac{7}{6}=\frac{14}{6}=\frac{7}{3}$$

$$\boldsymbol{b)}\ \frac{5}{27}+\frac{35}{27}-\frac{8}{27}+\frac{15}{27}-\frac{10}{27}=\frac{37}{27}$$

$$\boldsymbol{c)}\ \frac{14}{8}+\frac{25}{8}-\frac{4}{8}=\frac{36}{8}=\frac{9}{2}$$

Suma y resta de fracciones de distinto de denominador

Abordamos el estudio de suma y resta de fracciones de distinto denominador, para ello consideremos la necesidad de realizar las siguientes sumas:

$$a)\ \frac{3}{4}+\frac{1}{2} \qquad\qquad b)\ \frac{1}{2}+\frac{2}{3}$$

Es claro que al tener fracciones de igual denominador, el numerador de la fracción resultante se puede hallar de manera inmediata sumando los numeradores, el denominador es el mismo de las fracciones que se suman. Sin embargo, en los casos que ahora nos ocupa los denominadores son diferentes, razón por la cual debemos emprender otro procedimiento no tan directo.

Para tratar la situación, tal como lo hicimos antes, nos valdremos de la representación gráfica dada a los fraccionarios y a la operación. La figura 4.5 muestra la equivalencia de la operación a) con la operación en la cual en lugar de la fracción $\frac{1}{2}$ se ha escrito la fracción equivalente $\frac{2}{4}$, teniéndose entonces una suma de fracciones de igual denominador.

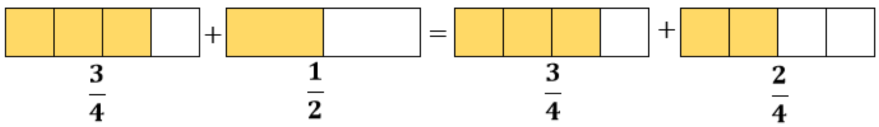


Figura 5. Representación de la suma de fracciones de distinto denominador

Fuente: Propia.

Para el tratamiento de la operación b) tenemos la representación dada en la figura 4.5, en la cual ambas fracciones a sumar se han remplazado por fracciones equivalentes de tal manera que estas fracciones tengan igual denominador.

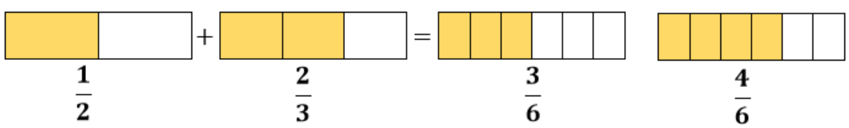


Figura 6. representación de la suma de fracciones

Fuente: Propia.

Teniendo ahora fracciones de igual denominador, se procede a la suma de las mismas según se indicó en la sección anterior, por tanto se tiene:

$a)\quad \frac{3}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}+\frac{2}{4}=\frac{5}{4}$

$b)\quad \frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{3}{6}+\frac{4}{6}=\frac{7}{6}$

Lo anterior es una muestra del procedimiento para sumar fracciones de distinto denominador, lo cual se puede extender a más de dos fracciones y a la combinación de suma y resta. El procedimiento generalizado se enuncia así:

Para sumar y restar fracciones de diferentes denominadores, se debe escribir todas las fracciones como fracciones equivalentes de tal manera que todas ellas tengan el mismo denominador y luego sumarlas y restarlas como fracciones de igual denominador.

Con base en el anterior principio podríamos hallar el resultado de la siguiente operación

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{5}{6}+\frac{7}{12}+\frac{6}{5}$$

Para llegar a la solución, debemos expresar cada fracción como fracciones equivalentes de tal manera que todas tengan un mismo denominador o denominador común, frente a esto existe la pregunta ¿cuál es el denominador común que deben tener las nuevas fracciones? Para la respuesta retomemos las operaciones ya resueltas en esta sección.

$$a)\quad \frac{3}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}+\frac{2}{4}=\frac{5}{4}$$

$$b)\quad \frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{3}{6}+\frac{4}{6}=\frac{7}{6}$$

En el caso a) los denominadores originales son 2 y 4, el común denominador de las fracciones equivalentes es 4, mientras que en el caso b) los denominadores son 2 y 3 y el común denominador es 6. En ambos casos el común denominador es un número que se puede dividir por ambos denominadores y corresponde al mínimo común múltiplo de los denominadores. Esto significa que para sumar y restar fracciones de distinto denominador es necesario hallar el mínimo común múltiplo de los denominadores.

¿Cómo se halla el mínimo común múltiplo o $m.c.m$ de un conjunto de números? Para hallar el m.cm de varios números se descompone cada uno en sus factores primos, el $m.c.m$ es el producto de los factores comunes y no comunes con su mayor exponente. En el caso de los denominadores $3, 4, 6, 12\ y\ 5$ tenemos que:

$3 = 3^1;$ $\quad 4 = 2^2;$ $\quad 6 = 3^1.2^1;$ $\quad 12 = 2^2.3^1;$ $\quad 5 = 5^1$

El $m.c.m.$ es entonces: $m.c.m.(3,4,6,12,5) = 3^1.2^2.5^1 = 60$

Como el $m.c.m$ de los denominadores es 60, a partir de las fracciones originales debemos fracciones equivalentes denominador sea 60. Es claro entonces cual es el denominador de cada fracción, pero ¿cuál es el numerador?

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{5}{6}+\frac{7}{12}+\frac{6}{5}=\frac{?}{60}+\frac{?}{60}+\frac{?}{60}+\frac{?}{60}+\frac{?}{60}$$

Para responder a esta pregunta tenemos en cuenta el proceso de amplificación de fracciones, según el cual, al multiplicar numerador y denominador por un mismo número diferente de cero se obtiene una fracción equivalente. En este caso se debe multiplicar por números convenientes de tal manera que los denominadores sean 60.

En la primera fracción (con denominador 3) se debe multiplicar numerador y denominador por 20 $(o\ 60 \div 3)$, en la segunda (con denominador 4) se multiplica por 15 $(o\ 60 \div 4)$, en la tercera (con denominador 6) se multiplica por 10 $(o\ 60 \div 6)$, en la cuarta (con denominador 12) se multiplica por 5 $(o\ 60 \div 12)$, en la quinta (con denominador 5) se multiplica por 12 $(o\ 60 \div 5)$, con lo que se tiene:

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{5}{6}+\frac{7}{12}+\frac{6}{5}=\frac{(2)(20)}{60}+\frac{(1)(15)}{60}+\frac{(5)(10)}{60}+\frac{(7)(5)}{60}+\frac{(6)(12)}{60}$$

Como todos los denominadores son 60, podemos escribir uno solo como denominador común, y en el numerador se escribe el producto de cada numerador por el factor correspondiente (el que resulta de dividir el común denominador por cada denominador), con lo que se obtiene:

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{5}{6}+\frac{7}{12}+\frac{6}{5}=\frac{(2)(20)+(1)(15)+(5)(10)+(7)(5)+(6)(12)}{60}$$

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{5}{6}+\frac{7}{12}+\frac{6}{5}=\frac{40+15+50+35+72}{60}=\frac{212}{60}=\frac{53}{15}$$

En resumen, para sumar y restar fracciones de distinto denominador se realiza los siguientes pasos:

- Hallar el mínimo común denominador (denominador de la fracción resultante), que es el mínimo común múltiplo de los denominadores.
- Dividir el mínimo común denominador por cada uno de los denominadores y multiplicar el resultado por el respectivo numerador.
- Realizar las sumas y restas de los productos del paso anterior para obtener el numerador de la fracción resultante.
- Simplificar la fracción resultante, si es posible.

Se recomienda al estudiante la visualización de videos propuestos en la sección recursos para el aprendizaje con el fin de reforzar estas ideas.

Multiplicación de números fracciones

Para ilustrar de el fundamento de la multiplicación de la fracciones acudimos a un ejemplo de uno de los significados de esta operación, este ejemplo es: $\left(\frac{1}{2}\right)$ por la fracción $\left(\frac{2}{3}\right)$ se interpreta como la mitad de $\left(\frac{2}{3}\right)$.

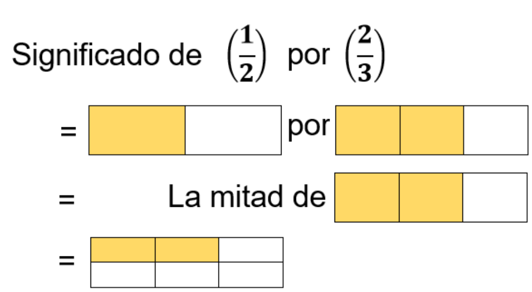


Figura 7. Significado de la multiplicación de fracciones

Fuente: Propia.

Vemos que el resultado de la anterior operación es $\frac{2}{6}$ lo que se puede obtener multiplicando numerador por numerador y denominador por denominador. En general podemos multiplicar sucesivamente varias fracciones aplicando este principio, con lo que en resumen se tiene:

Al multiplicar un conjunto de fracciones se obtiene otra fracción cuyo numerador es el producto de los numeradores y el denominador es el producto de los denominadores.

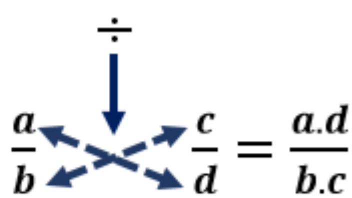
Nótese que al multiplicar fracciones no importa si los denominadores son iguales o diferentes.

División de fracciones

En la división de fracciones es claro que se debe identificar la fracción que opera como dividendo y la que opera como divisor. La división de fracciones se define como el producto del dividendo por el recíproco del divisor, es decir:

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} \div \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{d}} = \left(\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}\right)\left(\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{c}}\right) = \frac{\boldsymbol{a.d}}{\boldsymbol{b.c}}$$

Usualmente se indica que para realizar una división de fracciones basta realizar los productos cruzados como se muestra a continuación:



Si tenemos una división de fracciones expresada en la forma:

$$\frac{\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}}{\frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{d}}}$$

Identificamos a los términos $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{d}$ como extremos en la división y a los términos $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ como medios. La operación la podemos expresar y desarrollar como:

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} \div \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{d}} = \left(\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}\right)\left(\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{c}}\right) = \frac{\boldsymbol{a}.\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{b}.\boldsymbol{c}}$$

En este caso podemos decir que la división de fracciones es igual a una fracción en la cual el numerador es el producto de ***extremos*** y el denominador es el producto de ***medios.***

Ejemplo 4.2:

$$\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}} \div \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}} = \frac{(\mathbf{3})(\mathbf{5})}{(\mathbf{4})(\mathbf{2})} = \frac{\mathbf{15}}{\mathbf{8}}$$

$$\frac{\frac{2}{7}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{(2)(5)}{(7)(3)} = \frac{10}{21}$$

Con lo abordado hasta este punto tenemos los fundamentos para estudiar en la siguiente sección la temática de razones y proporciones, que constituye una de las aplicaciones más importantes de las fracciones.

Razones y proporciones

En las secciones anteriores nos hemos valido del significado de una fracción como parte de la unidad, otro significado importante que se puede dar a una fracción es el de razón entendida esta como la comparación de dos cantidades mediante una división. La importancia de las razones es que son los elementos fundamentales de la idea de proporcionalidad.

Concepto de razón

Dadas dos cantidades a y b, $(con\ b\ \neq 0)$ la razón entre a y b se escribe como la fracción $\frac{a}{b}$ o como $a{:}\,b$ (lo cual se lee a es a b).

Ejemplo 4.3:

$a)\ \frac{9}{4}\ significa\ 9\ es\ a\ 4$

$b)\ 3{:}\,7\ \ significa\ 3\ es\ a\ 7$

$c)$ Un jugador A marca 3 goles en y un jugador B marca 2, la razón entre ellos es $\frac{3}{2}$.

$d)$ Una distancia de 180 kilómetros recorrida por un carro y el tiempo de 4 horas empleado para hacerlo están en razón de:

$$\frac{180\ Km}{4\ horas} = 45\ \ Km/hora$$

$e)$ La razón entre la cantidad de dinero de $\$\ 150.000.00$ ganado por un obrero y el número de días trabajados para hacerlo es:

$$\frac{\$\ 150.000.00}{5\ dias} = \ \$\ 30.000.00/dia$$

$f)$ La razón del número de 6 obreros, de igual capacidad de trabajo, que realizan una obra y los 40 días que tardan en completarla es:

$$\frac{6\ obreros}{40\ dias} = 0{,}15\ \ obreros/dia$$

En una razón $\frac{a}{b}$ al número a se le denomina antecedente y al b, consecuente.

Concepto de proporción

Retomando la razón $\frac{3}{2}$ que surge del caso de los jugadores A y B que respectivamente marcan 3 y 2 goles en un partido, suponiendo que mantienen este ritmo de rendimiento durante tres partidos, entonces el jugador A marca 9 goles y el jugador B marca 6, en cuyo caso la razón correspondiente es $\frac{9}{6}$. Podemos observar también que las dos razones tienen igual valor, lo que constituye una proporción. Con base en estas ideas se define una proporción como la igualdad de dos razones. En lo que se refiere al ejemplo de los goleadores se tiene que la proporción se escribe como la siguiente igualdad:

$$\frac{3}{2} = \frac{9}{6} = 1{,}5 \quad o \quad 3\ es\ a\ 2 \quad como \quad 9\ es\ a\ 6$$

En general si dos razones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ forman una proporción, se tiene:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$$

Ejemplo 4.4: si la razones $\frac{z}{4}$ y $\frac{15}{20}$ forman una proporción, podemos hallar el valor de z mediante la igualdad

$$\frac{z}{4} = \frac{15}{20}, entonces \quad z = \frac{(4)(15)}{20} = \frac{60}{20} = 3$$

Propiedades de las proporciones

A continuación se presenta un conjunto de propiedades que facilitan el trabajo con las mismas.

- **P.1:** propiedad fundamental de las proporciones. En toda proporción el producto de medios es igual al producto de extremos, es decir.

$$si \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \qquad entonces \qquad a.d = b.c$$

- **P.2:** al intercambiar las razones que forman la proporción se conserva la igualdad, es decir:

$$si \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \qquad entonces \qquad \frac{c}{d} = \frac{a}{b}$$

- **P.3:** al invertir las razones que forman la proporción se conserva la igualdad, es decir.

$$si \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \qquad entonces \qquad \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

- **P.4:** al intercambiar los medios o los extremos de una proporción se conserva la igualdad, es decir:

$$si \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \qquad entonces \qquad \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \quad o \quad \frac{d}{b} = \frac{b}{a}$$

- **P.5:** si al antecedente de cada razón se suma o resta su consecuente, se conserva la igualdad, es decir.

$$si \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \qquad entonces \qquad \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \qquad o \qquad \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$$

- **P.6:** en una proporción la suma de antecedente y consecuente de una razón es a su diferencia como la suma de antecedente y consecuente de la otra es a la respectiva diferencia, es decir.

$$si \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \qquad entonces \qquad \frac{a+c}{c} = \frac{b+d}{d} \qquad o \qquad \frac{a-c}{c} = \frac{b-d}{d}$$

- **P.7:** en una serie de razones iguales la suma de los antecedentes es a la suma de los consecuentes como cada antecedente es a cada consecuente, es decir.

$$si \quad \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{c_1 + c_2 + \cdots + c_n} = \frac{a_1}{c_1} = \frac{a_2}{c_2} = \cdots = \frac{a_n}{c_n}$$

Proporcionalidad directa

Consideremos el ejemplo de una distancia de 180 kilómetros recorrida por un carro y el tiempo de 4 horas empleado para hacerlo, asumiendo que el carro siempre se mueve al mismo ritmo es razonable esperar que en un tiempo de 2 horas recorra una distancia de 90 kilómetros o que en 6 horas recorra 270 kilómetros. En esta situación vale la pena resaltar los siguientes aspectos:

- Hay dos magnitudes variables (distancia recorrida y tiempo empleado)
- El aumento de una de ellas está atado al crecimiento de la otra.
- El cociente entre respectivos valores de las magnitudes es una constante.

Las anteriores características son las que precisamente definen la proporcionalidad directa entre dos magnitudes. Lo que se puede resumir en el siguiente concepto.

Concepto de proporcionalidad directa

Dos magnitudes relacionadas son directamente proporcionales si la razón entre cualquier par de respectivos valores es constante. Es decir dos magnitudes A y B son directamente proporcionales si y solo si:

$$\frac{X}{Y} = k \quad o \quad X = kY$$

Al valor constante de la razón se le llama constante de proporcionalidad. Podemos decir también que, si dos magnitudes son directamente proporcionales, una de ellas siempre es el producto de la constante de proporcionalidad por la otra magnitud.

Ejemplo 4.5:

Consideremos el ejemplo del carro que recorre 180 kilómetros en 4 horas a un ritmo constante, en este caso denotamos con X la magnitud correspondiente a la distancia recorrida y con t el tiempo para recorrerla, dado que las magnitudes son directamente proporcionales, con base en ello podemos hallar las cantidades desconocidas a y b en la siguiente tabla:

$\boldsymbol{X\ (Km)}$	$\boldsymbol{t\ (horas)}$
180	4
90	2
a	10
225	b

Tabla 1

Fuente: Propia.

Como sabemos que las magnitudes son directamente proporcionales, la razón entre cualquier par de respectivos valores es constante, para saber cuál es este valor constante, o constante de proporcionalidad, hallamos la razón o cociente entre dos valores conocidos, tomamos los de la primera fila y tenemos:

$$\frac{180\ Km}{4\ horas} = k = 45\ \ Km/hora$$

Con el valor de k podemos hallar a, b y c así:

$$\frac{a}{10\ horas} = 45\ \ Km/hora\,, entonces\ a = (45\ \ Km/\cancel{hora})(10\ \cancel{hora}) = 450\ Km$$

$$\frac{225\ Km}{b} = 45\ \ Km/hora\,, entonces \qquad \frac{225\ \cancel{Km}}{(45\ \ \cancel{Km}/horas)} = b = 5\ horas$$

Proporcionalidad inversa

Ahora consideramos la situación en la cual 6 obreros de igual capacidad de trabajo realizan una obra en 40 días. ¿Cuánto tiempo tardaría la obra si solo fuera realizada por 3 obreros?, ¿Cuánto tardaría si la realizaran 12 obreros? Aquí resulta fácil ver que si en lugar de 6 solo trabajan 3 obreros a cada uno le tocará realizar el doble de trabajo, por tanto se invertirá el doble de tiempo, es decir, 80 días. Pero si en lugar de 6 trabajan 12, es claro que el tiempo se reduce a la mitad, 20 días. Aquí se resalta los siguientes aspectos que el estudiante puede verificar y que definen la proporcionalidad inversa entre dos magnitudes.

- Hay dos magnitudes variables (número de obreros y tiempo empleado para la obra).
- El aumento de una de ellas está atado a la disminución de la otra.
- El producto entre respectivos valores de las magnitudes es una constante.

Concepto de proporcionalidad inversa

Dos magnitudes relacionadas son inversamente proporcionales si el producto entre cualquier par de respectivos valores es constante. Es decir dos magnitudes A y B son inversamente proporcionales si y solo si:

$$X.Y = k \quad o \quad X = \frac{k}{Y} \quad o \quad Y = \frac{k}{X}$$

Al valor constante k del producto se le llama constante de proporcionalidad inversa. Podemos decir que, si dos magnitudes son directamente proporcionales, una de ellas siempre es la razón entre la constante de proporcionalidad inversa y la otra magnitud.

Ejemplo 4.6:

Considerando el ejemplo de 6 obreros que realizan una obra en 40 días, podemos hallar los valores desconocidos en la siguiente tabla suponiendo que todos los obreros que participen son de igual capacidad. Siendo X la magnitud número de obreros y t el tiempo para realizar la obra, asumimos que las magnitudes son inversamente proporcionales.

X	$t\ (días)$
6	40
24	a
b	16
60	c
d	8

Tabla 2

Fuente: Propia.

Como las magnitudes son inversamente proporcionales, el producto de cualquier par de respectivos valores es constante, esta constante la hallamos con los valores de la primera fila y lo usamos para hallar las cantidades desconocidas, tenemos entonces:

$$(6\ obreros)(40\ dias) = k = 240\ obreros\ dia$$

Entonces si trabajan 24 obreros, el número a de días está dado por:

$$(24\ obreros)(a) = 240\ obreros\ dia$$

$$a = \frac{240\ \cancel{obreros}.\,dia}{24\ \cancel{obreros}} = 10\ dias$$

Si la obra es realizada en 16 días el número b de obreros que la realiza se halla mediante:

$$(b)(16\ dias) = 240\ obreros\ dia$$

$$b = \frac{240\ obreros.\,\cancel{dia}}{16\ \cancel{dias}} = 15\ obreros$$

Se invita al estudiante a verificar que los otros valores son $c = 4$ y $d = 30$.

Regla de tres directa y regla de tres inversa

La regla de tres directa es un procedimiento aplicable en situaciones de proporcionalidad directa entre pares de valores de dos magnitudes relacionadas, en el cual conociendo tres valores y se pide hallar el valor faltante.

Por ejemplo, si 5 gaseosas cuestan $9000.00 cuánto cuestan 7. Usualmente esto se plantea de la siguiente manera:

$$5 \rightarrow 9.000.00$$

$$7 \rightarrow \qquad x$$

En esta situación, donde las magnitudes son directamente proporcionales, tenemos.

$$\frac{5}{7} = \frac{\$\ 9.000.00}{x}$$

Aplicando una de las propiedades de las proporciones (¿cuál?) podemos escribir:

$$\frac{x}{\$\ 9.000.00} = \frac{7}{5} \qquad o \quad x = \frac{(\$\ 9.000.00)(7)}{5} = \$\ 12.600.00$$

En el análisis de estas situaciones se debe tener claro si las magnitudes ligadas son directa o inversamente proporcionales. Si son inversamente proporcionales la proporción se plantea tomando la inversa o recíproco de una de las razones. Por ejemplo, si 10 operarios realizan una obra en 4 días, cuanto tiempo tardará en terminarse la obra si es realizada por 4 operarios. El planteamiento de la regla de tres indica que:

$$10\ operarios\ \rightarrow 4\ dias$$

$$4\ operarios\ \rightarrow \qquad x$$

La proporción a plantearse en este caso es:

$$\frac{10\ \cancel{operarios}}{4\ \cancel{operarios}} = \frac{x}{4\ días} \qquad o \quad x = \frac{(10)(4\ dias)}{4} = 10\ días$$

Nótese que, para plantear la proporcionalidad inversa, una de las razones se ha tomado en orden inverso. Frecuentemente se hace uso de la regla de tres de forma mecánica, multiplicando dos números y dividiendo el producto por el tercero. La recomendación que se da en esta cartilla es analizar primero si las cantidades ligadas son directa o inversamente proporcionales, plantear la proporción correspondiente y hallar el término faltante.

Repartos proporcionales

¿Cómo debe repartirse las ganancias en una empresa si los inversionistas aportan diferente cantidades? Este interrogante nos lleva a tratar los repartos proporcionales, en que se aplica la propiedad que establece que la suma de antecedentes es a la suma de consecuentes como cada antecedente es a su consecuente. Se debe tener claridad si se el reparto es proporcional directo o inverso. A continuación se presenta ejemplo de ello.

Ejemplo 4.7: reparto proporcional directo

Hugo Paco y Luis ganan un premio de \$ 30,000.000.00 en la lotería, el billete costó \$15.000.00. Hugo aporto \$ 7000.00, Paco, \$ 5.000.00 y Luis, \$ 3.000.00. Si han de repartir el premio de forma proporcional al aporte, ¿Cuánto le corresponde a cada uno?

Solución:

Denotamos con H, P y L las cantidades que les corresponde respectivamente a Hugo, Paco y Luis. Como la cantidad de cada uno debe ser proporcional a su aporte se tiene la siguiente serie de razones iguales:

$$\frac{H}{\$\,7.000.00} = \frac{P}{\$\,5.000.00} = \frac{L}{\$\,3.000.00}$$

Aplicamos la propiedad P.7, que indica que la suma de los antecedentes es a la suma de los consecuentes como cada antecedente es a su consecuente, es decir:

$$\frac{H+P+L}{\$\,7.000.00+\$\,5.000.00\$\,3.000.00}=\frac{\$\,30.000.000.00}{\$\,15.000.00}=2.000$$

Por tanto:

$$\frac{H}{\$\,7.000.00}=2.000, \qquad entonces \quad H=(\$\,7.000.00)(2.000)=\$\,14.000.000.00$$

$$\frac{P}{\$\,5.000.00}=2.000,, \qquad entonces \quad P=(\$\,5.000.00)(2.000)=\$\,10.000.000.00$$

$$\frac{L}{\$\,3.000.00}=2.000,, \qquad entonces \quad L=(\$\,3.000.00)(2.000)=\$\,6.000.000.00$$

Ejemplo 4.8: reparto proporcional inverso:

Un padre reparte 28 dulces entre sus hijos Álvaro, Bernardo y Camilo de forma inversamente proporcional a la edad, las edades de Álvaro, Bernardo y Camilo son respectivamente 12, 6 y 3 años, cuántos dulces debe dar a cada uno.

Solución

Tratándose de un reparto inversamente proporcional, se hace con base en los inversos de las edades, es decir las proporciones se forman entre la cantidad de dulces a recibir y el inverso de la edad. Si A, B y C son las cantidades de dulces que han de recibir Álvaro, Bernardo y Camilo respectivamente, tenemos:

$$\frac{A}{\frac{1}{12}}=\frac{B}{\frac{1}{6}}=\frac{C}{\frac{1}{3}}$$

Al aplicar la propiedad P.7 tenemos:

$$\frac{A+B+C}{\frac{1}{12}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}} = \frac{28}{\frac{1+2+4}{12}} = \frac{28}{\frac{7}{12}} = \frac{(28)(12)}{7} = 48$$

Finalmente tenemos:

$$\frac{A}{\frac{1}{12}} = 12A = 48, \qquad entonces\ \ A = 4$$

$$\frac{B}{\frac{1}{6}} = 6B = 48, \qquad entonces\ \ B = 8$$

$$\frac{C}{\frac{1}{3}} = 3C = 48, \qquad entonces\ \ A = 16$$

3
Unidad 3

Expresiones algebraicas

Matemáticas para educación

Autor: Danilo Ariza

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina
MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Introducción

Al iniciar nuestros estudios de matemáticas, lo hacemos abordando conocimientos básicos sobre conjuntos numéricos y operaciones entre sus elementos, lo que realmente hace parte de la aritmética, entendida esta como la rama del conocimiento matemático que estudia tales operaciones tomando como insumo cantidades conocidas, y valiéndose del conjunto de propiedades esbozadas como axiomas en la cartilla de la semana 3. La profundización en nuestros estudios en matemática, nos enfrenta a los principios algebraicos como una generalización de la aritmética, en este punto toma mayor sentido la aplicación de los axiomas como soporte de diversas situaciones que toman en consideración los casos generales, en lugar de situaciones particulares asociadas con valores conocidos, lo que en últimas corresponde al álgebra elemental. Es así como vemos que, por ejemplo, si $2+3$ es lo mismo que $3+2$, lo mismo se puede decir si trabajamos con cantidades no conocidas x, y, por tanto se puede comprender el significado de $x+y\ =y+x$. Tratándose de situaciones generales, en las que las cantidades involucradas pueden tomar cualquier valor de un conjunto de valores válidos, a tales cantidades se les llama variables y se representan mediante letras, tal como ya lo hemos hecho aquí.

El desarrollo de esta cartilla se dedica a la extensión de principios de la aritmética a un estudio básico de operaciones con expresiones algebraicas. La temática inicia planteando una pequeña reflexión que ejemplifica el sentido real que puede tener el uso de expresiones algebraicas, se presenta luego algunos elementos conceptuales relacionados con expresiones algebraicas para pasar después a la clasificación de expresiones y operaciones entre ellas.

Siguiendo el trabajo con procesos relacionados con expresiones algebraicas, es usual encontrar situaciones específicas que pueden modelarse matemáticamente usando diferentes principios, entre los que se encuentra la descomposición de una expresión algebraica en los factores que la componen. Parte del trabajo de la presente cartilla se enfoca en la aplicación de diferentes principios, relacionados con operaciones algebraicas, de tal manera que podamos escribir una expresión algebraica como el producto indicado de sus factores.

Recomendaciones metodológicas

Como recomendación básica, al igual que las semanas anteriores, se plantea la juiciosa y cuidadosa lectura de los temas tratados en esta cartilla, de manera simultánea o bien al final de la misma es importante la revisión de los recursos adicionales ofrecidos en el módulo.

En la sección lecturas complementarias el estudiante encontrará ejercicios resueltos que refuerzan las exposiciones hechas en la cartilla, aprovechar este recurso es una buena estrategia de cercamiento al alcance de los objetivos propuestos También se recomienda la visualización de los ejercicios y contenidos ilustrados en los videos cuyos enlaces son ofrecidos a través de la sección de video capsulas, estos videos proporcionan explicaciones vivas del tema y solución de problemas.

Como todo proceso de aprendizaje demanda enfrentamiento del estudiante a desafíos a través de los cuales pueda verificar, para sí mismo la apropiación de los contenidos, se presenta la sección de ejercicios de repaso, en la cual se encuentra ejercicios propuestos sobre la temática de esta cartilla. Se recomienda al estudiante tener presente el material del video resumen de esta semana.

Adelante con el aprovechamiento de los recursos.

Desarrollo temático

Expresiones algebraicas

Antes de abordar plenamente el trabajo formal de principios relacionados con expresiones algebraicas, resulta conveniente considerar situaciones que ayudan a hallar su sentido o importancia de su utilización y la necesidad de hacerlo.

Un estudiante debe plantear la solución a un problema práctico que consiste en cercar un lote de terreno que se encuentra a orillas de un rio, para lo cual debe usar 400 metros de cerca, lo debe hacer de tal manera que se busca que la superficie encerrada se un rectángulo. ¿Cuál es la expresión que define las posibilidades de las dimensiones del rectángulo y cuál es la expresión del área de la superficie encerrada? La situación se ilustra en el siguiente esquema:

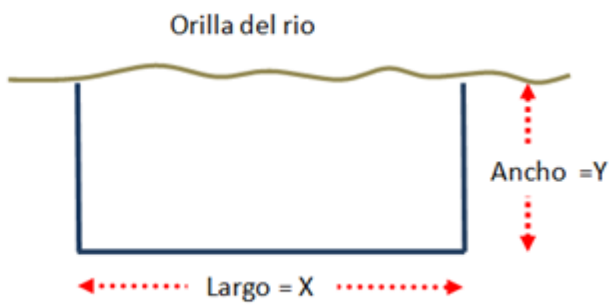


Imagen 1
Fuente: Propia.

Si bien es cierto se sabe que en total se cuenta con 400 metros de cerca, también es claro que con ellos se puede construir diferentes rectángulos, por tanto los valores del largo y ancho son cantidades variables y, aunque no sepamos sus valores, las operaciones que involucremos en la situación deben satisfacer los axiomas de los números reales.

Si mediante la letra L representamos la cantidad total de metros de cerca, lo cual en este caso corresponde a 400 metros, esta cantidad se distribuye de tal manera que corresponda a un tramo de longitud x y dos tramos de longitud y de acuerdo con el esquema de la situación, por tanto, en términos de x, y la longitud $L = 400$ está dada por:

$$x + 2y = 400$$

El área de la superficie encerrada por el rectángulo corresponde a:

$$A = x.y$$

El anterior es un ejemplo muy sencillo que pone de manifiesto la necesidad de utilizar expresiones algebraicas para estudiar situaciones de la vida real, de la misma forma, en diferentes áreas de la dinámica social, tales como la economía, las finanzas y diferentes áreas de la ciencia, se requiere la utilización de expresiones algebraicas, desde las muy simples hasta otras altamente complejas.

Concepto de expresión algebraica

Una expresión algebraica es toda expresión que combina cantidades fijas o constantes, cantidades variables o cantidades desconocidas mediante diferentes operaciones. Algunos ejemplos de expresiones algebraicas son los siguientes:

$$4xy^3 \; ; \qquad \frac{3}{4}z^2y^5; \qquad \frac{5z}{2-3y^2} - \frac{5}{2z+1} \; ; \qquad 5xy^2 + 7x^3 - 6$$

Términos en una expresión algebraica

Los términos en las expresiones algebraicas corresponden a porciones de la expresión relacionadas mediante operaciones de suma o resta, es decir, separadas por los signos “+” y “—”. El ejemplo d) antes mostrado corresponde a una expresión algebraica con tres términos.

Componentes de un término

Un monomio consta de diferentes elementos, estos son coeficiente, parte literal y exponentes de las partes literales, tal como se ilustra con el ejemplo dado a en el esquema adjunto.

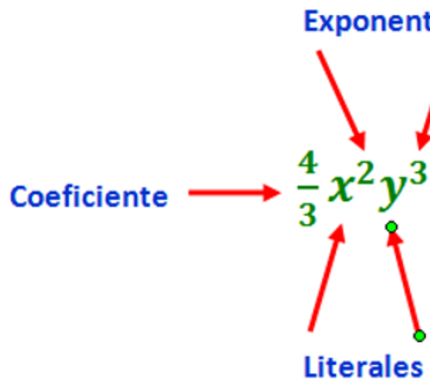


Imagen 2

Fuente: Propia.

Término independiente

En las expresiones algebraicas es frecuente encontrar términos independientes, son aquellos componentes que no tiene parte literal, por ejemplo, en la expresión $5xy^2 + 7x^3 - 6$ hay un término independiente que es el 6. Se dice término independiente por que su valor numérico no depende o no se altera con el cambio de valores de la parte literal.

Clasificación de expresiones algebraicas según su número de términos

Una expresión algebraica puede tener diferente número de términos. Considerando el número de términos una expresión algebraica puede recibir diferentes nombres. La siguiente tabla resume la correspondiente clasificación, indicando casos particulares y ejemplos.

Clasificación	Definición	Ejemplo
Monomio	Expresión algebraica de un solo término	$\mathbf{32x^3}$
Polinomio	Expresión algebraica de varios términos (caso general)	$\mathbf{\frac{5}{4}x^4 + 2x^3 - x^2 + 5x + 8}$
Binomio	Expresión algebraica de dos términos	$\mathbf{x^2 - 16}$
Trinomio	Expresión algebraica de 3 términos	$\mathbf{x^2 + 5x + 8}$

Cuadro 1

Fuente: Propia.

Suma y resta de expresiones algebraicas

Nos disponemos en esta parte a iniciar el abordaje de las operaciones entre expresiones algebraicas, sin embargo antes de ello se requiere estudiar un importante concepto con ello relacionado, el de reducción de términos semejantes.

Términos semejantes

Un elemento importante en la comprensión de las operaciones entre expresiones algebraicas, tiene que ver con la idea de términos semejantes. Decimos que dos o más términos algebraicos son términos semejantes si coinciden en su parte literal y sus respectivos exponentes, puede darse diferencia en sus coeficientes, veamos algunos ejemplos relacionados con esta idea:

$$5x^2y^3\ ;\ -\frac{2}{3}x^2y^3\ son\ términos\ semejantes\ (coinciden\ en\ variables\ y\ exponentes)$$

$$2x^3y^2\ ;\ 4x^2y^3\ no\ son\ términos\ semejantes\ (los\ respectivos\ exponentes\ difieren)$$

$$3x^3\ ;\ 4x^3y^3\ no\ son\ términos\ semejantes\ ¿por\ qué?$$

La importancia del concepto de términos semejantes radica en la utilidad que tiene en ocasiones en que queremos simplificar los resultados de operaciones entre expresiones algebraicas. Una idea en relación con ello, que nos puede ayudar a una mejor comprensión, es considerar los términos x, x^2 y x^3 como representaciones de las dimensiones espaciales, a continuación se explica este hecho y se da una representación gráfica.

a) Un término x asociado con una medida de longitud:

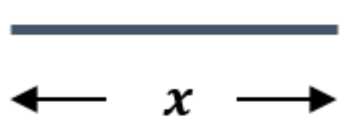


Imagen 3
Fuente: Propia.

Como ejemplo tenemos: $x = 1\ metro\ de\ cable\ eléctrico$ en cuyo caso se tendría que $5x$ equivale a 5 metros de cable.

b) Un término x^2 asociado con medida de superficie:

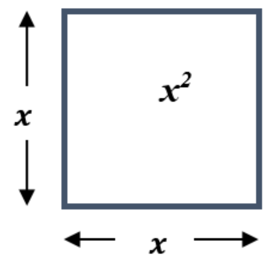


Imagen 4
Fuente: Propia.

Como ejemplo $x^2 = 1\ metro\ cuadrado\ de\ lona\ o\ tela$, $3x^2$ sería entonces 3 metros cuadrado de tal material.

c) Un término x^3 asociado con una medida de volumen:

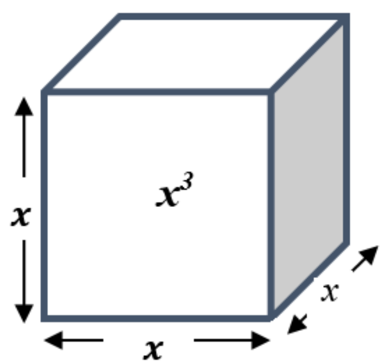


Imagen 5
Fuente: Propia.

En este caso el ejemplo de uso podría ser que $x^3 = 1\ metro\ cúbico\ de\ agua$.

Claramente el sentido común nos permite ver que podemos sumar o restar cantidades de la misma naturaleza espacial para obtener como resuldtado una sóla cantidad, ejemplos de estas ideas se refuerzan a continuación.

a) Si decimos que compramos 50 metros de cable y luego 30 metros más, es claro que en total compramos 80 metros de cable (50 metros más 30 metros o $50x + 30x = 80x$).

b) La compra de 40 metros cuadrados de baldosas inicialmente y la compra de 25 metros cuadrados despues, da como resultado una sóla cantidad de 65 metros cuadradoos de baldosas ($25x^2 + 40x^2 = 65x^2$).

c) Si compramos 50 metros de cable y 40 metros cuadrados de baldosas, no es posible expresar esta suma en una sóla cantidad.

Lo anterior nos ayuda a comprender la idea de términos semejantes que presentamos a continuación.

Reducción de términos semejantes

La necesidad de reducción de dos o más términos semejantes se presenta en resultados parciales de operaciones entre expresiones algebraicas, esta reducción, tal como lo ilustramos en los ejemplos anteriores, corresponde a la suma o resta de sus coeficientes asociada a la misma parte literal con sus respectivos exponentes, a manera de ejemplos tenemos:

$$4x^2 + 3x^2 = 7x^2$$

$$-3x^2y^3 + 5x^2y^3 = 2x^2$$

$$\frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^2 = \frac{7}{4}x^2$$

Suma y resta de polinomios

La suma de dos polinomios P y Q corresponde al polinomio $P + Q$, el cual resulta de la reducción de terminos semejantes de los dos polinomiios, mientras que la resta $P - Q$ corresponde al polinomio que resulta de sumarle a P el opuesto de Q, es decir, $P - Q = P + (-Q)$, a continuación se ilustra un ejemplo de suma y resta de polinomios.

Ejemplo 1: Dados los polinomios $P = 4x^3 + 5x^2 - 3x + 1 \;\; y \;\; Q = -2x^4 + 8x^3 - 6x^2 + 3$. Hallar la suma $P + Q$ y la resta $P - Q$.

Solución:

La suma de los polinomiios es:

$$P + Q = (4x^3 + 5x^2 - 3x + 1) + (-2x^4 + 8x^3 - 6x^2 + 3)$$

$$P + Q \; = 4x^3 + 5x^2 - 3x + 1 - 2x^4 + 8x^3 - 6x^2 + 3$$

$$P + Q = -2x^4 + (4x^3 + 8x^3) + (5x^2 - 6x^2) - 3x + (1 + 3)$$

$$P + Q = -2x^4 + 12x^3 - x^2 - 3x + 4$$

En el proceso de solución, la primera línea es apenas el plantemiento de la operación, en la segunda se suprime los parentesis, en la tercera agrupamos términos semejantes y en la últimalínea se reduce los términos semejantes.

El procedimiento correspondiente a la resta se realiza de forma similar y es el siguiente:

$$P - Q = (4x^3 + 5x^2 - 3x + 1) - (-2x^4 + 8x^3 - 6x^2 + 3)$$

$$P - Q = 4x^3 + 5x^2 - 3x + 1 + 2x^4 - 8x^3 + 6x^2 - 3$$

$$P - Q = 2x^4 + (4x^3 - 8x^3) + (5x^2 + 6x^2) - 3x + (1 - 3)$$

$$= 2x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 3x - 2.$$

Multiplicación de expresiones algebraicas

La multiplicación de dos expresiones algebraicas se basa en el producto de dos monomios, como acercamiento a ello consideremos las siguientes situaciones.

Si se pide calcular el área del piso de una habitación cuyas medidas son 4 metros de largo y 3 metros de ancho, esto lo podemos calcular así:

$$Área \ = \ A \ = \ (4 \, metros)(3 \, metros) = \ (4m)(3m) = \ 12 \, m^2 \ = \ 12 \, mts \ cuadrados.$$

Si se pide calcular el volumen de agua que puede contener una piscina de 2 metros de profindidad y con un fondo horizontal de 120 metros cuadrados, podriamos dar hallar la respuesta mediante:

$$Volumen \ = \ V \ = \ (área \ de \ superficie)(profundidad) \ = \ (120m^2)(2m) \ = \ 240m^3$$

$$Volumen = 240 \, metros \ cúbicos.$$

Los dos casos anteriores, vistos como expresiones algebraicas, nos permiten comprender el principio básico de la multiplicación de polinomios, descrito a continuación.

Multiplicación de monomios

La multiplicación de dos monomios da como producto otro monomio cuyo coeficiente es el producro de los dos coeficientes de los dos monomios originales y las partes literales corresponden a las variables originales elevadas a la suma de los respectivos exponentes, veamos los siguientes ejemplos.

Ejemplo:

a) $(3x^2) * (5x^4) = 15x^6$

b) $\left(\frac{2}{5}x^5y^2\right) * \left(-\frac{4}{3}x^2y^3\right) = -\frac{8}{15}x^7y^5$

c) $\left(\frac{2}{3}xy^2\right) * (7x) = \frac{14}{3}x^2y^2$

Multiplicación de un monomio por un polinomio

En la cartilla de la semana 3 vimos que uno de los axiomas de los números reales corresponde a la propiedad distributiva de la multiplicaciòn respecto a la adición, con base en ello encontramos que el producto de un monomio por un polinomio, es otro polinomio obtenido al multiplicar el monomio por cada uno de los terminos del polinomio.

Ejemplo

$$(3x^2)(2x^2 + 5xy - 3y^2) = (3x^2)(2x^2) + (3x^2)(5xy) - (3x^2)(3y^2)$$

$$(3x^2)(2x^2 + 5xy - 3y^2) = 6x^4 + 15x^3y - 9x^2y^2$$

Multiplicación de dos polinomios

extendiendo las odeas anteriores, encontramos que el producto de dos polinomios es otro polinomio que resulta al multiplicar cada término del promer factor por todos los terminos del segundo y realizando las posibles reducciones de términos independiente.

Ejemplo: Hallar el producto de los polinomios

$$P = (3x^2 + 5x - 2) \ y \ Q = (2x^2 + 5xy - 3y^2).$$

La solución detallada de esta operación se presenta a continuación:

$$PQ = (3x^2 + 5x - 2)(2x^2 + 5xy - 3y^2)$$

$$PQ = (3x^2)(2x^2 + 5xy - 3y^2) + (5x)(2x^2 + 5xy - 3y^2) - 2(2x^2 + 5xy - 3y^2)$$

$$PQ = 6x^4 + 15x^3y - 9x^2y^2 + 10x^3 + 25x^2y - 15xy^2 - 4x^2 - 10xy + 6y^2$$

Ejemplo: Hallar el producto de los polinomios

$P = (3x^4 - 5x^3 + 2x)$ $\quad y \quad$ $Q = (2x^3 + 4x^2 + 3)$.

Solución:

$$PQ = (3x^4 - 5x^3 + 2x)(2x^3 + 4x^2 + 3)$$

$$PQ = (3x^4)(2x^3 + 4x^2 + 3) - (5x^3)(2x^3 + 4x^2 + 3) + (2x)(2x^3 + 4x^2 + 3)$$

$$PQ = 6x^7 + 12x^6 + 9x^4 - 10x^6 - 20x^5 - 15x^3 + 4x^4 + 8x^3 + 6x$$

$$PQ = 6x^7 + (12x^6 - 10x^6) - 20x^5 + (9x^4 + 4x^4) + (-15x^3 + 8x^3) + 6x$$

$$PQ = 6x^7 + 2x^6 - 20x^5 + 13x^4 - 7x^3 + 6x$$

Algunos productos notables

Algunas multiplicaciones de expresiones algebraicas tienen formas especiales de tal manera que se puede hallar su producto de forma inmediata, algunos de estos son:

Cuadrado de un binomio

Un binomio es cualquier expresión algebraica de dos términos, aquí los escribimos simplemente como $(a+b)$ o $(a-b)$

Resultado de $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^{2}$

Aplicando la definición de potenciación encontramos que:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$$

Al realizar multiplicación de polinomios se tiene:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2$$

De lo anterior también podemos decir que el cuadrado de la suma de dos términos es igual al cuadrado del primer término más el doble del producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.

Resultado de $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^{2}$

Procediendo de forma similar se llega a

$$(a-b)^2 = \ a^2 - 2ab + b^2.$$

Es decir, el cuadrado de la diferencia de dos términos es igual al cuadrado del primer término menos el doble del producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.

A los resultados anteriores se les conoce como trinomios cuadrados perfectos.

Producto de la suma o diferencia de dos cantidades

Cuando nos referimos al producto de la suma de dos cantidades por la diferencia de ellas mismas hablamos en general de productos que se pueden escribir como:

$$(a+b)(a-b)$$

Al realizar la operación de multiplicación de polinomios se tiene

$$(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - ab + ab - b^2$$

Entonces:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Lo anterior indica que para realizar el producto de la suma de dos cantidades $(a+b)$ por su diferencia $(a-b)$ basta con realizar la diferencia del cuadrado de la primera y el cuadrado de la segunda.

Producto de la forma $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{m})(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{n})$

Al desarrollar el producto encontramos que

$$(x+m)(x+n) = x^2 + mx + nx + mn$$

La propiedad distributiva dada en el axioma xx nos permite ver que $mx + nx = x(m + n)$, entonces:

$$(x + m)(x + n) = x^2 + (m + n)x + mn$$

Lo que quiere decir que el primer término se halla multiplicando los primeros términos de los factores, el segundo es la suma algebraica de los segundos términos multiplicada por la variable, en este caso x, y el tercer término es el producto de los segundos términos de los factores.

Ejemplo xx:

a) $(x + 3)(x + 5) = x^2 + (3 + 5)x + 15 = x^2 + 8x + 15$

a) $(x + 3)(x - 5) = x^2 + (3 - 5)x - 15 = x^2 - 2x - 15$

División de expresiones algebraicas

Es claro que la división se entiende como la operación inversa de la multiplicación en razón a que corresponde al producto de una cantidad por el reciproco o inversa de otra. Para el caso de la división de expresiones algebraicas, esta se basa en la división de monomios, en la que a su vez se aplica principios relacionadas con los exponentes. La división de monomios se estudia a continuación.

División de monomios

La división de dos monomios es otro monomio, el coeficiente del resultado se halla dividiendo el coeficiente del dividendo por el coeficiente del divisor, mientras que la parte literal corresponde al producto de cada variable con un exponente tal que es la diferencia de exponentes de dicha letra en dividendo y divisor.

Ejemplo:

a) $14x^5 \div 2x^2 = (14 \div 2)x^{5-2} = 7x^3$

$b)\ \dfrac{4x^5}{5x^3} = \dfrac{4}{5}x^2$

$c) - 7x^4\ \div 2x = -\dfrac{7}{2}x^3$

$d)\ \dfrac{x^4y^5}{3x^2\,y^2} = \dfrac{1}{3}x^2y^3$

División de un polinomio por un monomio

Las ideas previas sobre las diferentes operaciones realizadas nos permiten comprender que la división de un polinomio por un monomio resulta de dividir cada término del polinomio dividendo por el monomio. Como ejemplo tenemos.

Ejemplo

$$\frac{5x^2y^3 + 3x^3y^2 - 4x^2y^2}{2xy^2} = \frac{5x^2y^3}{2xy^2} + \frac{3x^3y^2}{2xy^2} - \frac{4x^2y^2}{2xy^2} = \frac{5}{2}xy + \frac{3}{2}x^2 - 2x$$

División de polinomios en una variable

La división de un polinomio por otro no siempre se obtiene otro polinomio, esta operación obedece el siguiente principio conocido como algoritmo de la división.

Algoritmo de la división aplicado a polinomios

Dados dos polinomios $A(x)$ y $B(x)$ con $B(x) \neq 0$, existen únicos polinomios $Q(x)$ y $R(x)$ tales que:

$$A(x) = B(x)Q(x) + R(x)$$

El polinomio $A(x)$ es el dividendo, $B(x)$ es el divisor, $Q(x)$ es el cociente y $R(x)$, el residuo. Los correspondientes resultados se obtienen mediante la siguiente secuencia de procedimientos:

- Ordenar, en forma descendente, los polinomios A y B en caso que no estén ordenados.
- Dividir el primer término del dividendo por el primer término del divisor, resultando con ello el primer término del cociente.
- Multiplicar el resultado obtenido anteriormente por los términos del divisor y el resultado se resta del dividendo, obteniendo así un residuo parcial.
- Si el residuo obtenido en paso anterior es cero o de grado menor que el divisor, finaliza la operación, de lo contrario se repiten los pasos anteriores tomando como dividendo el último residuo parcial.

La secuencia de procedimientos descrita se comprende mejor a la luz de los siguientes ejemplos:

Ejemplo: Hallar cociente y residuo de las siguientes divisiones:

a) Dividir el polinomio $A(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 2$ por $B(x) = x - 1$.

b) Dividir el polinomio $A(x) = x^3 - 5x^2 + 2$ por $B(x) = x + 1$.

Solución:

La aplicación del algoritmo se ilustra a continuación, en cada caso se indica el cociente y el residuo. Se hace notar que el divisor en la situación b) es un polinomio completo puesto que contiene todos los términos, desde el mayor exponente, que en este caso es 3, hasta el término independiente; en el caso b) el polinomio no está completo, ya que no contiene el término en x a la uno, razón por la cual se escribe este término pero con coeficiente cero.

Solución a

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & +2x^2 & -4x & +2 & x-1 \\ \cline{5-5}
-x^3 & +x^2 & & & x^2+3x-1 \longleftarrow \textbf{Cociente} \\ \cline{1-2}
 & 3x^2 & & & \\
 & -3x^2 & +3x & & \\ \cline{2-3}
 & & x & & \\
 & & +x & -1 & \\ \cline{3-4}
 & & & 1 \longleftarrow \textbf{Residuo} &
\end{array}
$$

Solución b

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & -5x^2 & +0x & +2 & x+1 \\ \cline{5-5}
-x^3 & -x^2 & & & x^2 \quad 6x+6 \longleftarrow \textbf{Cociente} \\ \cline{1-2}
 & -6x^2 & & & \\
 & +6x^2 & +6x & & \\ \cline{2-3}
 & & 6x & & \\
 & & -6x & -6 & \\ \cline{3-4}
 & & & -4 \longleftarrow \textbf{Residuo} &
\end{array}
$$

Racionalización

Una idea asociada con la irracionalidad de una expresión es la existencia de raíces que no reducibles, además de ello, por ejemplo, es costumbre expresar resultados de operaciones de tal manera que no existan expresiones radicales en los denominadores de una fracción, este proceso corresponde a la racionalización de denominadores y lo ilustramos con los siguientes ejemplos:

Ejemplos: Racionalizar el denominador de las siguientes expresiones:

$a)\ \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ $b)\ \dfrac{5}{2\ +\ \sqrt{x}}$ $c)\ \dfrac{3\ +\ \sqrt{x}}{3-\ \sqrt{x}}$ $d)\ \dfrac{\sqrt{5}\ +\ \sqrt{x}}{\sqrt{5}-\ \sqrt{x}}$

Solución a)

Dado que al multiplicar el numerador y el denominador de una fracción por una misma cantidad, diferente de cero, no se altera su valor, podemos elegir a nuestra conveniencia la cantidad por la cual multiplicar, en este caso al multiplicar por $\sqrt{x}$ tenemos:

$$\frac{2}{\sqrt{x}} = \left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right) = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x^2}} = \frac{2\sqrt{x}}{x}$$

En la expresión resultante no hay cantidades irracionales en el denominador.

Solución b)

Para proceder a la racionalización del denominador de la expresión dada es útil señalar que el conjugado de una expresión $a + b$ es la expresión $a - b$, igualmente, el conjugado de $a - b$ es $a + b$. Conviene también recordar que el producto de la suma por la diferencia de dos cantidades da como resultado la diferencia de sus cuadrados, con lo cual si el denominador de una fracción es un binomio que contiene raíces cuadradas, la multiplicación del binomio por su conjugado da lugar a expresiones racionales. En este caso tenemos:

$$\frac{5}{2\ +\ \sqrt{x}} = \left(\frac{5}{2\ +\ \sqrt{x}}\right)\left(\frac{2-\ \sqrt{x}}{2-\ \sqrt{x}}\right) = \frac{10-\ 2\sqrt{x}}{2^2-\ (\sqrt{x})^2} = \frac{10-\ 2\sqrt{x}}{4-\ x}$$

Solución c)

En este caso se procede de forma similar al caso b, pero teniendo en cuenta que en el numerador se tiene aplica el producto notable de cuadrado de un binomio, con lo que tenemos:

$$\frac{3+\sqrt{x}}{3-\sqrt{x}}=\frac{\left(3+\sqrt{x}\right)}{\left(3-\sqrt{x}\right)}\frac{\left(3+\sqrt{x}\right)}{\left(3+\sqrt{x}\right)}=\frac{\left(3+\sqrt{x}\right)^{2}}{\left(3-\sqrt{x}\right)\left(3+\sqrt{x}\right)}=\frac{3^{2}+6\sqrt{x}+(\sqrt{x})^{2}}{9-(\sqrt{x})^{2}}$$
$$=\frac{9+6\sqrt{x}+x}{9-x}$$

Solución d)

$$\frac{\sqrt{5}+\sqrt{x}}{\sqrt{5}-\sqrt{x}}=\frac{\left(\sqrt{5}+\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{x}\right)}\frac{\left(\sqrt{5}+\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{5}+\sqrt{x}\right)}=\frac{5+2\sqrt{5}+x}{5-x}$$

Factorización de expresiones algebraicas

Se entiende por factorización el proceso que lleva a escribir una expresión como el producto de dos o más factores, en aritmética tenemos, por ejemplo, que una forma factorizada de escribir el número 36 es $36 = (3)(6)(2)$, otra factorización es $36 = (6)(6)$.

En el ámbito algebraico se busaca escribir una expresión como el producto de dos o más expresiones irreducibles, es decir en factores que no pueden descomponerse en otros más simples, a esto se le llama la factorización completa o simplemente la factorización.
Es importante resaltar que el objetivo de la multiplicación es hallar el producto a partir de los factores, mientras que la factorización busca hallar los factores correspondientes a una expresión dada. A manera de ejemplo tenemos que $x^2 + 3x - 10 = (x+5)(x-2)$, decimos entonces que $(x+5)(x-2)$ es la factorización de $x^2 + 3x - 10$. A continuación describimos algunos casos en que se puede factorizar un expresión algebraica dada y en general el proceso de factorización.

Procedimientos de factorización

En el ejemplo de la sección anterior planteamos un polinomio y su expresión en forma de producto indicado de dos factores, sin embargo no hemos hecho mención del procedimiento para hallar tales factores. Este apartado lo dedicamos a tratar los procedimientos que nos llevan a encontrar la forma factorizada de una expresión algebraica, veremos que no todos los procedimientos son aplicables a todas las expresiones, por lo que se hace necesario analizar detalladamente cada situación particular para poder decidir que procedimiento aplicar.

Factorización de un polinomio cuyos términos tiene un factor común

Dado que para tres números reales cualesquiera $a, b\ y\ c$, la propiedad distributiva expresa que $a(b+\ c)=ab+ac$, se tiene entonces que $a(b+\ c)$ es una factorización de $ab+ac$, notamos que en la expresión $ab+ac$ el número a es un factor tanto del término ab como de ac, es decir, a es un factor común de los términos del polinomio; vemos entonces que ***la factorización de un polinomio cuando todos sus términos tienen un factor común corresponde al producto del factor común identificado, por el polinomio que resulta al dividir cada término del polinomio original por el factor común.*** Los siguientes ejemplos ilustran la aplicación de esta idea.

Ejemplo: Hallar la factorización completa de las siguientes expresiones:

$a)\ 6ax-12xy$ $\qquad$ $b)\ x^2+\ 3xy$

$c)\ x^2y^4z^2-x^3y^2z^3+\ x^2y^3z$ $\qquad$ $d)18x^2y^4-24x^3y^2+\ 30x^2y^3$

Solución a)

La expresión $6ax-12xy$ se puede escribir como $6ax-(6)(2)xy$, lo que deja ver que el factor común es $6x$, al dividir los términos del polinomio por el factor común $6x$ se obtiene $(a-2y)$, por tanto la factorización está dada por:

$6ax-12xy=6x(a-2y)$

Solución b)

Argumentos similares a los del ejemplo a) nos muestran que en $x^2 + 3xy$ el factor común es x, al realizar las correspondientes divisiones tenemos:

$$x^2 + 3xy = x(x + 3y)$$

Solución c)

En $x^2y^4z^2 - x^3y^2z^3 + x^2y^3z$ el factor común es el producto de los literales comunes con su menor exponente, en este caso el factor común es: x^2y^2z, al dividir el polinomio por el factor común se obtiene $y^2z - xz^2 + y$, entonces, la factorización correspondiente es:

$$x^2y^4z^2 - x^3y^2z^3 + x^2y^3z = x^2y^2z(y^2z - xz^2 + y)$$

Solución d)

$18x^2y^4 - 24x^3y^2 + 30x^2y^3 = 6.3.x^2.y^2.y^2 - 6.4.x^2.x.y^2 + 6.5.x^2y^2y$ el factor común es $6x^2y^2$ y al realizar la división del polinomio por el factor común se obtiene como resultado $(3y^2 - 4x + 5y)$, con lo anterior encontramos que la factorización completa es:

$$18x^2y^4 - 24x^3y^2 + 30x^2y^3 = 6x^2y^2(3y^2 - 4x + 5y).$$

Factorización de polinomios por agrupación de términos

En algunos casos no todos los términos de un polinomio a factorizar tienen un factor común, pero es posible que si se realiza un agrupamiento, obtenemos grupos más pequeños cuyos términos tienen un factor común. El siguiente ejemplo ilustra esta situación:

Ejemplo: factorizar los siguientes polinomios:

$a)7xy - 7y + 5ab - 5a$ $\qquad$ $b)\ 3am - 3an + 3a - m + n - 1$

Solución a

Es claro que los términos del polinomio no tienen un factor común, pero si consideramos los dos primeros términos por separados y los dos últimos, cada pareja tiene un factor común, por lo tanto podemos escribir:

$$7xy - 7y + 5ax - 5a = (7xy - 7y) + (5ax - 5a)$$

$$7xy - 7y + 5ax - 5a = 7y(x - 1) + 5a(x - 1)$$

En la segunda línea del procedimiento anterior vemos que el factor $(x - 1)$ es común a los dos términos resultantes, por tanto se aplica el procedimiento de factor común con lo que finalmente se tiene:

$$7xy - 7y + 5ax - 5a = (x - 1)(7y + 5a)$$

Solución b)

$$3am - 3an + 3a - m + n - 1 = (3am - 3an + 3a) - (m - \ n + 1)$$

$$= 3a(m - n + 1) - (m - \ n + 1) \ = (m - n + 1)(3a - 1)$$

Se hace notar aquí que, al agrupar los tres últimos términos en un paréntesis precedido de un signo negativo, se debe cambiar el signo de cada término.

Factorización de trinomio cuadrado perfecto

En el apartado de productos notables desarrollamos el cuadrado de un binomio obteniendo como resultado una expresión que se conoce como trinomio cuadrado perfecto, lo cual significa que **la factorización de un trinomio cuadrado perfecto corresponde al cuadrado de un binomio.**

Es importante tener en cuenta que antes de factorizar un trinomio como el cuadrado de un binomio, debemos asegurarnos que sea cuadrado perfecto, para ello debemos tener en cuenta sus características, estas las describimos a continuación.

Características de un trinomio cuadrado perfecto: un trinomio, ordenado respecto a una variable, es cuadrado perfecto si presenta las siguientes características:

- El primer y tercer término son positivos y se pueden expresar como un cuadrado.
- El segundo término corresponde al doble del producto de las raíces cuadradas de los términos primero y tercero.

La factorización del trinomio cuadrado perfecto es el cuadrado de un binomio, este binomio asociado con la factorización es la suma de las raíces cuadradas de los términos cuadráticos (primero y tercero), si el segundo término es positivo y. En caso que el segundo término del trinomio sea negativo, el binomio es la diferencia de las raíces cuadradas de los cuadráticos.

Ejemplo:

Analizar si los siguientes trinomios son cuadrados perfecto y en caso que lo sean factorizarlos como tal:

$a)\ 4x^2 +\ 20x + 25$

$b)\ \frac{x^2}{9} + \frac{2x}{y} + \frac{9}{y^2}$

$c)\ 4y^2 +\ 24y + 25$

$d)\ 4m^2 +\ 20m - 25$

Solución a)

El polinomio $4x^2 +\ 20x + 25$ está ordenado, los términos primero y tercero son positivos y pueden expresarse como cuadrados de otras expresiones, por tanto el polinomio se puede expresar como:

$$4x^2 +\ 20x + 25 =\ (2x)^2 + 20x + (5)^2$$

Podemos ver que el doble del producto de las raíces cuadradas de los términos extremos tres es:

$$2(2x)(5) = 20x$$

El cual coincide con el segundo término del trinomio, por tanto la expresión es un trinomio cuadrado perfecto y su factorización está dada por:

$$4x^2 +\ 20x + 25 =\ (2x + 5)^2$$

Solución b)

El polinomio puede expresarse como:

$$\frac{x^2}{9}+\frac{2x}{y}+\frac{9}{y^2}=\left(\frac{x}{3}\right)^2+\frac{2x}{y}+\left(\frac{3}{y}\right)^2$$

El doble del producto de las raíces cuadradas de los términos primero y tercero es:

$$2\left(\frac{x}{3}\right)\left(\frac{3}{y}\right)=\frac{2x}{y}$$

El resultado es igual segundo término del trinomio, por tanto el trinomio se puede factorizar como trinomio cuadrado perfecto y la factorización correspondiente es:

$$\frac{x^2}{9}+\frac{2x}{y}+\frac{9}{y^2}=\left(\frac{x}{3}+\frac{3}{y}\right)^2$$

Solución c)

En este caso, donde el polinomio es $4y^2+24y+25$, vemos que los términos extremos son positivos y se pueden expresar como cuadrados, pero el doble del producto de sus raíces no coincide con el valor del segundo término, por tanto el trinomio no es cuadrado perfecto y no se puede aplicar la respectiva regla de factorización.

Solución d)

Puesto que el tercer término es negativo, el trinomio $4m^2+20m-25$ no se puede factorizar como un trinomio cuadrado perfecto.

Factorización de una diferencia de cuadrados

En el apartado de productos notables verificamos que siempre que se multiplica la suma de dos cantidades por la diferencia de las mismas, se obtiene como resultado la diferencia de los cuadrados, lo cual significa que **la factorización de una diferencia de cuadrados corresponde al producto de la suma de las cantidades por su diferencia.**

Ejemplo

Observemos en cada caso que las expresiones dadas corresponden a diferencia de cuadrados, se muestra también su factorización.

$a)\ 4x^2 - 25 = (2x + 5)(2x - 5)$

$b)\ \frac{x^2}{9} - \frac{9}{y^2} = \left(\frac{x}{3} + \frac{3}{y}\right)\left(\frac{x}{3} - \frac{3}{y}\right)$

$c)\ 144y^2 - 225 = (12\,y + 15)(12y - 15)$

$d)\ 4m^2 + 625 = (2m + 25)(2m - 25)$

Factorización de trinomios de la forma $\boldsymbol{x^2 + bx + c}$

En el punto de productos notables, donde multiplicamos binomios de la forma $(x + m)(x + n)$, notamos que resulta un trinomio en el cual el primer término es el producto de los primeros términos de los binomios, el tercero, es el producto de los segundos términos y el segundo término corresponde a un término en x cuyo coeficiente es la suma algebraica de los dos términos independientes; si deseamos realizar el proceso contrario, es decir, la factorización de un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$, el resultado es el producto de dos binomios en los cuales el primer término de cada uno es x, es decir la raíz cuadrada de x^2 y los segundos términos corresponden a dos números tales que la suma de ellos sea el coeficiente del segundo término del trinomio y su producto sea igual al termino independiente.

Ejemplo

A manera de ejemplo presentamos los siguientes casos, en los cuales se hace necesaria una adecuada descomposición del término independiente del trinomio para hallar los dos factores que satisfagan las condiciones antes señaladas.

$a)\ x^2 + 5x - 15$

Iniciamos expresando que la factorización tiene la forma

$$x^2 + 5x - 15 = (x + ?)(x + ?)$$

Lo que significa que debemos hallar dos números hasta ahora desconocidos, los números deben ser tales que la suma algebraica sea 5 y su producto sea -15, estos números son 8 y -3, entonces tenemos:

$$x^2 + 5x - 15 = (x\ +\ 8)(x - 3)$$

También podríamos escribir directamente los signos en medio de cada paréntesis, en el primer paréntesis va el signo del segundo término, positivo en este caso, mientras que en el segundo paréntesis va el producto de signos de segundo y tercer término, con lo que inicialmente tendríamos:

$$x^2 + 5x - 15 = (x + ?)(x - ?)$$

En este caso, como ya vemos que los signos son contrarios, debemos hallar dos números cuya diferencia sea 5 y su producto sea 15, llegando a la misma respuesta anterior.

$b)\ x^2 + 21x + 108 = (x + 12)(x + 9)$

En este caso vemos que 12 y 9 son dos números cuya suma es 21 y producto 108

$c)\ y^2 + 16y - 225 = (y + 25)(y - 9)$

La consecución de los dos números que complementan los binomios puede parecer difícil, pero sistemáticamente se pueden hallar al descomponer el término independiente en sus factores primos, y a partir de ellos formar los números requeridos mediante agrupamiento de factores.

Vale la pena señalar que en los trinomios de la forma $\boldsymbol{x^2 + bx + c}$ el coeficiente de $\boldsymbol{x^2}$ es 1, pero existe un caso diferente, derivado de este, en el cual el coeficiente es diferente de 1, este se tratará como parte de la temática del foro de las semanas 5 y 6.

Unidad 3

Ecuaciones lineales y cuadráticas

Matemáticas para educación

Autor: Danilo Ariza

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina

MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Introducción

Buena parte de las necesidades de desarrollo de procesos matemáticas se relacionan con la necesidad de hallar cantidades desconocidas en un ámbito específico. Frente a lo cual puede surgir un conjunto de ecuaciones que involucran una o más variables. Las ecuaciones pueden ser lineales, cuadráticas, polinomiales de orden superior, racionales, irracionales, entre otras. A las ecuaciones lineales con una incógnita se les conoce también como ecuaciones de primer grado y a las cuadráticas se les conoce también como ecuaciones de segundo grado, ambas con una incógnita.

Esta cartilla se dedica específicamente a un breve estudio de las ecuaciones lineales y cuadráticas con una incógnita, a los fundamentos y procedimientos de solución y al análisis de algunas situaciones susceptibles de ser resueltas mediante la solución de estos tipos de ecuaciones.

Recomendaciones metodológicas

Las recomendaciones básicas, al igual que en semanas anteriores, se refieren a la cuidadosa lectura de los contenidos de esta cartilla, al mismo tiempo o al final de la misma se deben revisar los recursos adicionales ofrecidos en el módulo para esta semana.

Las lecturas complementarias dan al estudiante la oportunidad de revisar la solución de ejercicios resueltos que refuerzan las exposiciones hechas en la cartilla, aprovechar este recurso es una buena estrategia de cercamiento al alcance de los objetivos propuestos También se recomienda la visualización de los ejercicios y contenidos ilustrados en los videos cuyos enlaces son ofrecidos a través de la sección de video capsulas, estos videos proporcionan explicaciones vivas del tema y solución de problemas.

Frente a la necesidad y pertinencia, dentro de todo proceso de aprendizaje, de enfrentarse a desafíos a través de los cuales pueda verificar para sí mismo la apropiación de los contenidos, se presenta la sección ejercicios de repaso, en la cual se encuentra ejercicios propuestos sobre la temática de esta cartilla. Se recomienda al estudiante tener presente el material del video resumen de esta semana.

Desarrollo temático

Ecuaciones lineales y cuadráticas

Propiedades de la igualdad. Fundamento de la solución de ecuaciones

En diferentes áreas de aplicación del conocimiento matemático es frecuente encontrar problemas en los cuales, a partir de un subconjunto de variables asociadas a una situación particular, debemos calcular valores de cantidades desconocidas, esto, por ejemplo, origina la necesidad de solución de ecuaciones, entendidas estas como igualdades que involucran cantidades desconocidas o incógnitas. Dependiendo de la naturaleza del problema, el análisis del mismo puede dar lugar a una ecuación con una incógnita o un conjunto o sistema de ecuaciones con varias incógnitas, de igual manera, las ecuaciones resultantes pueden ser de grado uno o de grado superior.

Antes de abordar la solución de ecuaciones, es pertinente estudiar las propiedades que soportan los procedimientos empleados en la solución de las mismas, para ello se debe indicar que cada una de las expresiones separadas por el signo de la igualdad recibe el nombre de miembros de la igualdad, teniendo en cuenta esta idea se presenta a continuación las propiedades fundamentales de la relación de igualdad.

a) Al sumar o restar una misma cantidad a cada uno de los miembros de una igualdad, ésta se conserva, es decir:

$$Si\ \ a\ = b, entonces\ para\ todo\ c, \qquad a \pm c = b \pm c$$

b) Al multiplicar cada uno de los miembros de una igualdad por una misma cantidad, la igualdad se conserva, es decir:

$$Si\ a\ = b, entonces\ para\ todo\ c, \qquad a.c = b.c$$

c) Al dividir cada uno de los miembros de una igualdad por una misma cantidad diferente de cero, la igualdad se conserva, es decir,

$$Si\ a\ = b, entonces\ para\ todo\ c\ \neq 0, \qquad \frac{a}{c} = \frac{b}{c}$$

Concepto de ecuación

Con el fin de tener plena claridad sobre el tema a desarrollar, es conveniente considerar que las igualdades se pueden clasificar en identidades y ecuaciones. Una identidad es una expresión de igualdad que involucra variables y que se cumple o satisface para todos los valores permitidos de las variables, mientras que una ecuación expresa una igualdad que involucra variables, pero que se satisface sólo para un conjunto restringido de valores de dichas variables. A continuación presentamos ejemplos que ilustran más cerca las ideas expuestas sobre identidad y ecuación.

Ejemplo 6.1

La expresión $4a + 3a = 2a + 5a$, es una identidad porque se cumple cualquiera que sea el valor de la variable a. El estudiante puede verificar esta afirmación asignando diferentes valores a la variable a, al sustituir en la igualdad obtendrá resultados iguales.

Ejemplo 6.2

La expresión $4a + 3 = 21$ es una ecuación puesto que la igualdad se satisface sólo para un valor, en este caso $a = \frac{9}{2}$. En la siguiente sección estudiaremos la forma de verificar este tipo de afirmaciones.

Solución de una ecuación

La solución de una ecuación corresponde al conjunto de valores que satisfacen la ecuación, en este punto anotamos que cuando se nos pide resolver una ecuación se nos está requiriendo que hallemos el conjunto de soluciones. En los ejemplos de la sección anterior se presenta la solución de las ecuaciones, pero no se hace referencia alguna a la forma de hallar la solución presentada en cada caso, en el siguiente apartado nos dedicaremos a hallar soluciones de ecuaciones de primer grado con una incógnita.

Ecuaciones de primer grado con una incógnita. Solución

Una ecuación de primer grado con una incógnita es toda ecuación que se puede reducir a la forma $ax + b = 0$, ejemplos de este tipo de ecuaciones son:

$a)\ 4x + 5 = 9$ $\qquad$ $b)\ 7x - 2 = 9x + 8$ $\qquad$ $c)\ \frac{3}{4}x + \frac{5}{2} = \frac{2}{5}x + \frac{1}{4}$

Las soluciones de estas ecuaciones son:

$a)\ x = 1$ $\qquad$ $b)\ x = -5$ $\qquad$ $c)\ x = -\frac{45}{7}$

Frecuentemente nos encontramos ante la necesidad de verificar si un valor dado es realmente la solución de una ecuación, esto se logra aplicando los siguientes pasos: a) sustituir dicho valor en la ecuación, b) realizar las operaciones indicadas y simplificar y c) observar si se cumple la igualdad. A manera de ejemplo, con el fin de reforzar esta idea, verificamos a continuación que la solución dada para el ejemplo c) es efectivamente la presentada.

La ecuación es:

$$\frac{3}{4}x + \frac{5}{2} = \frac{2}{5}x + \frac{1}{4}$$

Se afirma que su solución es: $x = -\frac{45}{7}$ el procedimiento de verificación es el siguiente:

Al sustituir $x = -\frac{45}{7}$ en el lado izquierdo de la ecuación, realizar operaciones y simplificar, se tiene:

$$\frac{3}{4}x + \frac{5}{2} = \left(\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{45}{7}\right) + \frac{5}{2} = \frac{-135}{28} + \frac{5}{2} = \frac{-135 + 70}{28} = \frac{-65}{28}$$

Haciendo lo mismo en el lado derecho tenemos:

$$\frac{2}{5}x + \frac{1}{4} = \left(\frac{2}{5}\right)\left(-\frac{45}{7}\right) + \frac{1}{4} = (2)\left(-\frac{9}{7}\right) + \frac{1}{4} = -\frac{18}{7} + \frac{1}{4} = \frac{-72-7}{28} = \frac{-65}{28}$$

Al cumplirse la igualdad, se verifica que el valor dado como solución es correcto. Si lo que nos interesa es hallar la solución de una ecuación, de la cual no sabemos la solución, debemos aplicar las propiedades de la igualdad de forma que nos conduzca a encontrarla, ilustramos los procedimientos de solución a través de los siguientes ejemplos.

Ejemplo 6.3

Aplicar las propiedades de la igualdad para hallar la solución de la siguiente ecuación:

$$12x - 5 = 9x - 2$$

Solución:

La ecuación a resolver es$12x - 5 = 9x - 2$, lo ideal es que tuviéramos todos los términos que contienen x en un solo lado (por ejemplo a la izquierda) y los términos independientes en el otro, para ello hacemos lo siguiente.

$12x - 9x - 5 = 9x - 2 - 9x$ $\quad Se\ resta\ 9x\ a\ cada\ miembro\ (propiedad\ a)$

$3x - 5 = -2$ $\quad Se\ simplifica\ resultados$

$3x - 5 + 5 = -2 + 5$ $\quad Se\ suma\ 5\ a\ cada\ miembro$

$3x = 3$ $\quad Se\ simplifica\ resultados$

$\frac{3x}{3} = \frac{3}{3}$ $\quad Se\ divide\ cada\ miembro\ por\ 3\ \ (propiedad\ c)$

$x = 1$ $\quad se\ simplifica\ resultados$

No hay ningún inconveniente si en un mismo paso restamos $9x$ y sumamos 5, solo se debe tener el cuidado suficiente para hacer correctamente las operaciones, además de lo anterior, es usual que en la solución de una ecuación apliquemos un principio denominado trasposición de términos, que no es más que la aplicación inmediata de las propiedades antes señaladas y la respectiva simplificación. ¿Puede el estudiante explicar este principio y relacionarlo con las propiedades empleadas en la solución del ejemplo anterior? Es altamente recomendable que al aplicar la trasposición de términos no se pierda de vista su correcta asociación con las respectivas propiedades.

Ejemplo 6.4

Hallar la solución de la ecuación: $5x - (7 - 2x) = 4(-x + 5) - 2(3x - 1) + x$

Solución:

$5x - (7 - 2x) = 4(-x + 5) - 2(3x - 1) + x$

$5x - 7 + 2x = -4x + 20 - 6x + 2 + x$ $\quad$ *Se suprime los paréntesis*

$5x + 2x + 4x + 6x - x = 20 + 2 + 7$ $\quad$ *Transposición de términos o propiedad a*

$16x = 29$ $\quad$ *Se simplifica resultados*

$x = \frac{29}{16}$ *dividir ambos términos por* 16 $\quad$ (*propiedad c*)

Ecuación cuadrática o ecuación de segundo grado con una incógnita

Una ecuación cuadrática, o ecuación de segundo grado, con una incógnita es toda ecuación que se puede reducir a la forma $ax^2 + bx + c = 0, con\ a \neq 0$, ejemplos de ecuaciones cuadráticas ya reducidas son:

a) $4x^2 + 3x - 2 = 0$

b) $x^2 - 2x - 2 = 0$

c) $3x^2 - 10 = 0$

d) $2x^2 + 5x = 0$

Los ejemplos anteriores muestran que las ecuaciones cuadráticas pueden ser completas o incompletas según los coeficientes $b\ o\ c$ sean cero. Por ejemplo las ecuaciones de los ejemplos c y d son incompletas, la ecuación del ejemplo c es de la forma $ax^2 + c = 0$ (b=0), mientras que la del ejemplo d es de la forma $ax^2 + bx = 0$.

Solución de ecuaciones cuadráticas incompletas de la forma $ax^2 + c = 0$

Si tenemos una ecuación cuadrática incompleta de la forma $ax^2 + c = 0$, podemos afrontar el proceso de solución de la siguiente forma:

$$ax^2 = -c$$

$$x^2 = -\frac{c}{a}$$

$$x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Si los valores de $a\ y\ c$ son tales que el resultado de $-\frac{c}{a}$ es positivo, la ecuación dada tiene solución en el conjunto de números reales, en caso contrario la solución se encuentra fuera de este conjunto.

Ejemplo 6.5:

En cada uno de los siguientes casos hallar la solución de la ecuación cuadrática, si existe.

a)$3x^2 - 12 = 0$ b) $4x^2 + 12 = 0$

Solución a)

En este ejemplo $a = 3$ y $c = -12$, entonces:

$$x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}} = \pm\sqrt{-\frac{-12}{3}} = \sqrt{4} = \pm 2 \quad entonces\ x = 2\ y\ x = -2$$

Realmente no es necesario aprenderse la fórmula o expresión para hallar la solución en estos casos, podemos aplicar un mecanismo de despeje como se muestra a continuación.

$3x^2 - 12 = 0$, entonces $3x^2 = 12$, entonces.

$$x^2 = \frac{12}{3} = 4; \qquad x = \pm\sqrt{4}; \qquad x = 2 \quad y\ x = -2$$

El estudiante puede verificar que al sustituir la variable x por 2 y por -2, se satisface la ecuación.

Solución b)

En este caso $a = 4$ y $c = 12$, entonces:

$$x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}} = \pm\sqrt{-\frac{12}{3}} = \pm\sqrt{-4}$$

La ecuación no tiene solución en el conjunto de los números reales porque no existe en este conjunto un valor de x cuyo cuadrado sea igual a -4. Estos casos tienen solución en un conjunto más amplio llamado conjunto de los números complejos, pero su estudio está por fuera de los alcances de este curso.

Solución de ecuaciones cuadráticas incompletas de la forma $\boldsymbol{ax^2 + bx = 0}$

Este tipo de ecuaciones permite una rápida factorización que facilita la consecución de la solución, el proceso es el siguiente:

$$ax^2 + bx = 0$$

$$x(ax + b) = 0 \; x \; es \; factor \; común$$

Notamos que la ecuación original se convierte en el producto de dos factores, este producto es cero sólo si uno cualquiera de ellos o ambos son iguales a cero, se tiene:

$$x = 0 \quad y \qquad ax + b = 0$$

De donde resulta finalmente que toda ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx = 0$ tiene las dos soluciones

$$\boldsymbol{x = 0 \quad y \qquad x = -\frac{b}{a}}$$

Ejemplo 6.6

Hallar la solución de las siguientes ecuaciones cuadráticas:

a) $4x^2 + 9x = 0$

b) $2x^2 - 7x = 0$

Solución a)

a) Una de las soluciones siempre es $x = 0$ y, dado que $a = 4\ y\ b = 9$, se tiene que la otra solución es:

$$x = -\frac{b}{a} = -\frac{9}{4}$$

Solución b)

Para la ecuación $2x^2 - 7x = 0,\ a = 2\ y\ b = -7$, por tanto la solución es:

$$x = 0\ y\ x = -\frac{-7}{2} = \frac{7}{2}$$

Solución de ecuaciones cuadráticas completas

Recordamos que una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ es completa si los valores de b y c son diferentes de cero. Para hallar la solución de una ecuación cuadrática completa en este curso usaremos, cuando sea posible, un método basado en factorización y otro conocido como fórmula general.

Solución de ecuaciones cuadráticas completas por factorización

Muchas veces es posible descomponer el polinomio $ax^2 + bx + c$ en el producto de dos factores, a partir de lo cual se puede hallar la solución, un ejemplo de ello es el siguiente:

Ejemplo 6.7

Resolver por factorización, si es posible, la ecuación cuadrática $x^2 - 2x - 8 = 0$

Solución

El trinomio $x^2 \ -2x - 8 = 0$ se puede descomponer en dos factores, con lo cual tenemos:

$$x^2 \ + 2x - 8 = 0$$

$$(x + 4)(x - 2) = \ 0$$

De lo anterior se puede afirmar que:

$$(x + 4) = 0 \quad o \quad (x - 2) = \ 0,$$

Con lo que finalmente tenemos que los valores que satisfacen la ecuación son:

$$x = -4 \quad y \ \ x \ = 2$$

Fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas

No siempre es posible factorizar el trinomio $ax^2 \ + bx + \ c$, asociado con la ecuación cuadrática $ax^2 \ + bx + \ c = 0$, en tales casos la solución de la ecuación estaría dada por una fórmula conocida como fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas, a continuación se presenta la deducción de esta fórmula apoyados en algunas de las propiedades de la igualdad y posteriormente veremos su uso en la solución de ecuaciones. El procedimiento es el siguiente.

$ax^2 \ + bx + \ c = 0$ $\qquad$ $Ecuación\ a\ resolver$

$4a(ax^2 \ + bx + \ c) = (4a)(0)$ $\qquad$ $Multiplicando\ por\ 4a$

$4a^2x^2 \ + 4abx + \ 4ac = 0$ $\qquad$ $Realizando\ operación\ anterior$

$4a^2x^2 \ + 4abx + \ 4ac + b^2 \ = b^2$ $\qquad$ $Se\ suma\ b^2\ a\ ambos\ lados$

$4a^2x^2 \ + 4abx + b^2 \ = b^2 \ - 4ac$ $\qquad$ $Se\ traslada\ 4ac\ al\ lado\ derecho$

$(2ax + b)^2 \ = b^2 \ - 4ac$ $\qquad$ $Factorizar\ lado\ izq.como\ Trinomio\ C.P$

$2ax + b = \sqrt{b^2 \; - 4ac}$ $\quad$ $Se\ saca\ raíz\ cuadrada\ a\ cada\ lado$

$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 \; - 4ac}$ $\quad$ $Se\ traslada\ b\ al\ lado\ derecho$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 \; - 4ac}}{2a}$ $\quad$ $Se\ pasa\ a\ diidir\ 2a$

En conclusión se tiene que la solución de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ está dada por:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

A la cantidad $b^2 - 4ac$, la que se encuentra dentro de la raíz, se le llama discriminante de la ecuación, en este curso lo simbolizamos mediante Δ. Teniendo en cuenta que en el conjunto de los números reales no es posible hallar raíces cuadradas de números negativos, la existencia o no de soluciones para la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ en este conjunto depende del valor de Δ, según se establece a continuación:

a) Si $\Delta < 0$, la ecuación no tiene solución en los reales.

b) Si $\Delta = 0$ la ecuación tiene solución en los reales y está dada $x = \frac{-b}{2a}$

c) Si $\Delta > 0$ la ecuación tiene solución real dada la fórmula general.

Ejemplo 6.8

En cada uno de los siguientes casos, usar el valor del discriminante para determinar si la ecuación dada tiene o no solución en el conjunto de los números reales, en caso positivo hallar la solución.

$a)\ 4x^2 - 12x + 7 = 0$ $\quad$ $b)\ 3x^2 + 2x + 2 = 0$ $\quad$ $c)\ x^2 + 2x + 1 = 0$

Solución a)

Los valores de $a,\ b,\ c$ son $a = 4,\ b = -12,\ c = 7,$ entonces el valor del discriminante es: $\Delta = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4(4)(7) = 144 - 112 = 32 > 0$, razón por la cual la ecuación tiene solución real y está dada por:

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{32}}{8} = \frac{12 \pm 4\sqrt{2}}{8} = \frac{3 \pm \sqrt{2}}{2}$$

De donde se encuentra que las dos soluciones son:

$$x = \frac{3 + \sqrt{2}}{2} \text{ y } x = \frac{3 - \sqrt{2}}{2}$$

Solución b)

Aquí la ecuación es $3x^2 + 2x + 2 = 0$, los valores de $a,\ b,\ c$ son $a = 3,\ b = 2,\ c = 2,$ entonces el discriminante es: $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(3)(2) = 4 - 24 = -20 < 0$, por tanto la ecuación no tiene solución real.

Solución c)

En este caso, con la ecuación $x^2 + 2x + 1 = 0$ se tiene $a = 1,\ b = 2,\ c = 1$, entonces el discriminante es $\Delta = (2)^2 - 4(1)(1) = 4 - 4 = 0$, la ecuación tiene solución real dada por:

$$x = \frac{-2}{2(1)} = -1$$

Problemas que se resuelven mediante ecuaciones

Son diversas las situaciones, en diferentes campos, en los que el planteamiento de un problema conduce a la solución de una ecuación o un conjunto de ecuaciones. En este apartado ilustraremos algunos casos que representan aplicaciones a las soluciones de ecuaciones antes tratadas.

En la solución de todo problema que requiere el modelamiento matemático, es de vital importancia la cuidadosa lectura e interpretación del enunciado, luego de lo cual se asigna variables a alguna las cantidades desconocidas y se realiza el planteamiento de las ecuaciones con base en las condiciones establecidas en el enunciado. En algunas situaciones se requiere hallar el valor de más de una cantidad desconocida, pero al asignar una variable a una de ellas, se puede expresar las demás en términos de la antes elegida. Los siguientes ejemplos ilustran brevemente lo antes expresado. En la sección lecturas complementarias se encuentra documentos en los cuales se refuerza el planteamiento y solución de problemas de este tipo.

Ejemplo 6.9

En una librería, un estudiante compró un libro, una calculadora y un cuaderno, el libro costó el doble de lo que costó la calculadora, mientras que la calculadora costó cinco veces lo del cuaderno. Si el total de la compra fue de 160.000 pesos, ¿Cuánto costó cada elemento?

Solución

Resulta conveniente designar como x el precio del elemento de menor valor, y a partir de él definir los valores de los demás, con esto tenemos:

$x = costo\ del\ cuaderno$

$5x = costo\ de\ la\ calculadora$

$10x = costo\ del\ libro$

Las condiciones del problema establecen que el costo total es de 160.000 pesos, por tanto tenemos la siguiente ecuación:

$costo\ del\ cuaderno + \ costo\ de\ la\ calculadora\ costo\ del\ libro = 160.000$

$x + 5x + \ 10x = 160.000$

$16x = 160.000$

$x = 10.000$

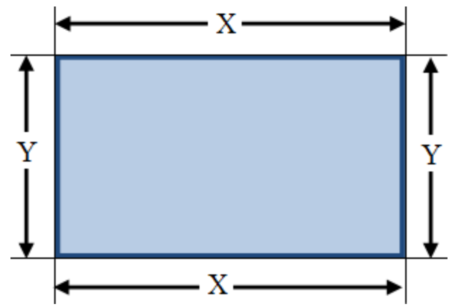
Lo anterior nos da $10.000\ pesos$ como costo del cuaderno, $50.000\ pesos$ como costo de la calculadora y $100.000\ pesos$ como costo del libro.

Ejemplo 6.10

Un terreno rectangular tiene un perímetro de 60 m y un área de 216 m2. Calcula sus dimensiones.

Solución

El esquema adjunto muestra el rectángulo de dimensiones desconocidas.



$X = largo$

$Y = ancho$

Según definición de perímetro, se tiene que:

$2X + 2Y = 60$

$X + Y = 30$

Dado que el área es: $X.Y = 216$, expresar una de las dos variables en términos de la otra, en este caso hallamos Y en términos de X, con lo cual tenemos:

$$Y = \frac{216}{X}$$

Remplazando en $X + Y = 30$, se obtiene:

$$X + \frac{216}{X} = 30$$

De donde se origina la siguiente ecuación en una incógnita:

$$\frac{X^2 + 216}{X} = 30.$$

Entonces,

$X^2 + 216 = 30X$

$X^2 - 30X + 216 = 0.$

Resolviendo por factorización tenemos:

$$(X - 18)(X - 12) = 0$$

Las posibles soluciones de esta ecuación son $X = 18\ y\ X = 12$, con $X = 18$ se obtiene $Y = 12$ mientras que con $X = 12$ se obtiene $Y = 18$. Se puede afirmar entonces que las dimensiones del rectángulo son 12 y 18 metros.

4

Unidad 4

Distribuciones de frecuencia, medidas de tendencia central y de localización

Matemáticas para educación

Autor: Danilo Ariza

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina

MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Introducción

Esta unidad se dedica a estudiar un conjunto de principios de estadística, al inicio trata algunas generalidades, la introducción de conceptos básicos, incluyendo clasificación de la estadística en Estadística Descriptiva e inferencial, conceptos de población, muestra y variables estadísticas. Luego se aborda el tema de distribuciones de frecuencias, presentando conceptos y ejemplos, con el fin de ilustrar al estudiante sobre su utilidad y para que luego pueda llevar a cabo acciones encaminadas a su elaboración. La importancia del estudio de este tema está en brindar los primeros elementos para enfrentarse a la tarea de organización y análisis de datos en estudios estadísticos.

Entre los propósitos de un estudio estadístico está el poder describir los datos de manera resumida, con ese fin existen diferentes medidas, entre las que se destacan las medidas de tendencia central, las medidas de localización y las medidas de dispersión. Una parte de esta cartilla se dedica a un breve estudio de las medidas de tendencia central y de localización, brindando al estudiante principios relacionados con cálculos de las mismas.

Este componente de estadística descriptiva puede ser particularmente útil al estudiante en oportunidades posteriores como el estudio de la asignatura Investigación Cuantitativa o en el desarrollo de estudios en su desempeño laboral como profesional.

U4

Metodología

De manera general, la recomendación inicial que se da al estudiante es asumir el rol que le corresponde en el marco de formación virtual, se recomienda hacer cuidadosa lectura de la presente cartilla, ya que el reto de aprendizaje autónomo al que decidió enfrentarse así lo demanda. Atendiendo específicamente a los temas de esta cartilla se recomienda que elabore un esquema resumido de los mismos, por ejemplo, un mapa mental, un mapa conceptual, un cuadro sinóptico, entre otros, en los que plasme las ideas que tienen que ver con población, muestra, variables, clasificación de variables, distribución de frecuencias, medidas de tendencia central y medidas de localización. Es muy importante que el estudiante asuma el reto de resolver los ejercicios de repaso propuestos y que verifique los cálculos del ejemplo, todo ello además de contribuir a afianzar el conocimiento del tema, le brinda la posibilidad de tomar mayor confianza los ejes temáticos de la semana 8.

Además de las recomendaciones anteriores el estudiante puede aprovechar los restantes recursos propuestos, tales como video capsulas, video resúmenes y lecturas complementarias, todos alrededor de los temas de esta cartilla.

Desarrollo temático

Distribuciones de frecuencia, medidas de tendencia central y de localización

Concepto y clasificación de la estadística

El término estadística se deriva de la palabra estado, en razón a que los gobiernos, para su planificación, han llevado registros de variables como población, nacimientos, muertes, exportaciones, impuestos, producción, entre otros. La estadística es una rama de la matemática que básicamente se dedicaba al análisis de datos con el fin de llegar a conclusiones que apoyen la toma de decisiones, su tarea requiere recolección y organización de datos de tal manera que se facilite su análisis. La estadística se basa en principios y procedimientos relacionados con elaboración de tablas, representación gráfica y expresiones matemáticas asociadas con valores estadísticos. La estadística es una valiosa herramienta de investigación en diversos campos y básicamente se clasifica en dos grandes ramas, la Estadística Descriptiva y la Estadística Inferencial.

Estadística descriptiva

La estadística descriptiva es la rama encargada de tareas de recolección, organización y presentación de datos para ser interpretados y analizados y de ello sacar conclusiones aplicables al grupo del cual se obtienen los datos, y no a la totalidad de casos posibles. Por ejemplo, si la Facultad de Educación de la Fundación Universitaria del Área Andina se interesa en obtener información estadística relacionada con el rendimiento académico de sus estudiantes, puede aplicar procedimientos estadísticos sobre datos de los estudiantes de segundo semestre, el análisis realizado no necesariamente se extiende o generaliza a todos los estudiantes del programa, solo caracteriza al grupo analizado.

Estadística inferencial

Dada la frecuente dificultad para realizar estudios sobre todos los casos posibles, se selecciona un subconjunto de casos, debidamente seleccionados, sobre las cuales es más viable hacer el estudio. La estadística inferencial permite realizar inferencias o deducción razonables respecto a la totalidad de casos posibles con base en los datos obtenidos y la aplicación de sólidos principios de cálculo de probabilidad. Por ejemplo las encuestadoras estudian la preferencia de los ciudadanos sobre los candidatos en una elección; como no es práctico encuestar a todos los votantes, se elige un grupo de ellos, y con base en su análisis plantea generalizaciones.

Conceptos básicos de la estadística

Población

En una investigación estadística la población se refiere a la totalidad de elementos o unidades que forman el área de interés, es el conjunto total de personas, elementos u objetos con características comunes, de los cuales se quiere obtener información. El término población se refiere no sólo a las personas que habitan en una ciudad región.

La población debe estar claramente delimitada en tiempo y espacio, por ejemplo, para hacer un análisis de pequeñas empresas, se debe especificar cuáles son las empresas y el tiempo en se analizan. Una característica importante de la población es su tamaño, que es la cantidad de elementos que la componen.

Muestra

El término muestra en estadística se refiere a una porción de la población seleccionada para hacer una investigación. Se realiza estudios a partir de muestras debido a la dificultad, elevados costos o imposibilidad de considerar toda la población. Otra razón podría ser la naturaleza destructiva de una prueba, por ejemplo, al realizar control de calidad sobre la producción de fósforos, no tendría sentido realizar la prueba sobre todos los elementos producidos. La muestra debe seleccionarse de manera que sea representativa de la población, por ejemplo, en una investigación sobre hábitos de consumo de alcohol, no es apropiado tomar como muestra un grupo de personas en una discoteca, tampoco en un convento o en una comunidad cristiana. La selección de la muestra debe cumplir requisitos asociados con el proceso de muestreo.

Individuo

Un individuo, en un estudio estadístico, es cada una de las unidades de la población. Si la población es la totalidad de personas con empleos formal, un individuo es cualquier persona debidamente empleada. Según esto, la población es la totalidad de individuos.

Variable estadística

En estadística, una variable es una característica de interés de cada individuo, en relación con el estudio, por ejemplo: edad, sexo, estado civil, nacionalidad de una persona, cantidad de lluvia caída, entre otras. Usualmente se representa las variables con letras como X, Y, Z, u otra de mayor significado según el contexto. Las variables toman valores, los cuales se refieren al conjunto de posibles resultados de una observación o medida. Como resultados de las observaciones se obtiene un conjunto de valores de la variable, tales valores obtenidos conforman los datos empleados en el estudio estadístico.

En estadística las variables se clasifican según diferentes criterios, uno de ellos distingue variables cualitativas y cuantitativas, otro distingue variables discretas y continuas. A continuación se presentan conceptos relacionados con ello.

Variables cualitativas

Una variable cualitativa se refiere a una característica cuyo valor puede indicarse a través de una cualidad no cuantificable, por ejemplo, ciudad de nacimiento, ocupación, cargo, de un grupo de personas, entre otras. Una variable cualitativa se puede clasificar según el nivel de escala de medición en nominal y ordinal.

Variables cualitativas nominales

Expresa el valor de una cualidad mediante palabras o nombres que establecen clases o categorías, por ejemplo, la variable Género puede tomar los valores, "hombre" o "mujer"; "masculino" o "femenino"; en el caso de la variable Tipo referida a prendas de vestir, se podría tener valores como "camisa", "pantalón", "corbata", "saco".

Variables cualitativas ordinales

Expresan el valor de una característica mediante palabras o nombres que indican categorías, entre los cuales se puede establecer un orden, por ejemplo la valoración académica de un estudiante puede tomar los valores "Excelente", "Sobresaliente" "Aceptable" e "Insuficiente", a estas categorías se puede asignar un número ("1", "2", "3", "4"), solo con el fin de establecer un orden, sin que realmente tenga significado numérico.

Variables cuantitativas

Una variable cuantitativa hace referencia a una característica cuyos valores pueden darse numéricamente y realizar con ellos operaciones matemáticas ligadas a principios estadísticos. Ejemplos de variables cuantitativas son peso, estatura, salario, entre otras. Los valores pueden incluir una unidad de medida, por ejemplo, metros, días, pesos, entre otras. Estas variables a su vez se clasifican en discretas y continuas.

Variables discretas

Una variable discreta toma sus valores del conjunto de números naturales, usualmente se asume como variable de conteo, a través de la cual no es posible expresar valores fraccionarios. Ejemplos: Número de carros en un parqueadero y Número de hijos.

Variables continuas

Una variable continua toma sus valores del conjunto de números reales, esto significa que su valor puede ser cualquier número comprendido entre dos valores específicos. Ejemplos de variables continuas son peso de un libro, tiempo de duración de una llamada.

Variables cuantitativas de intervalo y de razón

Según la naturaleza de la medida valores, las variables cuantitativas pueden clasificarse según el nivel o escala de valores en nivel de intervalo y nivel de razón o Proporción. La escala de valores de variables de intervalo permite clasificar, ordenar y medir la diferencia entre categorías. Con los valores se puede realizar operaciones matemáticas. En esta escala el valor 0 (cero) es arbitrario y no necesariamente corresponde a "ausencia de". Por ejemplo, una temperatura de 0 grados no significa que no haya temperatura. Por otra parte una variable de nivel de razón se asocia con una escala numérica, pero el valor 0 sí indica ausencia, por ejemplo, el ingreso de agua a un tanque.

Pasos de una investigación estadística

La aplicación de principios de la estadística a un estudio implica la realización de un conjunto de pasos, los principales se describen brevemente a continuación.

Definición de la población o la muestra y obtención de datos

Previo a cualquier otra actividad se debe tener claridad sobre la población o muestra sobre la que se hace el estudio, además se ha de especificar las características a estudiar, es decir las variables. En caso de tomar una muestra, es necesario determinar el tamaño de la misma y el tipo de muestreo a realizar (probabilístico o no probabilístico).

La obtención de datos a partir de la muestra seleccionada o a partir del conocimiento claro de la población, puede realizarse mediante la observación directa de los elementos, la aplicación de encuestas y entrevistas o la realización de experimentos.

Clasificación, tabulación y organización de los datos

La clasificación de datos incluye el tratamiento de los datos considerados anómalos, que pueden en un momento dado falsear el análisis de los mismos. La tabulación implica el resumen de los datos en tablas y gráficos estadísticos.

Análisis de datos y conclusiones

El análisis se completa obteniendo diferentes medidas o indicadores estadísticos, las que al complementarlas con principios probabilísticos, se puede realizar inferencias o sacar conclusiones que finalmente apoyan la toma de decisiones.

Tablas de distribución de frecuencia

Luego de la recolección de datos, se requiere su organización para facilitar la aplicación de principios de cálculos que soportan el análisis. En estadística se destaca las tablas de distribución de frecuencia como elemento de organización de datos. Pero ¿qué se entiende por frecuencia? En estadística el término frecuencia absoluta o simplemente frecuencia se refiere al número de veces que se presenta un valor de la variable, mientras que la frecuencia relativa es la fracción del total de datos que corresponde a un valor, se calcula dividiendo su frecuencia absoluta por el número total de datos.

Mediante una tabla de distribución de frecuencias se resume información de los diferentes valores y el número de veces que ocurren. Según la naturaleza de las variables, se puede elaborar distribuciones de frecuencias para variables cualitativas y cuantitativas.

Ejemplo 7.1. Distribución de frecuencia de una variable cualitativa

En un estudio se quiere analizar el grado de formación de 80 empleados de una mina, se indaga a cada uno sobre la formación académica (variable cualitativa), las posibilidades dadas son: 1: Sin educación formal, 2: Primaria incompleta, 3: Primaria completa, 4: Bachillerato incompleto, 5: Bachillerato completo, 6: Superior incompleta, 7: Superior completa. El resultado de las indagaciones se muestra en la tabla 1.

3	**5**	**1**	**3**	**3**	**3**	**2**	**3**	**3**	**2**	**4**	**3**	**4**	**3**	**4**	**4**	**3**	**4**	**3**	**5**
5	**3**	**4**	**2**	**2**	**3**	**6**	**4**	**7**	**5**	**3**	**6**	**5**	**4**	**3**	**5**	**5**	**5**	**5**	**7**
3	**4**	**4**	**3**	**2**	**3**	**4**	**3**	**4**	**2**	**7**	**2**	**4**	**3**	**6**	**6**	**3**	**4**	**5**	**5**
1	**3**	**4**	**3**	**3**	**5**	**5**	**2**	**4**	**2**	**5**	**5**	**4**	**5**	**7**	**4**	**4**	**4**	**6**	**5**

Tabla 1. datos del ejemplo 7.1
Fuente: Propia.

Se pide una tabla que muestre las frecuencias absoluta y relativa de la variable cualitativa.

Solución:

X	f	f_r
1	2	$\frac{2}{80} = 0{,}025 = 2{,}5\%$
2	9	$\frac{9}{80} = 0{,}1125 = 11{,}25\%$
3	23	$\frac{23}{80} = 0{,}2875 = 28{,}75\%$
4	20	$\frac{20}{80} = 0{,}25 = 25\%$
5	17	$\frac{17}{80} = 0{,}2125 = 21{,}25\%$
6	5	$\frac{5}{80} = 0{,}0625 = 6{,}25\%$
7	4	$\frac{4}{80} = 0{,}05 = 5\%$
	80	

Tabla 2. Distribución de frecuencia del ejemplo 7.1
Fuente: Propia.

El conteo de veces que se da cada valor es su frecuencia absoluta. Si tenemos en cuenta que el total de datos es 80 y si denotamos respectivamente las frecuencias absolutas y relativas mediante f y f_r tenemos la tabla 7.2 para la variable asociada con los números dados a los niveles de formación.

Distribuciones de frecuencia de datos agrupados

Antes de seguir con distribución de frecuencia de variables cuantitativas, tratemos brevemente la notación Sigma. En matemáticas se usa el símbolo (Sigma) para abreviar la suma de un conjunto de términos dependientes de un índice. La siguiente expresión muestra una suma abreviada con la notación sigma y la suma equivalente.

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

La variable es X_i , donde i toma los valores $i=1,2,...n$, entonces X_i toma valores $X_1,X_2,..., X_n$.

Si $X_1=3,\ X_2=7,\ X_3=10,\ X_4=11,\ X_5=8,\ X_6=5,\ X_7=1$, se tiene:

$$\sum_{i=1}^{7} X_i = 3 + 7 + 10 + 11 + 8 + 5 + 1 = 45$$

Usaremos esta notación en diferentes puntos de esta cartilla y la siguiente. Sigamos ahora con conceptos de distribución de frecuencias de datos cuantitativos agrupados.

De las observaciones de la variable se tiene un conjunto de datos originales, si el conjunto de posibles valores es pequeño, 10 o menos, no es difícil hacer la tabla que muestre la frecuencia de cada valor, pero para un gran número de valores y datos totales, es poco práctico presentar la frecuencia de cada valor, en estos casos conviene crear clases o grupos de valores y elaborar una tabla de distribución de frecuencias de datos agrupados que muestre la frecuencia de los grupos.

Definición de número de clases

Para definir el número de clases para agrupar un conjunto de **N** datos, se sugiere tomar un número de clases tal que sea el menor número que cumpla la desigualdad.

$$N \leq 2^c$$

Por ejemplo, para **N = 100** datos se busca el primer número **c** tal que 2^c sea mayor o igual que **100**. Si probamos **c = 6** vemos que **c** es menor que **100** , por tanto probamos **c = 7** , se tiene que el número $2^7=128$ supera a **100**, con lo cual **c = 7** es una razonable posibilidad para el número de clases. Las clases deben ser mutuamente excluyentes y exhaustivas, esto significa que cada valor pertenece a una y sólo una clase.

Frecuencia absoluta y frecuencia relativa de clase

En la tabla creada, la columna de frecuencia absoluta indica cuántos valores de una clase se dan en las observaciones. La frecuencia relativa es entonces el cociente de la respectiva frecuencia absoluta y el número total de datos. Si la frecuencia absoluta de la clase **i** es $\mathbf{f_i}$ y hay un total de **N** datos, la frecuencia relativa $\mathbf{\bar{f}_i}$ de la clase está dada por:

$$\bar{f}_i = \frac{f_i}{N}$$

El estudiante puede ver fácilmente que la suma de todas las frecuencias absolutas es igual al total de datos y la suma de todas las frecuencias relativas es igual a 1, es decir:

$$\sum_{i=1}^{n} f_i = f_1 + f_2 + \cdots + f_n = 1 \qquad (Suma\ de\ frecuencias\ absolutas)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{f}_i = \bar{f}_1 + \bar{f}_2 + \cdots + \bar{f}_n = 1 \qquad (Suma\ de\ frecuencias\ relativas)$$

Frecuencia acumulada y relativa acumulada de una clase

En cálculos estadísticos asociados con variables cuantitativas también es importante el total de frecuencias de esa clase y las clases anteriores, este valor se llama frecuencia absoluta acumulada de la clase, esto significa que la frecuencia acumulada de la clase **k**, denotada con $\mathbf{F_k}$**,** es la suma de las frecuencias absolutas hasta esa clase, es decir:

$$F_k = \sum_{i=1}^{k} f_i = f_1 + f_2 + \cdots + f_k$$

La frecuencia relativa acumulada de la clase **k** es el cociente $\mathbf{\bar{f}_i}$ de la frecuencia acumulada y el número total de datos, para **N** datos su valor está dado por:

$$\bar{F}_k = \frac{F_k}{N}$$

Rango de datos

El rango de datos, de un conjunto dado es la diferencia entre el mayor valor y el menor valor de todos los datos, si en un conjunto de datos el mayor es 95 y el menor es 10, el rango es: **Rango = 95 - 10 = 85.**

Límites de clase

Los límites de clase son los valores extremos que definen una clase, se identifica en ellos el límite inferior (mayor valor posible en la clase) y el límite superior. Se eligen de tal forma que un valor dado pertenezca a una y solo una clase, en el caso de distribuciones de frecuencias de variables continuas se debe tener el cuidado de especificar si un extremo dado pertenece o no a la clase, para ello se puede emplear la notación de intervalos.

Amplitud o ancho de clase

La amplitud es una medida del rango de valores de la clase. No es obligatorio que todas las clases tengan igual amplitud, pero lo usual es definirlo así para facilitar los cálculos. Su valor se halla a partir del rango de datos y el número de clases mediante la expresión:

$$\boldsymbol{Amplitud\ de\ clase = \Delta C = \frac{Rango}{N\acute{u}mero\ de\ clases} = \frac{R}{c}}$$

En la práctica se aproxima la amplitud a un valor mayor de fácil manejo. Por ejemplo, si hay 120 datos donde el mayor 224 y el menor es 97, el rango es entonces 127. Si el número de clases es **c = 7**, el cálculo inicial para la amplitud de clase es:

$$\boldsymbol{\Delta C = \frac{R}{c} = \frac{127}{7} = 18{,}1428}$$

Un valor más apropiado podría ser $\boldsymbol{\Delta C = 20}$.

Cuando la tabla de distribución de frecuencias ya está definida, podemos identificar la amplitud de la primera a la penúltima clase, restando el límite inferior de la respectiva clase al límite inferior de la siguiente, también se puede hallar la de la segunda a la última restando el límite superior de la clase anterior al límite superior de la respectiva clase.

Hay situaciones en las que a la primera clase no se le defina límite inferior o a la última no se le defina límite superior, por ejemplo con los rangos de edades podría tener las siguientes clases: de 0 a 5 años; de 6 a 12 años; de 13 a 25 años; de 26 años o más.

Marca o punto medio de una clase

La marca de una clase es el valor que se encuentra en la mitad del intervalo de valores de la clase y se considera como su valor representativo. En este curso la marca de clase **i** se representa mediante el símbolo $\bar{\mathbf{X}}_i$ y se calcula promediando los valores extremos de la clase. En la tabla de distribución de frecuencia, usualmente a la derecha de la columna de los intervalos de clase, se agrega otra columna para registrar las marcas de las clases.

Ilustramos el uso de estos principios mediante los siguientes ejemplos, el ejemplo xx se refiere a una variable discreta y el xx a una variable continua.

Ejemplo 7.2: a 150 estudiantes de una universidad se les pregunta sobre la cantidad de obras literarias que han leído a lo largo de su vida, los correspondientes conjuntos de datos originales se muestran en la tabla 7.3. Con tal información se pide construir la tabla de distribución de frecuencias que muestre la marca de clase, las frecuencias absolutas, relativa, absoluta acumulada y relativa acumulada.

Solución: Veamos los pasos para la elaborar la distribución de frecuencias.

Cantidad de clases: El total de datos es $\mathbf{N = 150}$, el apropiado número de clases es $\mathbf{c = 8}$ ya que $\mathbf{2^8}$ es la primera potencia de **2** que supera a **150**.

24	**96**	**83**	**54**	**85**	**51**	**85**	**69**	**25**	**49**	**30**	**75**	**33**	**58**	**60**
84	**63**	**28**	**34**	**76**	**85**	**31**	**97**	**28**	**74**	**71**	**23**	**53**	**63**	**55**
38	**33**	**52**	**41**	**79**	**84**	**60**	**51**	**62**	**30**	**40**	**87**	**25**	**58**	**32**
83	**78**	**31**	**28**	**40**	**97**	**55**	**56**	**80**	**32**	**59**	**92**	**39**	**91**	**52**
81	**85**	**96**	**32**	**97**	**38**	**49**	**73**	**97**	**88**	**65**	**47**	**89**	**32**	**53**
44	**52**	**37**	**76**	**79**	**54**	**80**	**62**	**48**	**58**	**25**	**85**	**24**	**33**	**62**
40	**47**	**81**	**32**	**33**	**62**	**96**	**31**	**96**	**57**	**57**	**29**	**76**	**86**	**53**
96	**87**	**37**	**32**	**31**	**74**	**42**	**67**	**73**	**85**	**57**	**27**	**70**	**51**	**75**
95	**86**	**36**	**44**	**38**	**93**	**33**	**27**	**45**	**97**	**53**	**96**	**78**	**42**	**89**
43	**28**	**32**	**40**	**95**	**43**	**64**	**61**	**53**	**86**	**26**	**95**	**72**	**53**	**53**

Tabla 3. Datos del ejemplo 7.2
Fuente: Propia.

Rango de datos: el tabla de datos muestra que el mayor valor 97, el menor 20, por lo tanto el rango **R = 97 - 24 = 73.**

Amplitud de clases: como se crean 8 clases la amplitud de clases se toma a partir de:

$$\Delta C = \frac{73}{8} = 9,125$$

Un valor conveniente al cual aproximar la amplitud de clase es . $\Delta C = 10.$

Definición de los límites de clase y conteo de valores: Dada la amplitud y cantidad de clases, los límites se eligen sin que necesariamente sean valores reales de datos; la primera clase puede iniciar en un valor menor que el menor real y la última puede terminar en uno mayor que el mayor real. En este caso, como los valores son algo mayores que 20 y menores que 100 se toma las clases indicadas en la tabla 7.4, que muestra también marcas de conteo de valores de cada clase.

Clase i	X	Conteo
1	20 − 29	//// //// //// // =14
2	30 − 39	//// //// //// //// //// //// // = 26
3	40 − 49	//// //// //// //// / = 17
4	50 - 59	//// //// //// //// //// //// / = 25
5	60 - 69	//// //// //// / = 13
6	70 - 79	//// //// //// //// = 16
7	80 − 89	//// //// //// //// //// // =22
8	90 − 99	//// //// //// //// / = 17

Tabla 4. Clases y conteo del ejemplo 7.2
Fuente: Propia.

Elaboración de la tabla de distribución de frecuencias: con las clases definidas y el conteo realizado, se presenta la distribución de frecuencias en la tabla 7.5.

i	X	$\bar{X}_i$	f_i	$\bar{f}_i$	F	$\bar{F}_i$
1	20 − 29	24,5	14	0,0933 ...	14	0,0933 ...
2	30 − 39	34,5	26	0,1733 ...	40	0,2666 ...
3	40 − 49	44,5	17	0,1133 ...	57	0,38
4	50 - 59	54,5	25	0,1666 ...	82	0,5466 ...
5	60 - 69	64,5	13	0,0866 ...	95	0,6333 ...
6	70 - 79	74,5	16	0,1066 ...	111	0,74
7	80 − 89	84,5	22	0,1466 ...	133	0,8866 ...
8	90 − 99	94,5	17	0,1133 ...	150	1

Tabla 5. Distribución de frecuencias del ejemplo 7.2
Fuente: Propia.

La primera columna muestra los índices, la segunda da las clases, la columna 3 muestra las marcas de clase, las columnas 4 a 7 dan las frecuencias absolutas, relativas, absoluta acumulada y relativa acumulada

Ejemplo 7.3: en estudios oftalmológicos se realizan pruebas respecto al tiempo entre parpadeo de los pacientes. Un estudio particular toma datos de 200 pacientes, estos tiempos están dados en segundos y aparecen en la siguiente tabla. A partir de tales datos se pide elaborar la tabla de distribución de frecuencias.

11,064	**19,12**	**12,174**	**11,229**	**8,12**	**16,322**	**19,013**	**16,29**	**15,767**	**17,692**
6,156	**15,45**	**5,499**	**18,865**	**6,749**	**15,758**	**8,784**	**13,941**	**5,774**	**12,771**
9,643	**17,02**	**16,952**	**11,522**	**13,133**	**19,862**	**6,447**	**18,776**	**12,591**	**15,809**
8,04	**12,17**	**9,927**	**15,017**	**8,267**	**18,971**	**19,142**	**12,208**	**9,631**	**18,928**
13,343	**11,12**	**10,132**	**13,556**	**12,44**	**13,737**	**16,767**	**19,511**	**13,504**	**13,961**
7,396	**15,67**	**19,052**	**19,534**	**17,212**	**15,427**	**13,438**	**19,834**	**5,959**	**19,253**
5,753	**11,8**	**13,49**	**15,928**	**12,57**	**15,842**	**6,047**	**6,627**	**12,602**	**9,522**
14,427	**9,204**	**10,62**	**8,998**	**19,432**	**13,752**	**16,03**	**16,565**	**13,564**	**9,494**
12,569	**15,68**	**10,444**	**7,337**	**11,21**	**19,901**	**10,378**	**13,217**	**6,917**	**9,459**
5,359	**8,93**	**13,086**	**11,137**	**13,131**	**7,394**	**10,873**	**11,017**	**13,565**	**19,008**
18,595	**12,08**	**16,65**	**11,495**	**6,512**	**15,339**	**19,219**	**13,722**	**8,761**	**5,973**
6,638	**12,26**	**16,9**	**14,286**	**6,078**	**10,897**	**18,537**	**11,734**	**9,02**	**17,415**
18,965	**6,674**	**7,754**	**14,509**	**19,811**	**11,159**	**13,017**	**14,349**	**10,621**	**13,57**
16,794	**17,91**	**14,088**	**16,872**	**6,116**	**12,842**	**8,153**	**17,591**	**12,17**	**13,509**
14,921	**5,623**	**9,071**	**16,606**	**5,614**	**6,826**	**6,531**	**11,322**	**8,736**	**9,007**
6,485	**7,125**	**14,577**	**18,015**	**19,864**	**15,613**	**9,619**	**9,357**	**11,098**	**13,42**
8,689	**11,16**	**16,193**	**15,96**	**8,727**	**12,816**	**9,207**	**14,548**	**17,733**	**13,767**
18,581	**14,69**	**5,931**	**12,138**	**15,278**	**14,849**	**9,682**	**5,732**	**8,438**	**13,003**
15,231	**14,71**	**11,772**	**15,236**	**17,248**	**13,036**	**18,877**	**6,66**	**17,056**	**12,821**
16,999	**15,18**	**9,061**	**13,791**	**19,673**	**18,098**	**11,395**	**8,382**	**15,813**	**18,083**

Tabla 5. Datos del ejemplo 7.3
Fuente: Propia.

Solución: a continuación, se tiene los pasos a seguir.

Cantidad de clases: con un total de datos **N = 200** , razonamiento similar al del ejemplo anterior se encuentra que **c = 8** es un apropiado número de clases.

Rango de datos: según los datos de la tabla, el mayor valor es **X = 19,901**, y el menor es **X = 5,359**, lo que da un valor para el rango dado por: **R = 19,901 - 5,359 = 14,542** .

Amplitud de clases: Con 8 clases y rango de 14,542, inicialmente para la amplitud es:

$$\Delta C = \frac{14,542}{8} = 1,81775, \quad \text{se aproxima a } \Delta C = 2$$

Definición de los límites de clase y conteo de valores: aquí es pertinente tomar clases cuyos límites inferiores sean 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 y 18. La tabla xx muestra el conteo y clases usando notación de intervalos. El corchete indica que el extremo pertenece a la clase, el paréntesis indica que el extremo no pertenece a la clase.

Clase i	X	Conteo
1	$[4,6)$	//// //// // =10
2	$[6,8)$	//// //// //// //// //// =20
3	$[8,10)$	//// //// //// //// //// //// //// =28
4	$[10,12)$	//// //// //// //// //// /// =23
5	$[12,14)$	//// //// //// //// //// //// //// //// //// //// =40
6	$[14,16)$	//// //// //// //// //// //// //// / =29
7	$[16,18)$	//// //// //// //// //// // =22
8	$[18,20)$	//// //// //// //// //// //// //// =28

Tabla 6. Clases y conteo del ejemplo 7.3
Fuente: Propia.

Elaboración de la tabla de distribución de frecuencias: Las columnas de tabla 7.7 muestran los índices, las clases, marcas de clase y las frecuencias absolutas y relativas.

Clase i	X	$\bar{X}_i$	f_i	$\bar{f}_i$	F	$\bar{F}_i$
1	$[4,6)$	5	10	0,05	10	0,05
2	$[6,8)$	7	20	0,1	30	0,5
3	$[8,10)$	9	28	0,14	58	0,29
4	$[10,12)$	11	23	0,115	81	0,405
5	$[12,14)$	13	40	0,2	121	0,605
6	$[14,16)$	15	29	0,145	150	0,75
7	$[16,18)$	17	22	0,11	172	0,86
8	$[18,20)$	19	28	0,14	200	1

Tabla 7. Distribución de frecuencia del ejemplo 7.3
Fuente: Propia.

Medidas de tendencia central

En estadística es usual describir el conjunto de datos de la manera más resumida posible, por ejemplo, con un número que brinde información valiosa sobre todo el grupo. Para tal fin no se sería pertinente tomar el valor más elevado ni el más pequeño como único representante. Una solución habitual es buscar un valor central. Las medidas que describen un valor típico en un grupo de datos suelen llamarse medidas de tendencia central. Se recalca que son medidas aplicables al conjunto de datos y no a datos individuales, sus valores se pueden calcular para datos originales y datos agrupados.

La media aritmética o promedio

La media aritmética o promedio es la medida de tendencia central más conocida, sólo se calcula para variables cuantitativas. Habitualmente se usa $\bar{X}$ para denotar la media muestral, o promedio de datos de una muestra, y μ para la media poblacional, o promedio de datos de una población, aunque la fórmula de cálculo es la misma.

Cálculo de la media aritmética de datos originales

La media aritmética de datos originales se calcula como el cociente de la suma de todos los valores y el número total de datos. Es decir, si el número total de datos es y los valores son $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$, la media aritmética para los datos originales está dada por:

$$\bar{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{N}$$

Ejemplo 7.4: calcular la media aritmética de un conjunto de datos correspondiente a la edad de una muestra de 15 personas. Las edades son las siguientes.

13	16	13	15	18	18	16	15	16	16	18	15	15	19	17

Solución: La media aritmética está dada por:

$$\bar{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i$$

$$\bar{X} = \frac{13+16+13+15+18+18+16+15+16+16+18+15+15+19+17}{15} = \frac{240}{15} = 16$$

Cálculo de la media aritmética para datos agrupados

A partir de la distribución de frecuencias de un conjunto de datos agrupados de una variable **X**, la media aritmética se calcula con base en los valores de las marcas de clase y las frecuencias absolutas de clases. Su valor está dado por la expresión.

$$\bar{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} X_i \cdot f_i$$

Donde **N** es el total de datos, **n** es el número de clases, $\overline{\mathbf{X}}_{\mathbf{i}}$ es la marca de la **i - esima** clase y $\mathbf{f}_{\mathbf{i}}$ es su frecuencia.

Ejemplo 7.5: hallar la media aritmética de datos agrupados del ejemplo 7.2 sobre el número de obras literarias leídas por 150 estudiantes.

Solución: la tabla xx muestra columnas para las clases, marcas de clase, frecuencia absoluta y el producto de marcas de clases y las respectivas frecuencias, al final de la columna se ve la suma de los productos. Esta es una forma ordenada de proceder.

Clase i	X	$\overline{X}_i$	f_i	$\overline{X}_i \cdot f_i$
1	$20 - 29$	$24,5$	14	343
2	$30 - 39$	$34,5$	26	897
3	$40 - 49$	$44,5$	17	$756,5$
4	$50 - 59$	$54,5$	25	$1362,5$
5	$60 - 69$	$64,5$	13	$838,5$
6	$70 - 79$	$74,5$	16	1192
7	$80 - 89$	$84,5$	22	1859
8	$90 - 99$	$94,5$	17	$1606,5$
				$\sum_{i=1}^{8} \overline{X}_i \cdot f_i = 8855$

Tabla 8. Tabla auxiliar para el cálculo de la media aritmética del ejemplo 7.5
Fuente: Propia.

Como el total de datos es **N = 150**, la media aritmética con estas 8 clases de datos es:

$$\bar{X} = \frac{1}{150}\sum_{i=1}^{8} \overline{X}_i \cdot f_i = \frac{1}{150}(8855) = 59,033$$

Ejemplo 7.6: hallar la media aritmética de datos agrupados del ejemplo 7.3 sobre el tiempo entre parpadeo de 200 pacientes en un estudio oftalmológico.

Solución: procediendo de manera similar al ejemplo anterior, se tiene la tabla 7.9.

Clase i	X	$\overline{X_i}$	f_i	$\overline{X_i}.f_i$
1	$[4,6)$	5	10	50
2	$[6,8)$	7	20	140
3	$[8,10)$	9	28	252
4	$[10,12)$	11	23	253
5	$[12,14)$	13	40	520
6	$[14,16)$	15	29	435
7	$[16,18)$	17	22	374
8	$[18,20)$	19	28	532
				$\sum_{i=1}^{8} \overline{X_i}.f_i = 2556$

Tabla 9. Tabla auxiliar para el cálculo de la media aritmética del ejemplo 7.6
Fuente: Propia.

Con **N = 200** y la suma de productos de la última columna la media aritmética es:

$$\overline{X} = \frac{1}{200}\sum_{i=1}^{8} \overline{X_i}.f_i = \frac{1}{200}(2556) = 12,78$$

La mediana

La mediana, representada con **M_e** es la medida de tendencia central correspondiente al valor que ocupa la posición central del conjunto de datos ordenados. La mediana divide el conjunto en dos partes iguales, se calcula para datos originales y agrupados.

Cálculo de la mediana para datos originales

La mediana de datos originales, se halla ordenando los datos y viendo cuál ocupa la posición central. Para un número par de datos, se promedia los dos valores centrales.

Ejemplo 7.7: los once números 23, 18, 7, 8, 20, 9, 15, 8, 12, 18, 21 son datos de un simple estudio estadístico, los datos ordenados son 7, 8, 8, 9, 12, 15, 18, 18, 20, 21, 23. Fácilmente se ve que, al ocupar la sexta posición, el número 15 corresponde a la mediana. Hay el mismo número de observaciones antes y después del 15.

Ejemplo 7.8: los diez números 52, 73, 76, 78, 84, 86, 89, 90, 92, 95 son datos ordenados en un estudio, en este conjunto ordenado los valores escritos en rojo (posiciones quinta y sexta) están en la mitad del conjunto, entonces la mediana será el promedio de ellos dos, es decir: **85**.

Cálculo de la mediana para datos agrupados

Con datos agrupados se tiene el concepto de clase mediana, que es la clase donde la frecuencia acumulada alcanza la mitad del total de datos, es decir **N/2** para un total de **N** datos. Una vez identificada la clase mediana se identifican los siguientes elementos:

$$L_{in} = \textbf{\textit{límite Inferior de la clase Mediana.}}$$
$$f_M = \textbf{\textit{Frecuencia absoluta de la clase mediana.}}$$
$$F_{M-1} = \textbf{\textit{Frecuencia acumulada de la clase anterior la clase Mediana.}}$$
$$\Delta C_M = \textbf{\textit{Amplitud de la clase Mediana.}}$$

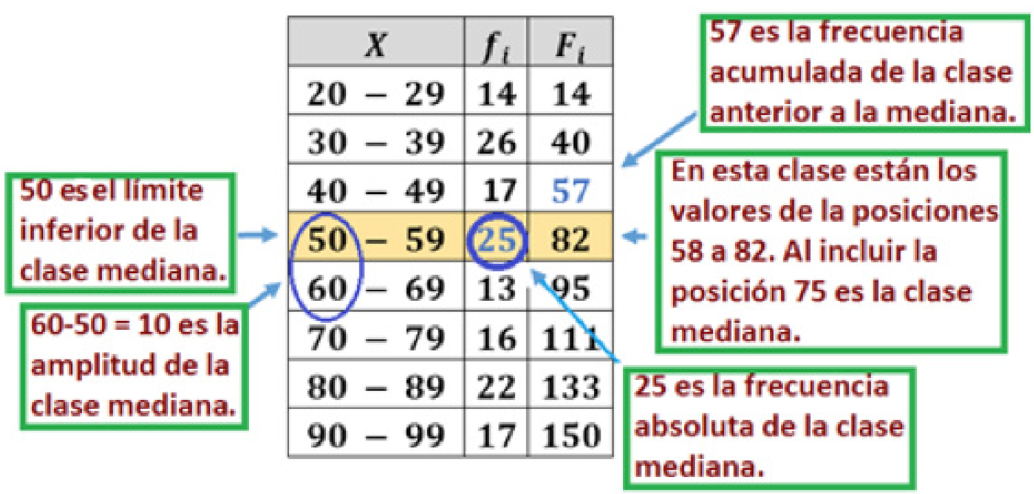
Con base en lo anterior, la mediana se calcula a través de la siguiente expresión:

$$M_e = L_{in} + \frac{\frac{N}{2} - F_{M-1}}{f_M}.(\Delta C_M)$$

Ejemplo 7.9: calcular la mediana del conjunto de datos agrupados del ejemplo 7.2.

Solución:

En la tabla 7.5 se identifica los elementos requeridos para calcular la mediana, los cuales se resaltan en la figura 7.1. Con 150 datos, la mitad de la frecuencia absoluta acumulada es 75, ese valor se alcanza en la cuarta clase, la señalada como clase mediana.



X	f_i	F_i
20 − 29	14	14
30 − 39	26	40
40 − 49	17	57
50 − 59	25	82
60 − 69	13	95
70 − 79	16	111
80 − 89	22	133
90 − 99	17	150

Figura 1: Resumen de elementos para hallar mediana del ejemplo 7.2
Fuente: Propia.

Por lo tanto el valor de la mediana está dado por:

$$M_e = L_{in} + \frac{\frac{N}{2} - F_{M-1}}{f_M}.(\Delta C_M) = 50 + \frac{\frac{150}{2} - 57}{25}.(10) = 50 + \frac{75 - 57}{25}.(10) = 57,2$$

Estadísticamente hablando esto significa que el 50% de los estudiantes.

La moda

En un conjunto de datos, la moda corresponde al valor que se da con mayor frecuencia, se representa mediante el símbolo $\mathbf{M_0}$. Por ejemplo, en el conjunto 2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, el valor que más se da es el 4, por tanto, es la moda del conjunto. En el caso de datos no agrupados, con dos o más valores con la mayor frecuencia se dice que el conjunto es multimodal. También hay casos de conjuntos en los que no hay un valor que se pueda considerar como moda.

Cálculo de Moda de datos agrupados con iguales amplitudes

Para datos agrupados, con clases de igual amplitud se identifica la clase modal como la de mayor frecuencia, luego se identifica los elementos usados en el cálculo, estos son:

$L_{M_o} = \text{Límite inferior de la clase modal.}$

$f_{M_o} = \text{Frecuencia absoluta de la clase modal.}$

$f_{M_o-1} = \text{Frecuencia absoluta de la clase anterior a la modal .}$

$f_{M_o+1} = \text{Frecuencia absoluta de la clase posterior a la modal.}$

$\Delta C = \text{Amplitud de clases.}$

Habiendo identificado estos elementos, la moda se calcula con la siguiente fórmula:

$$M_o = L_{M_o} + \frac{(f_{M_o} - f_{M_o-1}).\Delta C}{(f_{M_o} - f_{M_o-1}) + (f_{M_o} - f_{M_o+1})}$$

Una fórmula aproximada aunque más sencilla es la siguiente:

$$M_o = L_{M_o} + \frac{f_{M_o-1}.\Delta C}{f_{M_o-1} + f_{M_o+1})}$$

Ejemplo 7.10: calcular el valor de la Moda del conjunto de datos del ejemplo 7.2

Solución

Con base la distribución de frecuencias de los datos, incluida en la figura 7.2, se identifica los elementos requeridos para el cálculo de la Moda. En este ejemplo la amplitud de clases es **ΔC = 10.** El cálculo correspondiente es:

	X	f_i	
	20 - 29	14	$f_{M_o-1} = 14$
Clase modal. $L_{M_o} = 30$	30 - 39	26	$f_{M_o} = 26$
	40 - 49	17	$f_{M_o+1} = 17$
	50 – 59	25	
	60 – 69	13	
	70 – 79	16	
	80 – 89	22	
	90 – 99	17	
	Total	$N = 150$	

Figura 2. Elementos para el cálculo de la moda del ejemplo 7.2
Fuente: Propia.

$$M_o = L_{M_o} + \frac{(f_{M_o} - f_{M_o-1}).\Delta C}{(f_{M_o} - f_{M_o-1}) + (f_{M_o} - f_{M_o+1})} = 30 + \frac{(26 - 14).10}{(26 - 14) + (26 - 17)} == 35,714$$

Utilizando la fórmula aproximada se tiene:

$$M_o = L_{M_o} + \frac{f_{M_o+1}.\Delta C}{f_{M_o-1} + f_{M_o+1})} = 30 + \frac{(17).(10)}{14 + 17} = 30 + \frac{170}{31} = 30 + 5,483 = 35,483$$

Con la fórmula más sencilla se tiene un resultado muy parecido al de la formula completa.

Medidas de localización

La media de localización determina la ubicación de los datos dividiendo un conjunto de observaciones en partes iguales. Estas medidas son los cuartiles, deciles y percentiles.

Cuartiles

Los cuartiles son tres medidas de posición $\mathbf{Q_1,Q_2,Q_3}$ que dividen un conjunto ordenado de datos en cuatro partes iguales. La figura 7.3 ilustra la analogía entre cuartiles y mediana. Vemos que la mediana es igual al segundo cuartil.

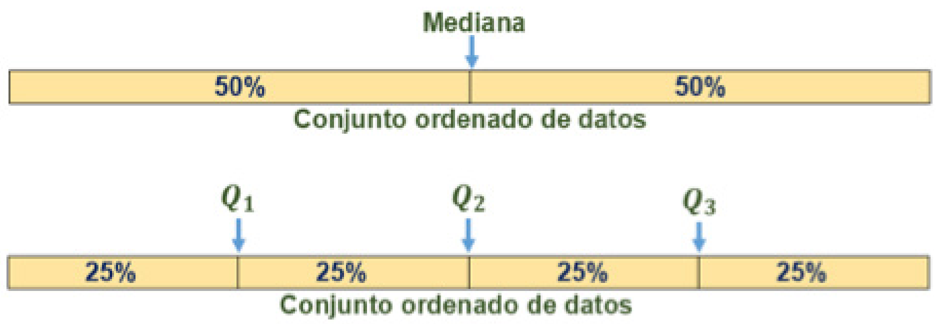


Figura 3. Ilustración de la idea de cuartiles y su relación con la mediana
Fuente: Propia.

El primer cuartil $\mathbf{Q_1}$ es el valor por debajo del cual está el 25% de los datos, $\mathbf{Q_2}$ es la misma mediana, $\mathbf{Q_3}$ es el valor por debajo del cual se está el 75% de observaciones. El uso de cuartiles es importante cuando se tiene una gran cantidad de datos.

Calculo de cuartiles para datos agrupados

Con base en una tabla de distribución de frecuencias, los cuartiles se calculan a partir de la siguiente fórmula genérica:

$$Q_k = L_i + \frac{\left(\frac{kN}{4} - F_{i-1}\right)(\Delta C_i)}{f_i} \qquad con\ k = 1, 2, 3$$

Se debe tener claridad sobre cuál de los cuartiles se ha de calcular. Remplazando en la fórmula el valor de **k** por **1,2** y **3**, se obtiene las fórmulas para cada cuartil. El cálculo es similar a la mediana, se debe identificar la clase del cuartil y otros elementos asociados.

El primer cuartil está en la clase en que la frecuencia acumulada alcanza la cuarta parte de los datos, o sea N/4 (con k=1), el segundo está en la clase en que la frecuencia acumulada alcanza la mitad de datos,(2N/4), el tercero está donde la frecuencia acumulada alcanza tres cuartas partes de datos, (3N/4). Identificada la clase del cuartil se tiene:

$$L_i = \text{Límite inferior de la clase del cuartil.}$$
$$F_{i-1} = \text{Frecuencia acumulada de la clase anterior a la del cuartil.}$$
$$f_i = \text{Frecuencia de la clase del cuartil.}$$
$$\Delta C = \text{Amplitud de la clase del cuartil.}$$

Ejemplo 7.11: un estudio sobre aptitudes de manejo de principios de Estadística se hace sobre una población de 960 estudiantes, las puntuaciones se dan en enteros de 1 a 100. La entidad responsable del estudio agrupa los datos en 10 clases, al elaborar la distribución de frecuencias absolutas y frecuencias acumuladas obtiene la siguiente tabla:

i	X	f_i	F_i
1	1 - 10	37	37
2	11 - 20	67	104
3	21 - 30	90	194
4	31 - 40	133	327
5	41 - 50	165	492
6	51 - 60	155	647
7	61 - 70	127	774
8	71 - 80	94	868
9	81 - 90	55	923
10	9 - 100	37	960

Tabla 10. Tabla de distribución de frecuencia del ejemplo 7.11
Fuente: Propia.

Con la información de la tabla 10 se pide hallar el primer cuartil de conjunto de datos.

Solución:

El total de datos es **N = 960**, por tanto la posición del primer cuartil es 960/4 = 240. La columna de frecuencias acumulada muestra que la posición **240** está en la cuarta clase.

i	X	f_i	F_i	
1	1 - 10	37	37	
2	11 - 20	67	104	
3	21 - 30	90	194	$F_{1-1} = 194, \quad \Delta C_i = 10$
4	31 - 40	133	327	Clase Q_1, $L_i = 31, f_i = 133$
5	41 - 50	165	492	
6	51 - 60	155	647	
7	61 - 70	127	774	
8	71 - 80	94	868	
9	81 - 90	55	923	
10	9 - 100	37	960	

Figura 4. Elementos para el cálculo del primer cuartil del ejemplo 7.11
Fuente: Propia.

$$Q_1 = L_i + \frac{\left(\frac{1 * N}{4} - F_{i-1}\right)(\Delta C_i)}{f_i} = 31 + \frac{\left(\frac{960}{4} - 194\right)(10)}{133}$$

$$Q_1 = 31 + \frac{(240 - 194)(10)}{133} = 31 + \frac{460}{133} = 31 + 3,458 = 34,458$$

Deciles

Los deciles son nueve medidas de localización **D_1, D_2, ...D_9** que dividen un conjunto ordenado de datos en diez partes iguales. El primer decil **(D_1)**es el valor por debajo del cual se encuentra el 10% de los datos, el decil **D_2** es el valor por debajo del cual se encuentra el 20% de datos y así sucesivamente. Se usa el cálculo de deciles cuando se tiene un gran número de datos.

Calculo de deciles para datos agrupados

A partir de la distribución de frecuencias, hallamos los deciles usando la siguiente fórmula:

$$D_k = L_i + \frac{\left(\frac{kN}{10} - F_{i-1}\right)(\Delta C_i)}{f_i} \qquad con\ k = 1, 2, \dots, 9$$

Donde:

$$L_i \ = \ Límite\ inferior\ de\ la\ clase\ del\ decil.$$
$$F_{i-1} \ = \ Frecuencia\ acumulada\ de\ la\ clase\ anterior\ a\ la\ del\ decil.$$
$$f_i = \ Frecuencia\ de\ la\ clase\ del\ decil.$$
$$\Delta C \ = \ Amplitud\ de\ la\ clase\ del\ decil.$$

Para calcular cualquier decil, primero se debe identificar la clase en la que está el decil y los otros elementos requeridos para el cálculo. El primer decil se encuentra en la clase donde la frecuencia acumulada alcanza la décima parte del total de datos, es decir el valor , el segundo está en la clase donde tal frecuencia alcanza a ser . En general, el decil está en la clase donde la frecuencia acumulada alcanza el valor .

Ejemplo 7.12: a partir de los datos de ejemplo 7.11, hallar el sexto decil.

Solución:

Para el sexto decil **(k = 6)** la clase que lo contiene es aquella en que la frecuencia acumulada alcanza el valor **kN/10 = (6)(960)/10 = 576**, esta es la sexta clase. Ahora veamos la distribución de frecuencia señalando además la información requerida para el cálculo.

i	X	f_i	F_i	
1	1 - 10	37	37	
2	11 - 20	67	104	
3	21 - 30	90	194	
4	31 - 40	133	327	
5	41 - 50	165	492	$F_{i-1} = 492, \quad \Delta C_i = 10$
6	51 - 60	155	647	Clase de $D_{10}, \ L_i = 51, \ f_i = 155$
7	61 - 70	127	774	
8	71 - 80	94	868	
9	81 - 90	55	923	
10	9 - 100	37	960	

Figura 5. Elementos para el cálculo del sexto decil del ejemplo 7.12
Fuente: Propia.

Cálculo del sexto decil: la fórmula genérica es:

$$D_k = L_i + \frac{\left(\frac{kN}{10} - F_{i-1}\right)(\Delta C_i)}{f_i}$$

Para el sexto decil se toma y los datos antes identificados, con lo cual se tiene:

$$D_6 = 51 + \frac{\left(\frac{(6).(960)}{10} - 492\right)(10)}{155} = 51 + \frac{(576 - 492)(10)}{155} = 51 + \frac{840}{155} = 56,419$$

Percentiles

Los percentiles son un conjunto de 99 medidas de localización , que dividen un conjunto ordenado de datos en 100 partes iguales. El primer decil (es el valor por debajo del cual se encuentra el 1% de las observaciones, el segundo decil es el valor por debajo del cual se encuentra el 2% de las observaciones y así sucesivamente.

Cálculo de percentiles para datos agrupados

A partir de la distribución de frecuencias el percentil se halla con la siguiente formula:

$$P_k = L_i + \frac{\left(\frac{kN}{100} - F_{i-1}\right)(\Delta C_i)}{f_i}$$

Donde:

$$\begin{aligned}
&L_i = \textit{Límite inferior de la clase del percentil.}\\
&F_{i-1} = \textit{Frecuencia acumulada de la clase anterior a la del percentil.}\\
&f_i = \textit{Frecuencia de la clase del percentil.}\\
&\Delta C = \textit{Amplitud de la clase del percentil.}
\end{aligned}$$

Para aplicar la formula, como en el caso de los cuartiles y los deciles, primero se debe identificar la clase en la que se ubica el percentil buscado. El percentil **k** está en la clase cuya frecuencia acumulada alcanza el valor **kN/100**

Ejemplo 7.13: hallar el percentil 45 a partir de los datos del ejemplo 7.11.

Solución:

Con **k = 45**, la clase que contiene a $\mathbf{P_{45}}$ es aquella en la que la frecuencia acumulada alcanza el valor **kN/100 = (45)(960)/100 = 432,** esta es la quinta clase. A continuación se muestra la distribución de frecuencia señalando además la información requerida para el cálculo.

i	X	f_i	F_i	
1	1 - 10	37	37	
2	11 - 20	67	104	
3	21 - 30	90	194	
4	31 - 40	133	327	$F_{i-1} = 327,\quad \Delta C_i = 10$
5	41 - 50	165	492	Clase de P_{45}, $L_i = 41$, $f_i = 165$
6	51 - 60	155	647	
7	61 - 70	127	774	
8	71 - 80	94	868	
9	81 - 90	55	923	
10	9 - 100	37	960	

Figura 6. Elementos para el cálculo de decil 45 del ejemplo 7.13
Fuente: Propia.

Cálculo del percentil 45: La fórmula genérica es:

$$P_k = L_i + \frac{\left(\frac{kN}{100} - F_{i-1}\right)(\Delta C_i)}{f_i}$$

Para el percentil 45 se toma   y los datos antes identificados, con lo cual se tiene:

$$P_6 = 41 + \frac{\left(\frac{(45).(960)}{100} - 327\right)(10)}{165} = 41 + \frac{(432 - 327)(10)}{165} = 41 + \frac{1050}{165} = 47,363$$

Este valor indica que el 45% de los estudiantes con menores puntajes tienen un valor máximo de 47,363.

Unidad 4

Medidas de dispersión

Matemáticas para educación

Autor: Danilo Ariza

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina
MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Introducción

En la cartilla de la semana 7 estudiamos los conceptos y principios relacionados con distribuciones de frecuencia, medidas de tendencia central, medidas de localización y la importancia de estas medidas en la descripción resumida de un conjunto de datos estadísticos, sin embargo, el uso de medidas de tendencia central no resulta suficiente en la caracterización apropiada de los datos ya que no dan indicación de la variabilidad de los mismos y por ende podrían no ser el completo soporte de conclusiones que apoyen la toma de decisiones. En la presente cartilla se estudia las medidas de dispersión, centrándose en los conceptos generales y en el cálculo de las respectivas medidas para el caso de datos no agrupados. Aunque existen otras medidas de dispersión, el estudio se limita a la Varianza, la Desviación Estándar y el Coeficiente de variación. El desarrollo de la temática se respalda con ejemplos que ilustran el uso de las fórmulas de cálculo y la interpretación de los resultados.

U4 Metodología

Es responsabilidad del estudiante realizar la lectura de esta cartilla muy cuidadosamente. Teniendo en cuenta que el contenido aquí versa principalmente sobre principios de cálculo de medidas de dispersión de datos no agrupados, cuya temática está fuertemente marcada por cálculos numéricos, se recomienda que realice los repasos y refuerzos requeridos antes de enfrentase a ellos. Específicamente se requiere total claridad de las distribuciones de frecuencias, ya que los elementos de las mismas son el soporte para realizar los cálculos de la varianza, la desviación estándar y el coeficiente de variación. Se recomienda la verificación de los cálculos numéricos presentados, teniendo especial cuidado con las sumas de cuadrados y cuadrados de sumas. De ser posible el estudiante debe valerse de una herramienta informática de hoja de cálculo que le ayude con los cálculos, o si lo prefiere, desarrollarlos a mano con lápiz y papel. Todo lo anterior, además de contribuir a afianzar el conocimiento del tema, le brinda la posibilidad de tomar mayor confianza en su proceso de formación.

Medidas de dispersión

Medidas de dispersión o de variabilidad de datos

Para iniciar el estudio de las medidas de dispersión consideremos los puntajes datos de la tabla 1 sobre puntajes obtenidos en una prueba de aptitud matemática por dos grupos de estudiantes.

Puntajes Grupo A		**69**	**72**	**69**	**73**	**69**	**68**	**68**	**70**	**73**	**69**
Puntajes Grupo B		**91**	**90**	**47**	**50**	**90**	**88**	**45**	**87**	**70**	**42**

Tabla 1. Datos de dos grupos de igual promedio

Usted como estudiante puede verificar que la media de ambos grupos es 70, pero al vemos también que las diferencias de los datos del Grupo A en relación con la media son relativamente pequeñas, de hecho la máxima diferencia es de 3 unidades y la máxima separación encontrada entre cualquier par de datos es de cinco unidades, mientras que en el grupo B hay desviaciones de hasta 21 unidades respecto a la media y una máxima separación entre datos de 49 unidades. Observamos entonces que la media por sí sola no es un apropiado descriptor debido a que no da información de la gran variabilidad que presenta el grupo B ni de la homogeneidad del grupo A, esto refuerza la idea que las medidas de tendencia central no resultan suficientes como recursos de análisis en estudios estadísticos, se requiere de otros descriptores que midan la variabilidad de los datos y que se complementen con las medidas de tendencia central, estas nuevas medidas son las medidas de Dispersión.

Importancia de las medidas de Dispersión

La finalidad del uso de medidas de tendencia central es sintetizar los datos en un valor representativo. Las medidas de dispersión indican hasta qué punto las medidas de tendencia central, son representativas como síntesis de la información. Las medidas de dispersión cuantifican la separación, dispersión o variabilidad de los datos respecto a un valor central, es decir, son indicadores de cómo se agrupan o dispersan los datos alrededor de una medida de tendencia central.

Las medidas de dispersión más usadas son Rango, Varianza, desviación estándar o Desviación Típica, coeficiente de variación. En cuanto a Varianza y desviación estándar se tiene el caso poblacional y el muestral.

El Rango

La medida de dispersión más simple es el rango, se conoce también como recorrido o amplitud y como se vio en los pasos para elaborar una tabla de frecuencias, es la diferencia entre el valor más alto y el más pequeño. Aunque es la medida de dispersión más sencilla de calcular, no es muy usual su empleo, pues no considera las variaciones de valores intermedios y es muy sensible a los valores extremos. Se simboliza con la letra R.

En el caso de los puntajes antes dados, el grupo A tiene rango $\boldsymbol{R = 73 - 68 = 5}$, mientras que para el grupo B es $R = \mathbf{91 - 42 = 49}$.

La Varianza y la Desviación estándar

De las medidas de dispersión, quizá la más importante es la varianza. Se define como el promedio de los cuadrados de las desviaciones respecto al promedio. En cálculos estadísticos se distingue entre la Varianza poblacional y la Varianza muestral. Los símbolos empleados son:

$$\boldsymbol{\sigma^2 = Varianza\ poblacional}$$

$$\boldsymbol{S^2 = Varianza\ Muestral}$$

Por otro lado, la desviación estándar es igual a la raíz cuadrada positiva de la Varianza. Se debe diferenciar también entre Desviación estándar Poblacional y Desviación estándar muestral. Los símbolos empleados son:

$$\boldsymbol{\sigma = \sqrt{\sigma^2} = Desviación\ estándar\ poblacional}$$

$$\boldsymbol{S = \sqrt{S^2} = Desviación\ estándar\quad uestral}$$

Hacemos notar que la desviación estándar se mide en las mismas unidades que los valores de los datos, por lo tanto resulta más fácil su comparación directa con la media aritmética y otras medidas de tendencia central. La desviación estándar se interpreta como la variación promedio de los datos con respecto a la media.

Cálculo de varianza y desviación estándar de datos no agrupados

Cuando se afirma que la Varianza es igual al promedio de los cuadrados de las desviaciones respecto a la media, significa que para calcularla primero se debe hallar la desviación de cada observación respecto a la media, luego se halla el cuadrado de cada desviación y sobre estos cuadrados se calcula el promedio. Para un conjunto de observaciones de datos originales propios de una población de tamaño N, con media poblacional $\boldsymbol{\mu}$, la fórmula para hallar la varianza es:

$$\boldsymbol{\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(X_i - \mu)^2}$$

Si se en cambio se tiene una muestra de tamaño N el promedio se calcula dividiendo por una unidad menos que el número total de datos, en este caso, si la media muestral es $\boldsymbol{\overline{X}}$, la fórmula para hallar la Varianza muestral es:

$$\boldsymbol{S^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(X_i - \overline{X})^2}$$

Frecuentemente en estudios estadísticos al hallar la Varianza muestral lo que se quiere es hallar a partir de ella una estimación de la Varianza poblacional. La explicación detallada de la diferencia en las expresiones de cálculo de la varianza poblacional y la muestral supera los alcances de este curso, en fuentes más rigurosas se demuestra esto.

Una fórmula abreviada para hallar la Varianza poblacional, matemáticamente equivalente a la anterior, es:

$$\sigma^2 = \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i{}^2\right) - \mu^2$$

La ventaja de usar la fórmula abreviada es que no se requiere calcular cada una de las desviaciones, aunque requiere que se calcule la suma de los cuadrados de cada una de las observaciones.

Ejemplo 8.1: se necesita estudiar el nivel de pureza de sustancias médicas producidas en un dia. Se tiene una población de 15 frascos de sustancia y se realiza la prueba sobre cada uno de ellos. Los datos registrados son los que se muestran en la tabla 8.2, a partir de los cuales se pide hallar la Varianza Poblacional.

Porcentajes de Impurezas observados				
0,04	0,14	0,17	0,19	0,22
0,05	0,14	0,17	0,21	0,24
0,12	0,15	0,18	0,21	0,25

Tabla 2. Datos del ejemplo 8.1

Fuente: Propia.

Solución:

Para hallar la varianza poblacional, usando la fórmula de la definición, es necesario hallar el valor de $(X_i - \mu)^2$ para cada valor, por tanto conviene crear una tabla con una columna con los valores de X_i, una para los de $(X_i - \mu)$ y, a partir de esta última, otra para $(X_i - \mu)^2$. Si usamos la fórmula abreviada se requiere una columna con los valores de

X_i^2. La elaboración de la tabla facilita los cálculos ya que estos se reducen a sumar algunas de la columnas. A continuación se presenta la tabla con las columnas de datos requeridos para el uso de las dos fórmulas.

(1)	(2)	(3)	(4)
X_i	$(X_i - \mu)$	$(X_i - \mu)^2$	X_i^2
0,04	-0,126	0,015876	0,0016
0,06	-0,106	0,011236	0,0036
0,12	-0,046	0,002116	0,0144
0,14	-0,026	0,000676	0,0196
0,14	-0,026	0,000676	0,0196
0,15	-0,016	0,000256	0,0225
0,17	0,004	0,000016	0,0289
0,17	0,004	0,000016	0,0289
0,18	0,014	0,000196	0,0324
0,19	0,024	0,000576	0,0361
0,21	0,044	0,001936	0,0441
0,21	0,044	0,001936	0,0441
0,22	0,054	0,002916	0,0484
0,24	0,074	0,005476	0,0576
0,25	0,084	0,007056	0,0625
$\mu = 0,166$		$\sum_{i=1}^{10}(X_i - \mu)^2 = 0,05096$	$\sum_{i=1}^{10} X_i^2 = 0,4643$

Tabla 3. Elementos para el cálculo de la varianza del ejemplo 8.1

Fuente: Propia.

En el cálculo usando la fórmula de la definición se tiene la suma de los valores de la columna (3), al dividir esta suma por el número de datos ($N = 15$) se tiene el valor de la varianza, lo que corresponde a:

$$\boldsymbol{\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(X_i - \mu)^2 = \frac{1}{15}\sum_{i=1}^{15}(X_i - \mu)^2 = \frac{0,05096}{15} = 0,00339733}$$

La columna 4 da la suma requerida para usar la formula abreviada, el cálculo es:

$$\boldsymbol{\sigma^2 = \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}{X_i}^2\right) - \mu^2 = \left(\frac{1}{15}\sum_{i=1}^{15}{X_i}^2\right) - \mu^2 = \left(\frac{0,4643}{15}\right) - (0,166)^2 = 0,00339733}$$

Ejemplo 8.2: Si los puntajes en la prueba de aptitud matemática para los grupos A y B antes citados corresponden a datos de muestras. Calcular la varianza de cada muestra.

Solución:

Igual que antes es conveniente crear una tabla que dé los datos de la variable, las desviaciones respecto a la media, los cuadrados de las desviaciones, así como las sumas requeridas y la media muestral, esto se da en las tablas 8.4 y 8.5.

Grupo A		$\bar{X} = 70$
X_i	$(X_i - X)$	$(X_i - \bar{X})^2$
69	-1	1
72	2	4
69	-1	1
73	3	9
69	-1	1
68	-2	4
68	-2	4
70	0	0
73	3	9
69	-1	1
		$\sum_{i=1}^{10}(X_i - X)^2 = 34$

Tabla 8.4: Datos grupo A ejemplo 8.2

Grupo B		$\bar{X} = 70$
X	$(X_i - X)$	$(X_i - \bar{X})^2$
91	21	441
90	20	400
47	-23	529
50	-20	400
90	20	400
88	18	324
45	-25	625
87	17	289
70	0	0
42	-28	784
		$\sum_{i=1}^{10}(X_i - X)^2 = 4192$

Tabla 8.5: Datos grupo A ejemplo 8.2

Tabla 5. Datos grupo B ejemplo 8.2

Fuente: Propia.

Con base en los registros de las tablas se tiene que las varianzas muestrales $\boldsymbol{S_A^2}$ y $\boldsymbol{S_B^2}$ de los grupos A y B respectivamente están dadas por: 8.5.

$$\boldsymbol{S_A^2 = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{10}(X_i - X)^2 = \frac{34}{9} = 3,77 \ldots}$$

$$\boldsymbol{S_B^2 = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{10}(X_i - X)^2 = \frac{4192}{9} = 465,77 \ldots}$$

La gran diferencia entre las varianzas refleja las diferencias en la variabilidad de los datos.

Ejemplo 8.3: hallar la varianza de las edades de una muestra de 8 estudiantes de un colegio de bachillerato. Las edades son: 12, 14, 9, 10, 11, 9, 11 y 12 años.

Solución: la tabla 6 muestra los elementos para el cálculo.

En este caso la varianza se calcula con:

$$\boldsymbol{S^2 = \frac{1}{7}\sum_{i=1}^{8}(X_i - \overline{X})^2 = \frac{28\ a\text{ñ}os^2}{7} = 4\ a\text{ñ}os^2}$$

Observamos que la varianza se expresa en unidades cuadradas, $(\boldsymbol{a\text{ñ}os^2})$**,** lo que no tiene interpretación directa en relación con los datos originales.

X_i $(años)$	$(X_i - \overline{X})$ $(años)$	$(X_i - \overline{X})^2 (años^2)$
12	0	0
14	2	4
9	-3	9
10	-2	4
11	-1	1
9	-3	9
11	-1	1
12	0	0
$\overline{X} = 11$ $años$		$\sum_{i=1}^{10} (X_i - X)^2 = 28$ $años^2$

Tabla 6. Elementos para el cálculo de la varianza del ejemplo

Fuente: Propia.

Para que la dispersión se exprese en las unidades de los datos originales, se debe hallar la raíz cuadrada de la varianza, obteniendo así la Desviación Estándar. Como la desviación estándar es la raíz cuadrada de la varianza, veamos el cálculo de la desviación estándar para los datos de los ejemplos 8.x a 8.x.

Ejemplo 8.4: cálcular la desviación Estándar poblacional para los datos del ejemplo 8.1.

Solución: La varianza poblacional antes calculada es: $\boldsymbol{\sigma^2 = 0,00339733,}$ Por tanto la desviación estándar es:

$$\boldsymbol{\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{0,00339733} = 0,058}$$

Lo que indica que en la desviación promedio de porcentajes de impureza es $\mathbf{0,058}$.

Ejemplo 8.5: hallar las desviaciones estándar para los datos del ejemplo 8.2.

Solución:

Los valores de las varianzas, aproximado a dos decimales, para cada grupo son:

$$\boldsymbol{S_A^2 = 3,77} \qquad \boldsymbol{y} \qquad \boldsymbol{S_B^2 = 465,77}$$

Por tanto las desviaciones estándar muestrales correspondientes son:

$$\boldsymbol{S_A = \sqrt{S_A^2} = \sqrt{3,77} = 1,94} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{S_B = \sqrt{S_B^2} = \sqrt{465,77\ldots} = 21,58}$$

El valor relativamente pequeño de $\boldsymbol{S_A = 1,94,}$ muestra que las desviaciones del grupo, es un valor cercano a 2, lo que parece razonable al revisar los datos, mientras que el valor de $\boldsymbol{S_B = 21,58}$ da una medida de la gran variabilidad en los valores observados en los puntajes del grupo B.

Ejemplo 8.6: calcular de la desviación estándar muestral de las edades del ejemplo 8.3.

Solución:

Las edades son: 12, 14, 9, 10, 11, 9, 11 y 12 años y la varianza es $\boldsymbol{S^2 = 4\ años^{\ 2},}$ por tanto la desviación estándar es $\boldsymbol{S = 2\ años,}$ lo que indica que el promedio de las desviaciones respecto a la media es de 2 años.

Coeficiente de Variación

La desviación estándar indica medidas absolutas de la diferencia promedio de los datos con respecto al promedio, sin embargo es más ilustrativa alguna medida que indique en qué proporción difiere la desviación estándar de la media aritmética. La medida de dispersión apropiada en este caso es el Coeficiente de variación, su valor se halla como el cociente de la desviación estándar y la media aritmética y comúnmente se expresa en porcentaje y. Es decir:

$$\boldsymbol{Coeficiente\ de\ Variación} = \frac{\boldsymbol{Desviación\ Estándar}}{\boldsymbol{Media\ Aritmética}}$$

$$\boldsymbol{CV} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\boldsymbol{\mu}} \times \boldsymbol{100}\% \qquad (\boldsymbol{Caso\ poblacional})$$

$$\boldsymbol{CV} = \frac{\boldsymbol{S}}{\overline{\overline{\boldsymbol{X}}}} \times \boldsymbol{100}\% \qquad (\boldsymbol{Caso\ muestral})$$

El coeficiente de variación es una medida relativa en el sentido que permite comparar dispersión de dos o más poblaciones o muestras diferentes, particularmente cuando las variables a comparar no están en las mismas unidades. Por ejemplo, cuando se quiere comparar la variabilidad del ingreso per-cápita de Colombia, cuya unidad de medida es el peso ($) y el de los Estados Unidos, cuya unidad de medida es el Dólar.

Ejemplo 8.7: hallar el coeficiente de variación de los datos del Ejemplo 8.1.

Solución: en este caso tratamos con una población. La media aritmética y la varianza respectivamente tienen los valores $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{0,166}$ **y** $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{0,058}$, por tanto el coeficiente de Variación es:

$$\boldsymbol{CV} = \frac{\boldsymbol{0,058}}{\boldsymbol{0,166}} \times \boldsymbol{100}\% = \boldsymbol{34,93}\ \%$$

Ejemplo 8.8: hallar el coeficiente de variación para los puntajes del ejemplo 8.2.

Solución: los valores de desviación Estándar y media aritmética para cada grupo son:

$$S_A = 1,9436; \quad \overline{X_A} = 70 \qquad\qquad S_B = 21,581; \quad \overline{X_B} = 70$$

Por tanto los valores de coeficiente de variación son:

$$CV_A = \frac{S_A}{\overline{X_A}} \times 100\% = \frac{1,94}{70} \times 100\% = 2,77\ \%$$

$$CV_B = \frac{S_B}{\overline{X_B}} \times 100\% = \frac{21,58}{70} \times 100\% = 30,82\ \%$$

Con el cálculo del coeficiente de variación resulta más clara la diferencia en la variabilidad de las dos muestras, el grupo A presenta una variación promedio del 2,77 % respecto a la media, mientras que el grupo B presenta una del $\mathbf{30,83}$ %**.**

Ejemplo 8.9: Hallar el coeficiente de variación de las edades del ejemplo 8.3.

Solución: En los ejemplos 8.3 y 8.6 vimos que la media y la desviación estándar de la muestra, son $\overline{X} = 11$ ***años*** $S = 2$ ***años***; por tanto el coeficiente de variación es:

$$CV = \frac{S}{\overline{X}} \times 100\% = \frac{2\ \text{años}}{11\ \text{años}} \times 100\% = 18,18\%$$

Medidas de dispersión de datos agrupados

El cálculo de medidas de dispersión de datos agrupados se realiza con base en la marca de clase y no con base en los valores individuales, también se distingue los casos poblacionales y muestrales.

Cálculo de medidas de dispersión de datos agrupados. Caso poblacional

La varianza poblacional de un conjunto de datos agrupados es el promedio ponderado de los cuadrados de las desviaciones de la marca de clase. Con base en una distribución de frecuencias de datos poblacionales agrupados, podemos hallar la varianza poblacional usando la fórmula de la definición o de la fórmula abreviada, las respectivas fórmulas son:

$$\boldsymbol{\sigma}^2 = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{N}}\sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{i}}.(\overline{\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\iota}}} - \boldsymbol{\mu})^2 \qquad o\ \boldsymbol{\sigma}^2 = \left(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{N}}\sum_{\boldsymbol{i}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{i}}.\overline{\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\iota}}}^2\right) - \boldsymbol{\mu}^2$$

Donde

$\boldsymbol{\sigma}^2 = Varianza\ poblacional.$

$\boldsymbol{N} = Tamaño\ de\ la\ población.$

$\boldsymbol{k} = Cantidad\ de\ clases.$

$\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{i}} = Frecuencia\ de\ la\ i - esima\ clase.$

$\overline{\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{\iota}}} = Punto\ medio\ o\ Marca\ de\ la\ i - esima\ clase.$

$\boldsymbol{\mu} = Media\ aritmética\ poblacional.$

$\sigma = Desviación\ estándar\ poblacional.$

La desviación estándar sigue siendo la raíz cuadrada de la varianza y el coeficiente de variación es el cociente entre la desviación estándar y la media poblacional, es decir:

$$\boldsymbol{\sigma} = \sqrt{\boldsymbol{\sigma}^2} \quad y \quad \boldsymbol{CV} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\boldsymbol{\mu}} \times \mathbf{100}\%$$

Ejemplo 8.10: calcular la varianza, desviación estándar poblacional y el Coeficiente de variación correspondiente a los datos del ejemplo 7.11.

Solución:

La tabla 7 muestra las clases y elementos para hallar la media poblacional.

El cálculo de la media nos muestra que:

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{N}}\sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{f}_{i}.\overline{\boldsymbol{X}_{\iota}} = \frac{46690}{960}\boldsymbol{\mu} = \mathbf{48,63}$$

i	X	$\overline{X_\iota}$	f_i	$\overline{X_\iota}.f_i$
1	1 - 10	5,5	37	203,5
2	11 20	15,5	67	1038,5
3	21 - 30	25,5	90	2295
4	31 - 40	25,5	133	3391,5
5	41 - 50	45,5	165	7507,5
6	51 - 60	55,5	155	8602,5
7	61 - 70	65,5	127	8318,5
8	71 - 80	75,5	94	7097
9	81 - 90	85,5	55	4702,5
10	91 - 100	95,5	37	3533,5
			$N = 960$	$\sum_{i=1}^{k} f_i.\overline{X_\iota} = 46690$

Tabla 7. Elementos para el cálculo de la medida del ejemplo 8.10

Fuente: Propia.

Ahora es recomendable elaborar una tabla que contenga los elementos para calcular la varianza, esta es la tabla 8 con información para usar cualquiera de las dos fórmulas.

i	X	$\overline{X}_i$	$\overline{X}_i^{\,2}$	f_i	$f_i.\overline{X}_i^{\,2}$	$\overline{X}_i-\mu$	$(\overline{X}_i-\mu)^2$	$f_i(\overline{X}_i-\mu)^2$
1	1 - 10	5,5	30,25	37	1119,25	-43,14	1860,63	68843,24
2	11 20	15,5	240,25	67	16096,75	-33,14	1097,93	73561,19
3	21 - 30	25,5	650,25	90	58522,5	-23,14	535,23	48170,54
4	31 - 40	25,5	650,25	133	86483,25	-23,14	535,23	71185,35
5	41 - 50	45,5	2070,25	165	341591,25	-3,14	9,83	1621,66
6	51 - 60	55,5	3080,25	155	477438,75	6,87	47,13	7304,87
7	61 - 70	65,5	4290,25	127	544861,75	16,87	284,43	36122,38
8	71 - 80	75,5	5700,25	94	535823,5	26,87	721,73	67842,45
9	81 - 90	85,5	7310,25	55	402063,75	36,87	1359,03	74746,55
10	91-100	95,5	9120,25	37	337449,25	46,87	2196,33	81264,14
					$\sum_{i=1}^{k} f_i.\overline{X}_i^{\,2} = 2801450$			$\sum_{i=1}^{10} f_i.(\overline{X}_i-\mu)^2 = 530662,4$

Tabla 8. elementos para el cálculo de la varianza del ejemplo 8.10

Fuente: Propia.

El cálculo de la varianza con la fórmula de la definición muestra que:

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} f_i.(\overline{X}_i - \mu)^2 = \frac{530662,4}{960} = 552,77$$

Utilizando la fórmula abreviada se tiene:

$$\sigma^2 = \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} f_i.\overline{X}_i^{\,2}\right) - \mu^2 \left(\frac{2801450}{960}\right) - (48,63)^2 = 2918,18 - 2365,35 = 552,81$$

La pequeña diferencia que se ve se debe a aproximación en los cálculos, las fórmulas son equivalentes. En los ejemplos sucesivos sólo se usará una de las fórmulas.

La desviación estándar viene dada entonces por:

$$\boldsymbol{\sigma} = \sqrt{\boldsymbol{\sigma}^2} = \sqrt{552{,}81} = \mathbf{23,71}$$

Con los valores $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{48,635}$, $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{23,71}$, El coeficiente de variación correspondiente es:

$$\boldsymbol{CV} = \frac{\mathbf{23,71}}{\mathbf{48,635}} \times \mathbf{100}\% = \mathbf{48,75}\%$$

Ejemplo 8.11: hallar la varianza, la desviación Estándar y el Coeficiente de Variación de los datos del ejemplo 7.3.

Solución: en el ejemplo 7.6 (semana 7) encontramos que la media de los datos del ejemplo 7.3 dio un valor de $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{12,\ 8}$. Ahora calculemos la varianza usando la fórmula abreviada y la tabla 9.

i	X	$\overline{X_i}$	$\overline{X_i}^2$	f_i	$f_i.\overline{X_i}^2$
1	[4, 6)	5	25	10	250
2	[6, 8)	7	49	20	980
3	[8, 10)	9	81	28	2268
4	[10, 12)	11	121	23	2783
5	[12, 14)	13	169	40	6760
6	[14, 16)	15	225	29	6525
7	[16, 18)	17	289	22	6358
8	[18, 20)	19	361	28	10108
					$\sum_{i=1}^{8} f_i.\overline{X_i}^2 = 36032$

Tabla 9. tabla para calcular la varianza del ejemplo 8.11

El cálculo de la varianza es el siguiente:

$$\boldsymbol{\sigma^2} = \left(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{N}}\sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{f_i}.\overline{\boldsymbol{X_\iota}}^2\right) - \boldsymbol{\mu^2} = \left(\frac{\mathbf{36032\ seg^2}}{\mathbf{200}}\right) - (\mathbf{12,78\ seg})^2 = \mathbf{180,16 - 163,32}$$
$$= \mathbf{16,84\ seg^2}$$

La desviación estándares:

$$\boldsymbol{\sigma} = \sqrt{\mathbf{16,84\ seg^2}} = \mathbf{4,1\ seg}$$

Con $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{12,78\ seg}$ y $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{4,1\ seg}$, el valor del coeficiente de variación es:

$$\boldsymbol{CV} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\boldsymbol{\mu}}\times\mathbf{100\%} = \mathbf{32,08}\ \%$$

Cálculo de medidas de dispersión de datos agrupados. Caso muestral.
A partir de una distribución de frecuencias de datos agrupados propios de una muestra, la varianza se puede calcular mediante cualquiera de las dos fórmulas siguientes:

$$\boldsymbol{S^2} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{N-1}}\sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{f_i}.(\overline{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{i}} - \overline{\boldsymbol{X}})^2 \qquad o \qquad \boldsymbol{S^2} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{N-1}}\left(\sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{f_i}.\overline{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{i}}^2\right) - \frac{\boldsymbol{N\overline{X}^2}}{\boldsymbol{N-1}}$$

Donde

$\boldsymbol{N} = Tamaño\ de\ la\ muestra.$

$\boldsymbol{k} = Cantidad\ de\ clases.$

$\boldsymbol{f_i} = Frecuencia\ de\ la\ i - esima\ clase.$

$\overline{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{i}} = Punto\ medio\ o\ Marca\ de\ la\ i - esima\ clase.$

$\overline{\boldsymbol{X}} = Media\ aritmética\ muestral.$

$\boldsymbol{S} = Desviación\ Estándar\ muestral.$

$\boldsymbol{CV} = Coeficiente\ de\ variación.$

La desviación Estándar es:

$$S = \sqrt{S^2}$$

El Coeficiente de Variación es:

$$CV = \frac{S}{\overline{X}} \times 100\%$$

Ejemplo 8.12: calcular la varianza, la desviación estándar y el coeficiente de variación del conjunto de datos del ejemplo 7.3.

Solución: ce hace uso de la fórmula abreviada para la varianza, la información requerida se presenta en la tabla 10 (la media $\overline{X} = 59,033$, N se calculó en el ejemplo 7.5):

$\overline{X} = 59,033, N = 150$					
i	X	$\overline{X_i}$	$\overline{X_i}^2$	f_i	$f_i\overline{X_i}^2$
1	20 - 29	24,5	600,25	14	8403,5
2	30 -39	34,5	1190,25	26	30946,5
3	40 -49	44,5	1980,25	17	33664,25
4	50 - 59	54,5	2970,25	25	74256,25
5	60 - 69	64,5	4160,25	13	54083,25
6	70 - 79	74,5	5550,25	16	88804
7	80 -89	84,5	7140,25	22	157085,5
8	90 - 99	94,5	8930,25	17	151814,25
					$\sum_{i=1}^{k} f_i.\overline{X}_i^2 = 599057,5$

Tabla 10. Elementos para el cálculo de la varianza del ejemplo

Fuente: Propia.

Por tanto la varianza está dada por:

$$\boldsymbol{S^2 = \frac{1}{N-1}\left(\sum_{i=1}^{k} f_i . \overline{X}_i^2\right) - \frac{N\overline{X}^2}{N-1} = \frac{599057,5}{150-1} - \frac{(150)(59,033)^2}{150-1}}$$

$$\boldsymbol{S^2 = \frac{599057,5 - 522734,26}{149} = \frac{76323,24}{149} = 512,23}$$

Con lo que la Desviación Estándar corresponde a:

$$\boldsymbol{S = \sqrt{512,23} = 22,63}$$

Con $\boldsymbol{S = 22,63}$ y $\boldsymbol{\overline{X} = 59,033}$ el Coeficiente de Variación viene a ser:

$$\boldsymbol{CV = \frac{S}{\overline{X}} \times 100\% = 38,33\%}$$

Bibliografia

- Barnett, R. (1994). Álgebra. México: McGraw Hill.
- __________. (1995). Álgebra elemental. Serie Schaum. México: McGraw Hill.
- Bosch, G. (1998). Matemáticas básicas. SEP Coanlep. México: Limusa.
- Chamorro, C. (2006). Didáctica de las Matemáticas para Primaria. Madrid: Pearson Educación.
- Drooyan, I & Franklin, K. (1998). Elementos de álgebra para bachillerato. México: Limusa.
- Drooyan, I & Wooton W. (1982). Elementos del álgebra para bachillerato. México: Limusa.
- Galdós, L. (1994). Álgebra. Cultural. España.
- _________. (1994). Aritmética. Cultural. España.
- Garcia, J et al. (2005). Estadística Descriptiva y Nociones de Probabilidad. México: Ed. Thomson.
- Garza, O. (1997). Matemáticas. Aritmética y álgebra. México: Colección DGETI. SEP-SEIT.
- Gustafson, D. (1997). Álgebra intermedia. México: Thomson.
- Gutiérrez, J. (1998). Matemática básica, moderna y geometría. España.
- Lehmann, H. (2001). Álgebra. México: Limusa.
- Martínez, M. (1996). Aritmética y álgebra. México: McGraw Hill.

Esta obra se terminó de editar en el mes de noviembre
Tipografá Myriad Pro 12 puntos
Bogotá D.C,-Colombia.

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina

MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO