Matemáticas Especiales

Autor: Gustavo Adolfo Gallego Castañeda

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina

MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Matemáticas Especiales / Gustavo Adolfo Gallego Castañeda, /
Bogotá D.C., Fundación Universitaria del Área Andina. 2017

978-958-5459-50-2

Catalogación en la fuente Fundación Universitaria del Área Andina (Bogotá).

Edición:
Fondo editorial Areandino
Fundación Universitaria del Área Andina
Calle 71 11-14, Bogotá D.C., Colombia
Tel.: (57-1) 7 42 19 64 ext. 1228
E-mail: publicaciones@areandina.edu.co
http://www.areandina.edu.co

Primera edición: noviembre de 2017

Corrección de estilo, diagramación y edición: Dirección Nacional de Operaciones virtuales
Diseño y compilación electrónica: Dirección Nacional de Investigación

Hecho en Colombia
Made in Colombia

Matemáticas Especiales

Autor: Gustavo Adolfo Gallego Castañeda

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina
MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Índice

Índice

1

Unidad 1

Números complejos

Matématicas especiales

Autor: Gustavo Adolfo Gallego Castañeda

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina

MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Introducción

Es de importancia reconocer que en los reales hay operaciones que no tienen solución. Así para $2x^2 + 3 = 0$, no existe ningún número real que verifique dicha ecuación.

Es indispensable, entonces, concretar un nuevo conjunto de números introduciendo un nuevo elemento, la unidad imaginaria i, dando origen de esta manera a los números complejos.

El nuevo conjunto define una relación binaria en R^2 y obtiene el conjunto cociente. Será claro que existe un isomorfismo entre R y el subconjunto de C formado por los pares $(r, 0)$, con lo que R quedará incluido en C.

Se especificará analíticamente los conceptos de módulo y argumento y se abordarán las diferentes operaciones para las distintas formas de expresar un número complejo.

Se establecerá un análisis geométrico, asignando a cada complejo un vector definido por el módulo y el argumento del mismo, comprobando que el módulo y argumento de la suma se corresponden, respectivamente, con los del vector suma representativa. De igual manera vale la pena resaltar que al multiplicar un número complejo z_1 por otro z_2 de modulo unitario y argumento θ da lugar a un giro de θ en el complejo z_1.

Estos fundamentos permitirán a este conjunto y sus operaciones convertirse en una herramienta muy eficaz en muchos campos por ejemplo la impedancia de circuitos de corriente alterna es dada en términos de expresiones complejas, lo que facilita la respectiva representación de la diferencia de fase entre la intensidad y la tensión de las diferentes ramas del circuito, según los elementos que componen el circuito, tales como condensadores, bobinas y resistencias.

Por otra parte, el cálculo con los complejos es de aplicación directa en la resolución de ecuaciones, en la solución de primitivas de funciones racionales o en temas más avanzados como es el estudio de Variable Compleja que el alumno ha de tratar en otras unidades de Matemáticas especiales.

U1

Metodología

La matemática es una ciencia fundamental. Se establece a base de símbolos, ecuaciones, relaciones, funciones, métodos especiales, libros de texto que se ven diferentes, y muchos términos y palabras exclusivas. Por consiguiente, es importante usar técnicas de estudio que apliquen bien a las matemáticas. He aquí algunas que usted debería usar.

No se puede estudiar matemáticas solamente basado en la lectura y dejando que otros le hablen. La mayor parte del aprendizaje de ellas implica hacerlo de manera activa. Esto quiere decir que usted debe realizar todas las tareas y asignaciones. Esto involucra aprender a usar fórmulas y métodos.

Se requiere de una secuencia para mejorar el aprendizaje de las matemáticas. Todo aquello que se aprende tiene que ver con lo que se aprendió. La consigna es no quedarse, ya que es muy difícil ponerse al día. Realizar jornadas maratónicas para responder de inmediato no ayuda en. Tenga en cuenta que es muy útil abrir el aplicativo todos los días e ir a la par con sus compañeros.

Todos los temas de esta asignatura tienen un grado de dificultad y este se aumenta progresivamente. Es necesario que dedique más tiempo del que usted considera a esta materia así avanzará con mayor confianza.

Aprender de memoria no es una buena táctica para este curso. Son demasiados los conceptos y métodos. Trate de manejar un razonamiento de los conceptos fundamentales. Con esto no necesitará recordar tanta información.

Cuando utilice los pasos para la solución de un problema, no debe olvidar que estos posiblemente le sirvan para resolver otro similar. No dude en aplicar lo que aprendió cuando se le presente el nuevo problema.

Aprópiese de un buen número de palabras y forme con ellas un glosario. Recuerde que algunas palabras en matemáticas tienen un significado distinto fuera de ellas. Como ejemplo, si utilizamos la palabra volumen, se refiere a la cantidad de espacio dentro de una figura sólida, en otros casos puede significar un libro o el nivel de sonido. Realice un listado de estas palabras y ubícalas en un lugar especial no olvide escribir su significado.

Estudiar los temas de cualquier curso de matemáticas le puede causar incertidumbre. Quizás suene raro pero es necesario generar confianza en sí mismo esto le ayudará a calmar la angustia.

U1

Desarrollo temático

Números complejos

"Nunca es tiempo perdido el que se emplea en escuchar con humildad cosas que no se entienden."

Eugenio D'Ors

Necesidad de ampliar los números reales: tratemos de dar respuesta a los siguientes interrogantes, ¿hay algún número que al elevarlo al cuadrado nos dé -1? ¿Se puede obtener la raíz cuadrada de -1?

Si tratamos de buscar entre los reales este número no lo vamos a encontrar debido a que todo número elevado al cuadrado es positivo.

En este caso debemos recurrir a tomar $\mathrm{i}^2 = -1$ y que se llamará i o la unidad imaginaria.

¿Dónde representar este nuevo número? Es obvio que en la recta real no es posible ubicarlo, por consiguiente, tracemos un eje perpendicular al eje real y ubiquémoslo allí.

Así con la misma idea que se tiene para ubicar a los reales, ubicaremos los números $\mathrm{i}, 2\mathrm{i}, 3\mathrm{i}, \cdots$ en el eje perpendicular en el que hemos ubicado la unidad imaginaria.

En conclusión tendríamos ubicados los números bi donde b es un número real, a todos estos los lamamos imaginarios y al eje perpendicular en el que se pueden representar, eje imaginario.

Estos números imaginarios forman parte de un conjunto más grande y que se denomina conjunto de los números complejos y que son objeto de estudio en esta cartilla.

Valores de las potencias de la unidad imaginaria i:

$$\mathrm{i}^1 = \sqrt{-1} = \mathrm{i}$$

$$\mathrm{i}^2 = \left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1$$

$$\mathrm{i}^3 = \mathrm{i}^2\mathrm{i} = -\mathrm{i}$$

$$\mathrm{i}^4 = \mathrm{i}^2\mathrm{i}^2 = (-1)(-1) = 1$$

$$\mathrm{i}^5 = \mathrm{i}^4\mathrm{i} = \mathrm{i}$$

$$\mathrm{i}^6 = \mathrm{i}^4\mathrm{i}^2 = (1)(-1) = -1$$

$$\mathrm{i}^7 = \mathrm{i}^4\mathrm{i}^3 = (1)(-\mathrm{i}) = -\mathrm{i}$$

$$\mathrm{i}^8 = \mathrm{i}^4\mathrm{i}^4 = (1)(1) = 1$$

Según lo anterior, hallar cualquier potencia de la unidad imaginaria "i" equivale a hallar la potencia de i^4 siendo r el residuo que resulta al dividir por 4 el exponente original.

Ejemplo hallar el valor de i^{55}:

$$\mathrm{i}^{55} = \mathrm{i}^{(4)(13)+3} = (\mathrm{i}^4)^{13}\mathrm{i}^3 = (1)^{13}\mathrm{i}^3 = \mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}$$

Definición

"Un número complejo es un símbolo de la forma $\mathrm{x} + \mathrm{iy}$ o $\mathrm{x} + \mathrm{yi}$, en donde x e y son números reales e $\mathrm{i}^2 = -1$. La aritmética de los números complejos está definida por" (Peter, O. Matemáticas avanzadas para Ingeniería):

Supongamos $\mathrm{z}_1 = \mathrm{a} + \mathrm{bi}$ y $\mathrm{z}_2 = \mathrm{c} + \mathrm{di}$ se dice que los complejos z_1 y z_2 son iguales si se cumple que $\mathrm{a} = \mathrm{c}$ y $\mathrm{b} = \mathrm{d}$.

Suma: si $\mathrm{z}_1 = \mathrm{a} + \mathrm{bi}$ y $\mathrm{z}_2 = \mathrm{c} + \mathrm{di}$ se entiende que $\mathrm{z}_1 + \mathrm{z}_2 = (\mathrm{a} + \mathrm{bi}) + (\mathrm{c} + \mathrm{di}) = (\mathrm{a} + \mathrm{c}) + (\mathrm{b} + \mathrm{d})\mathrm{i}$.

Por ejemplo: si $\mathrm{z}_1 = 2 + 5\mathrm{i}$ y $\mathrm{z}_2 = 7 + 3\mathrm{i}$ entonces $\mathrm{z}_1 + \mathrm{z}_2 = (2 + 5\mathrm{i}) + (7 + 3\mathrm{i}) = (2 + 7) + (5 + 3)\mathrm{i} = 9 + 8\mathrm{i}$.

Ejemplo: si $\mathrm{z}_1 = \frac{2}{3} + \frac{5}{2}\mathrm{i}$ y $\mathrm{z}_2 = \frac{7}{5} - \frac{3}{7}\mathrm{i}$ entonces $\mathrm{z}_1 + \mathrm{z}_2 = \left(\frac{2}{3} + \frac{5}{2}\mathrm{i}\right) + \left(\frac{7}{5} - \frac{3}{7}\mathrm{i}\right) = \left(\frac{2}{3} + \frac{7}{5}\right) + \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{7}\right)\mathrm{i} = \frac{31}{15} + \frac{29}{14}\mathrm{i}$.

Multiplicación: si $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$ se entiende que $z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$.

Por ejemplo: si $z_1 = 11 + 4i$ y $z_2 = 10 + 15i$ entonces $z_1 \cdot z_2 = (11 + 4i) \cdot (10 + 15i) = \big((11)(10) - (4)(15)\big) + \big((11)(15) + (4)(10)\big)i = 50 + 125i$.

Ejemplo: si $z_1 = \frac{1}{16} + \frac{4}{11}i$ y $z_2 = \frac{1}{9} + \frac{1}{4}i$ entonces $z_1 \cdot z_2 = \left(\frac{1}{16} + \frac{4}{11}i\right) \cdot \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{4}i\right) = \left(\left(\frac{1}{16}\right)\left(\frac{1}{9}\right) - \left(\frac{4}{11}\right)\left(\frac{1}{4}\right)\right) + \left(\left(\frac{1}{16}\right)\left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{4}{11}\right)\left(\frac{1}{9}\right)\right)i = -\frac{133}{1584} + \frac{355}{6336}i$.

La suma y la multiplicación de complejos cumplen muchas de las reglas de los reales, de esta forma si se tiene z, w y u números complejos se puede observar:

$z + w = w + z$ $(conmutatividad\ de\ la\ suma)$.

$z \cdot w = w \cdot z$ $(conmutatividad\ de\ la\ multiplicación)$.

$z + (w + u) = (z + w) + u$ $(asociatividad\ de\ la\ suma)$.

$z \cdot (w \cdot u) = (z \cdot w) \cdot u$ $(asociatividad\ de\ la\ multiplicación)$.

$z \cdot (w + u) =$
$z \cdot w + z \cdot u$ $(distributividad\ de\ la\ multiplicación\ respecto\ de\ la\ suma)$.

$z + 0 = 0 + z$ $(modulativa\ de\ la\ suma)$.

$z \cdot 1 = 1 \cdot z$ $(modulativa\ de\ la\ multiplicación)$.

El conjugado. Si $z = a + bi$ es un número complejo, entonces el Conjugado de z, denotado por $\bar{z}$, es otro número complejo definido por $\bar{z} = a - bi$.

Ejemplo. Si $z = 2 + 9i$, su conjugado es $\bar{z} = 2 - 9i$.

Ejemplo. Si $z = 7 - 9i$, su conjugado es $\bar{z} = 7 + 9i$.

Definición. Si $z = a + bi$ es un número complejo, el Modulo de z es el número real.

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Algunas propiedades muy importantes del módulo se dan a continuación. Supondremos que z, w y u son números complejos.

1. $|Z| \geq 0$.

2. $|Z| = 0$ sí y sólo si $Z = 0$.

3. $|Z + W| \leq |Z| + |W|$.

4. $|Z \cdot W| = |Z| \cdot |W|$.

5. $|Z^{-1}| = |Z|^{-1}$.

Observación: se puede expresar el módulo de z en función de él mismo y de su conjugado, usando la relación

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}}$$

Se puede probar que dicha relación se verifica para todo z.En efecto, pongamos $z = a + bi$. Luego:

$$z\bar{z} = (a+bi)(a-bi) = (a^2+b^2) + (ab-ba)i = a^2+b^2$$

$$\sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2+b^2} = |Z|$$

Ejemplo. Sea $z = \sqrt{3} + \frac{4}{7}i$, para hallar su módulo hacemos:

$$z\bar{z} = \left(\sqrt{3} + \frac{4}{7}i\right) \cdot \left(\sqrt{3} - \frac{4}{7}i\right) = \left(3 + \left(\frac{4}{7}\right)^2\right) + \left(\frac{4}{7}\sqrt{3} - \frac{4}{7}\sqrt{3}\right)i = 3 + \frac{16}{49} = \frac{163}{49}$$

$$\sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{\sqrt{3}^2 + \left(\frac{4}{7}\right)^2} = \sqrt{3 + \frac{16}{49}} = \sqrt{\frac{163}{49}} = \frac{\sqrt{163}}{7} = |z|$$

Ejemplo: sea $z = \sqrt{5} + \sqrt{7}i$, para hallar su módulo hacemos $z\bar{z} = \left(\sqrt{5} + \sqrt{7}i\right) \cdot \left(\sqrt{5} - \sqrt{7}i\right) = (5+7) + \left(\sqrt{5}\sqrt{7} - \sqrt{5}\sqrt{7}\right)i = 5 + 7 = 12$

$$\sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2 + \left(\sqrt{7}\right)^2} = \sqrt{5+7} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

Inverso aditivo (opuesto)

Dado $z = a + bi$ su opuesto es $-z = -a - bi$.

Ejemplo: sea $z = \frac{1}{2} + \frac{2}{3}i$ su opuesto es $-z = -\frac{1}{2} - \frac{2}{3}i$.

Ejemplo: sea $z = \frac{7}{2} - \frac{22}{3}i$ su opuesto es $-z = -\frac{7}{2} + \frac{22}{3}i$.

Inverso multiplicativo

Dado $z = a + bi$ con $a, b \neq 0$ su inverso es $\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{bi}{a^2+b^2}$.

Ejemplo: sea $z = \frac{1}{5}\sqrt{2} + \frac{1}{3}\sqrt{3}i$ su inverso es $\frac{1}{z} = \frac{\frac{1}{5}\sqrt{2}}{\left(\frac{1}{5}\sqrt{2}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)^2} - \frac{\frac{1}{3}\sqrt{3}}{\left(\frac{1}{5}\sqrt{2}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)^2} i = \frac{15\sqrt{2}}{31} - \frac{25\sqrt{3}}{31} i$.

Sustracción de complejos

La resta de dos complejos se resuelve si al primero de ellos le sumamos el opuesto del otro, es decir:

Si $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$ su resta será $z_1 + (-z_2) = (a + bi) + (-c - di) = (a - c) + (b - d)i$.

Por ejemplo: si $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}i$ y $z_2 = 2 + 3i$ su resta será $z_1 + (-z_2) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}i\right) + (-2 - 3i) = \left(\frac{1}{2} - 2\right) + \left(\frac{1}{3} - 3\right)i = -\frac{3}{2} - \frac{8}{3}i$.

Ejemplo: sea $z_1 = \sqrt{\frac{1}{5}} + \sqrt{\frac{1}{7}}i$ y $z_2 = \sqrt{2} + \sqrt{3}i$ su resta será $z_1 + (-z_2) = \left(\sqrt{\frac{1}{5}} + \sqrt{\frac{1}{7}}i\right) + (-\sqrt{2} - \sqrt{3}i) = \left(\sqrt{\frac{1}{5}} - \sqrt{2}\right) + \left(\sqrt{\frac{1}{7}} - \sqrt{3}\right)i = \frac{\sqrt{5}-5\sqrt{2}}{5} + \frac{\sqrt{7}-7\sqrt{3}}{7}i$.

División de complejos

La división de complejos no es más que la multiplicación del primero de ellos con el inverso del segundo siempre y cuando este no sea nulo, es decir:

Si $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$ su división será $z_1 \cdot \left(\frac{1}{z_2}\right) = (a + bi) \cdot \left(\frac{c}{c^2+d^2} - \frac{di}{c^2+d^2}\right) = \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\right) + \left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)i$.

Ejemplo: si $z_1 = 8 + 7i$ y $z_2 = 9 + 5i$ su división será $z_1 \cdot \left(\frac{1}{z_2}\right) = (8 + 7i) \cdot \left(\frac{9}{9^2+5^2} - \frac{5i}{9^2+5^2}\right) = \left(\frac{72+35}{106}\right) + \left(\frac{63-40}{106}\right)i = \frac{107}{106} + \frac{23}{106}i$.

Ejemplo: si $z_1 = \frac{8}{3} + \frac{7}{2}i$ y $z_2 = \frac{9}{4} + \frac{5}{7}i$ su división será $z_1 \cdot \left(\frac{1}{z_2}\right) = \left(\frac{8}{3} + \frac{7}{2}i\right) \cdot$

$$\left(\frac{\frac{9}{4}}{\left(\frac{9}{4}\right)^2+\left(\frac{5}{7}\right)^2}-\frac{\frac{5}{7}}{\left(\frac{9}{4}\right)^2+\left(\frac{5}{7}\right)^2}\ i\right)=\left(\frac{8}{3}+\frac{7}{2}i\right)\cdot\left(\frac{\frac{9}{4}}{\frac{4369}{784}}-\frac{\frac{5}{7}}{\frac{4369}{784}}i\right)=\left(\frac{8}{3}+\frac{7}{2}i\right)\cdot\left(\frac{1764}{4369}-\frac{560}{4369}i\right)=$$
$$\left(\left(\frac{8}{3}\right)\left(\frac{1764}{4369}\right)+\left(\frac{7}{2}\right)\left(\frac{560}{4369}\right)\right)+\left(\left(\frac{7}{2}\right)\left(\frac{1764}{4369}\right)-\left(\frac{8}{3}\right)\left(\frac{560}{4369}\right)i\right)=\left(\frac{23604}{21845}\right)+\left(\frac{826}{771}\right)i.$$

Ejercicios

a) $\left(\sqrt{5}+15i\right)+\left(\sqrt{20}-\frac{2}{3}i\right)$.
b) $\left(\sqrt{10}+\sqrt{10}i\right)+\left(\frac{2}{5}+\frac{8}{9}i\right)$.
c) $\left(11+\sqrt{2}i\right)+\left(2+\sqrt{3}i\right)$.
d) $\left(\frac{17}{3}+\frac{25}{3}i\right)+\left(\frac{29}{3}+\frac{32}{3}i\right)$.
e) $\left(\frac{\sqrt{2}}{7}+\frac{i}{\sqrt{5}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{11}}+\frac{5i}{\sqrt{12}}\right)$.
f) $\left(\frac{4}{3}+\frac{14}{3}i\right)-\left(\frac{42}{3}+\frac{28}{3}i\right)$.
g) $35+\left(52-\sqrt{13}i\right)$.
h) $36i+(15+106i)$.
i) $51i+(0+93i)$.
j) $67i+27i$.
k) $(-110+81i)+(-31+i)$.

1. Realizar las siguientes operaciones entre números complejos.

a) $\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}i\right)+[(14-25i)-(54+i)]$.
b) $[(19-91i)+(17-23i)]-(45+63i)$.
c) $\left(\frac{31}{15}+\frac{96}{35}i\right)+\left[\left(\frac{11}{28}+\frac{83}{25}i\right)+\left(\frac{120}{210}+\frac{60}{57}i\right)\right]$.
d) $[(6-7i)+(13-18i)]-(107-109i)$.

2. En cada uno de los siguientes casos hallar un número complejo Z que cumpla con la condición dada.

a) $Z+\left(\frac{3}{5}+\frac{2}{9}i\right)=\frac{5}{11}+\frac{20}{7}i$.
b) $i+\left(\sqrt{3}+\sqrt{14}i\right)=Z$.
c) $Z+\left(19+\frac{1}{5}i\right)=\frac{18}{11}+\frac{6}{13}\mathrm{i}$.
d) $Z+\left(\frac{15}{2}+\frac{7i}{\sqrt{2}}\right)=i$.

3. Sean los números complejos$Z_1 = \frac{1}{9} + \sqrt{2}i,\ Z_2 = \frac{5}{3} + \sqrt{3}i\ y\ Z_3 = \frac{4}{7} + \sqrt{5}i$. Efectuar las siguientes operaciones:

a) $Z_1 . Z_2$.
b) $Z_1 . \bar{Z}_3$.
c) $Z_1 . Z_2 . Z_3$.
d) $\frac{Z_1}{Z_2}$.
e) $\frac{(Z_1+Z_2)}{(Z_3-Z_2)}$.
f) $5Z_2 - 6Z_3$.

4. Calcular:

a) $\left(\sqrt{43} + \sqrt{12}i\right)^2 - \left(\frac{4}{5} + \frac{2}{9}i\right)$
b) $\frac{\frac{[(15+21i)+(44-31i)]}{67+53i}}{\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}i\right)+\frac{6}{11}}$
c) $\left(\sqrt{5} + \sqrt{2}i\right) + \frac{6}{11}$
d) $\frac{(36+22i)(51-25i)}{(17+24i)^2}$
e) $\sqrt{15}\left(\frac{1}{4} - i\right) + \sqrt{46}\left(\frac{7}{5} + \frac{1}{2}i\right)$
f) $\left(-\frac{3}{7} - \frac{4}{9}i\right) + \left(\frac{4}{13} - \frac{8}{3}i\right)\left[\left(\frac{5}{13} + \frac{3}{11}i\right) - \left(\frac{6}{27} + \frac{7}{36}i\right)\right]$
g) $\left(\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{4}i\right)^2 - \left(\frac{1}{6} - \frac{5}{7}i\right)^2$
h) $11\overline{(13+12i)} + (13+12i)\left(\frac{1}{7} + \frac{5}{11}i\right)$

5. Verifique la relación $|ZW| = |Z||W|$ para los números complejos.

$$Z = \sqrt{8} + \sqrt{7}i\ y\ W = \sqrt{3} - \sqrt{2}i$$

6. Verifique la relación $\left|\frac{Z}{W}\right| = \frac{|Z|}{|W|}$ para los números complejos $Z = \frac{1}{5} - \frac{5}{3}i\ y\ W = \frac{2}{7} + \frac{4}{9}i$.

7. Hallar un número complejo Z, tal que $\left(\sqrt{7} + \sqrt{2}i\right)Z + \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{2}i\right) = (8 + 11i)$.

8. Demostrar que si un número complejo Z es igual a su conjugado, entonces Z es un número real.

9. Demuestre que si $Z = a + bi$, entonces se tiene $a = \frac{Z+\bar{Z}}{2}\ y\ b = \frac{Z-\bar{Z}}{2}i$.

10. Encontrar un número complejo Z con módulo es igual a $\sqrt{5}$ y parte real igual a $\sqrt{3}$.

11. Hallar un número complejo Z tal que su parte real es el triple de la parte imaginaria y que además cumple $Z^2 = -17 + 4i$.

Representación geométrica

Situado en el plano un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales, los números complejos pueden representarse mediante puntos de ese plano, haciendo corresponder a cada número complejo un punto de ese plano.

Al eje "x" lo llamaremos eje real y sobre él se representará la parte real del número.

Al eje "y" lo llamaremos eje imaginario y sobre él se representará la parte imaginaria del número.

Ejemplo graficar el número complejo $z = -4.3 - 2.4i$.

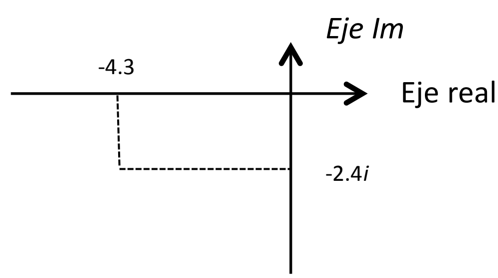


Figura 1
Fuente: Propia.

Ejemplo graficar el número complejo $z = -\frac{5}{8} + \frac{7}{3}i$.

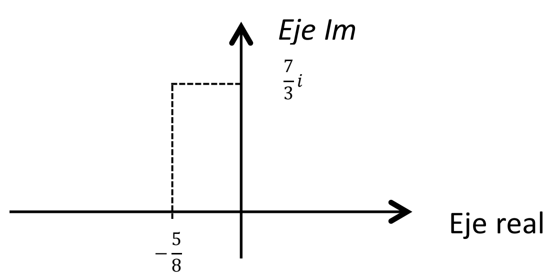


Figura 2
Fuente: Propia.

Ejemplo graficar el número complejo $z = \sqrt{2} + \sqrt{3}i$.

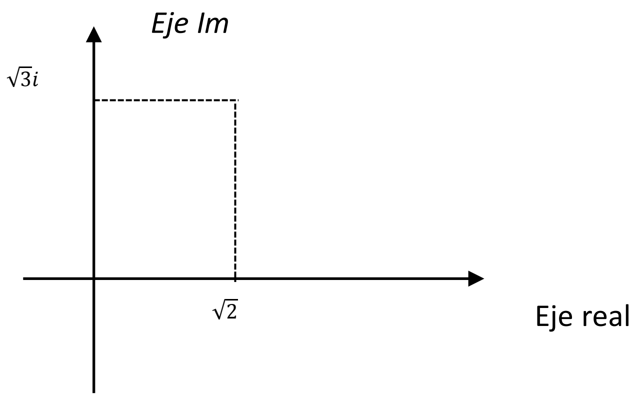


Figura 3
Fuente: Propia.

La representación gráfica de un complejo, se puede tomar de otra manera y se denomina Representación Vectorial. En otras palabras con cada punto del plano se asocia un vector con origen O y extremo Z, siendo O el origen de las coordenadas.

Significado geométrica de módulo y conjugado de un número complejo

Sea $z = a + bi$ un número complejo. Entonces interesa calcular la longitud del segmento c que une al origen con el punto correspondiente a Z en el plano complejo.

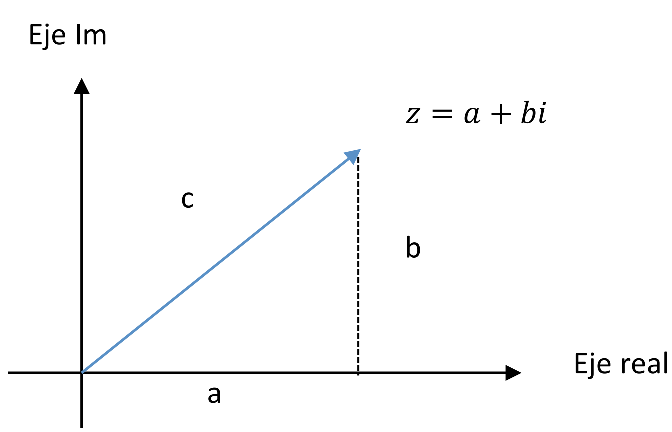


Figura 4
Fuente: Propia.

De acuerdo a la disposición de los ejes y el segmento dado, se ha formado un triángulo rectángulo, con catetos a y b, e hipotenusa dada por c. Usando el Teorema de Pitágoras, se demuestra que la longitud de este segmento c, es igual a la $\sqrt{a^2+b^2}$ y por lo tanto, igual al módulo del complejo Z. Esto es:

$$|Z| = \sqrt{a^2+b^2}$$

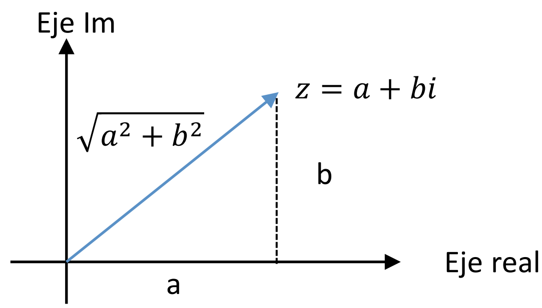


Figura 5
Fuente: Propia.

Tenemos entonces una interpretación geométrica del módulo de un complejo:

El módulo de un número complejo z es igual a la distancia desde el punto z hasta el origen.

Por otro lado, como se indicó anteriormente si $z = a + bi$ es un número complejo, su conjugado viene dado por $z = a - bi$. Luego el conjugado en forma geométrica se obtiene al reflejar el punto correspondiente a z, alrededor del eje real.

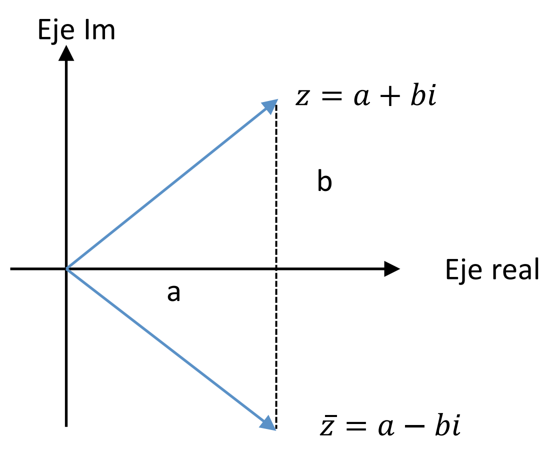


Figura 6
Fuente: Propia.

Se tiene por consiguiente la interpretación geométrica del conjugado de un complejo z:

El conjugado de un número complejo z se obtiene como una imagen especular de z alrededor del eje real.

Para hallar el opuesto o negativo de un número complejo, en forma geométrica, procedemos de la manera siguiente: Si $z = a + bi$, entonces $-Z = -a - bi$ se ubica en el extremo del segmento de dirección opuesta a la de z (Spiegel, M. 1970).

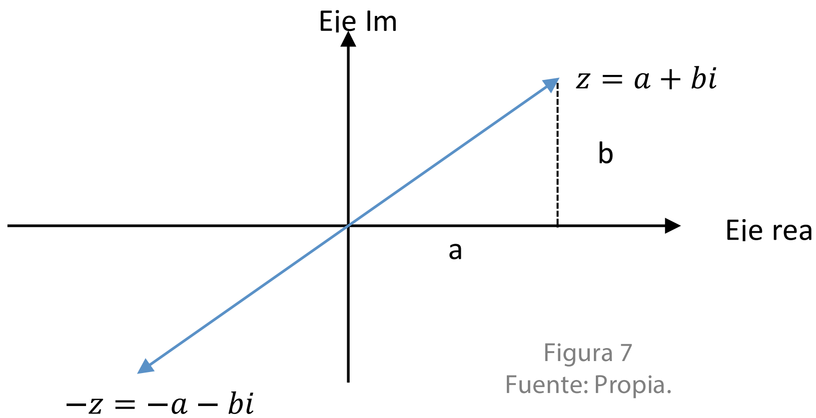


Figura 7
Fuente: Propia.

Interpretación geométrica de la suma y la resta

Dados dos complejos z y w vectorialmente, la suma o resta de ellos se realiza utilizando la regla del paralelogramo (Spiegel, M. 1970).

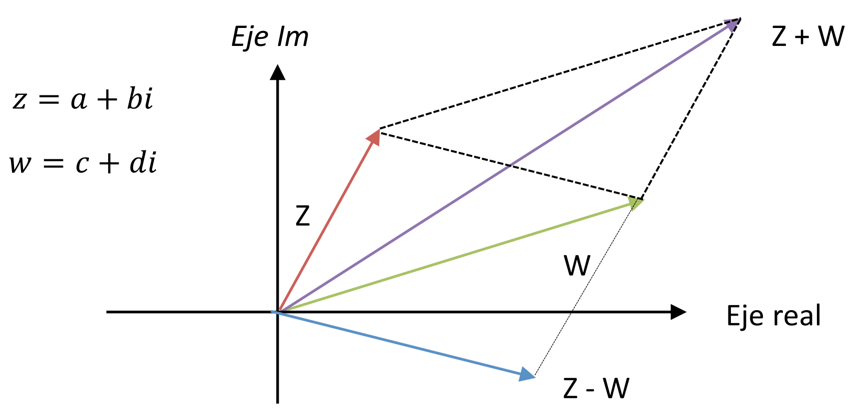


Figura 8
Fuente: Propia.

1

Unidad 1

Otras operaciones en los números complejos

Matemáticas especiales

Autor: Gustavo Adolfo Gallego Castañeda

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina

MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Introducción

El matemático griego Diofanto (275 d.C.) realizó una construcción de un triángulo a partir de una cuerda sobre la que había 12 nudos equidistantes. Los lados del triángulo medían 3, 4 y 5 unidades de separación entre nudos. Evidentemente el triángulo era rectángulo y cumplía el teorema de Pitágoras ya que $3^2 + 4^2 = 5^2$. Fácilmente se ve que el área del triángulo es 6 unidades de área. Usando la misma cuerda Diofanto intentó construir otro triángulo rectángulo, pero que tuviera área de 7 unidades de área.

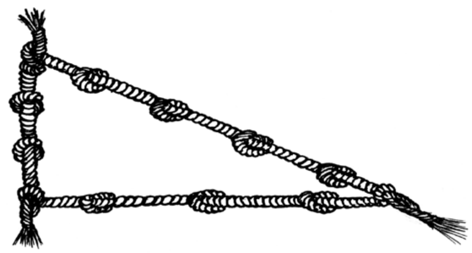


Imagen 1
Fuente: Díaz (2007).

El planteamiento para lograr su cometido fue el siguiente: tomar un cateto de medida x, para obtener un área de 7 el otro cateto debe medir $\frac{14}{x}$, con lo cual la hipotenusa está dada por:

$$x^2 + \left(\frac{14}{x}\right)^2 = h^2$$

Pero por otra parte la suma de sus lados debe ser 12

$$x + \frac{14}{x} + h = 12$$

Por tanto se debe cumplir la ecuación:

$$x^2 + \frac{196}{x^2} = \left(12 - x - \frac{14}{x}\right)^2$$

De lo cual se obtiene la siguiente ecuación cuadrática:

De donde se llega fácilmente a:

$$6x^2 - 43x + 84 = 0$$

Cuya solución Diofanto expresó como:

$$x = \frac{43 \pm \sqrt{1849 - 2016}}{12} = \frac{43 \pm \sqrt{-167}}{12} = \frac{43 \pm \sqrt{(167)(-1)}}{12} = \frac{43 \pm \sqrt{167}\sqrt{-1}}{12}$$

Sin embargo Diofanto no conocía número alguno cuya cuadrado fuera -1, por tanto, a la luz de procedimientos matemáticos el problema no tenía solución el problema no tenía solución. El problema de la cuerda de Diofanto quedo en espera de solución por tres siglos. En el siglo XVI Rafaello Bombelli admitió la utilidad de considerar que con los números negativos se les pudiera asociar raíces cuadradas. Sin embargo, a mediados del siglo XVI, el filósofo y matemático italiano Geronimo Cardano y sus contemporáneos, comenzaron a experimentar con soluciones de ecuaciones que incluían las raíces cuadradas de números negativos. Por ejemplo, Cardano sugirió que el número real 10 se puede expresar como: $\left(5 + \sqrt{15}\right)\left(5 - \sqrt{15}\right)$" (tomado de http://documents.mx/documents/el-origen-de-los-numeros-complejos-por-jesus-said-mercado-vega.html).

Leonhard Euler, matemático suizo introdujo el moderno símbolo i para e^x en 1777 y formuló la expresión: $e^{\pi i} + 1 = 0$ que relaciona cinco de los números más importantes en matemáticas (Leonhard Euler. 2015).

Gaspar Wessel dio una explicación a la $\sqrt{-1}$. Suponiendo un triángulo isósceles ABC, situado sobre unos ejes coordenados como muestra en la figura 1:

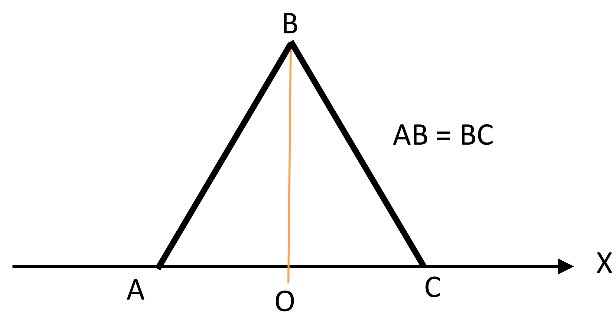


Figura 1

Fuente: Propia

Al aplicar el teorema de la altura se encuentra que:

$$\overline{OC}^2 = \overline{OB}x\overline{OA} = (1)(-1) = -1 \rightarrow \overline{OC} = \sqrt{-1}.$$

Esta idea también sugerida por Jean-Robert Argand fue utilizada más tarde por Gauss para dar la interpretación geométrica de los números complejos Gauss, en su tesis doctoral de 1799, demostró su famoso teorema fundamental del álgebra, que dice que todo polinomio con coeficientes complejos tiene al menos una raíz compleja. Siguiendo con estas investigaciones de las funciones complejas, en el año 1825, Augustin Louis Cauchy propuso la generalización de principios de integrales definidas de funciones reales al caso de funciones de variable compleja.

U1 Metodología

La matemática es una ciencia fundamental. Se establece a base de símbolos, ecuaciones, relaciones, funciones, métodos especiales, libros de texto que se ven diferentes, y muchos términos y palabras exclusivas. Por consiguiente, es importante usar técnicas de estudio que apliquen bien a las matemáticas. He aquí algunas que usted debería usar.

No se puede estudiar matemáticas solamente basado en la lectura y dejando que otros le hablen. La mayor parte del aprendizaje de ellas implica hacerlo de manera activa. Esto quiere decir que usted debe realizar todas las tareas y asignaciones. Esto involucra aprender a usar fórmulas y métodos.

Se requiere de una secuencia para mejorar el aprendizaje de las matemáticas. Todo aquello que se aprende tiene que ver con lo que se aprendió. La consigna es no quedarse, ya que es muy difícil ponerse al día. Realizar jornadas maratónicas para responder de inmediato no ayuda en. Tenga en cuenta que es muy útil abrir el aplicativo todos los días e ir a la par con sus compañeros.

Todos los temas de esta asignatura tienen un grado de dificultad y este se aumenta progresivamente. Es necesario que dedique más tiempo del que usted considera a esta materia así avanzará con mayor confianza.

Aprender de memoria no es una buena táctica para este curso. Son demasiados los conceptos y métodos. Trate de manejar un razonamiento de los conceptos fundamentales. Con esto no necesitará recordar tanta información.

Cuando utilice los pasos para la solución de un problema, no debe olvidar que estos posiblemente le sirvan para resolver otro similar. No dude en aplicar lo que aprendió cuando se le presente el nuevo problema.

Aprópiese de un buen número de palabras y forme con ellas un glosario. Recuerde que algunas palabras en matemáticas tienen un significado distinto fuera de ellas. Como ejemplo, si utilizamos la palabra volumen, se refiere a la cantidad de espacio dentro de una figura sólida, en otros casos puede significar un libro o el nivel de sonido. Realice un listado de estas palabras y ubícalas en un lugar especial no olvide escribir su significado.

Estudiar los temas de cualquier curso de matemáticas le puede causar incertidumbre. Quizás suene raro pero es necesario generar confianza en sí mismo esto le ayudará a calmar la angustia.

U1 Desarrollo temático

"Entre dos explicaciones, elige la más clara; entre dos formas, la más elemental; entre dos expresiones, la más breve."

Eugenio D'Ors

Otras operaciones en los números complejos

La forma polar

Según Spiegel, M. y otros. (2001), sea P el punto en el plano complejo correspondiente al número complejo (a, b) o $a + bi$. Entonces, de acuerdo con la figura, se ve que:

$$a = |z|Cos\theta \ y \ b = |z|Sen\theta$$

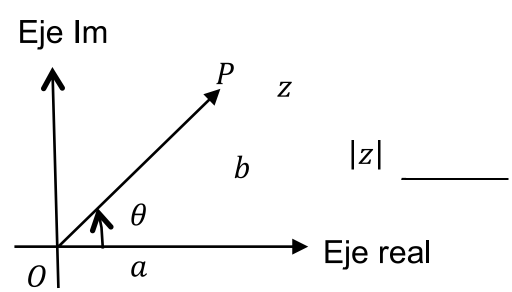


Figura 2
Fuente: Propia.

Donde $|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2} = |a + bi|$ se denomina el módulo tal como se indicó en la cartilla anterior y θ se denomina amplitud o argumento (que se escribe como $arg(z)$) es el ángulo que forma el segmento de recta OP con el lado positivo del eje real.

De acuerdo con lo anterior se puede afirmar que:

$$z = a + bi = r(Cos\theta + iSen\theta)$$

Expresión que se conoce como forma polar de un número complejo, y $r\ y\ \theta$, como coordenadas polares.

A todo número complejo $z \neq 0$ le corresponde un único valor de θ en $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Sin embargo, puede emplearse cualquier otro intervalo de longitud 2π, como $-\pi \leq \theta \leq \pi$. A cualquiera de estos intervalos se les llamará rango principal y al valor de θ, valor principal.

Recíprocamente, si se conocen las coordenadas cartesianas de z= $a + bi$, entonces $r\ y\ \theta$ se calculan de acuerdo a las fórmulas:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\theta = arcTan\left(\frac{b}{a}\right)$$

Llamadas Fórmulas de cambio de coordenadas cartesianas a polares.

Ejemplo. Números complejos ubicados en el primer cuadrante. Hallar la Forma Polar del complejo $Z = \sqrt{3} + \sqrt{7}i$, y representarlo geométricamente en el plano.

Solución. En primer lugar, debemos calcular a $r\ (módulo)$ y el ángulo θ del complejo, para lo cual usamos las fórmulas anteriores luego:

$$r = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{7}\right)^2} = \sqrt{10}$$

$$\theta = ArcTan\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\right) = 33°, 21$$

Así la representación polar de z es:

$$z = 2(Cos\ 33{,}21° + iSen\ 33{,}21°)$$

La representación de este número en el plano complejo aparece en la figura

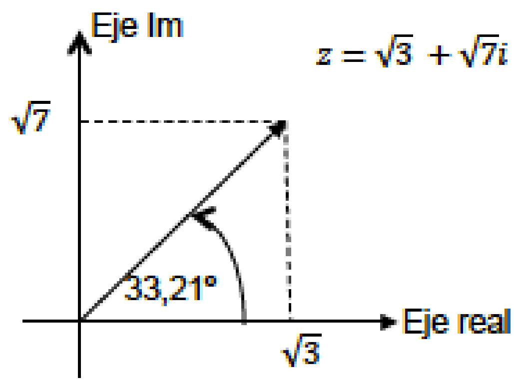


Figura 3
Fuente: Propia.

Teorema de Moivre

Según Spiegel, M. y otros. (2001), Sea $z_1 = a + bi = r_1(Cos\alpha + iSen\alpha)$ y $z_2 = c + di = r_2(Cos\beta + iSen\beta)$ se puede demostrar fácilmente que:

$$z_1z_2 = r_1r_2\{Cos(\alpha+\beta) + iSen(\alpha+\beta)\}\ y\ también$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\{Cos(\alpha-\beta) + iSen(\alpha-\beta)\}$$

Por ejemplo: sea $z_1 = 3 + 5i$ y $z_2 = 4 + 8i$ entonces:

$$r_1 = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}\ además\ arg(z_1) = \alpha = arcTan\left(\frac{5}{3}\right) \cong 59°$$

De otra parte:

$$r_2 = \sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{80}\ además\ arg(z_2) = \beta = arcTan\left(\frac{8}{4}\right) \cong 63{,}43°$$

En conclusión:

$$z_1z_2 = \sqrt{34}\sqrt{80}\{Cos(59° + 63{,}43°) + iSen(59° + 63{,}43°)\}$$

$$z_1z_2 = 4\sqrt{170}\{Cos(122{,}43°) + iSen(122{,}43°)\}$$

De igual forma:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{34}}{\sqrt{80}}\{Cos(59° - 63{,}43°) + iSen(59° - 63{,}43°)\}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\sqrt{\frac{17}{40}}\{Cos(-4,43°)+iSen(-4,43°)\}=\sqrt{\frac{17}{40}}\{Cos(4,43°)-iSen(4,43°)\}$$

Ejemplo: sea $z_1=\sqrt{2}+\sqrt{7}i$ y $z_2=\sqrt{11}+\sqrt{10}i$ entonces:

$$r_1=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{7}\right)^2}=\sqrt{2+7}=3\ además\ arg(z_1)=\alpha=arcTan\left(\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}\right)$$
$$\cong 61,87°$$

De otra parte:

$$r_2=\sqrt{\left(\sqrt{11}\right)^2+\left(\sqrt{10}\right)^2}=\sqrt{11+10}=\sqrt{21}\ además\ arg(z_2)=\beta$$
$$=arcTan\left(\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{11}}\right)\cong 43,64°$$

En conclusión:

$$z_1z_2=3\sqrt{21}\{Cos(61,87°+43,64°)+iSen(61,87°+43,64°)\}$$

$$z_1z_2=3\sqrt{21}\{Cos(105,51°)+iSen(105,51°)\}$$

De igual forma:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{3}{\sqrt{21}}\{Cos(67,87°-43,64°)+iSen(67,87°-43,64°)\}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\sqrt{21}}{7}\{Cos(24,23°)+iSen(24,23°)\}$$

Una generalización de la expresión z_1z_2 nos lleva a:

$$z_1z_2\cdots z_n=r_1r_2\cdots r_n\{Cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)+iSen(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)\}$$

Y si se cuenta con:

$z_1=z_2=z_3\cdots=z_n=z$, se puede establecer que

$$z^n=\{r(Cos\theta+iSen\theta\}^n=r^n\{Cos(n\theta)+iSen(n\theta)\}$$

Que suele conocerse como el teorema de Moivre.

Ejemplo. Sea $Z = \frac{2}{3}(Cos\ 50° + i\ Sen\ 50°)$. Calcule la potencia de orden cinco de este número, es decir, z^7

Solución. Usando la relación de Moivre.

$$Z^7 = \left(\frac{2}{3}\right)^7 (Cos\ (7 \cdot 50°) + i\ Sen\ (7 \cdot 50°))$$

$$Z^7 = \frac{128}{2187}(Cos\ 350° + i\ Sen\ 350°)$$

Se dice que un número w es la raíz n-ésima de un número complejo z si $w^n = z$, y se escribe $w = z^{1/n}$. De acuerdo con el teorema de De Moivre se aprecia que, si n es un entero positivo.

$$w_k = z^{1/n} = \{r(Cos(\varphi) + iSen(\varphi))\}^{1/n}$$

$$w_k = r^{1/n}\left\{Cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) + iSen\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)\right\}\ Con\ k = 1, 2, 3 \ldots, n-1$$

De donde se infiere que hay n valores diferentes de $z^{1/n}$; es decir, n raíces n-ésimas de z, siempre y cuando $z \neq 0$.

Estos n valores distintos surgen debido a la posibilidad de obtener un mismo número complejo sumando vueltas enteras de (2π) al argumento.

En los números reales, todo número posee una raíz de orden impar y dos raíces de orden par. En los complejos hay una mayor abundancia de raíces.

Concretamente, se tiene la siguiente propiedad. Todo número complejo tiene exactamente n raíces n-ésimas. Así por ejemplo 1 tiene 4 raíces cuartas, pues

$$1^4 = i^4 = (-i)^4 = (-1)^4 = 1$$

Luego $1, -1, i, y\ -i$ son las raíces cuartas de 1.

Ejemplo. Hallar todas las raíces quintas de $Z = \sqrt{15}(Cos\ 70° + i\ Sen\ 70°)$

Solución. Usando la expresión para w_k se tiene:

$$w_k = \sqrt{15}^{1/5}\left\{Cos\left(\frac{70° + 2\pi k}{5}\right) + iSen\left(\frac{70° + 2\pi k}{5}\right)\right\} \ Con\ K = 0, 1, 2,3\ y\ 4$$

Sustituyendo estos valores de k en la expresión anterior se obtienen las cinco raíces quintas.

$$w_1 = \sqrt[10]{15}(Cos\ 14° + iSen\ 14°)\ k = 0$$

$$w_2 = \sqrt[10]{15}(Cos\ 86° + iSen\ 86°)\ k = 1$$

$$w_3 = \sqrt[10]{15}(Cos\ 158° + iSen\ 158°)\ k = 2$$

$$w_4 = \sqrt[10]{15}(Cos\ 230° + iSen\ 230°)\ k = 3$$

$$w_5 = \sqrt[10]{15}(Cos\ 302° + iSen\ 302°)\ k = 4$$

Si representamos gráficamente estas cinco raíces, veremos que se hallan sobre una circunferencia con centro en el origen y radio $\sqrt[10]{15}$. Además todas ellas están a la misma distancia de las otras: forman los vértices de un pentágono regular. Ver la figura

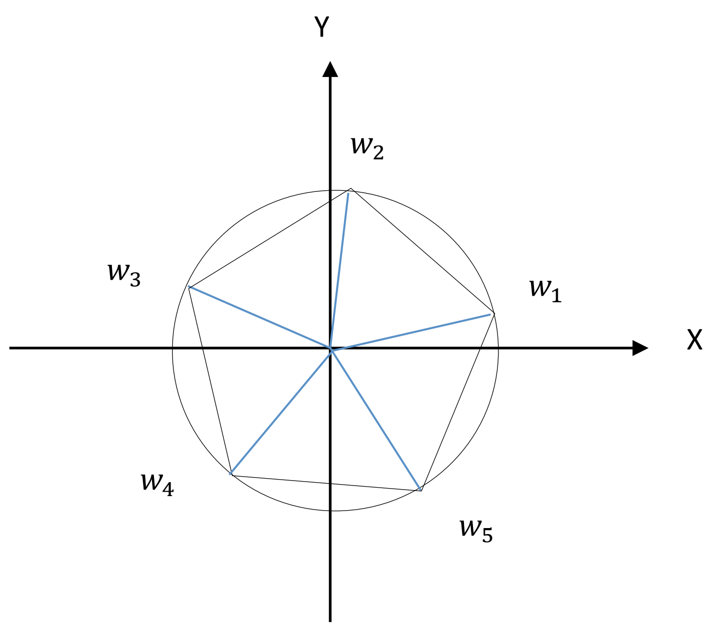


Figura 4
Fuente: Propia.

Ejemplo. Hallar todas las raíces décimas del siguiente número complejo $z = \frac{2}{9} + \frac{1}{5}i$.

Solución. Tomamos la representación en forma polar de z, así:

$$r = \sqrt{\left(\frac{2}{9}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{36} + \frac{1}{25}} = \frac{\sqrt{34}}{15} \; además \; arg(z) = arcTan\left(\frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{9}}\right) \cong 42° \text{ es decir:}$$

$$z = \frac{\sqrt{34}}{15}(Cos\ 42° + i\ Sen\ 42°)$$

Luego hallamos las raíces décimas por intermedio de:

$$\sqrt[10]{z} = r^{1/10}\left\{Cos\left(\frac{42° + 2\pi k}{10}\right) + iSen\left(\frac{42° + 2\pi k}{10}\right)\right\} \; Con\ K$$
$$= \; 0, 1, 2, 3, 4, 5,6,7,8 \; y \; 9$$

Estos valores de k nos dan las diez raíces pedidas.

$$w_1 = \frac{\sqrt{34}}{15}(Cos\ 4{,}2° + iSen\ 4{,}2°) \; k = 0$$

$$w_2 = \frac{\sqrt{34}}{15}(Cos\ 40{,}2° + iSen\ 40{,}2°) \; k = 1$$

$$w_3 = \frac{\sqrt{34}}{15}(Cos\ 76{,}2° + iSen\ 76{,}2°) \; k = 2$$

$$w_4 = \frac{\sqrt{34}}{15}(Cos\ 112{,}2° + iSen\ 112{,}2°) \; k = 3$$

$$w_5 = \frac{\sqrt{34}}{15}(Cos\ 148{,}2° + iSen\ 148{,}2°) \; k = 4$$

$$w_6 = \frac{\sqrt{34}}{15}(Cos\ 184{,}2° + iSen\ 184{,}2°) \; k = 5$$

$$w_6 = \frac{\sqrt{34}}{15}(Cos\ 220{,}2° + iSen\ 220{,}2°) \; k = 6$$

$$w_6 = \frac{\sqrt{34}}{15}(Cos\ 256{,}2° + iSen\ 256{,}2°) \; k = 7$$

$$w_6 = \frac{\sqrt{34}}{15}(Cos\ 292{,}2° + iSen\ 292{,}2°)\ k = 8$$

$$w_6 = \frac{\sqrt{34}}{15}(Cos\ 328{,}2° + iSen\ 328{,}2°)\ k = 9$$

Si las graficamos en el plano complejo, vemos que ellas ocupan los vértices de un decágono regular inscrito en una circunferencia de radio $\frac{\sqrt{34}}{15}$.

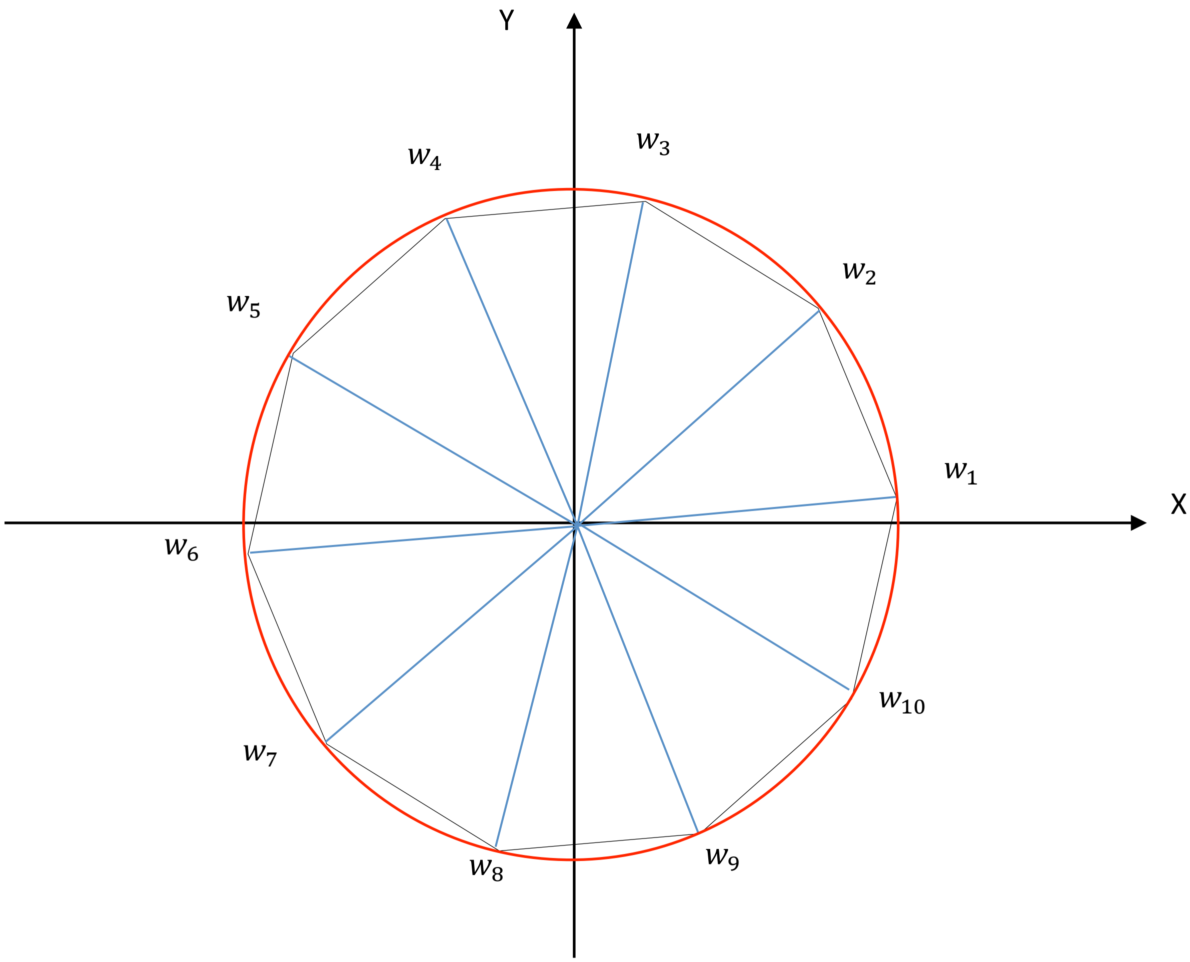


Figura 5
Fuente: Propia.

Ejercicios

1. En cada uno de los siguientes casos realizar la representación, en el plano complejo, del número complejo dado.

    a) $z = \sqrt{21}\left(Cos(15°) + iSen(15°)\right)$.
    b) $z = \frac{4}{11}\left(Cos(35°) + iSen(35°)\right)$.
    c) $z = \sqrt[3]{16}\left(Cos(20°) + iSen(20°)\right)$.
    d) $z = \frac{7}{3}\left(Cos(10°) + iSen(10°)\right)$.
    e) $z = \sqrt{14}\left(Cos(300°) + iSen(300°)\right)$.
    f) $z = \frac{6}{5}\left(Cos(31°) + iSen(31°)\right)$.
    g) $z = \left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)\left(Cos(-78°) + iSen(-78°)\right)$.

2. Expresar los siguientes números complejos en forma polar:

    a) $z = 3 + 4i$.
    b) $z = 2 + 7i$.
    c) $z = 11 + 18i$.
    d) $z = 24 - 36\mathrm{i}$.
    e) $z = 41 - 25i$.
    f) $z = 47 + 28i$.
    g) $z = \left(\frac{6}{5} + \frac{1}{3}i\right)\left(\frac{2}{3} - \frac{17}{9}i\right)$.
    h) $z = 57 - 31i$.
    i) $z = 19$.

3. Usando la forma polar, efectúe las siguientes operaciones:

    a) $\left(\frac{6}{5} + \frac{1}{3}i\right)\left(\frac{2}{3} - \frac{17}{9}i\right)$.
    b) $\frac{11-7i}{10+3i}$.
    c) $\frac{14i}{12+13i}$.
    d) $(17 + 52i)^4$.
    e) $\left(\sqrt{13} + \sqrt{11}i\right)^7$.
    f) $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5}i\right)^{-3}$.

g) $\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{7}i)\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}i\right)}{18i}$.

4. Calcular las raíces octavas del complejo $z = \sqrt{2} + \sqrt{13}i$, representarlas gráficamente.
5. Calcular las raíces cúbicas de los siguientes números complejos.

a) $z = \sqrt{\frac{3}{8}} - \sqrt{\frac{1}{4}}i.$
b) $z = -10 + \sqrt{7}i.$
c) $z = \sqrt{15} + \frac{3}{19}i.$
d) $z = \frac{1}{21} - \sqrt{\frac{3}{7}}i.$
e) $z = 25.$

Fórmula de Euler

Según Spiegel, M. y otros. (2001), Si se supone que se satisface la expansión de la serie infinita
$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$ del cálculo elemental para $x = i\theta$, se llega a la igualdad

$$e^{i\theta} = Cos\theta + iSen\theta$$

Que se conoce como fórmula de Euler. Sin embargo, es más práctico tomar esta expresión como definición de $e^{i\theta}$. En general, se define como

$$e^z = e^{x+yi} = e^x e^{yi} \text{ } y\, utilizando\, la\, fórmula\, de\, Euler, obtenemos:$$

$$e^z = e^{x+yi} = e^x e^{yi} = e^x(Cosy + iSeny)$$

En el caso especial que y = 0, esta igualdad se reduce a e^x.

Observe que en términos de la expresión dada el teorema de Moivré se reduce a
$\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$

Un caso particular de la fórmula de Euler es: $e^{i\pi} + 1 = 0$ que relaciona elementos matemáticos tan diferentes como el 0 y el natural 1, los irracionales e y π, y el imaginario puro i.

Por ejemplo: sea $z = \sqrt{2} + \sqrt{13}i$ determine e^z

Solución: de acuerdo con las expresiones dadas se tiene:

$$e^z = e^{\sqrt{2}+\sqrt{13}i} = e^{\sqrt{2}}e^{i\sqrt{13}} = e^{\sqrt{2}}\left(Cos(\sqrt{13}) + iSen(\sqrt{13})\right)$$

Funciones trigonométricas complejas y funciones hiperbólicas

Las funciones hiperbólicas de una variable aquí expuestas se pueden expresar a partir de funciones trigonométricas en el plano complejo.

Ampliemos las definiciones de las funciones seno y coseno en el plano complejo:

$$Cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad Sen(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Cuando z es real, estas fórmulas coinciden con las funciones seno y coseno ordinarios. Cuando z es imaginario puro, esto es z = iy, obtenemos:

$$Cos(iy) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{e^{i^2y} + e^{-i^2y}}{2} = \frac{e^{-y} + e^{y}}{2} = \frac{e^{y} + e^{-y}}{2}$$

$$Sen(iy) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{i^2y} - e^{-i^2y}}{2i} = \frac{e^{-y} - e^{y}}{2i} = -\frac{e^{y} - e^{-y}}{2i} = i\frac{e^{y} - e^{-y}}{2}$$

Con lo cual es posible establecer la relación que existe entre las funciones trigonométricas de argumento complejo y las funciones hiperbólicas (Apóstol, T. 1981):

$$Cos(iy) = Cos(hy)$$
$$Sen(iy) = iSen(hy)$$

Función logarítmica

Un logaritmo de un número complejo $z_0 \neq 0$, denotado $ln\ z_0$, es cualquier número w que satisface $e^w = z_0$ (la razón para excluir al 0 es que no existe w tal que $e^w = 0$).

Supongamos que el argumento principal de $z_0\ es\ \theta_0$. Consideremos a w en forma binómica, es decir, $w = x + iy$ con $x, y \in R$. Entonces, debe cumplirse que $e^{x+iy} = z_0$, es decir, $e^x e^{iy} = |z_0|\, e^{i\theta_0}$ de donde, por igualdad de complejos en forma exponencial, debe ser $x = Ln|z_o|\ y\ además\ y = \theta_o + 2k\pi$ en donde k representa a cualquier entero.

Resumiendo, obtenemos la siguiente expresión, válida para cualquier z ≠ 0:

$ln\, z = ln\, |z| + i\, (Arg\, z + 2k\pi)$, en donde k es cualquier entero, recuerde además que $|z|$ es el módulo de z. Esta expresión arroja infinitos valores complejos distintos, de todos ellos, definiremos el logaritmo principal como:

$Ln\, z = ln\, |z| + i\, Arg\, z\, con - \pi < Arg\, z \leq \pi$, es decir, el correspondiente a k = 0 en la expresión anterior.

Ejemplo

Calcular $ln\,(-1)\; y\; ln\,(5 - 12i)$.

a) $Ln(-1) = Ln|-1| + i\pi + i2k\pi = i(\pi + 2k\pi)$.

b) $Ln(5 - 12i) = Ln|5 - 12i| + iarcTan\left(-\frac{12}{5}\right) + i2k\pi \cong Ln13 - 1.176i + i2k\pi \cong 2.5619 - 1.176i + 6.2832ik$.

Ejercicios

1) Encuentre el $Ln(-2)$.

2) Halle: (a) $Ln(e)$, (b) $Ln(i)$, (c) $Ln(-ei)$.

3) Muestre que $Ln(1 - i) = \frac{1}{2}Ln2 - \frac{\pi}{4}i$.

4) Calcular el siguiente número complejo $\mathrm{z} = \frac{2}{\mathrm{i}}\mathrm{Ln}\left(\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)$.

2

Unidad 2

Análisis de Fourier primera parte

Matemáticas especiales

Autor: Gustavo Adolfo Gallego Castañeda

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina
MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Introducción

Cuando de abordar el estudio de las funciones se trata, observamos un planteamiento con bastante frecuencia a la aproximación de las mismas mediante otras funciones más simples de manejar que las primeras. Por ejemplo, el Teorema de Taylor permite aproximar funciones mediante polinomios que son, claramente, el tipo de funciones más sencillas de trabajar; sin embargo, las funciones que se aproximan por polinomios deben verificar, hipótesis muy restrictivas (concretamente derivabilidad de orden "n"). Además, la aproximación que se obtiene es aplicable solamente en un entorno del punto donde la función verifica la hipótesis exigida.

El método ideal para aproximar funciones en campos más amplios es con el manejo de series de funciones en las que cada término se puede representar mediante una función seno o coseno; a estas series se les denomina Series de Fourier. Este prestigioso matemático realizó trabajos muy importantes especialmente en el estudio de las funciones y su contribución más importante en este campo es la de que toda función $y = f(x)$, se puede representar mediante una serie de la forma:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n Cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n Sen(nx)$$

Es importante destacar que la ciencia de las matemáticas ha avanzado considerablemente desde la época de Fourier hasta la actual, reconociéndose que, no todas las funciones se pueden aproximar mediante estas series aunque, en su época, las funciones con las que se trabajaba eran aquéllas que no presentaban ningún tipo de anomalía; es decir, eran funciones continuas y derivables. Después, como veremos, se demuestra que el campo donde estos desarrollos son válidos son aún más amplios, aunque sigue no siendo cierto que toda función se pueda expresar mediante su desarrollo en Series de Fourier.

Si se desea plantear como escribir una función mediante su serie de Fourier se debe analizar dos situaciones específicas:

- Analizar que existe un desarrollo en Serie de Fourier de la función $f(x)$, indicada.
- ¿Cómo se obtiene la serie de Fourier correspondiente a cada función?

U2

Metodología

La matemática es una ciencia fundamental. Se establece a base de símbolos, ecuaciones, relaciones, funciones, métodos especiales, libros de texto que se ven diferentes, y muchos términos y palabras exclusivas. Por consiguiente, es importante usar técnicas de estudio que apliquen bien a las matemáticas. He aquí algunas que usted debería usar.

No se puede estudiar matemáticas solamente basado en la lectura y dejando que otros le hablen. La mayor parte del aprendizaje de ellas implica hacerlo de manera activa. Esto quiere decir que usted debe realizar todas las tareas y asignaciones. Esto involucra aprender a usar fórmulas y métodos.

Se requiere de una secuencia para mejorar el aprendizaje de las matemáticas. Todo aquello que se aprende tiene que ver con lo que se aprendió. La consigna es no quedarse, ya que es muy difícil ponerse al día. Realizar jornadas maratónicas para responder de inmediato no ayuda en. Tenga en cuenta que es muy útil abrir el aplicativo todos los días e ir a la par con sus compañeros.

Todos los temas de esta asignatura tienen un grado de dificultad y este se aumenta progresivamente. Es necesario que dedique más tiempo del que usted considera a esta materia así avanzará con mayor confianza.

Aprender de memoria no es una buena táctica para este curso. Son demasiados los conceptos y métodos. Trate de manejar un razonamiento de los conceptos fundamentales. Con esto no necesitará recordar tanta información.

Cuando utilice los pasos para la solución de un problema, no debe olvidar que estos posiblemente le sirvan para resolver otro similar. No dude en aplicar lo que aprendió cuando se le presente el nuevo problema.

Aprópiese de un buen número de palabras y forme con ellas un glosario. Recuerde que algunas palabras en matemáticas tienen un significado distinto fuera de ellas. Como ejemplo, si utilizamos la palabra volumen, se refiere a la cantidad de espacio dentro de una figura sólida, en otros casos puede significar un libro o el nivel de sonido. Realice un listado de estas palabras y ubícalas en un lugar especial no olvide escribir su significado.

Estudiar los temas de cualquier curso de matemáticas le puede causar incertidumbre. Quizás suene raro pero es necesario generar confianza en sí mismo esto le ayudará a calmar la angustia.

U2 Desarrollo temático

"Valgámonos de palabras inexactas, si es preciso, a trueque de entendernos deprisa."
Eugenio D'Ors

Análisis de Fourier primera parte

La aplicación más intuitiva de la teoría de Fourier es aquella que se refiere al tratamiento de las señales periódicas, ya que sus resultados tienen una sencilla interpretación física, tal y como se verá a continuación.

Funciones periódicas

Una función se dice periódica si al añadir un período a la variable independiente se repiten sus valores, es decir:

$$f(t) = f(t + P)$$

Donde $\boldsymbol{P}$ es el período.

De otra parte, pero hablando de física, las ondas periódicas son aquellas que describen ciclos repetitivos. En una onda periódica se cumple:

$$x_a(t) = x_a(t + T_p) = x_a(t + nT_p)$$

Siendo el periodo fundamental $T_p = \frac{1}{F}$, F es la frecuencia de la componente fundamental de la onda periódica y n un número entero.

La descripción de una onda periódica simple se en la forma sinusoidal:

$$x_a(t) = ASen(2\pi Ft + \theta)$$

Esta onda se distingue por tres medidas: A es la amplitud, F que es la frecuencia en radianes por segundo (rad/s), y θ que corresponde a la fase en radianes.

Es de anotar, que este modelo de onda no describe ondas periódicas más complejas, como las ondas armónicas. Joseph Fourier explicó que estas ondas complejas se pueden sumar como múltiplos enteros de la frecuencia fundamental. De esta forma, si $x_a(t)$ es el desplazamiento periódico en determinada posición y además ella y su derivada son continuas, se pueden representar mediante (tomado de https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Funci%C3%B3n_peri%C3%B3dica&oldid=83279553):

$$x_a(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n Sen(2\pi nFt + \theta_n)$$

Para encontrar a A_n y θ_n de una onda dada, se utiliza el llamado análisis de Fourier. Así como una onda periódica puede desarrollarse por serie de Fourier utilizando sumas relativas de la frecuencia fundamental y sus armónicos superiores, de igual forma se pueden elaborar nuevas ondas periódicas realizando diferentes sumas a la frecuencia fundamental de los armónicos superiores mediante el proceso de síntesis de Fourier.

En el caso de las señales de ancho de banda limitado, en telecomunicaciones, la suma es finita:

$$x_a(t) = \sum_{n=1}^{N} A_n Sen(2\pi nFt + \theta_n)$$

Con $N =$ al total de armónicos de la onda periódica. Para el primer armónico de frecuencia baja se tiene $n = 1$, de amplitud A_1, frecuencia F y fase θ_1. Este caso es el más simple que se puede analizar ya que los demás, requieren de infinitos armónicos y solo se analizan en forma perfecta o abstracta pues no se puede transmitir señales de ancho de banda infinito. Es de precisar que existen casos especiales como la onda cuadrada o triangular, que a pesar de que están compuestas por infinitos armónicos, se estudian como ondas de armónicos impares y su amplitud será inversamente proporcional al número de armónico, es decir:

$$x_a(t) = \frac{4A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} Sen((2n-1)2\pi Ft + \theta)$$

En la siguiente figura, se da el "ejemplo de síntesis de una onda cuadrada a partir de la adición de sus componentes armónicos. La onda final resultante sólo es una aproximación debido al uso de un número finito de componentes armónicos: en total, 25. El último gráfico de la secuencia (harmonics: 25) puede ser descrito como: $x_a(t) = \frac{4A}{\pi}\sum_{n=1}^{25}\frac{1}{2n-1}Sen((2n-1)2\pi Ft+\theta)$" (ver imagen a continuación).

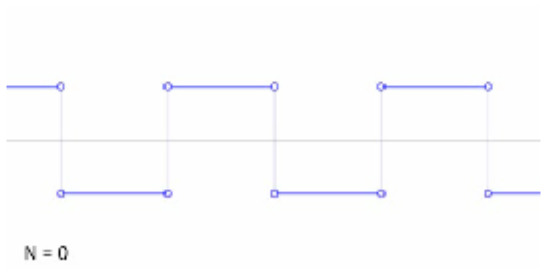


Imagen 1

Fuente: https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Funci%C3%B3n_peri%C3%B3dica&oldid=83279553

"En una onda periódica se definen el valor de pico máximo F_{p+} así como el valor de pico mínimo F_{p-} como sus valores máximo y mínimo en un período, respectivamente. El valor de pico a pico F_{pp} es la diferencia entre ambos:

$$\left.\begin{aligned} F_{p+} &= max\{f(t)\} \\ F_{p-} &= min\{f(t)\} \end{aligned}\right\} \rightarrow F_{pp} = F_{p+} - F_{p-}$$

Unos valores típicamente asociados a una función periódica son el de su valor medio:

$$F_m = \frac{1}{T}\int_0^T f(\tau)d\tau$$

Y su valor eficaz o RMS:

$$F = F_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T f^2(\tau)d\tau}$$

Donde las integrales se han definido entre 0 y T, aunque es válido cualquier intervalo que abarque un período de –T/2 a +T/2.

Una de las ondas periódicas más representativas es la sinusoidal (ver figura 1), cuya expresión es:

$$f(t) = ASen(w_0t + \theta)$$

Siendo A lo que se conoce como amplitud y θ su fase inicial. En este caso el valor de pico (máximo y mínimo) es F_p = A y el valor de pico a pico F_{pp} = 2A. Asimismo, el valor medio para esta forma de onda es igual a cero y su valor eficaz $A/\sqrt{2}$" (Carrillo, C. (2003). Fundamentos del análisis de Fourier).

Ver ejemplos de ondas periódicas en las siguientes direcciones (https://www.youtube.com/watch?v=ubxZmuqNdOw, https://www.youtube.com/watch?v=fhCQT0ZqaN0)

Series de Fourier

La serie de Fourier es aquella que converge puntualmente a una función periódica y continua a trozos (o por partes). Estas establecen un instrumento matemático básico del análisis de Fourier utilizado para el análisis de funciones periódicas por medio de la desintegración de una de ellas en una suma infinita de funciones sinusoidales más simples. Fue Fourier, quien amplió la teoría estudiando la ecuación del calor. El área de investigación se conoce comúnmente como análisis armónico.

Se utiliza en muchos campos de la ingeniería, constituyéndose como herramienta de la teoría matemática abstracta. Las aplicaciones van desde el análisis vibratorio, acústica, óptica, procesamiento de imágenes y señales, hasta la compresión de datos. En ingeniería, se puede referir a un analizador de espectros.

Las series de Fourier tienen la forma:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_nCos(nw_0t) + b_nSen(nw_0t))$$

Donde a_n y b_n se denominan coeficientes de Fourier de la serie de Fourier de la función

$f(x)$ y $w_0 = 2\pi f_r$ es la frecuencia angular de la serie (tomado de

https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Serie_de_Fourier&oldid=85233495).

Por otra parte, si $f(t)$ es una función periódica y su período es T, la serie de Fourier asociada a $f(t)$ es:

$$f(t) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n Cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) + b_n Sen\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)\right)$$

Donde a_0, a_n y b_n son los coeficientes de Fourier que toman los valores:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt \;\; a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)Cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)dt \;\; b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)Sen\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)dt$$

De acuerdo con la identidad de Euler, estas expresiones se pueden llevar a su forma compleja:

$$f(t) \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{2n\pi}{T}t}$$

Los coeficientes ahora serían:

$$c_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-i\frac{2n\pi}{T}t}dt$$

Además de las siguientes relaciones:

$$C_o = \frac{a_o}{2}, C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \theta_n = Tan^{-1}\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$$

Espectro de frecuencia

Un espectro de frecuencia se identifica por que la distribución de amplitudes para cada frecuencia de un fenómeno ondulatorio es una superposición de ondas de varias frecuencias. Por otra parte se puede llamar espectro de frecuencia al plano de intensidad vs frecuencia de una onda particular.

El espectro de frecuencias se aplica a cualquier elemento que se combine con frecuencia o movimientos ondulatorios como se puede observar en la siguiente imagen (tomado de https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Espectro_de_frecuencias&oldid=85023194)

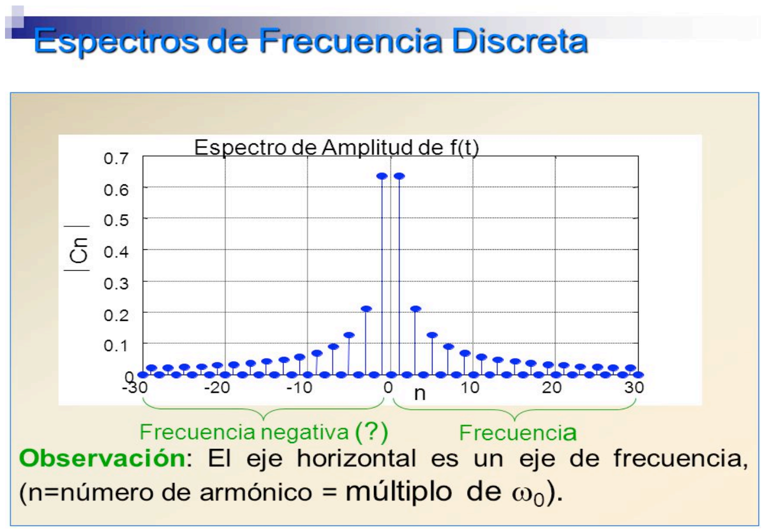


Imagen 2
Fuente: http://slideplayer.es/slide/1031038/

Indices de distorsión

Dado un sistema no lineal en el que se introduce un tono de frecuencia f_0, al salir se tendrá el mismo tono (con una amplitud y fase posiblemente diferentes) y, sumado a él, otros tonos de frecuencia $2f_0, 3f_0, \cdots$ que se denominan armónicos del tono fundamental f_0.

Por consiguiente THD se escribe de la siguiente manera (tomado de https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Distorsi%C3%B3n_arm%C3%B3nica&oldid=83642094):

$$THD = \frac{\sum potencia\ del\ armónico}{potencia\ de\ la\ frecuencia\ fundamental} = \frac{P_1 + P_2 + P_3 + \cdots + P_n}{P_0}$$

Teorema de Parseval

Para los entendidos en la materia con los planteamientos de Parseval se logra comprobar que la transformada de Fourier es unitaria; en otras palabras, la integral del cuadrado de una función es igual a la integral del cuadrado de su transformada.

Cuando se trata de aplicaciones a pesar de que el planteamiento de Parseval sirve para mostrar cualquier transformada de Fourier como unitaria, al generalizar este planteamiento se observa que se convierte en el planteamiento de Plancherel.

El planteamiento de Parseval se expresa de la siguiente forma:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}[f(t)](\alpha)|^2 dt$$

Es claro que según el planteamiento al que se hace referencia $\mathcal{F}[f(t)](\alpha)$ es la transformada continua de Fourier de $f(t)$ y α representa la frecuencia (en hercios) de f.

La interpretación de la expresión dada corresponde en "general a la energía de una función $f(t)$ en un intervalo de tiempo (a, b) que se establece como:

$$E = \int_{a}^{b} [f(t)]^2\, dt$$

Esta ecuación integral expresa que si $f(t)$ es la corriente que circula por una resistencia de 1Ω, entonces E es la energía disipada en esa resistencia en el intervalo de tiempo (a,b).

En el caso de una función periódica se puede hablar de energía media por período o potencia media P cuya expresión es:

$$P = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} [f(t)]^2 dt$$

Donde T es el período.

El teorema de Parseval afirma que la potencia media se puede expresar en función de los coeficientes de Fourier como" (Carrillo, C. (2003). Op Cit. Pp. 8-9)

$$P = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} [f(t)]^2 dt = \frac{{a_o}^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left({a_n}^2 + {b_n}^2\right) = C_o + \sum_{n=1}^{\infty} ({C'}_n)^2$$

Análisis de formas de onda periódicas

En este caso se analizarán las condiciones que facilitan el estudio de una función periódica. Las primeras de ellas son simetrías que permiten la deducción de los valores de algunos de los coeficientes de Fourier, a la vez que simplifican sus cálculos.

Simetrías de una función periódica

Al realizar una clasificación de las características que presentan las series de Fourier en función de la simetría específica a las funciones periódicas genéricas se obtiene:

Consideremos el conjunto de funciones pares (ver figura), donde se cumple que $f(2\pi n - t) = f(t)$, para cualquier valor entero de n. En este caso, en el desarrollo en serie de Fourier, podemos intuir, por las propiedades de la función coseno, que solo aparecerán términos en coseno, esto es, los coeficientes b_n serán nulos.

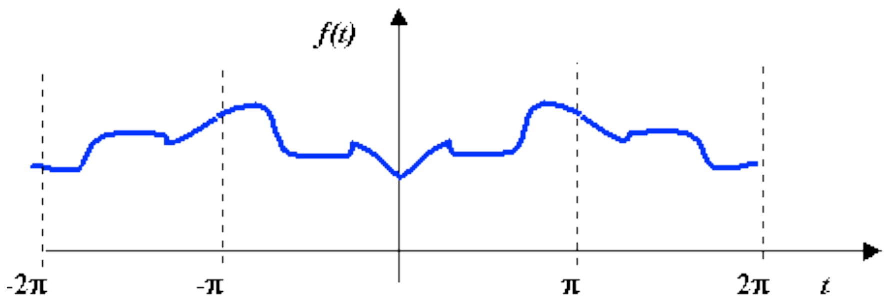


Imagen 3. Función par simétrica respecto a 0, con periodo 2π
Fuente: Propia.

Si consideramos, el conjunto de las funciones impares (ver figura), $f(2\pi n - t) = -f(t)$ para cualquier valor entero de n podemos deducir, por las propiedades de la función seno, que solo aparecerán términos en seno, esto es, los coeficientes a_n serán nulos.

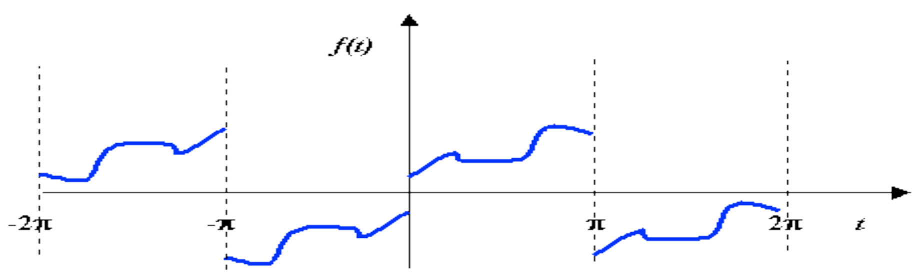


Imagen 4. Función impar simétrica respecto a 0, con periodo 2π
Fuente: Propia.

Consideremos también un nuevo conjunto de funciones conocido como funciones pares, simétricas respecto a $\pi/2$ (ver figura), que son aquellas que cumplen la condición $f(\pi/2+ \ t) = f(\pi/2 - t)$. Estas funciones solo tendrán términos pares en el coseno, es decir, $b_n = 0$ y $a_{2n-1} = 0$.

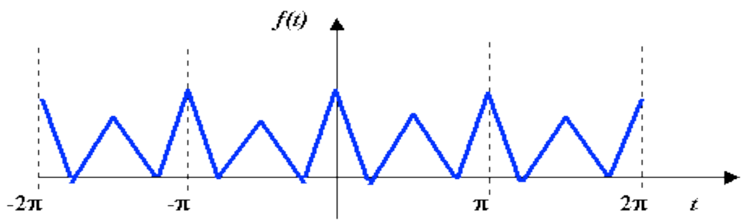


Imagen 5. Función par simétrica respecto a π/2, con periodo 2π
Fuente: Propia.

Por supuesto podemos generalizar las series de Fourier para representar funciones con un periodo T, distinto de 2π, si realizamos el cambio de variable.

$$x = \frac{Tt}{2\pi}$$

Se obtuvo con este resultado que un intervalo de longitud 2π en la variable t, se transforma en un intervalo de longitud L en la variable x. luego las ecuaciones para el análisis serán:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n Cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) + b_n Sen\left(\frac{2\pi nx}{T}\right)$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\, Cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) dx$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\, Sen\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) dx$$

Todas las consideraciones que hemos realizado sobre la simetría de las funciones son, por supuesto, aplicables al nuevo intervalo así definido (tomado de https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Relaci%C3%B3n_de_Parseval&oldid=82776290).

Se debe de dejar claro lo que el intervalo fundamental o periodo T, representa para un determinado problema. Supongamos que una función f(x) viene definida en el intervalo $0 < x < a$. Esta función, por supuesto, podremos desarrollarla en serie de Fourier con periodo $T = a$, en la forma:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n Cos\left(\frac{2\pi nx}{a}\right) + b_n Sen\left(\frac{2\pi nx}{a}\right)$$

Para una función f(x) arbitraria, necesitaremos en su desarrollo, tanto términos seno como coseno, es decir, un desarrollo sólo en senos o sólo en cosenos (con periodo a), sería incompleto. Pero, aquí está la magia, podemos desarrollar f(x) sólo en senos de la siguiente manera. Definimos, en el intervalo $-a < x < 0$, una función suplementaria (artificial), con la forma $f(-x) = -f(x)$, tal que el periodo de la nueva función será ahora T = 2a. De esta forma, podremos describirla en la forma:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n Sen\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

Lo que hemos conseguido de esta forma ha sido evitar los términos coseno del desarrollo, pero a cambio hemos duplicado el número de términos en senos teniendo, en definitiva, un conjunto completo de funciones que describen de forma analítica a la función $f(x)$ en el intervalo $0 < x < a$. De la misma forma, podríamos desarrollar también $f(x)$ en una serie que solo contuviera cosenos, con periodo 2a, definiendo artificialmente la función $f(-x) = +f(x)$ en el intervalo $-a < x < 0$.

Funciones especiales

Según Barroso, L. (2005), En su libro Matemáticas superiores para ingeniería En la aplicación de las teorías de Fourier se manejan una serie de funciones especiales como son la función impulso Delta de Dirac, el tren de impulsos y la función escalón o de Heaviside. En este apartado veremos todas estas funciones.

La función Impulso unitario

La función impulso unitario juega un papel determinante en la teoría de la comunicación de señales y en concreto en el teorema del muestreo. Se define como:

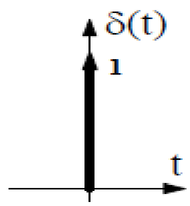


Imagen 6
Fuente: Propia.

Y cumple que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1, \delta(t) = 0 \;\forall t \neq 0$$

Es decir, que aunque se trate de un pulso infinitamente estrecho, tiene un área de 1 porque posee una amplitud infinita. Por el mismo motivo se tiene, por definición, que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = f(0)$$

Y de la misma forma, que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0) \; y \; además$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(at)dt = \frac{1}{|a|}f(0)$$

Tren periódico de impulsos unitarios

Es aquella función periódica definida como:

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$$

Cuya descomposición en serie de Fourier es:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) = \frac{1}{T} + \frac{2}{T}\sum_{n=1}^{\infty} Cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)$$

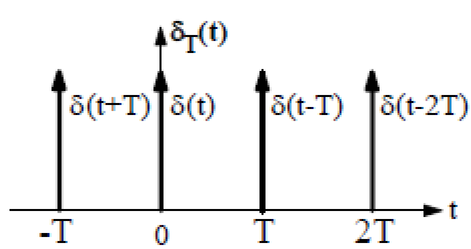


Imagen 7
Fuente: Propia.

La función Escalón unitario

Existen varias maneras diferentes de definir la función de Heaviside, no todas ellas equivalentes. Las diferentes definiciones no equivalentes difieren solo en el valor $H(0)$, que es convencional. La mayoría de autores lo definen como $H(0) = 1$, otros $H(0) = 0$. Algunos que lo definen como $H(0) = 1/2$, ya que maximiza la simetría de la función, y permite una representación de la misma a través de la función signo:

$$H(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ \frac{1}{2}, x = 0 \\ 1, x > 0 \end{cases}$$

$$H(x) = \frac{1}{2}(1 + sgn(x))$$

Puede especificarse con un subíndice el valor que se va a usar para $H(0)$, de la siguiente

forma:

$$H(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ \alpha, x = 0 \\ 1, x > 0 \end{cases} \quad \alpha \in \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$$

Una forma de representar esta función es a través de la integral

$$H(x) = \lim_{t=0} -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\tau + it} e^{-ix\tau} d\tau$$

La función Sinc

La función Sinc o seno cardinal, se denota por $sinc\,(x)$, tiene dos definiciones, la normalizada y la desnormalizada que se definen de la siguiente forma:

En procesamiento digital de señales y teoría de la información, la función Sinc normalizada comúnmente se define como:

$$sinc_N(x) = \frac{Sen(\pi x)}{\pi x}$$

La función sinc desnormalizada, está definida por:

$$sinc\,(x) = \frac{Sen(x)}{x}$$

Esta función se representa en la siguiente figura:

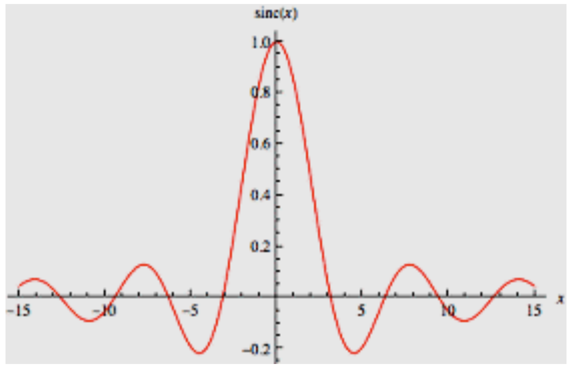


Imagen 8
Fuente: http://mathworld.wolfram.com/SincFunction.html

Evaluación de los coeficientes de Fourier por diferenciación

El uso de la función generalizada $\delta(t)$ junto con la diferenciación, puede facilitar el cálculo de los coeficientes de las series de Fourier para ciertas funciones que contengan discontinuidades; de forma que las integrales envueltas en el cálculo de la Serie de Fourier presenten importantes simplificaciones.

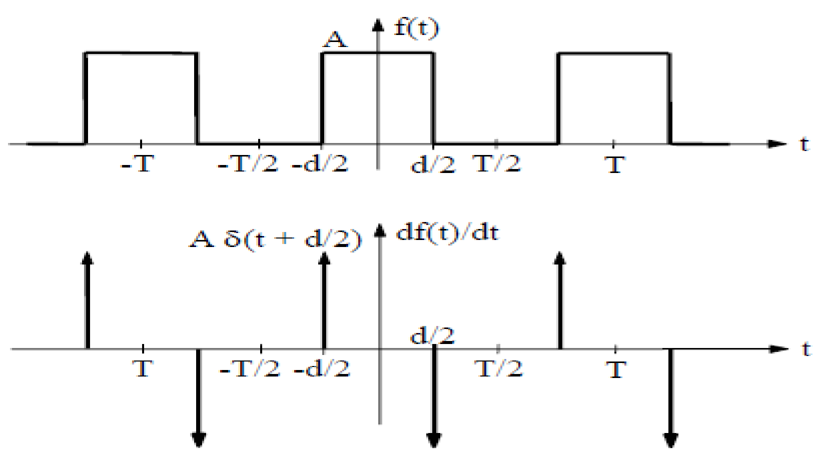


Imagen 9
Fuente: Hwei P. (1973) "Análisis de Fourier"

Para calcular los coeficientes a_0, a_n y b_n de la Serie de Fourier, se puede emplear la expresión diferencial:

$$\frac{df(t)}{dt} = \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n Cos(nw_o t) + \beta_n Sen(nw_o t))$$

Entonces se obtienen los coeficientes de $f(t)$ mediante las relaciones:

$$a_n = -\frac{\beta_n}{nw_o}\ b_n = \frac{\alpha_n}{nw_o}$$

Esto es útil, siempre y cuando los coeficientes α_n y β_n sean de más fácil obtención que los correspondientes a_n y b_n, tal es el caso del ejemplo de la figura anterior. En este caso para el cálculo de los coeficientes sólo se necesita conocer la Serie de Fourier de un tren de impulsos, cuya obtención involucra integrales muy sencillas. En general, el coeficiente a_0 ha de calcularse a partir de la función original, ya que la diferenciación implica la desaparición de la componente continua de la función.

Integral de Fourier y Espectros continuos

De la Serie de Fourier a la integral de Fourier

Hasta ahora a las funciones a las que se le han aplicado las teorías de Fourier se les ha exigido periodicidad, que fue la primera aplicación de estas teorías. En cambio después de introducir las series de Fourier, su autor generalizó las mismas hacia lo que se llama la Transformada de Fourier. Esta operación es aplicable a prácticamente cualquier tipo de función, periódica o no, mediante las siguientes relaciones:

Transformada de Fourier $\Im\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t} dt$

Transformada inversa de Fourier $\Im^{-1}\{f(t)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(w)\, e^{-i\omega t} dw$

Donde t representa al tiempo en s y w a la frecuencia en rad/s.

Con la transformación asociada al empleo de la función $F(w)$ definida para la transformada, se obtiene una función continua en el dominio de la frecuencia w (en rad/s). De forma que a $F(w)$ se le llama espectro continuo de $f(t)$, o bien, Transformada de Fourier de $f(t)$.

La función $F(w)$ es en general compleja, pudiéndose dividir en sus partes real e imaginaria, o en módulo (espectro de magnitud) y fase (espectro de fase), es decir:

$$F(w) = R(w) + iX(w) = |F(w)|e^{i\varphi(\omega)}$$

Por el contrario, en las aplicaciones que se verán aquí la función $f(t)$ se supondrá una función real, como es de suponer cuando se habla de fenómenos físicos.

Ahora bien, ¿cuál es el significado físico de la Transformada de Fourier? Para llegar a él se puede partir de la Serie de Fourier y buscar la generalización hacia una función aperiódica. Se puede tomar como partida la función periódica:

$$f_T(t) = f_T(t+T) = f_T(t) \begin{cases} A & -d/2 < t < d/2 \\ 0 & t < -d/2,\ t < d/2 \end{cases}$$

De la función anterior se puede obtener una función no periódica cuando T ⟶ ∞, esto es:

$$f_T(t) = \begin{cases} A & -d/2 < t < d/2 \\ 0 & t < -d/2,\ t < d/2 \end{cases}$$

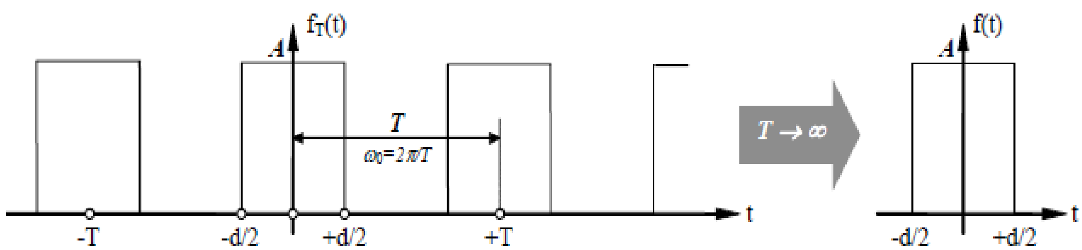


Imagen 10
Fuente: Propia.

Pero lo que resulta de interés para el acercamiento a la Transformada de Fourier es el comportamiento en el dominio de la frecuencia. ¿Qué pasa con los coeficientes de la Serie de Fourier? En el caso representado en la gráfica anterior dichos coeficientes son:

$$d_n = \frac{Ad}{T}\left(\frac{Sen(n\pi d/T)}{n\pi d/T}\right)$$

Aunque quizás lo más relevante sea la evolución del producto Td_n a medida que aumenta el período T. Lo que le ocurre a dicho producto es que cada vez los sucesivos armónicos están más cerca unos de otros, ya que se reduce la distancia entre $(2\pi(n+1)/T) = (n+1)w_o$ y $(2\pi n/T) = nw_o$. De forma que en el límite, cuando T⟶∞, los distintos $(2\pi n/T) = nw_o$ valores forman un espectro continúo de frecuencias que se designa con la variable w de forma que:

$$Td_n = Ad\frac{Sen(nw_o)}{nw_o}\ t \to \infty\ E(w) = Ad\frac{Sen(w)}{w}$$

Donde $E(w)$ es la envolvente de los valores Td_n para cualquier valor de T. Es decir: E $(nw_o) = Td_n$. Y de esta forma cuando T⟶∞ se cumple la igualdad $E(w) = Td_n$ (tomado de Hwei P. (1973). Op cit. Pp. 71 – 99).

Resumiendo, cuando en una señal periódica del tipo $f_T(t)$ el período se hace muy grande, la envolvente de $Td_n(E(w))$ y los valores de Td_n son la misma función.

Entonces ahora le toca el turno a la pregunta. ¿Y cómo se calcula la envolvente $E(w)$? Si se parte de la expresión para los coeficientes de la Serie de Fourier se llega fácilmente a:

$$E(nw_o) = Td_n = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{inw_o t}dt \;\; t \to \infty \;\; E(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}dw$$

Donde ésta es precisamente la función que se ha definido al principio de este apartado como Transformada de Fourier. Esto se puede interpretar como si la función $f(t)$ estuviese compuesta de infinitos armónicos separados un infinitésimo. Del mismo modo:

$$f_T(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} F(nw_o)e^{inw_o t}w_o \;\; t \to \infty \;\; f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(w)\,e^{i\omega t}dw$$

Esta última expresión integral es la que se había definido anteriormente como la Transformada Inversa de Fourier, surgida de la tendencia del sumatorio hacia la integral en el límite.

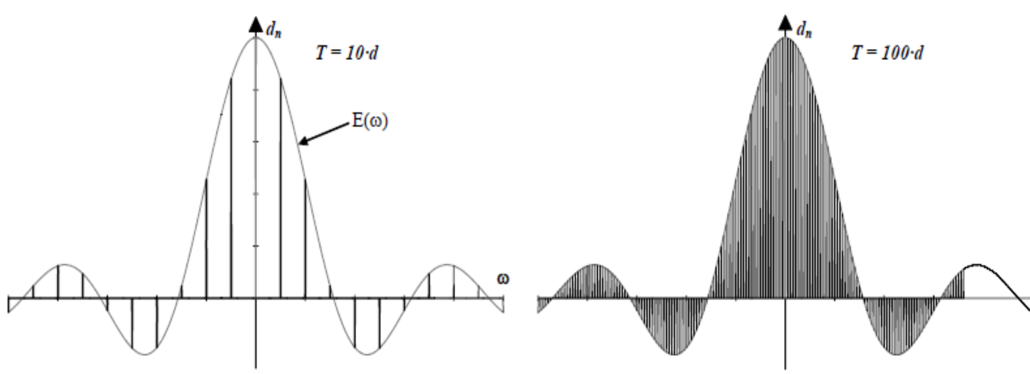
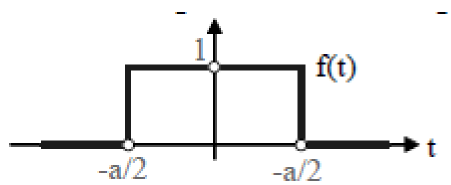


Imagen 11
Fuente: Propia.

Ejemplo:

Se va a calcular la transformada de Fourier de la función pulso, definida por:

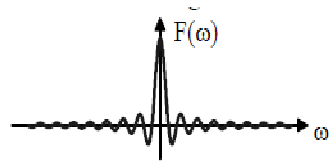
$$f(t) = \begin{cases} 1 \quad -a/2 < t < a/2 \\ 0\, t < -d/2 \;\; o\, t > a/2 \end{cases}$$



Solución

La transformada de Fourier es una función en w obtenida mediante la integral:

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-a/2}^{a/2} 1 e^{-i\omega t} dt = a \frac{Sen\left(\frac{1}{2} aw\right)}{\frac{1}{2} aw}$$



2

Unidad 2

Análisis de Fourier segunda parte

Matemáticas especiales

Autor: Gustavo Adolfo Gallego Castañeda

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina
MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Introducción

La contribución de Fourier, tradicional hoy por hoy en las matemáticas, fue la representación, descubierta por Bernoulli, de que cualquier función y = f(x) se puede representar por una serie de la forma:

$$y = \frac{a_0}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(a_k \mathrm{Cos}(kx) + b_k \mathrm{Sen}(kx)) \ \text{con}\ k = 0,1,2,3\cdots\ a_k,$$

Serie que se conoce en la actualidad como serie de Fourier. Si esta serie converge $\forall_x$ tal que $-\infty < x < \infty$, ella representa una función periódica de período 2π y solo se necesita, estudiar la condición del intervalo $[-\pi, \pi]$.

Las formas que se establecen por medio de estas series admiten un grado de generalidad mucho mayor, en cuanto al tipo de funciones a desarrollar, que el que permite la serie de Taylor. Incluso si hay muchos puntos en los que no exista la derivada, o en los que sea discontinua, la función puede tener un desarrollo en serie de Fourier.

Este gran matemático dedujo una ecuación que representaba la conducción del calor a través de los cuerpos sólidos. Pero no sólo la dedujo, sino que además desarrollo el método para resolverla: el método de separación de variables, para la resolución de Ecuaciones en Derivadas Parciales. El estudio de este procedimiento lo llevó a escribir la solución en forma de serie trigonométrica, e incluso llegar a afirmar que cualquier función periódica de período 2π, se puede expresar de esa forma. Y, para ello, encontró las fórmulas que permiten calcular los coeficientes de la serie, los cuales se determinan mediante:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx\,, a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{Cos}(nx)dx\,, b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x$$

A pesar de que la forma de una función en serie trigonométrica se había estudiado antes de que lo hiciera Fourier, nadie antes que él hizo público la relación entre función y coeficientes.

U2
Metodología

La matemática es una ciencia fundamental. Se establece a base de símbolos, ecuaciones, relaciones, funciones, métodos especiales, libros de texto que se ven diferentes, y muchos términos y palabras exclusivas. Por consiguiente, es importante usar técnicas de estudio que apliquen bien a las matemáticas. He aquí algunas que usted debería usar.

No se puede estudiar matemáticas solamente basado en la lectura y dejando que otros le hablen. La mayor parte del aprendizaje de ellas implica hacerlo de manera activa. Esto quiere decir que usted debe realizar todas las tareas y asignaciones. Esto involucra aprender a usar fórmulas y métodos.

Se requiere de una secuencia para mejorar el aprendizaje de las matemáticas. Todo aquello que se aprende tiene que ver con lo que se aprendió. La consigna es no quedarse, ya que es muy difícil ponerse al día. Realizar jornadas maratónicas para responder de inmediato no ayuda en. Tenga en cuenta que es muy útil abrir el aplicativo todos los días e ir a la par con sus compañeros.

Todos los temas de esta asignatura tienen un grado de dificultad y este se aumenta progresivamente. Es necesario que dedique más tiempo del que usted considera a esta materia así avanzará con mayor confianza.

Aprender de memoria no es una buena táctica para este curso. Son demasiados los conceptos y métodos. Trate de manejar un razonamiento de los conceptos fundamentales. Con esto no necesitará recordar tanta información.

Cuando utilice los pasos para la solución de un problema, no debe olvidar que estos posiblemente le sirvan para resolver otro similar. No dude en aplicar lo que aprendió cuando se le presente el nuevo problema.

Aprópiese de un buen número de palabras y forme con ellas un glosario. Recuerde que algunas palabras en matemáticas tienen un significado distinto fuera de ellas. Como ejemplo, si utilizamos la palabra volumen, se refiere a la cantidad de espacio dentro de una figura sólida, en otros casos puede significar un libro o el nivel de sonido. Realice un listado de estas palabras y ubícalas en un lugar especial no olvide escribir su significado.

Estudiar los temas de cualquier curso de matemáticas le puede causar incertidumbre. Quizás suene raro pero es necesario generar confianza en sí mismo esto le ayudará a calmar la angustia.

"Elocuencia es la previa seguridad de ser escuchado."

Eugenio D'Ors

U2 Desarrollo temático

Análisis de Fourier segunda parte

Transformada de Fourier de funciones especiales

En este apartado se verán algunas de las funciones más utilizadas en el análisis de Fourier, que en cambio no tienen una Transformada de Fourier evidente (tomado de http://es.slideshare.net/alexjaviercito56/10-transformada-fourier)

Transformada de Fourier de la función impulso o Delta de Dirac

Recuérdese que se puede pensar en la función Delta de Dirac como el límite de una serie de funciones como en siguiente imagen:

$$f_m(t) = m \exp[-(mt)^2]/\sqrt{\pi}$$

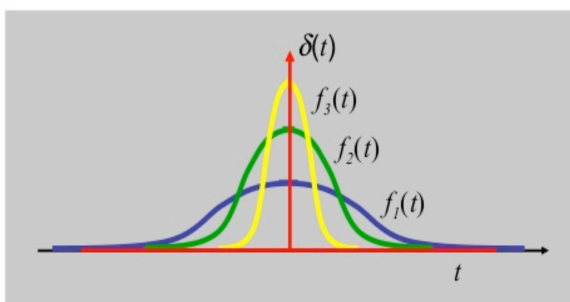


Imagen 1
Fuente: http://es.slideshare.net/alexjaviercito56/10-transformada-fourier

Algunas de las propiedades de la función $\delta(t)$ son:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)f(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)f(a)dt = f(a)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm i\omega t}dt = 2\pi\delta(w)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm i(\omega - w_0)t}dt = 2\pi\delta(w - w_0)$$

Por otra parte la transformada de la función Delta de Dirac es:

$$f(t) = \delta(t) \ \rightarrow \ \mathfrak{I}\big(f(t)\big) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-i\omega t}dt = 1$$

Como se muestra en la siguiente figura:

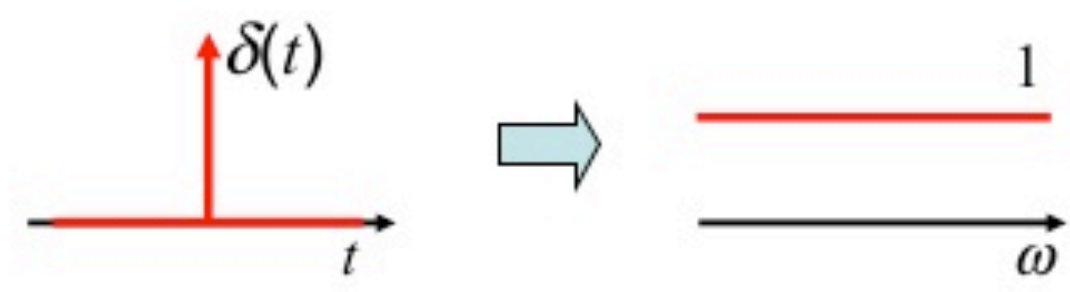


Imagen 2
Fuente: http://es.slideshare.net/alexjaviercito56/10-transformada-fourier

Transformada de Fourier del seno y del coseno

Para la función coseno se tiene: $f(t) = \mathrm{Cos}(\omega_o t)$ luego la transformada de Fourier será (tomado de http://es.slideshare.net/alexjaviercito56/10-transformada-fourier):

$$\mathfrak{I}\big(f(t)\big) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Cos}(\omega_o t)\, e^{-iwt}dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{i\omega_o t} + e^{-i\omega_o t}}{2}\right) e^{-iwt}dt$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{-i(w-\omega_o)t} + e^{-i(w+\omega_o)t}\right) dt = \frac{2\pi}{2}[\delta(w-\omega_o) + \delta(w+\omega_o)]$$

$$\mathfrak{I}\big(f(t)\big) = \pi[\delta(w-\omega_o) + \delta(w+\omega_o)]$$

Gráficamente se tendrá:

Imagen 3
Fuente: http://es.slideshare.net/alexjaviercito56/10-transformada-fourier

Para la función seno se tiene: $f(t) = Sen(\omega_o t)$ luego la transformada de Fourier será:

$$\Im\big(f(t)\big) = \int_{-\infty}^{\infty} Sen(\omega_o t)\, e^{-iwt} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{i\omega_o t} - e^{-i\omega_o t}}{2i}\right) e^{-iwt} dt$$

$$= \frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{-i(w-\omega_o)t} - e^{-i(w+\omega_o)t}\right) dt$$

$$\Im\big(f(t)\big) = i\pi[\delta(w+\omega_o) - \delta(w-\omega_o)]$$

Gráficamente se tendrá:

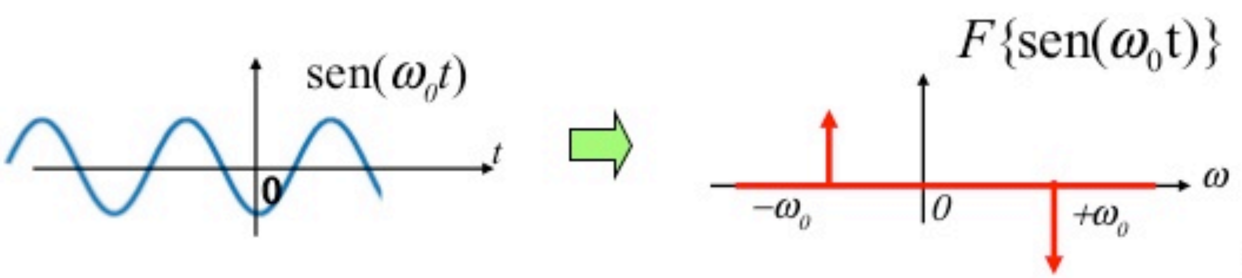


Imagen 4
Fuente: http://es.slideshare.net/alexjaviercito56/10-transformada-fourier

Transformada de Fourier de un tren de impulso

El tren de impulsos se ha definido como $\delta_T(w)$. Su Transformada de Fourier tiene la particularidad de que también es periódica, solo que en el dominio de la frecuencia. Y su período de oscilación es de precisamente la frecuencia del tren de impulsos temporal. Es decir:

$$\delta_T(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) \underset{\longrightarrow}{\mathfrak{I}} \omega_o \delta_{\omega_o}(w) = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(w - \frac{2\pi}{T} n)$$

Señales Periódicas y la Transformada de Fourier.

De la Serie de Fourier a la transformada de Fourier

Según Hwei, P. (1973), si se considera la serie de Fourier de la función:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{-in\omega_0 t}$$

Donde:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \, e^{-in\omega_0 t} dt$$

Siendo T el periodo de f.

Tomando en consideración que $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ y entrelazando las expresiones anteriores se tendrá:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \, e^{-in\omega_0 x} dx \right) e^{-in\omega_0 t}$$

Para evitar la confusión con la variable t, se utiliza la variable x. Así, como $\frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}$ la expresión se puede escribir:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \, e^{-in\omega_0 x} dx \right) \omega_0 e^{-in\omega_0 t}$$

Ahora si se hace $T \to \infty$, y teniendo en cuenta que $\omega_0 \to 0$. Por otra parte, sea $\omega_0 = \Delta w$, entonces, la frecuencia de cualquier armónico $n\omega_0$ debe corresponder a la variable general de frecuencia que describe el espectro continuo. De otra manera, $n \to \infty$ a medida que

$\Delta w \rightarrow 0$ tal que el producto es finito, es decir: $n\omega_0 = n\Delta w \rightarrow w$

De este modo la expresión se convierte en:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} f(x)\, e^{-in\Delta wx} dx \right) e^{-in\Delta wt} \Delta w$$

En el límite $T \rightarrow \infty$, $\Delta w \rightarrow dw$ y la sumatoria se convierte en la integral sobre w es decir, la función no periódica $f(t)$ se convierte en:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-iwx} dx \right] e^{-iwt} dw$$

Donde se concluye que cuando el límite $T \rightarrow \infty$ se tiene $\alpha \rightarrow d\alpha$. Si se define:

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-iwt} dt$$

Que se conoce como la transformada de Fourier, la expresión se convierte en:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) e^{-iwt} d\alpha$$

Conocida como la transformada inversa de Fourier.

Transformada de Fourier de funciones periódicas

Si se descompone una función periódica en una Serie de Fourier se llega a una expresión del tipo:

$$f_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{in\omega_o t}$$

Se puede aplicar la Transformada de Fourier a los dos miembros de la igualdad de forma que:

$$F_p(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi d_n \delta(w - n\omega_o)$$

Esta expresión indica que la Transformada de Fourier de una función periódica es un tren de impulsos modulado en amplitud, de forma que el área de esos impulsos son los coeficientes de la Serie de Fourier multiplicadas por 2π.

A este resultado se puede llegar además, tomando la función periódica como convolución entre una señal aperiódica y un tren de impulsos unitarios. De esta forma:

$$f_p(t) = f(t) * \delta_{T_o}(t) \overset{\Im}{\longrightarrow} F_p(w) = F(w) \cdot \omega_o \delta_{\omega_o}(w)$$

Donde $f(t)$ es una función aperiódica cuya convolución con un tren de impulsos unitarios da lugar a la función periódica $f_p(t)$ y a su correspondiente Transformada de Fourier $F(w)$. Y como $F(w)$ es la calculada como $d_n = F(n\omega_o)/T$, se llega a la expresión para $F_p(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi d_n \delta(w - n\omega_o)$.

Aplicaciones a sistemas lineales

Los sistemas lineales invariantes

Según Hwei, P., un sistema lineal es aquel al que se le puede aplicar el principio de superposición, es decir, que si una determinada función de entrada es combinación lineal de varias funciones, su respuesta es combinación lineal de las respuestas a cada una de las funciones que forman parte de la entrada.

Otra definición de sistema lineal es que la función de la excitación, $f_i(t)$ y la función respuesta, $f_o(t)$ del sistema, están relacionadas por una ecuación diferencial lineal, es decir:

$$a_n \frac{d^n f_o(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} f_o(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_o f_o(t) = b_m \frac{d^m f_i(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} f_i(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_o f_i(t)$$

Un sistema es invariante si dada la respuesta $f_o(t)$ a una determinada entrada $f_i(t)$, la respuesta a $f_i(t - t_0)$ es $f_o(t - t_0)$, o de forma equivalente, si los coeficientes a_i y b_i en la expresión anterior permanecen constantes. Por notación, se asociará al sistema lineal invariante el operador $L\{\ \}$, de forma que:

$$L\{f_i(t)\} = f_o(t)$$

La respuesta en estado estacionario

La respuesta estacionaria de un sistema lineal invariante a una función de tipo exponencial $e^{i\omega_o t}$, es también una función exponencial que se puede poner en función de $H(w)$ como:

$$L\{e^{i\omega_o t}\} = H(\omega_o) \cdot e^{i\omega_o t}$$

Este resultado se basa en la propiedad de la derivada de una exponencial compleja, que afirma que:

$$\frac{d^n e^{kt}}{dt^n} = k^n e^{kt}$$

De esta forma, si en la ecuación diferencial anterior, se sustituye el operador derivada d/dt por $i\omega_o$, se obtiene una expresión polinonial que relaciona la entrada con la salida:

$$e^{i\omega_o t} \sum_{k=0}^{n} a_k (i\omega_o)^k = f_o(t) \sum_{k=0}^{m} b_k (i\omega_o)^k$$

O puesto de otra forma:

$$L\{e^{i\omega_o t}\} = H(i\omega_o) \cdot e^{i\omega_o t}$$

Donde, $H(i\omega_o)$ es la llamada función del sistema, y su expresión es:

$$H(i\omega_o) = \frac{\sum_{k=0}^{m} b_k (i\omega_o)^k}{\sum_{k=0}^{n} a_k (i\omega_o)^k}$$

Y es, en general, un número complejo que se puede representar como:

$$H(i\omega_o) = R(i\omega_o) + iX(i\omega_o) = |H(i\omega_o)| \cdot \varphi(i\omega_o)$$

Para obtener la respuesta sinusoidal en estado estacionario de un sistema lineal se pueden emplear las expresiones:

$$L\{Cos(\omega_o t)\} = Re\left[H(i\omega_o) \cdot e^{i\omega_o t}\right] = |H(i\omega_o)| \cdot Cos[i\omega_o + \varphi(\omega_o)]$$

$$L\{Sen(\omega_o t)\} = Im\left[H(i\omega_o) \cdot e^{i\omega_o t}\right] = |H(i\omega_o)| \cdot Sen[i\omega_o + \varphi(\omega_o)]$$

En función de estos resultados se puede calcular la respuesta en estado estacionario de un sistema lineal a una función periódica cualquiera $f(t)$, cuyo período sea T $(\omega_o = 2\pi/T)$, a partir de su descomposición en Serie de Fourier, tal y como se puede ver en la siguiente tabla.

Entrada	$f_i(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{in\omega_o t}$
Salida	$f_o(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n H(in\omega_o) e^{in\omega_o t}$
Entrada	$f_i(t) = C_o + \sum_{n=1}^{\infty} C_n Cos(n\omega_o t - \theta_n)$
Salida	$f_o(t) = C_o H(0) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \lvert H(in\omega_o) \rvert \cdot Cos[n\omega_o t - \theta_n + \varphi(n\omega_o)]$
Entrada	$f_i(t) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n Cos(n\omega_o t) + b_n Sen(n\omega_o t)]$
Salida	$f_o(t) = \frac{a_o}{2} H(0) + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n R(in\omega_o) Cos(n\omega_o t) + b_n X(in\omega_o) Sen(n\omega_o t)]$

Tabla 1
Fuente: Propia.

La respuesta de un sistema lineal

Para obtener la respuesta de un sistema lineal a una función cualquiera, basta con conocer la respuesta del sistema a un impulso unitario:

$$L\{\delta(t)\} = h(t)\ \Im\ H(w)\ \delta(t)\ Sistema\ linel\ invariante\ h(t)\ \Im\ H(w)$$

A partir de este resultado, se puede obtener la respuesta del sistema, $f_o(t)$ a una función cualquiera, $f_i(t)$ de dos formas, que son:

a) Mediante convolución con la respuesta impulsional $h(t)$, es decir:

$$f_o(t) = h(t) * f_i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) f_i(\tau)\, d\tau$$

b) Aplicando el teorema de convolución:

$$F_o(w) = H(w) \cdot F_i(w)$$

Donde $F_O(w), F_I(w)\ y\ H(w)$ son las transformadas de Fourier de $f_O(t), f_I(t)\ y\ h(t)$ respectivamente.

Además se puede demostrar que la función del sistema obtenida como se indica en el apartado anterior, es igual a la transformada de la respuesta al impulso, es decir:

$H(iw) = H(w)$

De la observación de la respuesta a un impulso se puede deducir si un sistema es no realizable físicamente. Si cuando $t < 0$ resulta que $h(t) \neq 0$, entonces se dice que el sistema es no causal y por lo tanto no realizable físicamente, ya que esto supondría que el sistema tendría una respuesta distinta de cero antes de que se produzca un valor distinto de cero en la entrada. Es como si el sistema se anticipase a la entrada, lo cual no es posible en los sistemas físicos. Si, por el contrario, $h(t) = 0 \; si \; t < 0$ se dice que el sistema es causal. Por ejemplo, el filtro ideal cuya función del sistema es un pulso, tiene un respuesta impulsional tal que $h(t) \neq 0 \; si \; t < 0$, y es, por lo tanto un sistema no causal, no realizable físicamente.

Aplicaciones en Teoría de Comunicaciones

Teoría del muestreo

Según Hwei, P. (1973), sea $g(t)$ una señal analógica con las siguientes características:

- Señal de banda limitada.
- Para el ejemplo soloe toma un segmento de $g(t)$ para hacer el muestreo.

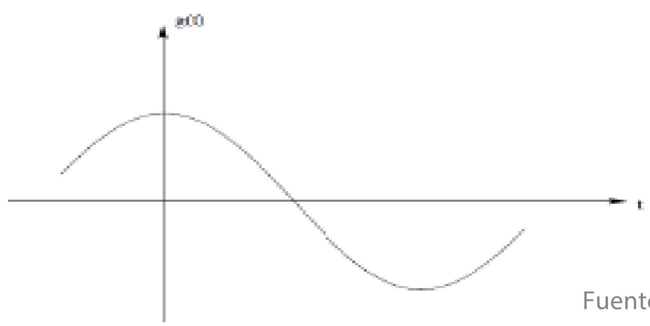


Imagen 5
Fuente: Hwei P. (1973) P. 151

En la siguiente gráfica podemos ver todas las muestras tomadas a nuestra función $g(t)$, cada una de estas separada T segundos, entonces su frecuencia estaría dada por la expresión $F = \frac{1}{T}$.

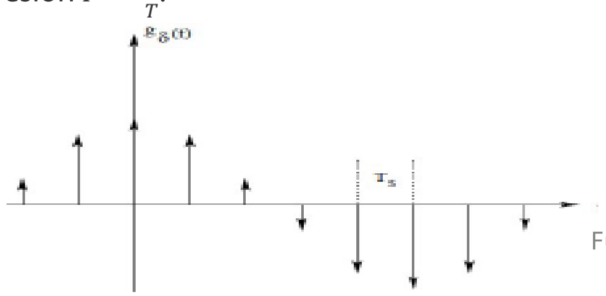


Imagen 6
Fuente Hwei P. (1973) P. 151

$g(nTs)$: define el valor de la muestra en un determinado Ts, donde n puede tomar cualquier valor entero.

$\delta(t - nTs)$: Esta función llamada Sigma (δ) es la encargada de desplazar en el tiempo la muestra.

Entonces combinando los dos términos anteriores podemos determinar la ecuación ideal de la señal muestreada, la cual quedaría de la siguiente forma:

$$g\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(nTs)\,\delta(t - nTs)$$

Debemos entonces apliar la transformada de Fourier a las partes de la ecuación de la señal muestreada ideal.

$$G\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(nTs)\,e^{-i2\pi nFTs}$$

$e^{-i2\pi nFTs}$ Define la transformada de Fourier del término $\delta(t - nTs)$.

Modulación de amplitud

La modulación es un método para obtener una transmisión más eficiente, en el caso de la modulación por amplitud consiste en variaciones de la amplitud de la onda portadora de forma que esta cambie de acuerdo con las variaciones de la señal moduladora, la cual contiene la información que se quiere transmitir.

Tenemos una función arbitraria $f(t)$, es decir, es de energía finita, para determinar la función $f(t)Cos(w_c t)$ entonces debemos hacer lo siguiente:

- Graficar la función arbitraria f(t) en función del tiempo t.

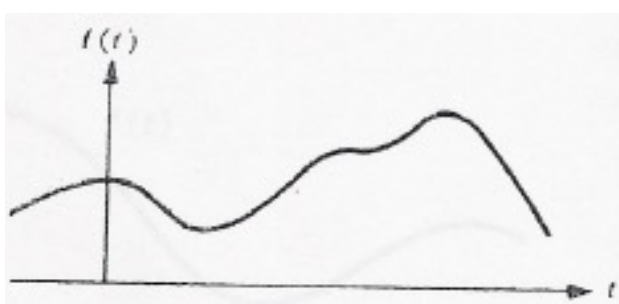


Imagen 6
Fuente: Hwei P. (1973) P. 156

- Dibujar la función coseno, la cual es la que vamos a aplicar con $f(t)$ para determinar el resultado.

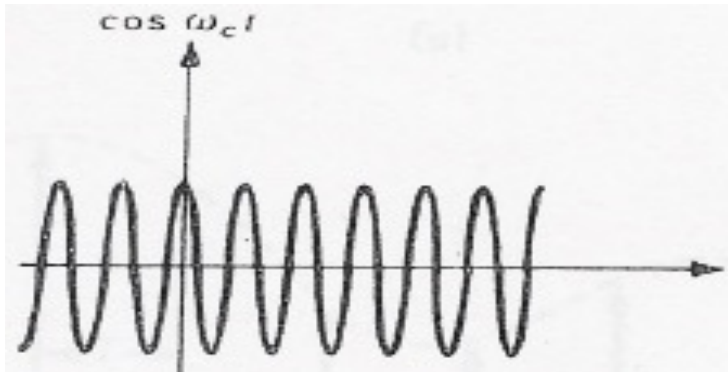


Imagen 7
Fuente: Hwei P. (1973) P. 156

- Teniendo en cuenta la propiedad del coseno.

$$Cos(w_c t) = F(w - w_c) + F(w + w_c)$$

Debemos aplicar esta propiedad y ahí vemos que los límites de w se van a dar por $(w - w_c)\ y\ (w + w_c)$, teniendo en cuenta de que $w > 0$.

Viendo estos límites podemos concluir que la señal modulada tiene una frecuencia limitada y obtendremos la siguiente gráfica.

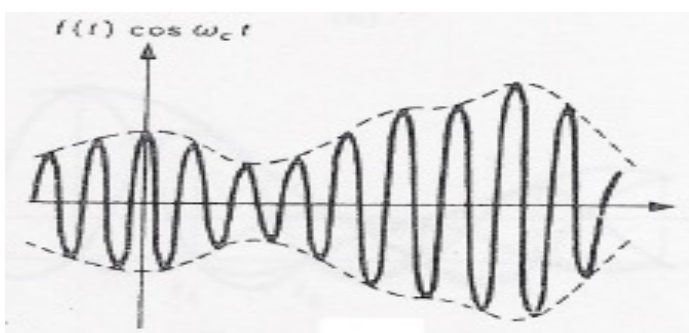


Imagen 8
Fuente: Hwei P. (1973) P. 156

Modulación por amplitud de pulsos

Este tipo de modulación es la consecuencia inmediata del muestreo de una señal analógica. Si una señal analógica, por ejemplo de voz, se muestrea a intervalos regulares, en lugar de tener una serie de valores continuos, se tendrán valores discretos a intervalos específicos, determinados por la, que debe ser como mínimo del doble de la frecuencia máxima de la señal muestreada.

En el caso anterior, una señal analógica (a), se multiplica, por ejemplo mediante un mezclador, por un tren de pulsos (b), de amplitud constante y se tiene como resultado un tren de pulsos (c) modulado en amplitud. La envolvente de este tren de pulsos modulados se corresponde con la señal analógica. Para recuperar ésta, basta con filtrar a paso bajo el tren de pulsos (c), como se ilustra en la siguiente figura:

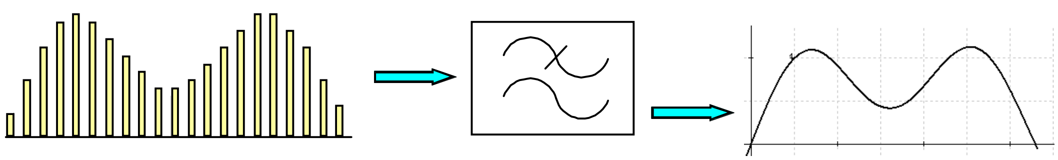


Imagen 9
Fuente: Propia.

Además de la modulación por amplitud de pulsos, pueden variarse otros parámetros del tren de pulsos sin modulación: la duración de los pulsos y su posición relativa, como se ilustra en la figura de abajo.

Modulación por duración o anchura de pulsos (PWM o PDM). En este caso, las muestras de la señal se emplean para variar la anchura o duración de los pulsos. Aunque no es muy utilizado, en la actualidad se emplea en transmisores modulados en amplitud, en que la modulación se realiza primero en esta forma. Esta técnica permite aumentar la eficiencia del transmisor.

Modulación por posición de pulsos. En este caso, la señal moduladora produce un desplazamiento de los pulsos respecto a la posición de éstos en ausencia de modulación.

Funciones correlación promedio

Son funciones en el dominio del tiempo que permiten caracterizar un proceso estocástico de manera individual o dos procesos con algún grado de relación entre ellos.

❖ Autocorrelación

La autocorrelación de un proceso aleatorio $x(t)$ está definido como el valor promedio del producto $x(t)x(t+\tau)$ (Newland, 1993). La función de autocorrelación es el promedio sobre todo el tiempo de una señal consigo misma desplazada un tiempo τ (Bendat & Piersol, 2010) y está definida por:

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T x(t)x(t+\tau)dt$$

❖ Correlación cruzada

La correlación cruzada es la aplicación de la función de correlación a dos señales, vectores o funciones diferentes y puede afirmarse que es el promedio de una señal con otra desplazada un tiempo τ. Esta función es una medida de la similitud de dos señales (Bendat & Piersol, 2010) y está definida por:

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T x(t)y(t+\tau)dt$$

Identificación de señales mediante correlación

Frecuentemente en el procesado digital de señales se necesita cuantificar el grado de interdependencia entre dos procesos o la similitud entre dos señales $x_1[n]\ y\ x_2[n]$. En otras palabras determinar la correlación existente entre dos procesos o señales. De entre los variados campos de aplicación, vamos a centrar nuestra atención en la detección e identificación de señales.

Descripción de la correlación. Consideremos la necesidad de comparar dos señales $x_1[n]\ y\ x_2[n]$ de la misma longitud N. Una medida de la correlación existente entre ambas señales puede efectuarse mediante la suma de los productos de los correspondientes pares de puntos mediante la expresión conocida como correlación cruzada:

$$c_{12} = \sum_{n=0}^{N-1} x_1[n]\cdot x_2[n]$$

Un resultado negativo en c_{12} indica una correlación negativa, es decir un incremento en una variable se asocia con un decremento en la otra.

La anterior definición de la correlación cruzada produce un resultado que depende del número de muestras. Una definición alternativa es:

$$c_{12} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} x_1[n] \cdot x_2[n]$$

La cual promedia la suma de productos entre el número N de elementos.

Espectros de potencia

Un proceso aleatorio es una colección de señales en tiempo discreto, por tanto, no podemos calcular la transformada de Fourier del proceso en sí mismo. Pero podemos obtener una representación del proceso en el dominio de la frecuencia si expresamos la transformada de Fourier en términos de un promedio del conjunto de realizaciones.

La secuencia de autocorrelación de un proceso estacionario en sentido amplio (WSS) proporciona una descripción en el dominio del tiempo del momento de segundo orden del proceso. Como $r_x(k)$ es una secuencia determinista, podemos calcular la transformada de Fourier en tiempo discreto.

$$S_k\left(e^{iw}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_x(k) e^{-ikw}$$

Esta expresión determina el espectro de potencia o densidad espectral de potencia del proceso. Conocido el espectro de potencia, podemos obtener la secuencia de autocorrelación mediante la transformada inversa:

$$r_x(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_x\left(e^{iw}\right) e^{ikw} \, dw$$

Por tanto, el espectro de potencia proporciona una descripción en el dominio de la frecuencia del momento de segundo orden del proceso. En ocasiones puede resultar conveniente utilizar la transformada-z en lugar de la transformada de Fourier en tiempo discreto.

$$P_x(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_x(k) e z^{-k}$$

A $P_x(\mathrm{z})$ también se le denomina espectro de potencia de $\mathrm{x(n)}$.

3

Unidad 3

La transformada de Laplace

Matemáticas especiales

Autor: Gustavo Adolfo Gallego Castañeda

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina

MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Introducción

La transformada de Laplace es un caso de transformada integral, se le llama así, en honor al matemático Pierre Simón Laplace, quien la definió a fines del siglo XVIII, aunque inicialmente el desarrollo fue para su teoría de la probabilidad, representó un gran hallazgo en la solución de ecuaciones diferenciales. Un siglo después, Heaviside ingeniero famoso por sus aportaciones a la teoría electromagnética, creo el cálculo operacional donde la transformada de Laplace desempeña un papel muy importante.

El método de la transformada de Laplace ofrece muchas ventajas y se sustenta en fundamentos matemáticos muy importantes, por eso la mayoría la escoge como método para el análisis y solución de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Con la aplicación de esta técnica operacional en la solución de Ecuaciones Diferenciales, aparecieron nuevas formas complementarias a los métodos de solución conocidos en esa época.

Este método permite trasladar un problema de valor inicial a un espacio diferente, generalmente algebraico, en donde la transformada de Laplace admite la solución buscada, se pueda despejar y la solución del problema de valores iniciales se obtendrá aplicando una trasformación inversa a la transformada de Laplace.

Por otra parte en muchos procesos de la vida diaria se hace presente la Transformada de Laplace, ya que, es una técnica eficaz, utilizada en el control de dichos procesos, como por ejemplo: en el ámbito doméstico para controlar la temperatura y humedad de las casas y edificios; en la transportación para controlar que un automóvil o avión se muevan de un lugar a otro en forma segura y exacta y en la industria para controlar múltiples variables en los procesos de manufactura.

Operacionalmente es sencilla de aplicar, establece tanto la solución natural como la forzada, y ayuda a encontrar y emplear correctamente los valores iniciales y finales (condiciones límites) de las soluciones.

Su tratamiento tiene una amplia relación con la serie de Fourier y su transformada, pues de ellas depende el llamado "análisis del dominio de la frecuencia" y en el "análisis fasorial", que se emplean comúnmente en los circuitos de corriente alterna, tanto en el campo de las altas potencias como en el de las comunicaciones y el control.

Esto significa que los sistemas juegan cada día más, un papel muy importante en el desarrollo y avance de la civilización moderna y la tecnología (tomado de https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Transformada_de_Laplace&oldid=84114357).

U3

Metodología

La matemática es una ciencia fundamental. Se establece a base de símbolos, ecuaciones, relaciones, funciones, métodos especiales, libros de texto que se ven diferentes, y muchos términos y palabras exclusivas. Por consiguiente, es importante usar técnicas de estudio que apliquen bien a las matemáticas. He aquí algunas que usted debería usar.

No se puede estudiar matemáticas solamente basado en la lectura y dejando que otros le hablen. La mayor parte del aprendizaje de ellas implica hacerlo de manera activa. Esto quiere decir que usted debe realizar todas las tareas y asignaciones. Esto involucra aprender a usar fórmulas y métodos.

Se requiere de una secuencia para mejorar el aprendizaje de las matemáticas. Todo aquello que se aprende tiene que ver con lo que se aprendió. La consigna es no quedarse, ya que es muy difícil ponerse al día. Realizar jornadas maratónicas para responder de inmediato no ayuda en. Tenga en cuenta que es muy útil abrir el aplicativo todos los días e ir a la par con sus compañeros.

Todos los temas de esta asignatura tienen un grado de dificultad y este se aumenta progresivamente. Es necesario que dedique más tiempo del que usted considera a esta materia así avanzará con mayor confianza.

Aprender de memoria no es una buena táctica para este curso. Son demasiados los conceptos y métodos. Trate de manejar un razonamiento de los conceptos fundamentales. Con esto no necesitará recordar tanta información.

Cuando utilice los pasos para la solución de un problema, no debe olvidar que estos posiblemente le sirvan para resolver otro similar. No dude en aplicar lo que aprendió cuando se le presente el nuevo problema.

Aprópiese de un buen número de palabras y forme con ellas un glosario. Recuerde que algunas palabras en matemáticas tienen un significado distinto fuera de ellas. Como ejemplo, si utilizamos la palabra volumen, se refiere a la cantidad de espacio dentro de una figura sólida, en otros casos puede significar un libro o el nivel de sonido. Realice un listado de estas palabras y ubícalas en un lugar especial no olvide escribir su significado.

Estudiar los temas de cualquier curso de matemáticas le puede causar incertidumbre. Quizás suene raro pero es necesario generar confianza en sí mismo esto le ayudará a calmar la angustia.

"Una sola cosa, Aprendiz, Estudiante, hijo mío, una sola cosa te será contada, y es tu Obra Bien Hecha."

Eugenio D'Ors

U3 Desarrollo temático

La transformada de la Laplace

Definición

Según Ramos, E. 1997, sea $f(t)$ una función definida para todo $t \geq 0$; se define la Transformada de Laplace de $f(t)$ así:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} f(t)e^{-st}dt$$

Siempre que el límite exista

Ejemplo 1: sea f: $[0, +\infty) \rightarrow$ C definida como $f(t) = a$, donde $a \in C$. Entonces

$$f(s) = \int_0^{\infty} ae^{-st}dt = \lim_{b\to\infty} \left[\frac{ae^{-st}}{-s}\right]_0^b = \frac{a}{s}$$

Siempre que $Re(s) > 0$. En particular $\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}$

Ejemplo 2: sea f: $[0, +\infty) \rightarrow$ C definida como $f(t) = e^{at}$, donde $a \in$ C. Entonces

$$f(s) = \int_0^{\infty} e^{(a-s)t}dt = \lim_{b\to\infty} \left[\frac{e^{(a-s)t}}{a-s}\right]_0^b = \frac{1}{s-a}$$

Si $Re(s) > Re(a)$

Parece natural buscar condiciones que nos garanticen la existencia de la integral. No es difícil encontrar ejemplos de funciones para los que la integral no tiene sentido.

Ejemplo 3: la función $f(t)e^{t^2}$ no tiene transformada de Laplace puesto que

$$\lim_{t\to\infty} f(t)e^{-st} = \infty$$

Y, por tanto $f(t)e^{-st}$ no es integrable para ningún valor de s.

Ejemplo 4: Sea f: $[0,+\infty) \rightarrow$ C definida como $f(t) = t$. Entonces evalúe $\mathcal{L}\{f(t)\}$

Solución: de acuerdo con la definición $\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty te^{-st}\,dt$ al integrar por partes, con $\lim_{t\to\infty} te^{-st} = 0 \quad s > 0$ se tiene que:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty te^{-st}\,dt = \left[\frac{-te^{-st}}{s}\right]_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}\,dt = 0 + \frac{1}{s}\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s^2},$$

$$s > 0$$

Ejemplo 5: sea f: $[0,+\infty) \rightarrow$ C definida como $f(t) = e^{-3t}$. Entonces evalúe $\mathcal{L}\{f(t)\}$

Solución: de acuerdo con la definición

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-3t}e^{-st}\,dt = \int_0^\infty e^{-(s+3)t}\,dt = \left[\frac{-e^{-(s+3)t}}{(s+3)}\right]_0^\infty = \frac{1}{s+3}, \qquad s > -3$$

El resultado depende del hecho de que $\lim_{t\to\infty} e^{-(s+3)t} = 0$ para $s > -3$

El siguiente planteamiento resuelve el problema de obtener la función f a partir de su transformada de Laplace.

Sea f ∈ $\mathcal{L}$ con transformada de Laplace F, continua y derivable a trozos. Sea s un número real tal que $f(t)e^{-st}$ es integrable en R_0^+. Entonces:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty f(s+i\omega)e^{-(s+i\omega)t}dw = \frac{1}{2}(f(t_+) + f(t_-))$$

En particular,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty f(s+i\omega)e^{-(s+i\omega)t}dw = f(t)$$

En cualquier punto t donde f sea continúa.

Propiedades de la transformada de Laplace

a) Según Spiegel, M. 1996, linealidad: Sean $f, g \in \mathcal{L}$ con transformadas de Laplace $\mathcal{L}[f]$ y $\mathcal{L}[g]$ respectivamente, y a y b dos constantes. Entonces $\mathcal{L}[af + bg] = a\mathcal{L}[f] + b\mathcal{L}[g]$.

Ejemplo 6: determine $\mathcal{L}[4t-3+2Cos(5t)]$.

Solución: usando la propiedad de linealidad tenemos:

$$\mathcal{L}[4t-3+2Cos(5t)] = 4\mathcal{L}[t] - 3\mathcal{L}[1] + 2\mathcal{L}[Cos(5t)]$$

Utilizando las tablas de las transformadas:

$$4\mathcal{L}[t] - 3\mathcal{L}[1] + 2\mathcal{L}[Cos(5t)] = 4\frac{1}{s^2} - 3\frac{1}{s} + 2\frac{s}{s^2-25}$$

Aplicando álgebra:

$$4\frac{1}{s^2} - 3\frac{1}{s} + 2\frac{s}{s^2-25} = \frac{4(s^2-25) - 3s(s^2-25) + 2s^3}{s^2(s^2-25)} = \frac{100-75s+4s^2-s^3}{s^2(s^2-25)}$$

Por tanto:

$$\mathcal{L}[4t-3+2Cos(5t)] = \frac{100-75s+4s^2-s^3}{s^2(s^2-25)}$$

b) Unicidad: Sean $f, g \in \mathcal{L}$. Si $\mathcal{L}[f] = \mathcal{L}[g]$, entonces $f = g$.

c) Traslación en el eje t: sea f una función con transformada de Laplace $\mathcal{L}[f]$ y $a > 0$, entonces:

$$\mathcal{L}[f(t-a)H(t-a)] = e^{as}\mathcal{L}[f]$$

Donde H denota la función de Heaviside.

d) Dilatación en el eje t: sea f una función con transformada de Laplace $\mathcal{L}[f]$, entonces:

$$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a}\mathcal{L}[f]\left(\frac{s}{a}\right)$$

e) Traslación en el eje s: sea f una función con transformada de Laplace $\mathcal{L}[f]$, entonces:

$$\mathcal{L}[e^{at}f(t)] = \mathcal{L}[f](s-a)$$

Ejemplo 7: determine:

$$\mathcal{L}[Sen(2t)e^{3t}]$$

Solución:

Para usar la propiedad de traslación en s tendremos:

$$f(t) = Sen(2t) \quad y \quad e^{at} = e^{3t}$$

Y por tanto:

$$\mathcal{L}[Sen(2t)e^{3t}] = \mathcal{L}[Sen(2t)]_{s \to s-3}$$

Utilizando la tabla de las transformadas:

$$\mathcal{L}[Sen(2t)]|_{s \to s-3} = \left.\frac{2}{s^2 + 4}\right|_{s \to s-3}$$

Aplicando álgebra:

$$\left.\frac{2}{s^2 + 4}\right|_{s \to s-3} = \frac{2}{(s-3)^2 + 4} = \frac{2}{s^2 - 6s + 9 + 4} = \frac{2}{s^2 - 6s + 13}$$

Por tanto:

$$\mathcal{L}[Sen(2t)e^{3t}] = \frac{2}{s^2 - 6s + 13}$$

f) Dilatación en el eje s: sea f una función con transformada de Laplace $\mathcal{L}[f]$, entonces:

$$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a}\mathcal{L}[f]\left(\frac{s}{a}\right)$$

g) Transformada de la derivada: Sea f una función con transformada $\mathcal{L}[f]$, entonces f' tiene transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}[f'(t)](s) = s\mathcal{L}[f(t)] - f(0)$$

Repitiendo el proceso obtenemos la transformada de Laplace de la derivada segunda, tercera,... En general, se tiene que la transformada de Laplace de la derivada n-ésima es:

$$\mathcal{L}\left[f^{(n)}(t)\right] = s^n\mathcal{L}[f(t)] - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - s^2 f^{n-3}(0) - sf^{n-3}(0) - f^{n-1}(0)$$

Ejemplo 8: sabiendo que $y(0) = 3$ y que $y'(0) = -1$, simplifique:

$$\mathcal{L}[y''(t) + 3y'(t) - 4y(t)]$$

Aplicando la propiedad de linealidad:

$$\mathcal{L}[y''(t) + 3y'(t) - 4y(t)] = \mathcal{L}[y''(t)] + 3\mathcal{L}[y'(t)] - 4\mathcal{L}[y(t)]$$

Por la propiedad de la transformada de la derivada:

$$\mathcal{L}[y''(t)] = s^2\mathcal{L}[y(t)] - sy(0) - y'(0) = s^2\mathcal{L}[y(t)] - s(3) - (-1)$$

Además:

$$\mathcal{L}[y'(t)] = s\mathcal{L}[y(t)] - y(0) = s\mathcal{L}[y(t)] - 3$$

Por tanto:

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}[y''(t)] + 3\mathcal{L}[y'(t)] - 4\mathcal{L}[y(t)]\\ &\qquad = s^2\mathcal{L}[y(t)] - 3s + 1 + 3(s\mathcal{L}[y(t)] - 3) - 4\mathcal{L}[y(t)]\end{aligned}$$

Agrupando términos:

$$s^2\mathcal{L}[y(t)] - 3s + 1 + 3(s\mathcal{L}[y(t)] - 3) - 4\mathcal{L}[y(t)] = (s^2 + 3s - 4)\mathcal{L}[y(t)] - 3s - 8$$

Es decir:

$$\mathcal{L}[y''(t) + 3y'(t) - 4y(t)] = (s^2 + 3s - 4)\mathcal{L}[y(t)] - 3s - 8$$

Ejemplo 9: Determine:

$$\mathcal{L}[t^2 Sen(2t)]$$

Solución:

Para usar la propiedad de la transformada derivada reconocemos que

$n = 2\ y\ f(t) = sen(2\,t)$, por consiguiente la aplicación de reduce a:

$$\mathcal{L}[t^2 Sen(2t)] = (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2}\mathcal{L}[Sen(2t)]$$

Desarrollando este segundo término:

$$(-1)^2 \frac{d^2}{ds^2} \mathcal{L}[Sen(2t)] = \frac{d}{ds}\left(\frac{d}{ds}\frac{2}{s^2+4}\right) = \frac{d}{ds}\left(\frac{-4s}{(s^2+4)^2}\right) = \frac{12s^2-16}{(s^2+4)^3}$$

Por tanto:

$$\mathcal{L}[t^2 Sen(2t)] = \frac{12s^2-16}{(s^2+4)^3}$$

h) Transformada de una primitiva: Si g es una función continua:

$$\mathcal{L}\left[\int_0^\infty g(x)dx\right] = \frac{1}{s}\mathcal{L}[g(t)]$$

Ejemplo 10: determine:

$$\mathcal{L}\left[\frac{Sen(2t)}{t}\right]$$

Solución:

Para usar la propiedad de la transformada de una primitiva debemos ver si se cumple que:

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{Sen(2t)}{t}$$

Utilizando la regla de L´Hopital:

$$\lim_{t\to 0}\frac{Sen(2\text{t})}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{2Cos(2t)}{1} = 2$$

Por tanto podemos aplicar la propiedad y nos queda el desarrollo:

$$\mathcal{L}\left[\frac{Sen(2t)}{t}\right] = \int_0^\infty \mathcal{L}[Sen(2t)]ds = \int_s^\infty \frac{2}{s^2+4}ds = ArcTan\left(\frac{S}{2}\right)\Big|_{S=s}^{S=+\infty}$$

Recordemos que esto se resuelve mediante límites:

$$ArcTan\left(\frac{S}{2}\right)\Big|_{S=s}^{S=+\infty} = \lim_{N\to+\infty} ArcTan\left(\frac{N}{2}\right) - ArcTan\left(\frac{S}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - ArcTan\left(\frac{S}{2}\right)$$

Por tanto:

$$\mathcal{L}\left[\frac{Sen(2t)}{t}\right] = \frac{\pi}{2} - ArcTan\left(\frac{s}{2}\right)$$

i) Transformada de Laplace de polinomios: La linealidad de la transformada de Laplace, primera propiedad que hemos enunciado, nos permite calcular la transformada de Laplace de las funciones $1, t, t^2, \ldots, t^n$ y, a partir de estas, la de cualquier polinomio.

- La transformada de Laplace de $f(t) = 1$ ya la conocemos: $\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}$ Esto se deduce de la definición o usando la transformada de la derivada. Como $f'(t) = 0, \mathcal{L}[f'(t)] = s\mathcal{L}[f(t)] - f(0)$, de donde $0 = s\mathcal{L}[f(t)] - 1$.

- Si $f(t) = t$, entonces $f'(t) = 1$. Aplicando de nuevo la fórmula de la transformada de la derivada, se tiene que:

  $\mathcal{L}[f'(t)] = s\mathcal{L}[f(t)] - f(0) \quad \rightarrow \quad \mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^2}$.

- Por inducción se puede demostrar que $\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}$.

Transformada de Laplace de funciones trigonométricas e hiperbólicas y de otras especiales

Según Spiegel, M. 1996, el cálculo de la transformada de Laplace de funciones trigonométricas o hiperbólicas es fácil teniendo en cuenta que estas funciones están definidas usando la función exponencial y su transformada tal como se evaluó en uno de los ejemplos anteriores.

Función f	Transformada L[f]
$f(t) = Sen(at)$	$\mathcal{L}[f] = \frac{a}{s^2 + a^2}$
$f(t) = Cos(at)$	$\mathcal{L}[f] = \frac{s}{s^2 + a^2}$
$f(t) = Senh(at)$	$\mathcal{L}[f] = \frac{a}{s^2 - a^2}$
$f(t) = Cosh(at)$	$\mathcal{L}[f] = \frac{s}{s^2 - a^2}$
$\mathcal{L}[1]$	$\frac{1}{s}$
$\mathcal{L}[e^{at}]$	$\frac{1}{s-a}$
$\mathcal{L}[t^n]$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$\mathcal{L}[\delta(t)]$	1
$\mathcal{L}[\delta(t-a)]$	e^{-as}
$\mathcal{L}\left[\frac{t^{n-1}e^{at}}{(n-1)!}\right]$	$\frac{1}{(s-a)^n}\ con\ n \geq 1$
$\mathcal{L}\left[\frac{1}{2a^3}(Sen(at) - atCos(at))\right]$	$\frac{1}{(s^2 + a^2)^2}$
$\mathcal{L}\left[\frac{1}{2a^3}(Sen(at) + atCos(at))\right]$	$\frac{s^2}{a^2(s^2 + a^2)^2}$
$\mathcal{L}\left[\int_0^t \frac{t}{2n}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2 + a^2)^n}\right]dt\right]$	$\frac{1}{(s^2 + a^2)^{n+1}}$
$\mathcal{L}\left[\frac{t}{2n}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2 + a^2)^n}\right]\right]$	$\frac{s}{(s^2 + a^2)^{n+1}}$

Tabla 1
Fuente: Propia.

Ejemplo 11: calcular la transformada de Laplace de $f(t) = Senh(at)$, donde $a \in C$. Como $f(t) = \frac{e^{at} - e^{-at}}{2}$, del ejemplo 2 se puede concluir que:

$$F(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a}\right) = \frac{a}{s^2 - a^2}$$

Convolución

La convolución de funciones nos permite relacionar la transformada del producto con el producto de funciones. La definición de convolución de funciones para la transformada de Laplace nos proporciona un resultado similar al que teníamos para la transformada de Fourier (Spiegel, M. 1996).

Sean $f, g: R^+ \to R$. Entonces:

$$\mathcal{L}[f * g] = \mathcal{L}[f] \cdot \mathcal{L}[g] \;\; donde \;\; (f * g)(t) = \int_0^t f(x)g(t-x)dx$$

Es el producto de convolución de f y g.

Ejemplo 12: aplicación. La utilidad principal de la transformada de Laplace se encuentra en la resolución de problemas de valores iniciales para ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. La transformada de Laplace transforma una ecuación diferencial de este tipo en una ecuación algebraica. Una vez resueltas estas, la transformada inversa nos da la solución de la ecuación diferencial.

Consideremos el problema de valores iniciales:

$$\begin{cases} y'' - y = 1 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Multiplicamos en ambos miembros por e^{st} y, supongamos que $y(t)e^{st}$ y $y'(t)e^{st}$ tienden a cero en $+\infty$ y son integrables. Si Y denota la transformada de Laplace de y, aplicando integración por partes se obtiene que:

$$\int_0^\infty y'(t)e^{-st}dt = [y(t)e^{-st}]_0^\infty + s\int_0^\infty y(t)e^{-st}dt = -y(0) + sY(s) = sY(s)$$

$$\int_0^\infty y''(t)e^{-st}dt = [y'(t)e^{-st}]_0^\infty + s\int_0^\infty y'(t)e^{-st}dt = -y'(0) + s^2Y(s) = s^2Y(s)$$

Por tanto, nuestro problema se transforma en:

$$s^2 Y(s) - Y(s) = \mathcal{L}[1](s)$$

En consecuencia, $Y(s) = \frac{1}{s^2-1}\mathcal{L}[1](s)$ usando el ejemplo 1, $\mathcal{L}[1](s) = \frac{1}{s}$ se concluye que:

$$Y(s) = \frac{1}{(s^2-1)}\frac{1}{s} = \frac{1/2}{s-1} + \frac{1/2}{s+1} - \frac{1}{s}$$

Usando ahora el ejemplo 2:

$$y(t) = (e^t + e^{-t}) - 1 = Cosh(t) - 1$$

Ejercicios

1. Calcular la transformada de Laplace de las siguientes funciones:

a) $f(t) = (3 + t^2)^4$
b) $f(t) = (2 + e^{2t})^3$
c) $f(t) = t^2 e^{3t}$
d) $f(t) = t\,cos(5t)$
e) $f(t) = t^2\,sen(t)$

2. Calcular la transformada de Laplace de la función:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & si \quad 0 \le t \le 3 \\ 1, & si \quad 3 < t < 5 \\ t, & si \quad t \ge 5 \end{cases}$$

3. Calcular la transformada de Laplace de la función:

$$f(t) = \begin{cases} 2t, & si \quad 0 \le t < 1 \\ -2t + 4, & si \quad 1 \le t < 2 \\ 0, & si \quad t \ge 2 \end{cases}$$

4. Calcular la transformada de Laplace de la función $f(t) = \int_0^t xCosh(x)dx$

5. Calcular la transformada inversa de la función $\frac{1}{(s+2)(s-3)}$

6. Calcular la transformada inversa de la función $\frac{1}{s^2+2}$

7. Resolver la ecuación diferencial $y'' - 5y' + 6y = 0$ con las condiciones iniciales $y(0) = 1, y'(0) = 2$ usando la transformada de Laplace.

8. Resolver la ecuación diferencial $y'' - y' + 6y = H(t)$ con las condiciones iniciales $y(0) = 0, y'(0) = 0$ usando la transformada de Laplace, donde H denota la función de Heaviside.

9. Resolver la ecuación integral $f(t) = t - t^2 + \int_o^t f(x)dx$ usando la transformada de Laplace.

10. Hallar la siguiente transformada $\mathcal{L}\left[\frac{Cos(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}\right]$ usando la propiedad de la transformada de la derivada.

Nota aclaratoria: el material de esta cartilla en algunos momentos es fiel copia del texto transformada de Laplace de Eduardo Espinosa Ramos, en razón a que se puede cambiar los conceptos inadvertidamente.

3

Unidad 3

La transformada de Laplace

Matemáticas especiales

Autor: Gustavo Adolfo Gallego Castañeda

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina
MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Introducción

Es importante reconocer que la Transformada de Laplace forma parte de una élite de transformadas integrales como la de Fourier, de Hilbert, y la de Mellin entre otras. Este grupo de transformadas se definen por medio de una integral impropia y cambian una función en una variable de entrada en otra función con otra variable. En particular la transformada de Laplace se usa para resolver EDL y EI (tomado de https://goo.gl/o1gvjO).

Si bien es cierto se puede solucionar algunas ED con coeficientes variables, también es cierto que su mayor aplicación es en ED con coeficientes. Un elemento fundamental es el conocimiento de las condiciones iniciales de la ED. Su mejor actuación se resalta cuando la función en la variable independiente que aparece en la ED es una función fraccionada.

Al resolver EDO por medio de la transformada de Laplace, se convierte una ED en un problema de tipo algebraico. El proceso consiste en aplicar la transformada a la ED y subsiguientemente usar las propiedades de la transformada. La situación ahora consiste en encontrar una función en la variable independiente que tenga una cierta expresión como transformada.

Por otra parte la transformada integral de Laplace, aplica una cadena de propiedades que la convierten en un elemento útil para el análisis de sistemas lineales. Una de las ventajas más significativas radica en que la integración y derivación se convierten en productos y cocientes.

"De Morgan dijo de Laplace”:

“Hay suficiente labor original en Laplace como para hacer que el lector se extrañe de que alguien que pudo permitirse exponer tan bien lo que había obtenido de otros, no hubiese tenido en cuenta un ejemplo peligroso para sus propios derechos.

Según, Newman, J. (1979). En todos los casos, se lee entre líneas que Laplace usó muchísimo de sus antecesores sin citarlos, llámalo vanidad propia o ego personal, llámalo afán de perfeccionar lo previo, pero en todo caso, al igual que Newton, Laplace (el Newton francés) tuvo a bien perfeccionar y generalizar lo que habían hecho los matemáticos anteriores. También él se apoyó de los hombros de gigantes".

U3

Metodología

La matemática es una ciencia fundamental. Se establece a base de símbolos, ecuaciones, relaciones, funciones, métodos especiales, libros de texto que se ven diferentes, y muchos términos y palabras exclusivas. Por consiguiente, es importante usar técnicas de estudio que apliquen bien a las matemáticas. He aquí algunas que usted debería usar.

No se puede estudiar matemáticas solamente basado en la lectura y dejando que otros le hablen. La mayor parte del aprendizaje de ellas implica hacerlo de manera activa. Esto quiere decir que usted debe realizar todas las tareas y asignaciones. Esto involucra aprender a usar fórmulas y métodos.

Se requiere de una secuencia para mejorar el aprendizaje de las matemáticas. Todo aquello que se aprende tiene que ver con lo que se aprendió. La consigna es no quedarse, ya que es muy difícil ponerse al día. Realizar jornadas maratónicas para responder de inmediato no ayuda en. Tenga en cuenta que es muy útil abrir el aplicativo todos los días e ir a la par con sus compañeros.

Todos los temas de esta asignatura tienen un grado de dificultad y este se aumenta progresivamente. Es necesario que dedique más tiempo del que usted considera a esta materia así avanzará con mayor confianza.

Aprender de memoria no es una buena táctica para este curso. Son demasiados los conceptos y métodos. Trate de manejar un razonamiento de los conceptos fundamentales. Con esto no necesitará recordar tanta información.

Cuando utilice los pasos para la solución de un problema, no debe olvidar que estos posiblemente le sirvan para resolver otro similar. No dude en aplicar lo que aprendió cuando se le presente el nuevo problema.

Aprópiese de un buen número de palabras y forme con ellas un glosario. Recuerde que algunas palabras en matemáticas tienen un significado distinto fuera de ellas. Como ejemplo, si utilizamos la palabra volumen, se refiere a la cantidad de espacio dentro de una figura sólida, en otros casos puede significar un libro o el nivel de sonido. Realice un listado de estas palabras y ubícalas en un lugar especial no olvide escribir su significado.

Estudiar los temas de cualquier curso de matemáticas le puede causar incertidumbre. Quizás suene raro pero es necesario generar confianza en sí mismo esto le ayudará a calmar la angustia.

"El fruto de la unión del Tiempo con la Heroicidad, se llama Nobleza."

Eugenio D´Ors

Transformada de Laplace segunda parte

Transformada inversa de Laplace

Según, Ramos, E. (1997). Tanto la transformada directa como la inversa de Laplace tienen un número de propiedades que las hacen útiles para el análisis de sistemas dinámicos lineales.

Además, se establecen relaciones entre las transformadas de las funciones y las de sus derivadas e integrales. Por tanto admite transformar un sistema de ecuaciones diferenciales en ecuaciones polinómicas.

Definición: Si $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = F\ (s)$, entonces decimos que $f(t)$ es una transformada inversa de Laplace de $F(s)$ y se denota así:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$$

La transformada inversa de Laplace de $F(s)$, no necesariamente es única. Por ejemplo la función.

$$f(t) = \begin{cases} 3 & si \quad t = 1 \\ -3 & si \quad t = 2 \\ 1 \quad si \ \ t \geq 0 \ y \ t \neq 1 \neq 2 & \end{cases}$$

Y la función $g(t) = 1$ (obsérvese que $f(t) \neq g(t)$) tienen la misma transformada, es decir, $\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{g(t)\} \ = \frac{1}{s}$ Sin embargo $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = f(t)\ y\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = g(t)$ son diferentes.

Pero cuando $f(t)\ y\ g(t)$ son continuas en $t \geq 0$ y $\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{g(t)\}$, entonces $f(t) = g(t)$ (ver el libro de variable compleja de Churchill)

Para funciones continuas $\mathcal{L}^{-1}$ es un operador lineal:

$$\mathcal{L}^{-1}\{\alpha F(s) + \beta G(s)\} = \alpha\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + \beta\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$$

En la siguiente tabla se encuentran algunas de las transformadas de Laplace para a y k constantes.

1) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1, \quad y \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k}{s}\right\} = k, \quad si \quad s > 0$
2) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{n!}{s^{n+1}}\right\} = t^n \quad y \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{n+1}}\right\} = \frac{t^n}{n!}, \quad si \quad s > 0$
3) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\} = e^{at} \quad si \quad s > a$
4) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k}{s^2+k^2}\right\} = Sen(kt) \quad y \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+k^2}\right\} = \frac{Sen(kt)}{k} \quad si \quad s > 0$
5) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+k^2}\right\} = Cos(kt), \quad si \quad s > 0$
6) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k}{s^2-k^2}\right\} = Senh(kt) \quad y \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-k^2}\right\} = \frac{Senh(kt)}{k} \quad si \quad s > \lvert k \rvert$
7) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-k^2}\right\} = Cosh(kt), \quad si \quad s > \lvert k \rvert$
8) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}\right\} = t^n e^{at} \quad y \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-a)^{n+1}}\right\} = \frac{t^n e^{at}}{n!}, \quad si \quad s > a$

Tabla 1. Tabla de la transformada inversa de Laplace
Fuente: Propia.

Ejemplo 1: Calcular $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+36)}\right\}$

Solución

Se puede descomponer la fracción en fracciones parciales.[1]

$$\frac{1}{s(s^2+36)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+36} = \frac{(s^2+36)A + s(Bs+C)}{s(s^2+36)} = \frac{As^2+36A+Bs^2+sC}{s(s^2+36)}$$

Lo anterior significa que: $1 = As^2 + 36A + Bs^2 + sC$ por lo tanto $A + B = 0$,

$C = 0\ y\ 36A = 1$ De aquí se concluye que $A = \frac{1}{36},\ B = -\frac{1}{36}\ \ y\ \ C = 0$; por eso,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+36)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{36}\frac{1}{s} - \frac{1}{36}\frac{s}{s^2+36}\right) = \frac{1}{36}\left(\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+36}\right\}\right)$$
$$= \frac{1}{36}(1 - Cos(6t))$$

[1] Vea la técnica de descomponer una fracción en suma de fracciones parciales en cualquier texto de Cálculo Integral.

Ejemplo 2: Determinar la transformada inversa de Laplace de:

$$H(s) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+7}{s^2-8s+20}\right\}$$

Solución

Primero se completa cuadrados en el denominador para aplicar la propiedad de traslación:

$$\frac{5s+7}{s^2-8s+20} = \frac{5s+7}{(s-4)^2+4} = \frac{5(s-4)+27}{(s-4)^2+4} = 5\frac{(s-4)}{(s-4)^2+4} + \frac{27}{2}\frac{2}{(s-4)^2+4}$$

Se observa que:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s-4)}{(s-4)^2+4}\right\} = e^{4t}Cos(2t) \;\; y$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s-4)^2+4}\right\} = e^{4t}Sen(2t)$$

Por lo tanto:

$$\mathcal{L}^{-1}[H(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5s+7}{s^2-8s+20}\right\} = 5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s-4)}{(s-4)^2+4}\right\} + \frac{27}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s-4)^2+4}\right\}$$

$$= 5e^{4t}Cos(2t) + \frac{27}{2}e^{4t}Sen(2t)$$

Ejemplo 3: calcular:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-11s}}{s^2+4s+5}\right\}$$

Solución

De acuerdo con la segunda propiedad de traslación:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-11s}}{s^2+9s+10}\right\} = H(t-11)g(t-11)$$

Donde:

$$g(t-11)=\mathcal{L}^{-1}\{e^{-11s}\}*\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+3)^2+1}\right\}=e^{-11(t-2)}*\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+3)^2+1}\right\}$$
$$=e^{-3(t-11)}Sen(t-11)$$

En conclusión:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-11s}}{s^2+9s+10}\right\}=H(t-11)e^{-3(t-11)}Sen(t-11)$$

Ejemplo 4: determinar:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+100}\right\}$$

Solución

Se debe aplicar la propiedad de linealidad de la siguiente manera:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+100}\right\}=\frac{1}{10}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{10}{s^2+100}\right\}=\frac{1}{10}Sen(10t)$$

Solución de ecuaciones lineales

Según Ramos, E. (1997), teniendo en cuenta la transformada de Laplace es clave en la solución de ED lineales con condiciones iniciales. Se plantea los siguientes pasos para su solución.

- Aplicar la transformada de Laplace a ambos miembros de la ED.
- Encontrar la ecuación en forma de polinomio utilizando las propiedades de la transformada de Laplace.
- Encontrar a $f(t)$ utilizando la transformada inversa de Laplace.

Ejemplo 5: Resolver el problema de valores iniciales.

$$y'' - 5y' - 4y = 7e^{9t} \qquad y'(0) = 4, \;\; y(0) = 0$$

Solución

Al aplicar $\mathcal{L}$, se obtiene:

$$\mathcal{L}[y''] - 5\mathcal{L}[y'] - 6\mathcal{L}[y] = 7\mathcal{L}[e^{9t}]$$

Es decir:

$$s^2\mathcal{L}[y] - sy(0) - y'(0) - 5\big(s\mathcal{L}[y] - y(0)\big) - 6\mathcal{L}[y] = 7\mathcal{L}[e^{9t}]$$

$$s^2\mathcal{L}[y] - 4 - 5s\mathcal{L}[y] - 6\mathcal{L}[y] = \frac{7}{s-9}$$

$$(s^2 - 5s - 6)\mathcal{L}[y] = \frac{7}{s-9} + 4$$

Y al despejar $\mathcal{L}[y]$,

$$\mathcal{L}[y] = \frac{4s-29}{(s-6)(s+1)(s-9)}$$

$$\frac{4s-29}{(s-6)(s+1)(s-9)} = \frac{A}{(s-6)} + \frac{B}{(s+1)} + \frac{C}{(s-9)}$$

Si se procede con las fracciones parciales.

$$\frac{4s-29}{(s-6)(s+1)(s-9)} = \frac{\frac{22}{105}}{(s-6)} + \frac{\frac{-31}{70}}{(s+1)} + \frac{\frac{7}{30}}{(s-9)}$$

Es decir:

$$\mathcal{L}[y] = \frac{22}{105}\cdot\frac{1}{(s-6)} - \frac{31}{70}\cdot\frac{1}{(s+1)} + \frac{7}{30}\frac{1}{(s-9)}$$

Por lo tanto:

$$y = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{22}{105}\cdot\frac{1}{(s-6)} - \frac{31}{70}\cdot\frac{1}{(s+1)} + \frac{7}{30}\frac{1}{(s-9)}\right\}$$

$$= \frac{22}{105}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-6)}\right\} - \frac{31}{70}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)}\right\} + \frac{7}{30}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-9)}\right\}$$

Luego, de acuerdo con la tabla de transformadas, la solución del problema de valores iniciales es:

$$y = \frac{22}{105}e^{6t} - \frac{31}{70}e^{-t} + \frac{7}{30}e^{9t}$$

Ejemplo 6: resolver el problema de valores iniciales.

$$y'' + 8y' + 11y = 21e^{-4t} \qquad y'(0) = -23, \;\; y(0) = 5$$

Solución

Al aplicar $\mathcal{L}$, se obtiene:

$$\mathcal{L}[y''] + 8\mathcal{L}[y'] + 11\mathcal{L}[y] = 21\mathcal{L}[e^{-4t}]$$

Es decir:

$$s^2\mathcal{L}[y] - 5s + 23 + 8(s\mathcal{L}[y] - 5) + 11\mathcal{L}[y] = \frac{21}{s+4}$$

$$(s^2 + 8s + 11)\mathcal{L}[y] = \frac{21}{s+4} + 5s - 17$$

$$\mathcal{L}[y] = \frac{1}{(s^2 + 8s + 11)}\left(\frac{21}{s+4} + 5s - 17\right) = \frac{5s^2 + 3s - 30}{(s+4)(s^2 + 8s + 11)}$$

Al descomponer la última fracción en fracciones parciales, se obtiene

$$\mathcal{L}[y] = -\frac{3}{7}\frac{s + \frac{271}{7}}{(s^2 + 8s + 11)} + \frac{19}{14}\frac{4}{s+4}$$

Se observa que $\frac{19}{14}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s+4}\right\} = \frac{38}{7}e^{-4t}$ y se calcula $-\frac{3}{7}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+\frac{271}{7}}{(s^2+8s+11)}\right\}$

Se puede completar cuadrados en el denominador para aplicar la primera propiedad de traslación:

$$\frac{s+\frac{271}{7}}{(s^2+8s+11)}=\frac{s+\frac{271}{7}}{(s+4)^2-5}=\frac{(s+4)}{(s+4)^2-5}+\frac{\frac{259}{3}}{(s+4)^2-5}$$
$$=\frac{(s+4)}{(s+4)^2-5}+\frac{259\sqrt{5}}{3}\frac{\sqrt{5}}{(s+4)^2-5}$$

$$-\frac{3}{7}\frac{s+\frac{271}{7}}{(s^2+8s+11)}=-\frac{3}{7}\left\{F(s+4)+\frac{259\sqrt{5}}{3}G(s+4)\right\}$$
$$=-\frac{3}{7}\left\{Cosh(4t)+\frac{259\sqrt{5}}{3}\quad enh(4t)\right\}$$

De donde se obtiene:

$$y=\frac{38}{7}e^{-4t}-\frac{3}{7}\left\{Cosh(4t)+\frac{259\sqrt{5}}{3}Senh(4t)\right\}$$

Ejemplo 7: una fuerza de 400 N estira 2 m un resorte. Después al extremo de ese resorte se fija una masa de 50 Kg y parte de la posición de equilibrio a una velocidad de 10 m/s hacia arriba, deduzca la ecuación del movimiento.

Solución

Dadas las condiciones del problema se tiene:

$$W=400N,\ \ S=\ 2m,\ \ M=50Kg, x´(0)\ =-10m/s\quad y\quad x(0)=0$$

La constante de elasticidad del resorte se calcula como: $k=\frac{W}{S}=\frac{400N}{2m}=200\frac{N}{m}$

La ecuación diferencial que recoge el movimiento será: $50x´´+200x=0$ es decir:

$$x´´+4x=0$$

Por tanto la solución utilizando la transformada de Laplace.

$$\mathcal{L}(x´´)+\ 4\,\mathcal{L}(\mathrm{x})=\ 0\quad\rightarrow\quad S^2x(s)\ -\ Sx(0)\ -\ x´(0)\ +4(x(s))\ =0$$

$$S^2x(s)+10+4\big(x(s)\big)=0\quad\rightarrow\quad S^2x(s)\ +4(x(s))\ =-10$$

$$x(s) * (s^2 + 4) = -10 \quad \rightarrow \quad x(s) = \frac{-10}{(s^2 + 4)}$$

Aplicando la transformada inversa:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-10}{(s^2+4)}\right\} = -5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s^2+4)}\right\}$$

Por tanto:

$$x(t) = -5Sen(2t)$$

Sistemas de ecuaciones lineales de primer orden

Los sistemas de ecuaciones diferenciales son aquellos que contienen más de una función incógnita. Estos aparecen de modo natural en diversidad de problemas; por ejemplo, al considerar redes eléctricas con más de un circuito, como la de la figura.

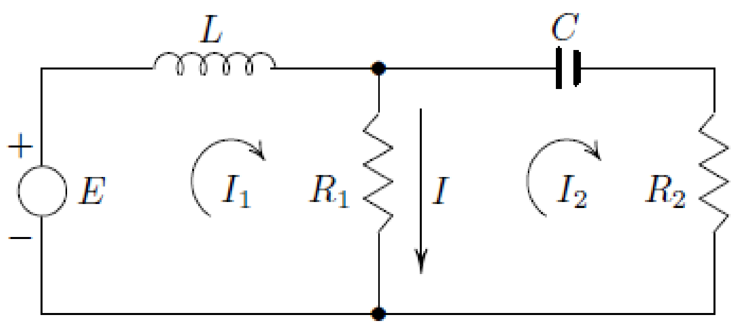


Imagen 1. Red eléctrica con dos circuitos
Fuente: Propia.

En la figura, $I_1(t)$ es la corriente que atraviesa el inductor en la dirección indicada e $I_2(t)$ es la que atraviesa la resistencia R_2. Observe que la corriente que pasa por la resistencia R_1 es $I = I_1 - I_2$ en la dirección indicada en la gráfica. De acuerdo con la ley de Kirchhoff, se cumple:

$$L\frac{dI_1}{dt} + R_1 I = E$$

Es decir,

$$L\frac{dI_1}{dt} + R_1(I_1 - I_2) = E *$$

Para el circuito de la derecha se tiene:

$$R_2 I_2 + \frac{1}{C} Q + R_1 I = 0$$

$$R_2 I_2 + \frac{1}{C} Q + R_1 (I_1 - I_2) = 0$$

$$-R_1 I_1 + \frac{1}{C} Q + (R_2 + R_1) I_2 = 0$$

Recuerde que $\frac{dQ}{dt} = I_2$; luego, derivando en la última ecuación anterior se obtiene:

$$-R_1 \frac{dI_1}{dt} + \frac{1}{C} I_2 + (R_2 + R_1) \frac{dI_2}{dt} = 0 \,**$$

Como las corrientes en la red están relacionadas, los resultados anteriores *, **, forman un sistema, esto es, si se quiere determinar la intensidad de la corriente a través de la red, se deben determinar las funciones $I_1(t)\ e\ I_2(t)$ que satisfacen simultáneamente el sistema" (Barrantes, H. 2011):

Algunos elementos básicos sobre sistemas

"A continuación se verán algunos elementos muy básicos sobre sistemas de ecuaciones diferenciales y, posteriormente, cómo se puede utilizar la transformada de Laplace para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes.

Definición: un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de orden n, con m ecuaciones y s incógnitas es un sistema del tipo.

$$F_1(t, y_1, y'_1, \cdots, y_1^n, \cdots, y_s, y'_s, \cdots y_s^n) = 0$$
$$\vdots$$
$$F_m(t, y_1, y'_1, \cdots, y_1^n, \cdots, y_s, y'_s, \cdots y_s^n) = 0$$

Donde $F1, \ldots, Fm$ son funciones de (n + 1) s + 1 variables y $y_1, \ldots, y_s$ son funciones de t (las funciones incógnita).

Una solución del sistema anterior es una sucesión de funciones $y_1(t), \ldots,\ y_s(t)$ que satisfacen simultáneamente las m ecuaciones dadas".

Es importante observar que si se tiene una ecuación diferencial de orden n, en la cual se puede despejar la derivada de más alto orden, del siguiente modo:

$$y^n = F(t, y, y', \cdots, y^{n-1})$$

Entonces, esta ecuación se puede convertir en un sistema de ecuaciones diferenciales si se introducen nuevas funciones que son las derivadas sucesivas de y; así:

$$y_1 = y, y_2 = y', \cdots, y_n = y^{n-1}$$

Derivando en cada una de las igualdades anteriores se tiene:

$$y'_1 = y', y'_2 = y'', \cdots, y'_n = y^n$$

Y, por lo tanto,

$$y'_1 = y_2,\ y'_2 = y_3, \cdots, y'_n = y_n$$

Con esto, la ecuación diferencial de orden n es equivalente al sistema:

$$y'_1 = y_2$$

$$y'_2 = y_3$$

$$\vdots$$

$$y'_n = y_n$$

$$y^n = F(t, y, y', \cdots, y^{n-1})$$

Según Barrantes, H. (2011), así, se pueden utilizar métodos numéricos, muy eficientes, que permiten obtener soluciones aproximadas de sistemas de primer orden y, de esta manera, aproximar la solución de la ecuación diferencial dada aunque sea muy complicada".

La transformada de Laplace para resolver sistemas

Según Ramos, E. (1997), se puede utilizar la transformada de Laplace para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. Básicamente, es la misma técnica para resolver una sola ecuación que se empleó en la cartilla anterior; consiste, por lo tanto, en convertir el sistema diferencial en un sistema algebraico en el que las incógnitas son las transformadas de las funciones solución del sistema original. Una vez resuelto el sistema algebraico, las transformadas inversas proporcionan las soluciones buscadas. Se exponen a continuación algunos ejemplos.

Ejemplo 9: resolver el problema de valores iniciales:

$$y'_1 = 2_1 + 3y_2$$

$$y'_2 = -3y_1 + 2y_2$$

$$y_1(0) = 5 \quad y \quad y_2(0) = 7$$

Solución

Se aplica $\mathcal{L}$ a ambos lados en las dos ecuaciones y se obtiene:

$$\mathcal{L}[y'_1] = 2\mathcal{L}[y_1] + 3\mathcal{L}[y_2] \qquad s\mathcal{L}[y_1] - 5 = 2\mathcal{L}[y_1] + 3\mathcal{L}[y_2]$$

$$\mathcal{L}[y'_2] = -3\mathcal{L}[y_1] + 2\mathcal{L}[y_2] \qquad s\mathcal{L}[y_2] - 7 = -3\mathcal{L}[y_1] + 2\mathcal{L}[y_2]$$

Por lo tanto,

$$(s-2)\mathcal{L}[y_1] - 3\mathcal{L}[y_2] = 5$$

$$(s-2)\mathcal{L}[y_2] + 3\mathcal{L}[y_1] = 7$$

Se pueden emplear varias técnicas para resolver este sistema algebraico en el que las incógnitas son $\mathcal{L}[y_1]$ y $\mathcal{L}[y_2]$. Se utilizará la regla de Cramer:

$$\begin{vmatrix} s-2 & -3 \\ 3 & s-2 \end{vmatrix} = (s-2)^2 + 9$$

$$\mathcal{L}[y_1] = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 7 & s-2 \end{vmatrix}}{(s-2)^2+9} = \frac{5s+11}{(s-2)^2+9} = 5\frac{s-2}{(s-2)^2+9} + 7\frac{3}{(s-2)^2+9}$$

$$\mathcal{L}[y_2] = \frac{\begin{vmatrix} s-2 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}}{(s-2)^2+9} = \frac{7s-29}{(s-2)^2+9} = 7\left(\frac{s-2}{(s-2)^2+9}\right) + \left(-5\frac{3}{(s-2)^2+9}\right)$$

De la tabla de la transformada inversa, se concluye que la solución del problema de valores iniciales es:

$$y_1 = \mathcal{L}^{-1}\left\{5\left(\frac{s-2}{(s-2)^2+9}\right)\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\left(7\frac{3}{(s-2)^2+9}\right)\right\} = 5e^{2t}Cos(3t) + 7e^{2t}Sen(3t)$$

$$y_2 = \mathcal{L}^{-1}\left\{7\left(\frac{s-2}{(s-2)^2+9}\right)\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\left(-5\frac{3}{(s-2)^2+9}\right)\right\} = 7e^{2t}Cos(3t) - 5e^{2t}Sen(3t)$$

Ejercicios

En los siguientes ejercicios, utilice la transformada de Laplace para resolver el sistema con condiciones iniciales que se proporciona en cada caso.

1. $9y'_1 + 5y_2 = t$

   $4y'_2 + 14y_1 = 2$

   $y_1(0) = -5 \quad y \quad y_2(0) = 3$

2. $y'_1 - 11y_1 + 7y_2 = 12e^t$

   $y'_2 - 21y_1 - 11y_2 = 14e^t$

   $y_1(0) = -10 \quad y \quad y_2(0) = 20$

3. $13y'_1 + y'_2 - 11y_1 - 6y_2 = e^{-t}$

   $y'_1 + 4y'_2 + 12y_1 + y_2 = e^t$

   $y_1(0) = 31 \qquad y_2(0) = 51$

4. $y''_1 + 4y_1 + 5y_2 = 0$

   $\sqrt{2}y'_1 + \sqrt{3}y'_2 = 0$

   $y_1(0) = y'_1(0) = \sqrt{5} \quad y \quad y_2(0) = 8$

5. $y''_1 + \frac{1}{2}y_2 = 0$

   $y''_2 - \frac{1}{3}y'_1 = -\frac{2}{5}e^t$

   $y_1(0) = y_2(0) = \frac{1}{9},\ y'_1(0) = -\frac{2}{7},\quad y'_2(0) = \frac{2}{3}$

4

Unidad 4

Otras formas para la transformada de Fourier

Matemáticas especiales

Autor: Gustavo Adolfo Gallego Castañeda

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina

MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Introducción

Hablar de la transformada discreta de Fourier (DFT), implica que se debe tener una forma de calcularla rápidamente. Entendido este punto, es importante revisar lo trascendental del conocimiento de los algoritmos rápidos.

Un algoritmo eficaz que calcule la DFT, nos permite el uso de la transformada de Fourier para el tratamiento de imágenes. Sin ellos aplicar la transformada resultaría un tratamiento extenso y fastidioso. Cada punto en la imagen transformada necesitaría N^2 multiplicaciones complejas y $N^2 - 1$ sumas complejas (sin contar el cálculo de las funciones base - senos y cosenos -). En total, necesitamos N^4 multiplicaciones complejas y $N^2(N^2 - 1)$ sumas complejas.

Si se tiene de presente solo las multiplicaciones, un ordenador podría realizar más de 50000 de estas reales por segundo en aproximadamente tres meses, transformando una imagen de 640 x 480 pixeles. Inclusive con una supercomputadora que establezca una alta potencia operacional, se tardaría alrededor de unos diez minutos o menos. Supuestos estos datos se hace necesario el acierto para escoger cómo minimizar este número de operaciones para el tratamiento de imágenes contando con un algoritmo adecuado. Obtener este resultado, nos conduce a estudiar la organización interna de una propuesta dada, su embrollo operacional y por sobre todo indicar cuál sería el mínimo número de operaciones.

Una vez aclarado brevemente la necesidad de los algoritmos rápidos, abordamos la transformada rápida de Fourier (FFT). Ella establece uno de los más importantes aportes en la tecnología del tratamiento de la imagen (en general, de cualquier tipo de señal).

Los variados usos de la FFT aparecen de sus raíces: la transformada discreta de Fourier y de ahí, la transformada de Fourier.

El desarrollo de la computación y la informática, en particular la del ordenador portátil, ha hecho de la FFT una herramienta de análisis manejable y potente.

El tratamiento de la DFT representa una secuencia de números reales o complejos, de modo que es ideal como se dijo anteriormente para procesar información almacenada en soportes digitales. La DFT se maneja generalmente en procesado digital de señales y otras áreas del conocimiento afines, dedicadas a examinar las frecuencias que contiene una señal muestreada, también para resolver ecuaciones diferenciales parciales, y para llevar a cabo operaciones como convoluciones de enormes números enteros.

U4

Metodología

La matemática es una ciencia fundamental. Se establece a base de símbolos, ecuaciones, relaciones, funciones, métodos especiales, libros de texto que se ven diferentes, y muchos términos y palabras exclusivas. Por consiguiente, es importante usar técnicas de estudio que apliquen bien a las matemáticas. He aquí algunas que usted debería usar.

No se puede estudiar matemáticas solamente basado en la lectura y dejando que otros le hablen. La mayor parte del aprendizaje de ellas implica hacerlo de manera activa. Esto quiere decir que usted debe realizar todas las tareas y asignaciones. Esto involucra aprender a usar fórmulas y métodos.

Se requiere de una secuencia para mejorar el aprendizaje de las matemáticas. Todo aquello que se aprende tiene que ver con lo que se aprendió. La consigna es no quedarse, ya que es muy difícil ponerse al día. Realizar jornadas maratónicas para responder de inmediato no ayuda en. Tenga en cuenta que es muy útil abrir el aplicativo todos los días e ir a la par con sus compañeros.

Todos los temas de esta asignatura tienen un grado de dificultad y este se aumenta progresivamente. Es necesario que dedique más tiempo del que usted considera a esta materia así avanzará con mayor confianza.

Aprender de memoria no es una buena táctica para este curso. Son demasiados los conceptos y métodos. Trate de manejar un razonamiento de los conceptos fundamentales. Con esto no necesitará recordar tanta información.

Cuando utilice los pasos para la solución de un problema, no debe olvidar que estos posiblemente le sirvan para resolver otro similar. No dude en aplicar lo que aprendió cuando se le presente el nuevo problema.

Aprópiese de un buen número de palabras y forme con ellas un glosario. Recuerde que algunas palabras en matemáticas tienen un significado distinto fuera de ellas. Como ejemplo, si utilizamos la palabra volumen, se refiere a la cantidad de espacio dentro de una figura sólida, en otros casos puede significar un libro o el nivel de sonido. Realice un listado de estas palabras y ubícalas en un lugar especial no olvide escribir su significado.

Estudiar los temas de cualquier curso de matemáticas le puede causar incertidumbre. Quizás suene raro pero es necesario generar confianza en sí mismo esto le ayudará a calmar la angustia.

U4 Desarrollo temático

Otras formas para la transformada de Fourier

"El hombre se emancipa del mismo instinto enseguida que empieza a gustar lo difícil."

Eugenio D´Ors

Señales en Tiempo Discreto

Una señal en tiempo discreto (STD) $x(n)$ es una función cuya variable independiente es un entero. Gráficamente se representa como en la Figura. Un elemento substancial de esta función es que no está definida para dos muestras sucesivas. De igual forma no es posible que $x(n) = 0$, simplemente la señal x(n) no está definida para valores no enteros de n (tomado de Alvarado, P. (2011). Procesamiento digital de señales).

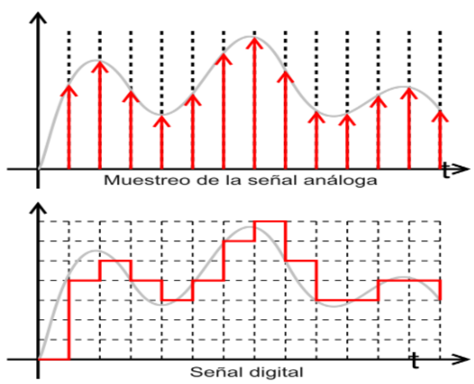


Imagen 1

Fuente: sistemasyse.blogspot.com

Por otra parte se encuentran representaciones alternativas que se utilizan para fines matemáticos. Se destacan entre otros los siguientes:

$$x(n) = \begin{cases} 1 \; para \; n = 1{,}3 \\ 4 \; para \; n = 2 \\ 0 \; para \; otro \; valor \end{cases}$$

Tabularmente se representa como:

x	$\cdots$	-2	-1	0	1	2	3	$\cdots$
$x(n)$	$\cdots$	0	0	0	1	4	1	$\cdots$

Tabla 1

Fuente: Propia.

Igualmente se puede representar como una secuencia

$$x(n) = \{\cdots, 0,0,1,4,1,0, \cdots\}$$

Las señales básicas que se estudian con frecuencia en el procesamiento de las mismas son:

a) El impulso unitario que se simboliza como $\delta(n)$ y se escribe:

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 \; si \; n = 0 \\ 0 \; si \; n \neq 0 \end{cases}$$

Esta se diferencia de la función analógica $\delta(t) = 0$ que siempre será 0 excepto para $t = 0$.

b) La función escalón unitario que se simboliza como $u(n)$ y se escribe:

$$u(n) = \begin{cases} 1 \; si \; n \geq 0 \\ 0 \; si \; n < 0 \end{cases}$$

c) La función rampa unitaria que se simboliza como $u_r(n)$ y se escribe:

$$u_r(n) = \begin{cases} n \; si \; n \geq 0 \\ 0 \; si \; n < 0 \end{cases}$$

d) La función exponencial que se simboliza como una secuencia de la forma:

$$x(n) = a^n$$

Función que expresa dos situaciones, la primera si a es real entonces $x(n)$ es real y la segunda si a es complejo se puede escribir como:

$$x(n) = r^n e^{-in\theta}$$

Con $r \; y \; \theta$ los parámetros de magnitud y fase.

Serie de Fourier compleja

“Se puede reformular la serie de Fourier en términos complejos. Para esto se asume que f es una función de variable real con periodo T y se supone que f es integrable en $[-T/2, T/2]$. Reemplazando $w_o = 2\pi/T$ se tiene que la serie de Fourier es:

$$f(x) = \frac{1}{2}a_o + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n Cos(nw_o x) + b_n Sen(nw_o x)]$$

Expresando el coseno y el seno en su forma exponencial compleja tenemos:

$$= \frac{1}{2}a_o + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \frac{1}{2}\left(e^{inw_o x} + e^{-inw_o x}\right) + b_n \frac{1}{2}\left(e^{inw_o x} - e^{-inw_o x}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}a_o + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2}(a_n - ib_n)e^{inw_o x} + \frac{1}{2}(a_n + ib_n)e^{-inw_o x}\right]$$

Ahora se define:

$$d_o = \frac{1}{2}a_o$$

$$d_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \forall n \in Z^+$$

$$\overline{d_n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n), \forall n \in Z^+$$

Reemplazando en la serie obtenemos:

$$= d_o + \sum_{n=1}^{\infty}\left[d_n e^{inw_o x} + \overline{d_n} e^{-inw_o x}\right]$$

Así:

$$d_o = \frac{1}{2}a_o = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt \;\; para\, n = 1,2,3, \cdots$$

Ahora obtenemos d_n:

$$d_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-inw_o x}dt$$

Entonces:

$$\overline{d_n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{inw_o x}dt = d_{-n}$$

Así, sustituyendo estos valores se tiene:

$$f(x) = d_o + \sum_{n=1}^{\infty}\left[d_n e^{inw_o x} + d_{-n}e^{-inw_o x}\right] = d_o \sum_{n=-\infty, n\neq 0}^{\infty} d_n e^{inw_o x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{inw_o x}$$

Así llegamos a la definición de la serie de Fourier compleja.

Definición. Sea f con periodo fundamental T. Sea $w_o = 2\pi/T$. Entonces la serie de Fourier compleja de f es:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{inw_o x}$$

Donde:

$$d_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-inw_o x}dt$$

$Para\, n =$
$\pm 1, \pm 2, \cdots lo\ números\ d_n\ son\ los\ coeficientes\ de\ Fourier\ complejos\ de\ f$ ”
(tomado de Arteaga, R. (2010). Reflexiones sobre la aplicación de la transformada de Fourier al procesamiento digital de imágenes).

Transformada discreta de Fourier (DFT)

Según, O’Neill, P. (2008), si *f* tiene periodo *p*, su serie de Fourier compleja es:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{inw_o x}$$

Con $w_o = 2\pi/T$ y coeficientes complejos:

$$d_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-inw_o x}dt$$

Aquí se cambian los límites de integración, puesto que la función es periódica, y reemplazamos el valor de w_o:

$$d_n = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)e^{-in2\pi t/T}dt$$

Entonces α puede ser cualquier real, se escoge 0 y tenemos:

$$d_n = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} f(t)e^{-in2\pi t/T}dt$$

$Para\, n = 0 \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots$, ahora se aproxima d_n mediante una suma de Riemann. Para esto se divide el intervalo $[O, T]$ entre N sub-intervalos de longitud T/N.

$$d_n \approx \frac{1}{T}\sum_{j=0}^{N-1} f(t_j)e^{-2\pi i n t_j/T}\left(\frac{T}{N}\right)$$

Puesto que t_j puede ser un punto en cada sub-intervalo $[jT/N, (j+1)T/N]$ se escoge que sea jT/N y se obtiene:

$$= \frac{1}{T}\sum_{j=0}^{N-1} f(t_j)e^{-2\pi i n jT/TN}\left(\frac{T}{N}\right) = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f(t_j)e^{-2\pi i n j/N}$$

Así llegamos a la definición de la DFT. Se acostumbra a definirla sin el factor 1/N[5]

Definición. Sea N un número entero positivo. Sea $u = \{u_j\}_{j=0}^{N-1}$ una secuencia de números complejos. Entonces la transformada discreta de u es la secuencia U_k definida por:

$$U_k = \sum_{j=0}^{N-1} u_j e^{-2\pi i jk/N}$$

$Para\, k = 0 \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots$

Transformada rápida de Fourier (FFT)

Según, O'Neill, P. (2008), en 1965 J.W. Cooley de IBM y J.W. Tukey de la Universidad de Princeton publicaron un artículo titulado: "An Algorithm for the Machine Computation of the Complex Fourier Series" donde describían en 5 páginas un algoritmo muy eficiente para calcular la transformada discreta de Fourier. A partir de ese momento y gracias a la aparición de los primeros computadores, el cálculo de la DFT se volvió un proceso práctico y veloz que podía implementarse en sistemas electrónicos para resolver problemas reales.

Si se considera la transformada discreta desde un punto de vista algorítmico, se puede observar que por cada coeficiente se realiza una sumatoria de una operación por cada dato. Es decir por cada dato se realiza una sumatoria de todos los datos, lo cual es costoso en términos de operaciones. De este tipo de análisis se ha concluido que la transformada discreta de Fourier de una secuencia de N datos requiere de N^2, operaciones mientras que la FFT requiere de solo $Nlog_2(N)$".

Gracias a la implementación de la FFT en el software o hardware se puede utilizar la transformada de Fourier para resolver problemas de estadística, comunicaciones, ingeniería, etc. Y en particular para realizar procesamiento digital de imágenes (DIP). Se describen algunas de estas aplicaciones en la parte dos de este trabajo.

Componentes de frecuencia de Señales

Como se estableció en la sección anterior, una señal es una función, en donde el eje x representa el tiempo; frecuentemente en segundos. Entonces una señal $x(t)$ se puede representar con base a sus componentes de frecuencia así:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{N} A_k Cos(2\pi w_k t + \theta)$$

Donde:

$$A_k \text{ es la amplitud}$$

$$w_k \text{ la frecuencia en } Hz$$

$$\theta \text{ es la fase}$$

La amplitud indica el valor máximo que toma el componente sinusoidal, así si generamos una señal como $x(t) = 3cos(t)$ vemos que los máximos ocurren en 3:

$$x(t) = 3cos(t)$$

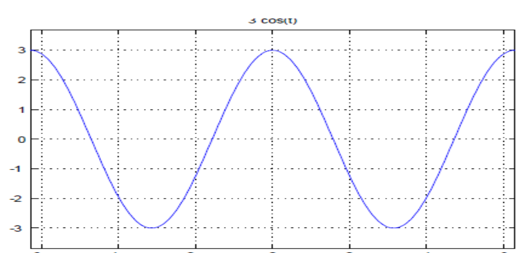


Imagen 2. Amplitud 3
Fuente: Propia.

La frecuencia indica cuantos ciclos por segundo da la señal (por unidad en el eje x), por ejemplo si es 0.5 significa que en $t = 1$ la señal ha cumplido medio ciclo y que en $t = 2$ un ciclo completo. Para visualizarlo podemos modificar el ejemplo anterior cambiando la frecuencia para obtener $x(t) = 3cos(2nO.5t)$:

$$x(t) = 3cos(2nO.5t)$$

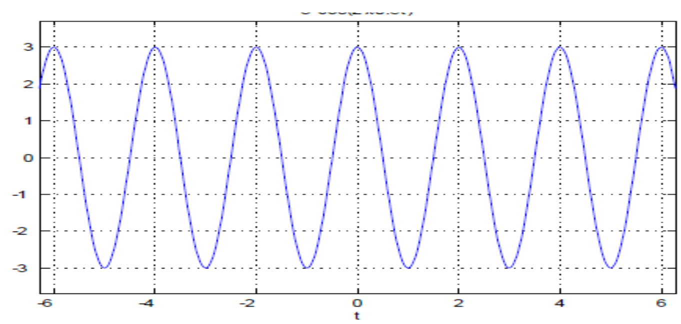


Imagen 3. Frecuencia 0.5 Hz

Fuente: Propia.

La fase indica un desplazamiento del ángulo del comienzo de la sinusoide. Visualmente se observa porque el coseno no inicia en $(O, 1)$ sino donde corresponda en $(O, cos(\theta))$. En el ejemplo anterior si graficamos la señal con una fase de $\frac{\pi}{2}$ obtenemos esta señal: $x(t) = 3cos(2nO.5t + \frac{\pi}{2})$

$$x(t) = 3cos(2nO.5t + \frac{\pi}{2})$$

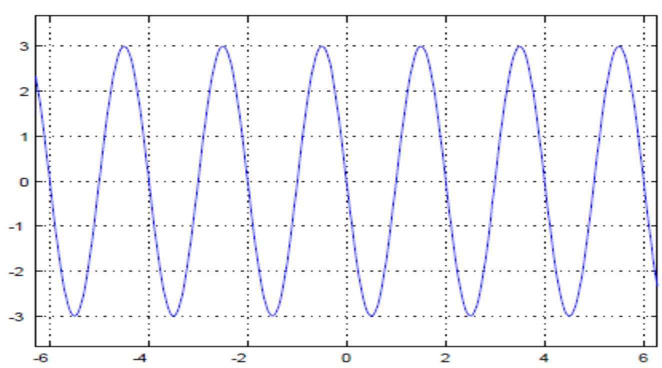


Imagen 4.
Fuente: Propia.

$fase\ \frac{\pi}{2}$ Así, conociendo las componentes de frecuencia de una señal (amplitud, frecuencia, fase), esta se puede generar exactamente. Y sumando varias sinusoides se pueden representar todo tipo de señales.

Adicional a la aplicación de las series de Fourier para resolver ecuaciones diferenciales parciales, existen otras aplicaciones de igual interés e importancia. A continuación describiremos algunas dignas de resaltar.

Aplicaciones y usos de la transformada de Fourier

Análisis de Datos

Según, Hwei P. (1973), la transformada de Fourier se puede utilizar para extraer la información clave subyacente en un conjunto de datos. En especial es útil en estadística para analizar las series de tiempo. Las series de tiempo son mediciones realizadas secuencialmente en el tiempo. Por ejemplo la lluvia que cae cada día, el número de nacimientos cada día, etc.

En este contexto el análisis de Fourier se utiliza para detectar ciclos o periodicidad en los datos. Por ejemplo que cada 4 meses cae la máxima cantidad de lluvia. Es importante tener en cuenta que para que el análisis sea exitoso se debe muestrear una cantidad de datos suficiente de tal forma que en el conjunto de datos esté presente al menos un ciclo completo.

Análisis de manchas solares

Según, Arteaga, R. (2010), las manchas solares son fenómenos temporales que ocurren sobre la superficie del sol (fotósfera) y son visibles desde la tierra como manchas oscuras que se mueven. Alteraciones magnéticas ocasionan un cambio de temperatura en ciertas zonas que al ser observadas se identifican por ser más oscuras. Desde la edad media se inició el registro del número de manchas por mes y su estudio se convirtió en una necesidad para la vida moderna dado que existe una relación directa entre el número de manchas solares y la aparición de tormentas solares que afectan las comunicaciones en la tierra.

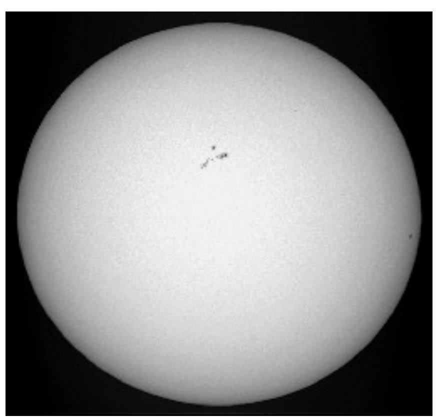


Imagen 5. Manchas solares de Oct 26/2010[l0]
Fuente: http://www.waa.at/bericht/2016/05/20160505-08hwp/20160505-08hwp-s05.jpg

Realizando un análisis de Fourier de los datos es posible encontrar cada cuantos años se presenta un máximo del número de manchas y de esta forma predecir las épocas de mayores tormentas solares. Con este fin utilizamos Matlab, el cual como se comentó anteriormente ya tiene implementado el algoritmo de la FFT y además nos brinda herramientas para graficar y analizar información. Entonces al graficar el número de manchas promedio por año obtenemos esta imagen:

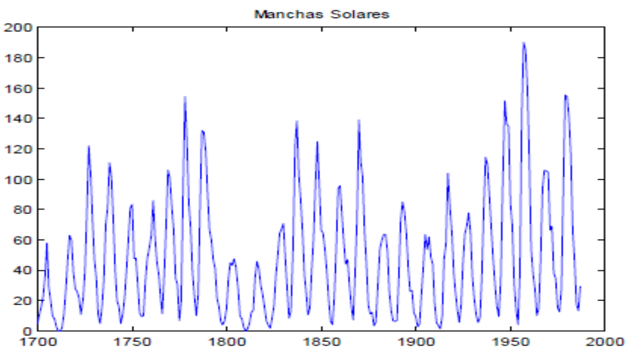


Imagen 6. Manchas solares
Fuente: Propia.

Realizando un acercamiento podemos ver el número de manchas por año:

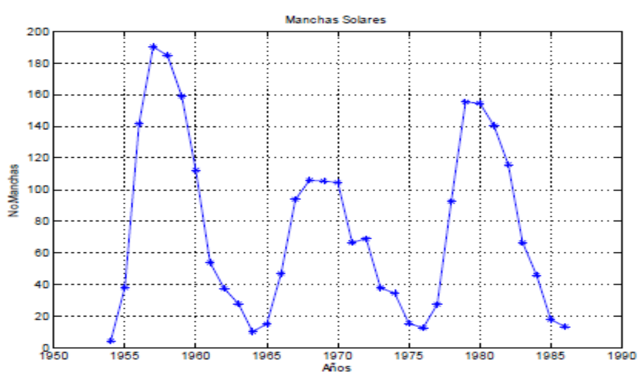


Imagen 7. Manchas solares
Fuente: Propia.

Puesto que graficamos el número de manchas por año la frecuencia de muestreo es 1 Hz. Es decir 1 muestra por unidad de tiempo. Lo primero que se hace es calcular la FFT de los datos. Esto se logra con la función FFT en Matlab:

$$y = FFT(manchas);$$

Después calculamos las amplitudes, es decir la magnitud de los coeficientes complejos:

$$y_1 = abs(y)$$

El eje x es la frecuencia y se construye con un intervalo desde F_m/N hasta F_m con incrementos de F_m/N. Donde F_m es la frecuencia de muestreo y N es el número de datos.

$$xf = \frac{1}{n}:\frac{1}{n}:1$$

Y finalmente se genera la gráfica seleccionando un subconjunto de datos y con el periodo $(1/f)$ en lugar de la frecuencia para facilitar el análisis.

$$plot(1./xf(10:100), y1(10:100))$$

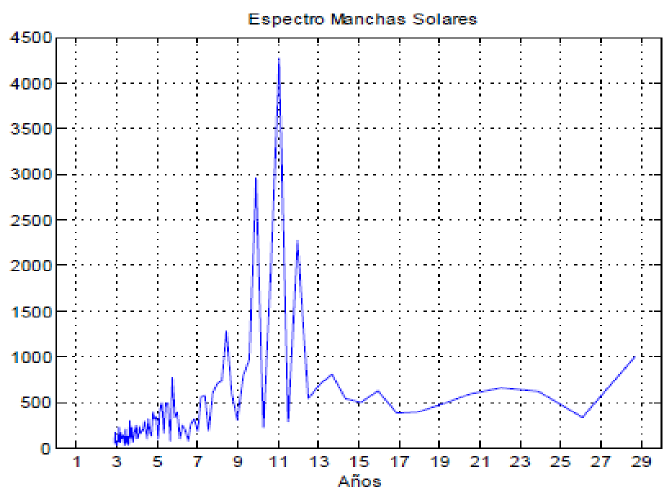


Imagen 8. Espectro manchas solares
Fuente: Propia.

Entonces se puede observar claramente que el principal ciclo ocurre cada 11 años. Si se revisan las anteriores gráficas se puede verificar que efectivamente este ciclo se cumple.

Comunicaciones

Arteaga, R. (2010), dijo que la extracción de una componente sinusoidal incrustada en ruido. Es muy común en ingeniería, particularmente en aplicaciones de comunicaciones, obtener los datos de un sensor junto con ruido, y requerir aislar la señal original para extraer la información importante. Es decir dada una señal eliminar el ruido de esta. Esta tarea se puede realizar muy fácilmente con la transformada discreta de Fourier (DFT) puesto que se pueden obtener las frecuencias dominantes y de esta forma filtrar el ruido que puede estar inmerso en los datos.

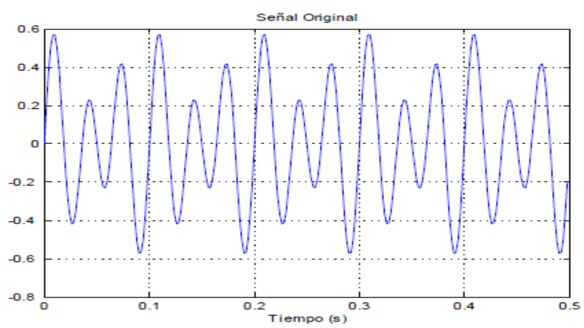
El sensor lo que generalmente hace es muestrear la información cada cierto intervalo de tiempo, y por lo tanto terminamos con n mediciones de la señal. Para este ejemplo supongamos que la señal original es:

$$y = 0.2\ sin(2\pi 20t) + 0.4\ sin(2\pi 30t)$$

Es decir una señal con dos frecuencias: 20 Hz, y 30 Hz con 0.2 y 0.4 de amplitud respectivamente. Supongamos que muestreamos la señal con una frecuencia de muestreo de 500 Hz. Si generáramos la señal por dos segundos entonces obtenemos 1000 muestras. Entonces el eje x lo generamos así:

$$t = (0{:}\ 1/500{:}\ 2 - (1/500))$$

Y al graficar obtenemos:



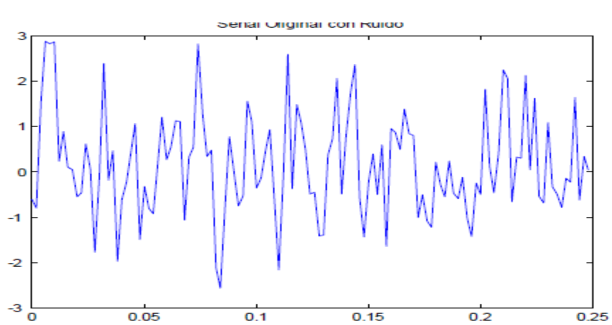
Tiempo (s)

Imagen 9. Señal original
Fuente: Propia.

Para simular que la señal es transmitida por algún medio, agregamos ruido usando números aleatorios normalmente distribuidos:

$$y = 0.2\ sin(2\pi 20t) + 0.4\ sin(2\pi 30t) + randn(1{,}1000)$$

Y generamos la gráfica:



Tiempo (s)

Imagen 10. Señal original con Ruido
Fuente: Propia.

Como se observa, el ruido distorsiona la señal y ya no es posible determinar su forma original. Sin embargo con la transformada de Fourier podemos volver a obtener la señal. Se crea el eje x con las frecuencias (Frecuencia de muestreo) y se utiliza nuevamente el comando FFT.

$$f = 0{:}\,0.5{:}\,(500 - 0.5)$$

$$y1 = abs(fft(y))$$

Así, obtenemos el espectro de frecuencia.

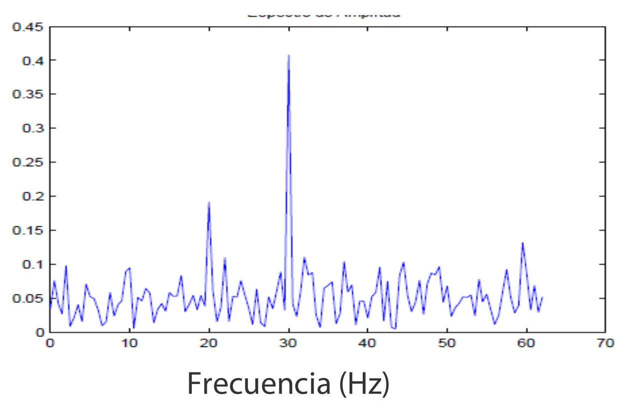


Imagen 11. Espectro de amplitud
Fuente: Propia.

Y Aquí se puede observar que en la señal original existen 2 frecuencias importantes: 20 y 30 Hz con una amplitud de aproximadamente 0.2 y 0.4 y de esta forma se puede "reconstruir" la señal sin ruido.

$$y = 0.2\ sin(2\pi 20t) + 0.4\ sin(2\pi 30t)$$

4

Unidad 4

Aplicaciones de la serie de Fourier

Matemáticas especiales

Autor: Gustavo Adolfo Gallego Castañeda

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina

MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Introducción

Una forma de entender el principio de incertidumbre tradicional es utilizando variables dinámicas como la posición, momento angular, momento lineal, etc., como elementos operacionales, es decir como proceso experimental para su medida. La posición se medirá desde un sistema de referencia y se indicará el instrumento con el que será medida, así como su forma de uso.

Por el contrario, si analizamos el proceso experimental para medir la posición de un electrón, es imposible hacerlo sin alterar la variable de análisis debido a que en el mismo sistema se debe aplicar una interacción con partícula extraña al sistema (fotón), por la imposibilidad de observación de objetos microscópicos en movimiento. De alguna forma el observador modifica el estado natural de la partícula en movimiento, causando un error que jamás podrá ser cero, inclusive teniendo en cuenta la calidad de la tecnología usada para la medición.

Así las cosas esta visión de la medida sin ser totalmente errónea, omite el aspecto fundamental del principio de incertidumbre: este establece una frontera que está más allá y que la física clásica no podría utilizar. Para la física clásica existen sistemas establecidos por medio de variables, idealmente definidas en el tiempo (velocidad, posición, etc.) y que podrán medirse con la precisión que se desee. Si bien es cierto en la realidad resulta imposible alcanzar dicha precisión, la física clásica, asegura que si una partícula en el instante t exacto, estará en la posición x también exacta. De otra parte, el principio de incertidumbre, afirma como se mencionó que existe una barrera fundamental para calcular con absoluta precisión la medida, en realidad está indicando que si un sistema físico real se describe en términos de la física clásica, entonces se está haciendo una aproximación, y la relación de incertidumbre nos indica la calidad de esa aproximación.

Es importante aclarar que por cuestiones de cultura y educación, el ser humano tiene su primer encuentro con el principio de incertidumbre, condicionado por el determinismo de la física clásica. En ella, la posición x de una partícula se define como una función continua en el tiempo $x = x(t)$. Si la masa de esa partícula es m y se mueve a velocidades suficientemente inferiores a la de la luz, entonces el momento lineal de la partícula se define como masa por velocidad, siendo la velocidad la primera derivada en el tiempo de la posición: $p = m\frac{dx}{dt}$.

Ciertamente también, el conocimiento que se tiene hoy de la naturaleza es bastante diferente del que se tenía hace poco tiempo atrás. La crisis de la Mecánica Clásica y con la llegada de la Mecánica Cuántica, junto con el desarrollo de la Teoría de Probabilidades ha dado un giro a la concepción que se tenía de las leyes de la naturaleza. Este giro se debe en nuestra opinión, a un concepto clave: el AZAR.

Cuando se introduce este concepto en el manejo de las teorías científicas se podría llegar a pensar que la ciencia es "azarosa" o carente de orden. En este documento, se verá que el mismo azar obedece leyes ("el azar no se comporta al azar"). Principalmente se desarrollará la función característica, ley del azar conocida como "Principio de Incertidumbre", la suma de Poisson entre otros, sobre "la búsqueda de certeza en un universo probabilístico" (tomado de https://goo.gl/5pUutX).

U4 Metodología

La matemática es una ciencia fundamental. Se establece a base de símbolos, ecuaciones, relaciones, funciones, métodos especiales, libros de texto que se ven diferentes, y muchos términos y palabras exclusivas. Por consiguiente, es importante usar técnicas de estudio que apliquen bien a las matemáticas. He aquí algunas que usted debería usar.

No se puede estudiar matemáticas solamente basado en la lectura y dejando que otros le hablen. La mayor parte del aprendizaje de ellas implica hacerlo de manera activa. Esto quiere decir que usted debe realizar todas las tareas y asignaciones. Esto involucra aprender a usar fórmulas y métodos.

Se requiere de una secuencia para mejorar el aprendizaje de las matemáticas. Todo aquello que se aprende tiene que ver con lo que se aprendió. La consigna es no quedarse, ya que es muy difícil ponerse al día. Realizar jornadas maratónicas para responder de inmediato no ayuda en. Tenga en cuenta que es muy útil abrir el aplicativo todos los días e ir a la par con sus compañeros.

Todos los temas de esta asignatura tienen un grado de dificultad y este se aumenta progresivamente. Es necesario que dedique más tiempo del que usted considera a esta materia así avanzará con mayor confianza.

Aprender de memoria no es una buena táctica para este curso. Son demasiados los conceptos y métodos. Trate de manejar un razonamiento de los conceptos fundamentales. Con esto no necesitará recordar tanta información.

Cuando utilice los pasos para la solución de un problema, no debe olvidar que estos posiblemente le sirvan para resolver otro similar. No dude en aplicar lo que aprendió cuando se le presente el nuevo problema.

Aprópiese de un buen número de palabras y forme con ellas un glosario. Recuerde que algunas palabras en matemáticas tienen un significado distinto fuera de ellas. Como ejemplo, si utilizamos la palabra volumen, se refiere a la cantidad de espacio dentro de una figura sólida, en otros casos puede significar un libro o el nivel de sonido. Realice un listado de estas palabras y ubícalas en un lugar especial no olvide escribir su significado.

Estudiar los temas de cualquier curso de matemáticas le puede causar incertidumbre. Quizás suene raro pero es necesario generar confianza en sí mismo esto le ayudará a calmar la angustia.

U4

Desarrollo temático

Aplicaciones de la serie de Fourier

"Valgámonos de palabras inexactas, si es preciso, a trueque de entendernos deprisa"
Eugenio D`Ors

El principio de incertidumbre

Según, Hwei P. (1973), hacia el año 1927 un prestigioso investigador W. Heisenberg estableció que una partícula lleva asociada al mismo tiempo una honda lo cual impide la determinación en simultanea de su posición y velocidad, a estas declaraciones se les dio el nombre de principio de incertidumbre.

Resulta muy sencillo para la mente humana establecer que si una partícula se puede localizar de igual forma se puede establecer y relacionado con ella un grupo de ondas más o menos localizado.

Para construir este grupo de ondas se utiliza el principio de superposición asociando un número infinito de ondas armónicas con diferentes frecuencias.

Esta asociación de ondas se representa por la expresión:

$$\mathfrak{F}(x) = \int_0^{\infty^+} g(k)Sen(kx)dk \quad Transformada\ de\ Fourier$$

Donde *k* representa el número de onda:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi v}{c}$$

Y la integral representa la suma de ondas con frecuencias (o número de ondas) que varían desde cero a más infinito ponderadas mediante el factor $g(k)$.

El momento de la partícula y el número de ondas están relacionados ya que:

$$p = \frac{hv}{c}; \qquad k = \frac{2\pi v}{c}$$

Por consiguiente se deduce:

$$p = \frac{h}{2\pi}k = \hbar k$$

Estas observaciones ponen de manifiesto que la localización de una partícula depende de una suma de infinitas ondas, cuyo número de onda varía entre cero e infinito y por consiguiente el momento $p = \hbar k$ también varía entre cero e infinito dicho de otra forma no es posible su determinación.

El principio de incertidumbre nos dice que hay un límite en la precisión con el cual podemos determinar al mismo tiempo la posición y el momento de una partícula.

La relación matemática que representa el principio de incertidumbre de Heisenberg es:

$$(\Delta x)(\Delta p) \geq \hbar$$

Si deseamos calcular con total precisión la posición:

$$\Delta x = 0$$

De la expresión para el principio de incertidumbre se verifica que:

$$\Delta p \geq \frac{\hbar}{\Delta x} \rightarrow \infty$$

Es decir, que la incertidumbre en el momento es infinita.

Función característica

Según, Hwei P. (1973), la función $\circledast\ (h)$, resultante de hacer la transformada de Fourier de $P(g)$, se denomina **función característica** asociada a la distribución de probabilidad $P(g)$.

$$\circledast\ (h) = \int_{-\infty}^{\infty} p(g)e^{-i2\pi hg}\, dg$$

Por lo tanto, también podemos expresarlo en términos de una esperanza estadística,

$$\circledast\ (h) =< e^{-i2\pi hg} >$$

Utilizando la exponencial en forma de serie de Taylor,

$$e^{\theta} = 1 + \theta + \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{3!}\theta^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta^k}{k!} \qquad -\infty < \theta < +\infty$$

Entonces (recordemos que 0!=1),

$$\circledast\ (h) =< \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i2\pi hg)^k}{k!} > \qquad -\infty < g < +\infty$$

La esperanza estadística de una suma de funciones es la suma de las esperanzas de cada término si la variable estadística es la misma, es decir si la distribución de probabilidad es la misma. Por lo tanto, aplicando la definición de esperanza estadística,

$$\circledast\ (h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i2\pi hg)^k}{k!} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} g^k p(g) dg}{\int_{-\infty}^{\infty} p(g) dg}$$

Se designa momento de orden k de $g(t)$ a la esperanza estadística de las correspondientes potencias de la variable estadística g. Por lo tanto,

$$< g^k >= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} g^k p(g) dg}{\int_{-\infty}^{\infty} p(g) dg}$$

Es corriente usar el símbolo $\mu_k \equiv < g^k >$. Si g toma valores discretos, se escribe la expresión,

$$< g^k >= \frac{\sum_{-\infty}^{\infty} g_n^k p_n}{\sum_{-\infty}^{\infty} p_n}$$

El momento de orden 1, se denomina media μ de la distribución, $\mu \ \equiv \ \mu_1 \ =< g >$

Esto implica que podemos expresar la función característica en función de sus momentos. Esto es,

$$\circledast\ (h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i2\pi h)^k}{k!} \mu_k$$

Ahora bien, como $\circledast\ (h)$ es la transformada de Fourier de $P(g)$, entonces,

$$\mathfrak{F}^{-1}[\circledast\ (h)] = -i2\pi g p(g)$$

Aplicando sucesivamente,

$$\mathfrak{F}^{-1}[\circledast^k\ (h)] = (-i2\pi g)^k p(g)$$
$$\circledast^k\ (h) = \mathfrak{F}[(-i2\pi g)^k p(g)]$$

$$\circledast^k\ (h) = (-i2\pi)^k \int_{-\infty}^{\infty} g^k p(g) e^{-i2\pi hg} dg$$

Para h = 0,

$$\circledast^k\ (0) = (-i2\pi)^k \int_{-\infty}^{\infty} g^k p(g) dg$$

Como,

$$\circledast\ (0) = \int_{-\infty}^{\infty} p(g)\, dg$$

Los momentos estadísticos se pueden expresar,

$$\mu_k \equiv < g^k > = \left[\frac{1}{-i2\pi}\right]^k \frac{\circledast^k\ (0)}{\circledast\ (0)}$$

Ejemplo:

Sea X una variable aleatoria con distribución de Cauchy con parámetros $\alpha = 0\ y\ \beta = 1$. Su función de densidad de probabilidades está dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{(1 + x^2)}$$

La función generadora de momentos viene dada por:

$$E(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \frac{1}{\pi} \frac{1}{(1+x^2)} dx$$

Si $-\infty < x < 0$ entonces $e^{tx} < 1$, luego:

$$E(|e^{tx}|) = \int_{-\infty}^{0} |e^{tx}| \frac{1}{\pi} \frac{1}{(1+x^2)} dx \leq \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\pi} \frac{1}{(1+x^2)} dx < \infty$$

Al resolver la integral:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\pi} \frac{1}{(1+x^2)} dx = \lim_{c \to -\infty} \int_{c}^{0} \frac{1}{\pi(1+x^2)} dx$$

Si se calcula la integral indefinida:

$$\int \frac{1}{\pi(1+x^2)} dx = \frac{1}{\pi} \int \frac{1}{(1+x^2)} dx = \frac{1}{\pi} Tan^{-1}(x) + C$$

Por consiguiente evaluando la integral definida:

$$\lim_{c \to -\infty} \int_{c}^{0} \frac{1}{\pi(1+x^2)} dx = \lim_{c \to -\infty} \left(-\frac{1}{\pi} Tan^{-1}(x) \right) = -\frac{1}{\pi} \lim_{c \to -\infty} Tan^{-1}(x) = -\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} < \infty$$

Por otra parte si $0 < x < \infty$ entonces $|e^{tx}| > x = |x|$, luego:

$$E(|x|) = \int_{-\infty}^{\infty} |x| \frac{1}{\pi} \frac{1}{(1+x^2)} dx = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{\pi} \lim_{c \to \infty} \int_{0}^{c} \frac{x}{(1+x^2)} dx$$

$$\frac{1}{\pi} \lim_{c \to \infty} \int_{0}^{c} \frac{x}{(1+x^2)} dx = \frac{1}{2\pi} \lim_{c \to \infty} (1+c^2) = \infty$$

En conclusión si $E(|x|) = \infty$ se tiene que $E\left(\left|e^{itx}\right|\right) > \infty$ por ley de monotonía de la esperanza. Luego la función de momentos $E\left(\left|e^{itx}\right|\right)$ no existe, pero la función característica de la distribución de Cauchy estará dada por:

$$E\left(e^{itx}\right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \frac{1}{1+x^2} dx = e^{|t|}$$

Formula de la suma de Poisson

Según, Hwei P. (1973), la fórmula de la suma de Poisson establece que si $f(t)$ es una función arbitraria y $F(w)$ es su transformada de Fourier, entonces,

$$\sum_{-\infty}^{\infty} f(nT) = \frac{1}{T}\sum_{-\infty}^{\infty} F(nw_o) \qquad donde \quad w_o = \frac{2\pi}{T}$$

Ejemplo: deducir la siguiente identidad de la función theta

$$\frac{a}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-a(t+n)^2} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi^2 n^2} * Cos(2\pi nt)$$

Solución: sea:

$$f(t) = e^{-nt^2}$$

Entonces se tiene:

$$F(w) = \mathfrak{F}\left[e^{-nt^2}\right] = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-w^2/4a}$$

Si se hace $T = 1$ (de donde $w_o = 2\pi$) se obtiene:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n+t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(2\pi n)\, e^{-i2\pi nt}$$

Por tanto:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-a(t+n)^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi^2 n^2/a} e^{-i2\pi nt}$$

O

$$\sqrt{\frac{a}{\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-a(t+n)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi^2 n^2/a} e^{-i2\pi nt}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{-1} e^{-\pi^2 n^2/a} e^{-i2\pi nt} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi^2 n^2/a} e^{-i2\pi nt}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi^2 n^2/a} (e^{i2\pi nt} + e^{-i2\pi nt}) = 1 + 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-a(t+n)^2} * Cos(2\pi nt)$$

Causalidad y transformada de Gilbert

Según, Hwei P. (1973), Sea $F(w) = R(w) + iX(w)$, la transformada de Fourier de una función causal $f(t)$. Demostrar que las funciones $R(w)\ y\ X(w)$ no son independientes una de otra, sino que cada una de ellas se puede determinar unívocamente en términos de la otra

Solución: puesto que $f(t)$ es causal, por definición, se tiene:

$$f(t) = 0 \quad para \qquad t < 0$$

De acuerdo con esto se tiene,

$$(-t) = 0 \quad para \qquad t > 0$$

Por consiguiente:

$$f(t) = 2f_e(t) = 2f_o(t) \quad para \qquad t > 0$$

Donde:

$$f(t) = f_e(t) + f_o(t)$$

Y $f_e(t)$, $f_o(t)$ son las componentes par e impar de $f(t)$, respectivamente, entonces.

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty R(w)Cos(wt)dt = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty X(w)Sen(wt)dt \qquad para \quad t > 0$$

Ejemplo: si la función causal $f(t)$ no contiene impulsos en el origen, demostrar que si $F(w) = \mathfrak{F}[f(t)] = R(w) + iX(w)$, entonces $R(w) y\, X(w)$ satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$R(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{X(y)}{w-y}dy, \qquad X(w) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{R(y)}{w-y}dy$$

Solución: sea:

$$f(t) = f_e(t) + f_o(t)$$

Y $f_e(t)$, $f_o(t)$ son las componentes par e impar de $f(t)$, respectivamente, puesto que $f(t)$ es causal, entonces.

$$f(t) = 0 \quad para \quad t < 0$$

Ciertamente, para cualquier función causal se puede suponer que:

$$f_e(t) = -f_o(t) \qquad para \qquad t < 0$$

Asi mismo:

$$f_e(t) = f_o(t) \qquad para \qquad t > 0$$

Por consiguiente, se puede expresar que:

$$f_e(t) = f_o(t)sgn(t)$$

$$f_0(t) = f_e(t)sgn(t)$$

Donde $sgn(t)$ se define como:

$$sgn(t) = \begin{cases} 1 & para \quad t > 0 \\ -1 & para \quad t < 0 \end{cases}$$

Ahora bien:

$$\mathfrak{F}[f_e(t)] = R(w)$$

$$\mathfrak{F}[f_0(t)] = iX(w)$$

$$\mathfrak{F}[sgn(t)] = \frac{2}{iw}$$

Por tanto, según el teorema de la convolución en la frecuencia, se obtiene:

$$R(w) = \mathfrak{F}[f_e(t)] = \mathfrak{F}[f_0(t)sgn(t)] = \frac{1}{2\pi}iX(w) * \frac{2}{iw} = \frac{1}{\pi}X(w) * \frac{1}{w} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{X(y)}{w-y}dy$$

Analogamente, se obtiene:

$$iX(w) = \mathfrak{F}[f_0(t)] = \mathfrak{F}[f_e(t)sgn(t)] = \frac{1}{2\pi}R(w) * \frac{2}{iw} = -\frac{i}{\pi}R(w) * \frac{1}{w} = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{R(y)}{w-y}dy$$

El par de ecuaciones encontradas se conoce como la transformada de Gilbert.

Ejemplo: La parte real de la función del sistema $H(w)$, de un sistema causal es, $\pi\delta(w)$; hallar la función del sistema $H(w)$.

Solución: sea:

$$H(w) = R(w) + iX(w)$$

Dado que:

$$R(w) = \pi\delta(w)$$

$$X(w) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\pi\delta(y)}{w-y}dy = \int_{-\infty}^{\infty}\delta(y)\frac{1}{w-y}dy = -\frac{1}{w}$$

Se concluye la siguiente relación

$$H(w) = \pi\delta(w) - i\frac{1}{w} = \pi\delta(w) + \frac{1}{iw}$$

Evaluación de algunas integrales

Según, Hwei P. (1973), la evaluación de algunas integrales se facilita utilizandoel teorema de Parseval y el par de transformadas de Fourier, lo cual se ilustra en los siguientes ejemplos.

Ejemplo: evaluar las siguientes integrales:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{a^2 + x^2}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + x^2}$$

Solución: sea:

$$f(t) = e^{-at}u(t)$$

Entonces de acuerdo a resultados anteriores, se tiene:

$$F(w) = \mathfrak{F}[f(t)] = \frac{1}{a + iw}$$

$$|F(w)|^2 = \frac{1}{a^2 + w^2}$$

Ahora bien por el teorema de Parseval, se tiene:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(w)|^2 dw$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(w)|^2 dw = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)dt$$

Por tanto:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{a^2 + x^2} = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)dt = 2\pi \int_{0}^{\infty} e^{-at}dt = 2\pi \left.\frac{e^{-2at}}{-2a}\right|_0^{\infty} = \frac{\pi}{a}$$

De esta manera,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{a^2 + x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dw}{a^2 + w^2} = \frac{\pi}{a}$$

Haciendo $a = 1$, resulta:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + x^2} = \pi$$

Ejemplo: Evaluar las siguientes integrales:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a^2 dx}{(a^2 + x^2)^2}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)^2}$$

‘

Solución: sea:

$$f(t) = \frac{1}{2} e^{-a|t|}$$

Entonces por la transformada de Fourier se tiene:

$$F(w) = \mathfrak{F}[f(t)] = \frac{a}{a^2 + w^2}$$

Ahora bien utilizando el teorema de Parseval se tendrá:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(w)|^2 dw = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt$$

Por tanto:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a^2 dw}{(a^2 + w^2)^2} = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2} e^{-a|t|}\right]^2 dt = \frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2a|t|}\, dt$$

$$\frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2a|t|}\, dt = \frac{\pi}{2} \left[\int_{-\infty}^{0} e^{2at}\, dt + \int_{0}^{\infty} e^{-2at} dt\right] = \frac{\pi}{2} \left[\frac{e^{2at}}{2a}\bigg|_{-\infty}^{0} + \frac{e^{-2at}}{-2a}\bigg|_{0}^{\infty}\right] = \frac{\pi}{2a}$$

De esta manera,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a^2 dx}{(a^2 + x^2)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a^2 dw}{(a^2 + w^2)^2} = \frac{\pi}{2a}$$

Haciendo $a = 1$, se obtiene:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)^2} = \frac{\pi}{2}$$

Bibliografia

- Hsu, P. (1998). Análisis de Fourier. México D.F.: Editorial Pearson Education.
- O' Neil, M. (2001). Matemáticas avanzadas para Ingeniería. Quinta Edición, México D. F.: Editorial Thomson.
- Spiegel, R. (2001). Matemáticas avanzadas para Ingeniería y Ciencias. México D.F.: Editorial McGraw Hill.
- Spiegel, R. (2001). Transformadas de Laplace. México D.F.: Editorial McGraw Hill.
- Zill, G. (1997). Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones. Tercera edición, México D.F.: Grupo Editorial Iberoamérica.

Webgrafía

- http://cb.mty.itesm.mx/ma3002/materiales/ma3002-2-01.pdf
- http://cb.mty.itesm.mx/ma3002/materiales/ma3002-2-03.pdf
- http://datateca.unad.edu.co/contenidos/299010/Modulo-299010.pdf
- http://www.dim.uchile.cl/~rgormaz/calculoavanzado/Matematicas%20Avanzadas%20para%20Ingenieria%20-%20Kreyszig.pdf
- http://yoquieroaprobar.es/_pdf/72001.pdf

Esta obra se terminó de editar en el mes de noviembre
Tipografá Myriad Pro 12 puntos
Bogotá D.C,-Colombia.

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina

MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO