FÍSICA I

Autor: Danilo De Jesús Ariza Agámez

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina

MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Física I / Danilo De Jesús Ariza Agámez, / Bogotá D.C.,
Fundación Universitaria del Área Andina. 2017

978-958-5459-69-4

Catalogación en la fuente Fundación Universitaria del Área Andina (Bogotá).

Edición:
Fondo editorial Areandino
Fundación Universitaria del Área Andina
Calle 71 11-14, Bogotá D.C., Colombia
Tel.: (57-1) 7 42 19 64 ext. 1228
E-mail: publicaciones@areandina.edu.co
http://www.areandina.edu.co

Primera edición: noviembre de 2017

Corrección de estilo, diagramación y edición: Dirección Nacional de Operaciones virtuales
Diseño y compilación electrónica: Dirección Nacional de Investigación

Hecho en Colombia
Made in Colombia

FÍSICA I

Autor: Danilo De Jesús Ariza Agámez

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina
MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Índice

Índice

Unidad 1

Medición y vectores

Física I

Autor: Danilo Ariza

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina
MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Introducción

En esta cartilla correspondiente a la semana 1 del curso de Física se presentan aspectos preliminares requeridos en el estudio de diferentes ramas de la Física. En razón a la alta influencia de la observación y la experimentación en los estudios físicos, se requiere particularmente el establecimiento de estándares que aporten consistencia científica al proceso de medición asociado a las diferentes magnitudes involucradas. En este sentido se da una breve descripción de las diferentes unidades de medidas y el proceso de conversión de unidades entre diferentes sistemas de medida. Además de lo anterior se hace un breve estudio de la temática correspondiente a cantidades escalares y vectoriales, destacando algunos de los principios propios relacionados con las cantidades vectoriales, tales como, representación gráfica de vectores, módulo de un vector, suma de vectores, descomposición y suma de vectores, entre otras, esto dada su importancia en el estudio de otras temáticas del curso. Los diferentes tópicos abordados se acompañan de ejemplos que ilustran la aplicabilidad de los principios estudiados. Al final de la cartilla se presenta un conjunto de situaciones y problemas a resolver, con los cuales se invita al estudiante a que se enfrente a cuestionamientos que pueden ser resueltos a la luz de los temas desarrollados. La comprensión de conceptos y principios, así como la práctica alrededor de ellos, es de vital importancia en el estudio de temáticas posteriores trabajadas en el curso.

Recomendaciones metodológicas

En aras de un adecuado acercamiento al conocimiento puesto en juego a través del desarrollo de la presente lectura, se le recomienda al estudiante, como parte de la estrategia metodológica, realizar la cuidadosa lectura de la presente cartilla, ya que el reto de aprendizaje autónomo al que decidió enfrentarse así lo demanda. En lo que atañe específicamente a los temas aquí propuestos, se recomienda que elabore un esquema resumido de los mismos, particularmente los que se relacionan con magnitudes fundamentales y derivadas de la física, unidades de medida, proceso de conversión de unidades y cantidades vectoriales. En los casos de cálculos presentados en los ejemplos se recomienda que se verifiquen los resultados presentados. Todo lo anterior, además de contribuir a afianzar el conocimiento del tema, le brinda la posibilidad de tomar mayor confianza hacia lo que sigue luego de cada eje temático.

Desarrollo temático

Ideas preliminares

La Física es una ciencia que se enmarca en lo que se conoce como ciencias de la naturaleza, y se encarga del estudio de los principios que rigen el universo.

División de la Física para su estudio

Dada la amplitud y complejidad de los temas que trata la física se divide en seis grandes ramas:

Ramas de la Física	Campo de estudio
Mecánica clásica	Movimiento de cuerpos macroscópicos con velocidades muy pequeñas en comparación a la velocidad de la luz.
Física relativista	Movimiento de cuerpos que se mueven a cualquier velocidad considerando en ella la velocidad de la luz.
Termodinámica	Sistemas en los que se considera el calor y la temperatura.
Electromagnetismo	La electricidad, el magnetismo y los campos electromagnéticos.
Óptica	Situaciones interesadas el comportamiento de la luz.
Mecánica cuántica	Comportamiento de la materia a nivel subatómico.

Tabla 1.
Fuente: Propia.

Los principios de la mecánica clásica y del electromagnetismo han sido fundamentales para las otras ramas de la física. En este curso se estudia parte de los principios de la mecánica.

La medición y las magnitudes fundamentales de la Física

Buena parte de los fundamentos de las ciencias como la Física tienen soporte en la medición asociada a una cantidad o magnitud física, para lo cual se hace necesario el establecimiento de estándares permanentes de tal manera que cualquier medida realizada con base en el estándar tenga el mismo significado para todos en todo momento. El estándar de mayor aceptación en la comunidad científica es el Sistema Internacional de Medidas o SI, en el cual se definen estándares para cantidades físicas, conocidas como magnitudes fundamentales de la ciencia, estas magnitudes fundamentales, así como sus unidades básicas de medidas en el SI se enumeran a continuación.

Magnitud fundamental	Unidad básica de medida
Longitud (L)	Metro
Masa (M)	Kilogramos
Tiempo (t)	Segundo
Temperatura(T)	Kelvin
Carga eléctrica (Q)	Coulomb

Tabla 2.
Fuente: Propia.

De las anteriores magnitudes, en el contexto de la mecánica, las magnitudes fundamentales son la Longitud, la Masa y el Tiempo.

Longitud

Una simple acepción para la longitud es aquella que la define como la distancia entre dos puntos en el espacio. En 1799, en Francia, se estableció el metro como el estándar de medida de longitud, cuya medida correspondía a una diezmillonésima parte de la distancia comprendida entre el Ecuador y el Polo Norte medida sobre el meridiano que pasa por París. En 1960, la longitud del metro se redefinió como la distancia entre dos líneas en una barra de platino–iridio almacena bajo condiciones estables y controladas en Francia. En octubre de 1983, el metro se redefinió como la distancia recorrida por la luz en el vacío durante un tiempo de 1/299 792 458 segundos.

Masa

La masa puede definirse como la cantidad de materia que contiene un cuerpo, en el Sistema Internacional, la unidad fundamental de la masa es el kilogramo (kg), definido en 1887 como la masa de un cilindro de una aleación de platino e iridio conservado en la Oficina Internacional de Pesos y Medidas en Sèvres, Francia. Una copia de este patrón se encuentra en el NIST (Instituto Nacional de Estándares y Tecnología) en Gaithersburg, Maryland.

El Sistema Internacional no es el único estándar de medida, otro sistema de unidades, que aún se usa en los Estados Unidos utiliza el pie (ft), slug y segundo, como unidades de medida de longitud, masa y tiempo respectivamente.

Tiempo

En los años anteriores a 1960 la unidad básica de medida de tiempo se definía en términos de la duración promedio del día solar del año 1900. La unidad fundamental de tiempo en el SI es el segundo. Un segundo se definió entonces como la fracción $\frac{1}{86400}$ del día solar. En 1967 el segundo se redefinió como 9 192 631 770 veces el periodo de vibración de la radiación del átomo de cesio 133**.**

Magnitudes derivadas

A partir de las magnitudes fundamentales se define un conjunto de magnitudes físicas denominadas magnitudes derivadas, estas magnitudes, su significado y las respectivas unidades de medida analizarán en detalle al momento de estudiar la correspondiente temática en las que se encuentran involucradas, sin embargo, a continuación se muestran algunas de ellas.

Magnitud física derivada		**Unidad de medida**
Velocidad	$\left(\frac{L}{t}\right)$	$\left(\frac{Metro}{Segundo}\right)$
Aceleración	$\left(\frac{L}{t^2}\right)$	$\left(\frac{Metro}{Segundo^2}\right)$
Fuerza	$\left(\frac{ML}{t^2}\right)$	$Newton = \left(\frac{Kilogramo.Metro}{Segundo^2}\right)$
Energía	$\left(\frac{ML^2}{t^2}\right)$	$Julio = \left(\frac{Kilogramo.Metro^2}{Segundo^2}\right)$

Tabla 3.
Fuente: Propia.

Factores de conversión

Con mucha frecuencia se presentan situaciones en que las magnitudes están dadas en diferentes unidades, lo que trae la necesidad de realizar la conversión de alguna de ellas. Como base para realizar posteriores conversiones conviene presentar algunas equivalencias.

Equivalencias entre unidades de longitud:

1 Kilometro = 1000 metros
1 Metro = 100 centímetros
1 Metro = 1000 milímetros
1 Milla = 1609 metros
1 Pie = 0,3048 metros = 30,48 cm
1Metro = 39,37 pulgadas

En la carpeta recursos de aprendizaje de esta semana se encuentra un documento que amplía el conjunto de factores de conversión. Para finalizar el tema en la presente cartilla presentamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo: un carro se mueve a una velocidad de 20 metros por segundo, mientras que otro se mueve a la velocidad de 60 kilómetros por hora, ¿Cuál de los dos se mueve más rápido?

Solución:
Tenemos las velocidades $v_1 = 20\, mts/seg$ y $v_2 = 60\, km/hora$. Aquí convertimos la velocidad dada en $km/hora$ a mts/seg, para ello se tiene en cuenta que $1\, km = 1000\, mts$ y $1\, hora = 3600\, seg$, por tanto:

$$60\frac{km}{hora} = 60\frac{1000mts}{3600\, seg} = \frac{60000\, mts}{3600\, seg} = 16{,}66\frac{mts}{seg}.$$

Lo que significa que el vehículo cuya velocidad es de $20\, mts/seg$ se mueve más rápido.

Magnitudes escalares

En el estudio de la física es importante distinguir particularmente dos tipos de cantidades o magnitudes físicas, estas son las magnitudes escalares y magnitudes vectoriales. Una magnitud es escalar si se especifica completamente con su valor numérico y su correspondiente unidad de medida. Entre las magnitudes escalares se tiene la longitud de un cable, la masa de un cuerpo, el tiempo de duración de un hecho cualquiera, la densidad de una sustancia, el volumen y área superficial de un sólido, la temperatura, entre otras. Por ejemplo, al decir que la longitud de un cable es de 12 metros no se requiere más información para tener total claridad sobre el valor de la longitud.

Magnitudes vectoriales

Una magnitud vectorial es toda aquella que para quedar completamente definida requiere que, además de su valor numérico y su correspondiente unidad de medida, se indique su dirección y sentido. Al valor numérico o medida del vector también se le llama módulo. Ejemplo de magnitud vectorial es la velocidad de un cuerpo, en la cual además de indicar que tan rápido se mueve, se debe indicar en qué dirección lo hace, esta dirección está determinada por la recta tangente a la trayectoria del movimiento, mientras que el sentido corresponde a una de las orientaciones de la recta, otro ejemplo de magnitud vectorial es el desplazamiento de un cuerpo desde un punto inicial, además de la distancia desplazada, se debe indicar en qué dirección se da. Otros ejemplos de cantidades vectoriales en el campo de la física son la fuerza, la cantidad de movimiento, el campo eléctrico, el campo magnético, entre otras.

Representación gráfica de magnitudes vectoriales

Una magnitud vectorial se suele representar mediante un segmento dirigido, desde un punto origen, y con una punta de flecha en el otro extremo. La dirección y sentido del segmento está determinada por la dirección y sentido de la cantidad a representar, mientras que su longitud se toma a escala dependiendo la medida a de la cantidad física correspondiente. Resulta de gran utilidad representar gráficamente los vectores en un sistema de coordenadas cartesianas.

La Figura 1a muestra un vector $\hat{\boldsymbol{A}}$ sobre una recta L, el origen del vector es O y el extremo es P y la Figura 1b muestra al vector en un plano cartesiano. Vale la pena señalar que la medida o módulo de un vector $\hat{\boldsymbol{A}}$ se representa mediante $\boldsymbol{A}$ (la letra sin el "gorrito sobre ella).

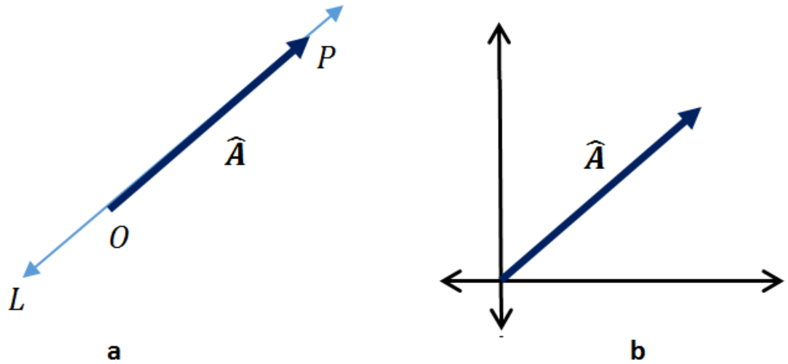


Figura 1ª y 1b. Representación gráfica de vectores
Fuente: Propia.

Igualdad de vectores

Se dice que dos vectores $\hat{\boldsymbol{A}}$ y $\hat{\boldsymbol{B}}$ son iguales si tienen la misma magnitud, o módulo, y la misma dirección y sentido. Los vectores $\hat{\boldsymbol{A}}$ y $\hat{\boldsymbol{B}}$ mostrados en la Figura 2 son iguales.

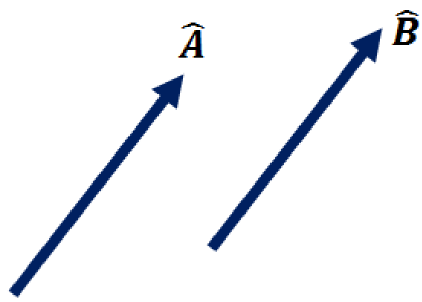


Figura 2. Igualdad de vectores
Fuente: Propia.

Suma y resta de vectores

En el ámbito de las cantidades escalares es claro que las operaciones de suma y resta se realizan de acuerdo a las reglas de la aritmética, por ejemplo, 23 gramos de hierro más 17 gramos de hierro da como resultado 40 gramos de hierro, sin embargo, un desplazamiento de 30 metros, más otro desplazamiento de 40 metros no necesariamente da como resultado un desplazamiento de 70 metros, esto en razón a que en cada desplazamiento se debe considerar la dirección y sentido de cada desplazamiento. El siguiente ejemplo nos permitirá comprender en que consiste la suma o adición de vectores.

Ejemplo: una persona camina 30 metros sobre uno de los lados de un campo rectangular luego gira y camina 40 metros en dirección perpendicular a la anterior.

¿Cuál es el efecto o desplazamiento total medido desde el punto de partida. La Figura 3 ilustra la situación del ejemplo.

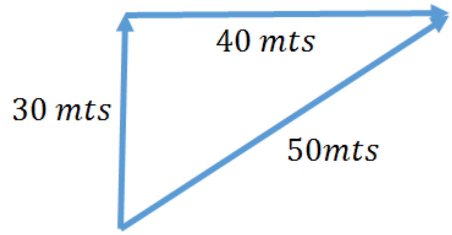


Figura 3. Representación de suma de vectores
Fuente: Propia.

Puesto que los dos recorridos son perpendiculares, la distancia desde el punto de partida hasta el punto de llegada se puede hallar mediante el uso del teorema de Pitágoras a partir de cada uno de los recorridos, obteniéndose:

$$R = \sqrt{(30\ mts)^2 + (40mts)^2} = \sqrt{2500\ mts^2} = 50\ mts$$

Se observa que el vector resultante no es un vector de magnitud 70 mts.

Lo anterior muestra gráficamente que la suma $\hat{\boldsymbol{A}} + \hat{\boldsymbol{B}}$ de dos vectores se puede entender como el efecto final que se logra al ubicar el origen del vector $\hat{\boldsymbol{B}}$ al final del vector $\hat{\boldsymbol{A}}$, conservando su magnitud dirección y sentido, en cuyo caso el vector resultante es el que va desde el origen de $\boldsymbol{A}$ hasta el extremo final de $\hat{\boldsymbol{B}}$, tal como se ilustra en la Figura 4.

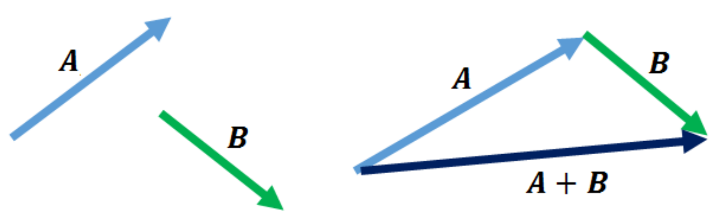


Figura 4. Suma de vectores
Fuente: Propia.

Otro procedimiento válido es hacer coincidir los orígenes de los vectores y construir a partir de ahí un paralelogramo, la diagonal que va desde el origen de los vectores hasta el vértice opuesto del paralelogramo corresponde a la resultante de la suma de los vectores. La Figura 5 ilustra la situación.

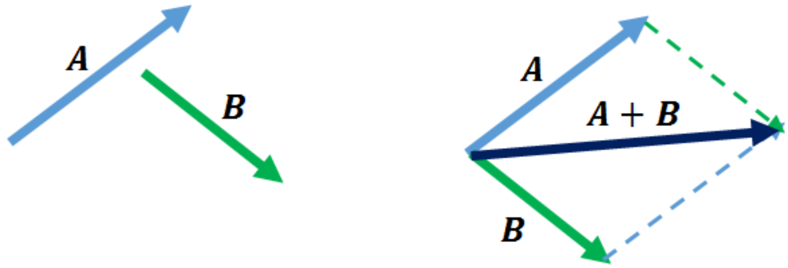


Figura 5. Suma de vectores por el método del paralelogramo
Fuente: Propia.

Opuesto de un vector

El opuesto de un vector $\widehat{\boldsymbol{A}}$, se representa mediante el vector $-\widehat{\boldsymbol{A}}$ y corresponde al vector que tiene la misma magnitud y dirección que $\boldsymbol{A}$, pero con sentido contrario. La siguiente imagen muestra un vector $\widehat{\boldsymbol{A}}$ y su opuesto $-\widehat{\boldsymbol{A}}$

Resta de vectores: se define la resta de vectores $\widehat{\boldsymbol{A}} - \widehat{\boldsymbol{B}}$ como la suma del vector $\boldsymbol{A}$ y el opuesto del vector $\widehat{\boldsymbol{B}}$, es decir $\widehat{\boldsymbol{A}} - \widehat{\boldsymbol{B}} = \widehat{\boldsymbol{A}} + (-\widehat{\boldsymbol{B}})$. Esto significa que se convierte la resta de vectores en una suma de vectores.

Descomposición de vectores

Así como se puede hallar la suma de dos vectores es posible descomponer un vector en dos o más vectores que cuya suma corresponda al vector original. La Figura 6a muestra un vector $\widehat{\boldsymbol{S}}$ y las 1.6.b y c muestran dos casos en los que a partir del vector $\widehat{\boldsymbol{S}}$ se representa dos vectores componentes $\widehat{\boldsymbol{A}}$ y $\widehat{\boldsymbol{B}}$.

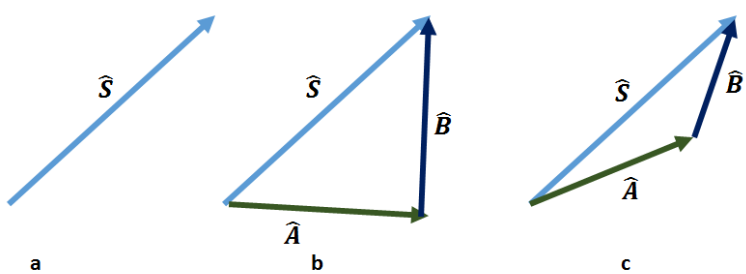


Figura 6. Descomposición de vectores
Fuente: Propia.

Descomposición de vectores en componente rectangulares

Del apartado anterior, fácilmente se puede ver que existen muchísimas formas de descomponer un vector en dos componentes, sin embargo de todas las posibilidades, la que resulta de mayor utilidad en cálculos es aquella en la cual los dos vectores componentes son perpendiculares entre sí, situación que conviene representar en un plano cartesiano. La Figura 7a muestra la descomposición de un vector $\widehat{\boldsymbol{A}}$ en dos componentes rectangulares, un componente $\boldsymbol{A_x}$ sobre el eje X y un componente $\boldsymbol{A_y}$ paralela al eje Y. En virtud de la idea de igualdad de vectores se puede cambiar el vector componente $\boldsymbol{A_y}$ por un vector de igual magnitud, dirección y sentido, pero que se encuentre sobre el eje Y, muchas veces esta forma de representar la descomposición resulta más conveniente.

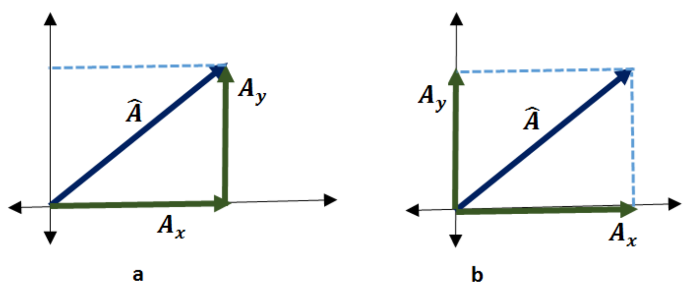


Figura 7. Descomposición de vectores en componentes perpendiculares
Fuente: Propia.

En un plano cartesiano la dirección del vector corresponde al ángulo entre el semieje positivo X y el segmento que representa el vector, tal como se muestra en la figura anterior. Si se tiene conocimiento de la magnitud o módulo del vector $\widehat{\boldsymbol{A}}$, se puede hallar el valor de las componentes rectangulares, tal como se describe a continuación.

El segmento que representa al vector $\widehat{\boldsymbol{A}}$ y sus componentes rectangulares forman un triángulo rectángulo en el cual el vector A es la hipotenusa, mientras que los componentes $\boldsymbol{A_x}$ y $\boldsymbol{A_y}$ son los catetos adyacentes y opuestos al ángulo θ, respectivamente. De la definición de las relaciones trigonométricas se tiene:

$$\boldsymbol{Sen\theta = \frac{A_y}{A}}, \quad \boldsymbol{y} \qquad \boldsymbol{Cos\theta = \frac{A_x}{A}}$$

Por tanto:

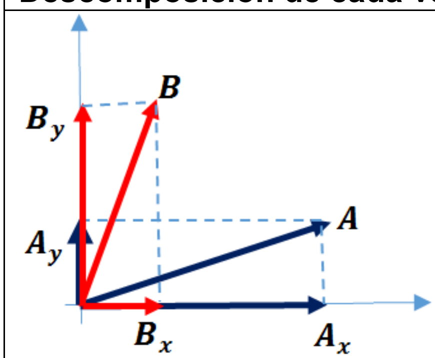
$$\boldsymbol{A = A.Sen\theta \quad y \quad A_x = A.Cos\theta}$$

Suma de vectores por descomposición en componentes perpendiculares

Si se desea hallar analíticamente la suma de dos vectores, de los cuales se conoce su magnitud, dirección y sentido, conviene realizarlo mediante la descomposición en componentes rectangulares de cada uno de ellos, tal como se indica seguidamente.

Dados los vectores $\widehat{\boldsymbol{A}}$ y $\widehat{\boldsymbol{B}}$ definidos por:
Vector $\widehat{\boldsymbol{A}}$: magnitud $\boldsymbol{A}$, y ángulo $\boldsymbol{\alpha}$
Vector $\widehat{\boldsymbol{B}}$: magnitud $\boldsymbol{B}$, y ángulo $\boldsymbol{\beta}$

El procedimiento para hallar la magnitud, dirección y sentido del vector $\widehat{\boldsymbol{R}} = \widehat{\boldsymbol{A}} + \widehat{\boldsymbol{B}}$ es el siguiente:

<table>
<tr><td colspan="2">Descomposición de cada vector</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Descomposición de los vectores $A\ y\ B$:
$\boldsymbol{A_x = A.Cos\alpha = (12)Cos30^o}$
$\boldsymbol{A_x = (12)(0,86) = 10,32}$
$\boldsymbol{A_y = A.Sen\alpha = (12)Sen30^o}$
$\boldsymbol{A_y = (12)(0,5) = 6}$
$\boldsymbol{B_x = B.Cos\beta = (10)Cos60^o}$
$\boldsymbol{B_x = (10)(0,5) = 5}$
$\boldsymbol{B_y = B.Sen\beta = (10)Sen60^o}$
$\boldsymbol{B_y = (10)(0,86) = 8,6}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Suma de las componentes $\boldsymbol{A_x\ con\ B_x}$ y $\boldsymbol{A_y\ con\ B_y}$</td></tr>
</table>

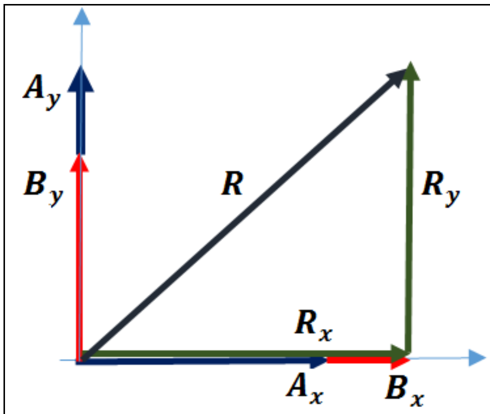
	Componentes del vector resultante R: $\boldsymbol{R_x = A_x + B_x}$ $\boldsymbol{R_x = 10,32 + 5 = 15,32}$ $\boldsymbol{R_y = A_y + B_y}$ $\boldsymbol{R_y = 6 + 8,6 = 14,6}$ Magnitud del vector resultante: $\boldsymbol{R = \sqrt{(R_x)^2 + (R_y)^2}}$ $\boldsymbol{R = \sqrt{(15,32)^2 + (14,6)^2}}$ $\boldsymbol{R = \sqrt{234,7 + 213,16} = \sqrt{447,86}}$ $\boldsymbol{R = 21,16}$ Ángulo que forma el vector R con el semieje X positivo, está dado por: $\boldsymbol{Tan\theta_R = \frac{R_y}{R_x} = \frac{14,6}{15,32} = 0,953}$ Por tanto: $\boldsymbol{\theta_R = Tan^{-1}(0,953) = 43,62^o}$

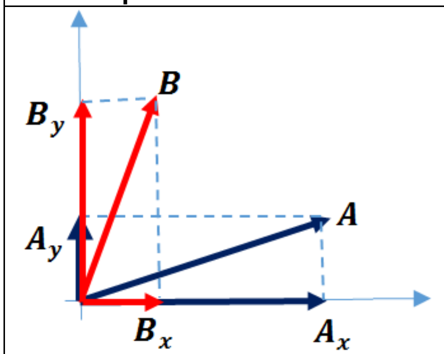
Tabla 4.
Fuente: Propia.

Ejemplo: dados los vectores $\widehat{\boldsymbol{A}}\, y\, \widehat{\boldsymbol{B}}$ definidos por las magnitudes y ángulos proporcionados, hallar la magnitud y dirección del vector suma $\widehat{\boldsymbol{A}} + \widehat{\boldsymbol{B}}$.

Vector A: magnitud $\boldsymbol{A = 12}$, y ángulo $\boldsymbol{\alpha = 30^o}$
Vector B: magnitud $\boldsymbol{B = 10}$, y ángulo $\boldsymbol{\beta = 60^o}$

Solución: A continuación se presenta los cálculos asociados al procedimiento de solución tanto de manera gráfica como analítica.

<table>
<tr><td colspan="2">Descomposición de cada vector</td></tr>
<tr><td>



</td><td>

Descomposición de los vectores A y B:

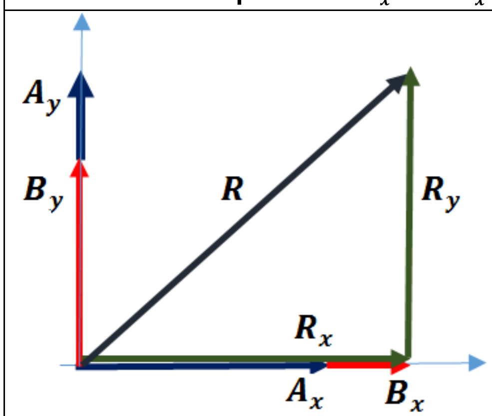
$$A_x = A.Cos\alpha = (12)Cos30^o$$
$$A_x = (12)(0,86) = 10,32$$

$$A_y = A.Sen\alpha = (12)Sen30^o$$
$$A_y = (12)(0,5) = 6$$

$$B_x = B.Cos\beta = (10)Cos60^o$$
$$B_x = (10)(0,5) = 5$$

$$B_y = B.Sen\beta = (10)Sen60^o$$
$$B_y = (10)(0,86) = 8,6$$

</td></tr>
<tr><td colspan="2">Suma de las componentes $A_x\ con\ B_x$ y $A_y\ con\ B_y$</td></tr>
<tr><td>



</td><td>

Componentes del vector resultante R:

$$R_x = A_x + B_x$$
$$R_x = 10,32 + 5 = 15,32$$

$$R_y = A_y + B_y$$
$$R_y = 6 + 8,6 = 14,6$$

Magnitud del vector resultante:

$$R = \sqrt{(R_x)^2 + (R_y)^2}$$
$$R = \sqrt{(15,32)^2 + (14,6)^2}$$
$$R = \sqrt{234,7 + 213,16} = \sqrt{447,86}$$
$$R = 21,16$$

Ángulo que forma el vector R con el semieje X positivo, está dado por:

$$Tan\theta_R = \frac{R_y}{R_x} = \frac{14,6}{15,32} = 0,953$$

Por tanto:

$$\theta_R = Tan^{-1}(0,953) = 43,62^o$$

</td></tr>
</table>

Tabla 5.
Fuente: Propia.

Vectores unitarios

Los vectores se pueden expresar en términos de vectores cuya magnitud es 1 y orientados en el sentido de los ejes coordenados, estos vectores reciben el nombre de vectores unitarios. En el espacio tridimensional, los vectores unitarios en las direcciones $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ son respectivamente $\hat{\boldsymbol{\imath}}, \hat{\boldsymbol{\jmath}}, \widehat{\boldsymbol{k}}$. Claramente estos vectores unitarios son mutuamente perpendiculares.

Si un vector $\widehat{\boldsymbol{A}}$ tiene componentes $\boldsymbol{A_x}$, $\boldsymbol{A_y}, \boldsymbol{A_z}$, se puede expresar en términos de sus los vectores unitarios mediante:

$$\widehat{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A_x}\hat{\boldsymbol{\imath}} + \boldsymbol{A_y}\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \boldsymbol{A_z}\widehat{\boldsymbol{k}}$$

Ejemplo: El vector resultante $\widehat{\boldsymbol{R}}$ del ejemplo anterior tiene componentes $\boldsymbol{R_x} = \mathbf{15,32}$ y $\boldsymbol{R_y} = \mathbf{14,6}$, por tanto, en términos de los vectores unitarios en las direcciones $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ se puede expresar mediante:

$$\widehat{\boldsymbol{R}} = \mathbf{15,32}\hat{\boldsymbol{\imath}} + \mathbf{14,6}\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

Producto escalar de dos vectores

El producto escalar de los vectores $\widehat{\boldsymbol{A}}$ y $\widehat{\boldsymbol{B}}$ es una cantidad escalar cuyo valor corresponde al de las magnitudes de los dos vectores y el coseno del ángulo comprendido entre ellos, es decir, dados dos vectores $\widehat{\boldsymbol{A}}$ y $\widehat{\boldsymbol{B}}$ de magnitudes $\boldsymbol{A}$ **y** $\boldsymbol{B}$, respectivamente, si el ángulo entre ellos es $\boldsymbol{\theta}$ el producto escalar de ellos, también conocido como producto punto está dado por:

$$\widehat{\boldsymbol{A}}.\widehat{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{ABcos\theta}$$

Unidad 1

Cinemática unidimensional

Física I

Autor: Danilo Ariza

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina

MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Introducción

En la cartilla correspondiente a la semana 1 de este curso de Física se trató con elementos introductorios requeridos para abordar adecuadamente el estudio, es así como se pudo ver cuáles son las diferentes áreas que conforman esta ciencia, aspectos concernientes a las magnitudes involucradas en su estudio y algunos de los elementos fundamentales de las cantidades vectoriales. Entre las ramas de la Física encontramos la Mecánica, de la cual se enunció que se encarga del estudio del Movimiento de cuerpos macroscópicos con velocidades muy pequeñas en comparación a la velocidad de la luz, pero se ha de tener en cuenta que la Mecánica a su vez se divide en otras tres ramas, la Cinemática, la Dinámica y la Estática.

En esta cartilla iniciamos el estudio de la Cinemática, entendida como la rama de la Mecánica que estudia el movimiento sin considerar la masa del cuerpo. Se considera aquí únicamente el caso del movimiento en una dimensión. En el desarrollo de los contenidos haremos uso de las magnitudes de Longitud y tiempo tratadas en la cartilla de la semana 1. La comprensión de los conceptos y principios de la Cinemática unidimensional, así como el análisis y solución de situaciones con base en ellos, ya que es de vital importancia en el estudio de temáticas posteriores y una vía para cumplir el compromiso de formación académica.

Recomendaciones metodológicas

El estudio de la Cinemática, como parte de la Física, demanda la comprensión clara de los principios que la fundamentan, razón por la cual se recomienda al estudiante, como parte de la estrategia metodológica, realizar la cuidadosa lectura de la presente cartilla. Como elemento de afianzamiento de la estructura conceptual resulta conveniente la elaboración de un esquema resumido de los mismos, bien sea a través de un mapa mental, un mapa conceptual, un cuadro sinóptico o cualquier elemento de síntesis. Ya que el desarrollo se acompaña de ejemplos ilustrativos de la aplicación de las temáticas, se recomienda que el estudiante verifique los cálculos presentados. También se recomienda acudir a los diferentes recursos propuestos en plataforma con el fin de lograr un mayor afianzamiento.

Desarrollo temático

Generalidades de la Cinemática

La Física para su estudio se divide en varias ramas, entre la cuales se encuentra la Mecánica, la que tiene como oficio el estudio del movimiento de los cuerpos, pero la mecánica a su vez se divide en diferentes áreas, una de ellas es la Cinemática. La Cinemática es la parte de la Mecánica que estudia el movimiento de los cuerpos sin tomar en consideración la causa que lo produce ni la masa del cuerpo que se mueve, es decir, a la luz de los principios de la Cinemática no importa si se estudia el movimiento de una pelota de golf, de un balón de fútbol, de un carro o incluso de un planeta. Según este orden de ideas no resulta descabellado suponer que los cuerpos son puntos o partículas, no porque sean pequeños, sino porque no interesa su tamaño ni forma así como tampoco las interacciones con otros cuerpos.

Cinemática unidimensional

Esta cartilla se limita a la cinemática en una dimensión, o movimiento de traslación de un cuerpo sobre una trayectoria rectilínea. En aras de describir apropiadamente el movimiento de un cuerpo o partícula es necesario hacerlo a partir de un conjunto de variables que lo caractericen, entre la que se encuentran la posición, el desplazamiento, la velocidad y la aceleración. A continuación se presentan detalles de estas variables.

Posición

La **posición** de un cuerpo hace referencia a la ubicación del mismo en relación a un punto de un sistema de referencia arbitrario, el cual puede ser el origen de un sistema de coordenadas. La posición de un cuerpo es una función dependiente del tiempo, esto indica que, según el tipo de movimiento que realice el cuerpo, la función posición indicará en qué lugar estará ubicado el cuerpo en un instante dado. La Figura 2 muestra un vehículo sobre una carretera recta, arbitrariamente se ha elegido un árbol como origen del sistema de referencia, nótese según esto que la posición del cuerpo puede corresponder a valores negativos o positivos según si el vehículo se encuentra a la derecha o izquierda del origen.

Figura 1. Un sistema de referencia para el movimiento de un cuerpo
Fuente: http://i.ytimg.com/vi/18F3bqyWBqk/maxresdefault.jpg

Supongamos que en nuestro interés estudiar el movimiento del vehículo de la figura 2.1 realizamos registros de su posición en diferentes instantes, con lo cual obtenemos la siguiente tabla de valores de tiempo y posición.

$t\ (seg)$	0	10	20
$X(t)\ \ (Mts)$	-40	15	-10

Tabla 1.
Fuente: Propia.

Se considera que el tiempo $t = 0$ corresponde al instante en que se inicia el cronómetro, momento en el carro no está en el origen (no es necesario), sino que se encuentra en la posición $X = -40\, mts$.
¿Qué significa que la posición sea de −40 *m* en *t* = 0 *s*? Significa que el carro se encuentra a 40 metros del árbol, que sirve como origen del sistema de referencia, y el signo menos indica que está la izquierda. El carácter vectorial de esta magnitud lo lleva el signo. El hecho que 10 *seg* después la posición sea 15 *mts* informa que el móvil se encuentra a 15 *m* a la derecha del origen, se debe aclarar que la magnitud física posición no implica movimiento; un cuerpo que este quieto tiene una posición en el espacio, aunque nunca se mueva en relación a un sistema de referencia. La primera medida del movimiento se llama desplazamiento.

Desplazamiento

El desplazamiento es una magnitud que mide el cambio en la posición de un cuerpo, si la función posición de un cuerpo se denota por $\widehat{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{t})$**,** el desplazamiento entre dos instantes $\boldsymbol{t_o}, \boldsymbol{t_f}$ denota mediante $\Delta\widehat{\boldsymbol{X}}$, siendo $\boldsymbol{t_o}$ el instante inicial y $\boldsymbol{t_f}$ el instante final. En este caso el desplazamiento $\Delta \boldsymbol{X}$ está dado por:

$$\Delta\widehat{\boldsymbol{X}} = \widehat{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{t_f}) - \widehat{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{t_o}) = \widehat{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{f}} - \widehat{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{o}} \qquad (\mathbf{2.1})$$

Es decir, el vector desplazamiento corresponde a la diferencia de los vectores posición antes señalada.

Ejemplo 1:

$t\ (seg)$	0	10	20
$X(t)\ \ (Mts)$	-40	15	-10

Tabla 2.
Fuente: Propia.

Con base en la tabla hallar los desplazamientos correspondientes a:

a) $t_o = 0; \quad t_f = 10\ seg.$
b) $t_o = 10\ seg; \quad t_f = 20\ seg$
c) $t_o = 0; \quad t_f = 20\ seg$

Solución:

$$\Delta\widehat{\boldsymbol{X}} = \widehat{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{t_f}) - \widehat{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{t_o}) = \widehat{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{f}} - \widehat{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{o}}$$

La tabla muestra que $\widehat{\boldsymbol{X}}(\mathbf{0}) = -\mathbf{40}\ \boldsymbol{mts}$, $\widehat{\boldsymbol{X}}(\mathbf{10}) = \mathbf{15}\ \boldsymbol{mts}$, $\widehat{\boldsymbol{X}}(\mathbf{20}) = -\mathbf{10}\ \boldsymbol{mts}$, por tanto:

a) Desplazamiento entre $\boldsymbol{t_o} = \mathbf{0};\ \boldsymbol{t_f} = \mathbf{10}$:
b)

$$\Delta\widehat{\boldsymbol{X}} = \widehat{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{t_f}) - \widehat{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{t_o}) = \widehat{\boldsymbol{X}}(\mathbf{10}) - \widehat{\boldsymbol{X}}(\mathbf{0}) = \mathbf{15}\ \boldsymbol{mts} - (-\mathbf{40}\ \boldsymbol{mts})$$

$$\Delta\widehat{\boldsymbol{X}} = \mathbf{15}\ \boldsymbol{mts} + \mathbf{40}\boldsymbol{mts} = \mathbf{55}\boldsymbol{mst}.$$

El resultado es un desplazamiento de 55 metros hacia la derecha.

c) Desplazamiento entre $\boldsymbol{t_o = 10}$; $\boldsymbol{t_f = 20}$

$$\Delta\widehat{\boldsymbol{X}} = \widehat{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{t_f}) - \widehat{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{t_o}) = \widehat{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{20}) - \widehat{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{10}) = (-\boldsymbol{10\ mts}) - \boldsymbol{15\ mts}$$

$$\Delta\widehat{\boldsymbol{X}} = -\boldsymbol{10mts} - \boldsymbol{15\ mts} = -\boldsymbol{25mts}$$

El resultado es un desplazamiento de 25 metros hacia la izquierda.

d) Desplazamiento entre $\boldsymbol{t_o = 0}$; $\boldsymbol{t_f = 20}$

$$\Delta\widehat{\boldsymbol{X}} = \widehat{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{t_f}) - \widehat{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{t_o}) = \widehat{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{20}) - \widehat{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{0}) = -\boldsymbol{10\ mts} - (-\boldsymbol{40\ mts})$$

$$\Delta\widehat{\boldsymbol{X}} = -\boldsymbol{10\ mts} + \boldsymbol{40mts} = \boldsymbol{30mts}$$

El resultado es un desplazamiento de 30 metros hacia la derecha.

Distancia recorrida

De forma intuitiva se puede interpretar la distancia recorrida como la longitud de la trayectoria seguida para realizar un desplazamiento.

Ejemplo 2:

Hallar la distancia recorrida en cada uno de los tres intervalos del ejemplo anterior asumiendo que en cada uno de ellos el carro se movía en el mismo sentido.

Solución:

a) Si el carro siempre se movió hacia la derecha, debió recorrer una distancia de 55 metros para llegar del punto inicial $\mathrm{X}(0) = -40\ \mathrm{mts}$ al punto final $\mathrm{X}(10) = 15\ \mathrm{mts}$

b) Para desplazarse del punto inicial $X(10) = 15\,mts$ al punto final $X(20) = -10\,mts,$ el carro debió recorrer una distancia de 25 metros, aunque es hacia la izquierda o sentido negativo, la distancia recorrida es un número positivo.

c) La distancia recorrida entre $\mathrm{t_o} = 0 \text{ y } \mathrm{t_f} = 20$ corresponde a un desplazamiento compuesto por dos desplazamientos en sentido contrario, el desplazamiento entre $\mathrm{t_o} = 0 \text{ y } \mathrm{t_f} = 10 \text{ seg}$ hacia la derecha, en el cual recorre una distancia de 55 metros, y el desplazamiento entre $\mathrm{t_o} = 10 \text{ y } \mathrm{t_f} = 20$ hacia la izquierda, en el cual recorre una distancia de 25 metros, la distancia total recorrida en este desplazamiento es de 80 metros.

Debemos tener presente que solo contamos con la información de la tabla, y por lo que se podría cuestionar si las distancias recorridas son las señaladas ya que no se tiene información del movimiento en tiempos intermedios.

Velocidad

Según el ejemplo anterior el carro pasa de la posición $X = -40$ a la posición $X = 15$ empleando un tiempo de 10 segundos, recorriendo una distancia de 55 *m*. Otro cuerpo podría realizar el mismo desplazamiento pero muy probablemente empleando un tiempo diferente. Para caracterizar estas situaciones diferentes en las que se da el mismo desplazamiento se requieren magnitudes que involucren el desplazamiento, la distancia recorrida y el tiempo necesario para realizar el desplazamiento, estas magnitudes son la velocidad media y la rapidez media.
La Velocidad media $\bar{v}$, es la magnitud física que mide la rapidez con que una partícula realiza un desplazamiento, se define operacionalmente mediante la siguiente expresión:

$$\boldsymbol{\hat{v} = \frac{Desplazamiento}{tiempo\ empleado} = \frac{\Delta \hat{X}}{\Delta t}}$$

$$\boldsymbol{\bar{v} = \frac{\hat{X}(t_f) - \hat{X}(t_i)}{t_f - t_i}} \qquad (\mathbf{2.2})$$

La rapidez media $\bar{v}$ mide la rapidez con que una partícula recorre una distancia, se calcula mediante la expresión:

$$\boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{Distancia\,recorrida}}{\boldsymbol{tiempo\ empleado}} = \frac{\boldsymbol{s}}{\boldsymbol{t_f - t_i}} \qquad (\mathbf{2.3})$$

En el Sistema Internacional la unidad de medida para la velocidad y la rapidez media es el $metro/segundo$. Es usual emplear el término velocidad media para referirse a la rapidez media, sin embargo el contexto de la situación puede dar claridad de lo que se habla.

Velocidad instantánea

Anteriormente hemos hecho referencia a la velocidad media, la cual se puede calcular en intervalos arbitrarios de tiempo. En el ejemplo propuesto hemos calculado la velocidad media y la rapidez media de un carro en tres intervalos diferentes, sin tener información de su ubicación en instantes intermedios. Para tener una mejor descripción del movimiento se podría observar en intervalos de tiempo mucho más pequeños, por ejemplo, medir la posición del cuerpo cada segundo y, aunque se obtiene una tabla de valores mucho más grande, contaríamos con detalles más precisos del movimiento. Sin embargo, aún se puede alegar que no se tiene conocimiento del movimiento entre cada par de segundos, lo que llevaría a considerar indefinidamente intervalos cada vez más pequeños, lo que conduce a una situación límite en la cual el intervalo de tiempo se debe tomar tan pequeño como se quiera, es decir se deben tomar intervalos de tiempo que se acercan o tienden a cero, lo que permite definir la velocidad instantánea de la siguiente manera:

La velocidad instantánea v de una partícula es una magnitud física que mide la rapidez con que cambia la posición $X(t)$ de un cuerpo cuando el intervalo de tiempo de observación tiende a cero. Operacionalmente la velocidad instantánea se define mediante:

$$\hat{\boldsymbol{v}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \hat{\boldsymbol{X}}}{\Delta \boldsymbol{t}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\hat{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{t_f}) - \hat{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{t_i})}{\boldsymbol{t_f - t_i}} = \frac{\boldsymbol{d}\hat{\boldsymbol{X}}}{\boldsymbol{dt}} \qquad (\mathbf{2.4})$$

En cálculo diferencial este límite se conoce como derivada de la función X, si se tiene claro que la posición es una función del tiempo, se puede ver que la velocidad de un cuerpo en un instante dado corresponde a la derivada de la función posición en ese instante.

Movimiento rectilíneo uniforme

La característica fundamental del movimiento uniforme es el valor constante de la velocidad, es decir, en cada instante la velocidad tiene el mismo valor. Se puede decir que en un movimiento uniforme, un cuerpo recorre distancia iguales en tiempos iguales.

Ejemplo 3:

Se sabe que un cuerpo realiza un movimiento uniforme, algunos de los valores posición tiempo son los siguientes:

$t\ (seg)$	0	1	3	4	6	7
$X(t)(ms/seg$	40	60	100	120	160	180

Tabla 3.
Fuente: Propia.

Realicemos cálculos de cuánta distancia recorre en un segundo, pero considerando diferentes intervalos de tiempo.

Entre $t = 0\ y\ t = 1$: recorre una distancia de 20 metros.
Entre $t = 1\ y\ t = 3$: recorre una distancia de 40 metros, es decir 20 metros por segundo.
Entre $t = 3\ y\ t = 4$: recorre una distancia de 20 metros.
Entre $t = 4\ y\ t = 6$: recorre una distancia de 40 metros, es decir 20 metros por segundo.
Entre $t = 3\ y\ t = 7$: recorre una distancia de 80 metros, es decir 20 metros por segundo.
Observamos entonces que cada segundo el cuerpo recorre una distancia de 20 metros, también podemos ver que este valor corresponde a la velocidad constante del movimiento, se tiene entonces que en un tiempo de duración t el cuerpo recorre una distancia dada por:

$$\boldsymbol{d = \left(20\frac{mts}{seg}\right).t}$$

La posición del cuerpo al cabo de $t\,seg$ estará dada por:

$$\widehat{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{0}) + \left(\boldsymbol{20}\frac{\boldsymbol{mts}}{\boldsymbol{seg}}\right).\boldsymbol{t}$$

Si se tiene claridad de los instantes inicial y final así como de las unidades de medida, se puede abreviar la expresión y escribir:

$$\widehat{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{t}} = \widehat{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{0}} + \boldsymbol{20t}$$

En general, si un cuerpo realiza un movimiento rectilíneo uniforme con velocidad $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{v}$ y en el instante $t = 0$ se encuentra en la posición $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{X}_{\boldsymbol{0},}$ su posición $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{X}_{\boldsymbol{t}}$ está dada por:

$$\widehat{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{t}) = \widehat{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{0}) + \boldsymbol{vt} \qquad \boldsymbol{o} \quad \widehat{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{t}} = \widehat{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{0},} + \widehat{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{t} \qquad (\boldsymbol{2.5})$$

La distancia recorrida en un tiempo t a una velocidad $\widehat{\boldsymbol{v}}$ está dada por:

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{v}.\boldsymbol{t} \qquad (\boldsymbol{2.6})$$

Representación gráfica del movimiento rectilíneo uniforme

Al hablar de representación gráfica del movimiento uniforme nos referimos a modelos matemáticos que lo describen, existen dos formas de representación gráfica del movimiento uniforme, el diagrama posición versus tiempo y el diagrama velocidad versus tiempo, ambas se realizan sobre un diagrama cartesiano. La siguiente imagen muestra los diagramas correspondientes al movimiento del ejemplo anterior.

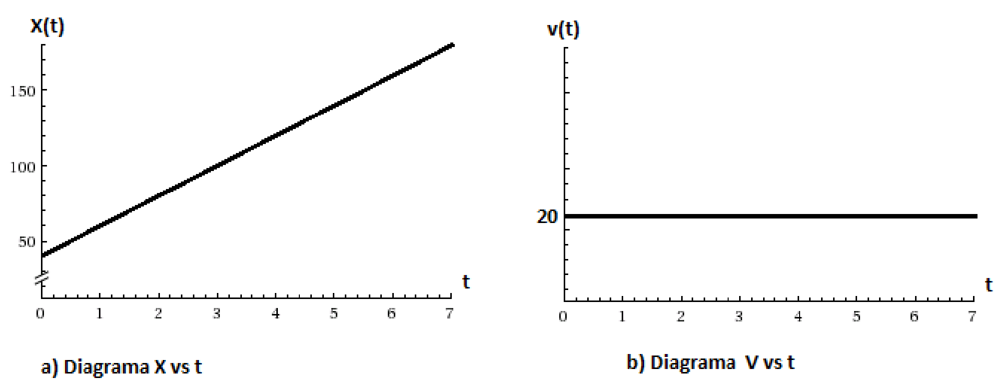


Figura 2. Ejemplo de gráficos del movimiento rectilíneo uniforme
Fuente: Propia.

Como se puede observar en este caso la gráfica x-t corresponde a una línea recta cuya inclinación o pendiente corresponde al valor de la velocidad, mientras que la gráfica v-t es una línea recta horizontal, indicando que no hay variación de la velocidad.

Movimiento a velocidad variable

Es claro que en su movimiento, un cuerpo puede cambiar de velocidad. Este tipo de movimiento se conoce como movimiento variado. Dado que la variabilidad se refiere al cambio de la velocidad, resulta necesario definir una magnitud que mida el cambio de velocidad en el tiempo, tal magnitud se conoce como aceleración.

Aceleración media

Es muy frecuente experimentar un cambio de velocidad o de rapidez, por ejemplo cuando un carro se pone en marcha su velocidad cambia de cero a algún valor mayor que cero o cuando debe detenerse vamos notando la disminución de la rapidez, estos cambios de velocidad no se producen de manera instantánea, sino que requieren de cierto tiempo para producirse, esto permite definir la aceleración como el cambio de velocidad respecto al tiempo, puede entenderse la aceleración como el ritmo de cambio de la velocidad. Entre dos instantes en los que se da el tiempo y el ritmo de cambio de velocidad puede tener diferentes valores, es posible que aumente bruscamente, en cuyo caso tendremos un valor grande de la aceleración, puede también aumentar o disminuir suavemente. Un caso importante de aceleración es la aceleración media, en la cual se mide el cambio de velocidad entre dos instantes dados, la aceleración media se halla a partir de la siguiente expresión.

$$\boldsymbol{\overline{a}} = \frac{\boldsymbol{\hat{v}(t_f) - \hat{v}(t_i)}}{\boldsymbol{t_f - t_i}} \qquad (\mathbf{2.7})$$

Ejemplo 4:

Un cuerpo tiene una velocidad cuya magnitud es de 10 mts/seg en t = 5 seg y 20 mts/seg 10 segundos después ¿Cuál es la magnitud de la aceleración media?

Solución:

La diferencia de tiempo es: $t_f - t_i = 1\,10\text{ seg} - 5\text{ seg} = 5\text{ seg}$ mientras que la diferencia de velocidades es $\hat{v}(t_f) - \hat{v}(t_i) = 20\frac{\text{mts}}{\text{seg}} - 10\frac{\text{mts}}{\text{seg}} = 10\text{ mts/seg}$ por tanto la aceleración media es:

$$\bar{a} = \frac{\hat{v}(t_f) - \hat{v}(t_i)}{t_f - t_i} = \frac{10\,mts/seg}{5\,seg} = 2\,mts/seg^2$$

Lo que significa que en promedio la velocidad del cuerpo se incrementa en 2 mts/seg.

Aceleración instantánea

El cálculo de la aceleración media en intervalos de tiempo relativamente grandes nos coloca nuevamente en la situación de desconocimiento de los cambios de velocidad en instantes intermedios, un razonamiento similar al realizado para establecer la definición operacional de velocidad instantánea nos lleva a definir la aceleración instantánea como:

$$\hat{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \hat{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\hat{v}(t_f) - \hat{v}(t_i)}{t_f - t_i} = \frac{d\hat{v}}{dt} \qquad (2.8)$$

Lo que indica que la aceleración instantánea corresponde a la derivada de la función velocidad en ese instante, teniendo en cuenta principios de cálculo diferencial, se tiene entonces que en un instante t específico, la aceleración corresponde a la pendiente de la recta tangente a la curva de la gráfica V vs. t.

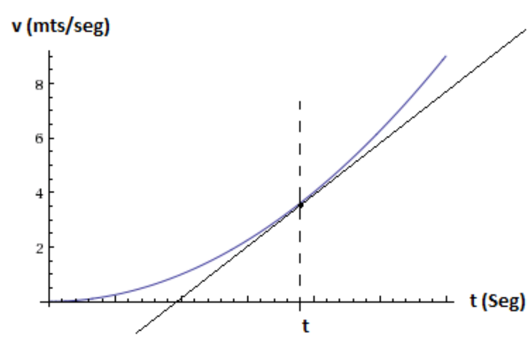


Figura 3. Aceleración $a(t)$ =pendiente de la tangente en t
Fuente: Propia.

Puesto que el valor de la pendiente de una recta puede ser positivo o negativo, la aceleración de un cuerpo puede tener también valores positivos o negativos. Un valor positivo de la aceleración indica que la velocidad es creciente, mientras que un valor negativo, indica que es decreciente, esta situación particular en la que la velocidad de un cuerpo disminuye se conoce como movimiento desacelerado.

Movimiento uniformemente acelerado (MUA)

El movimiento uniformemente acelerado se caracteriza por presentar el mismo valor de la aceleración en todo momento, es decir, el ritmo de cambio de la velocidad es constante, además como la aceleración tiene el mismo valor en todo momento al calcular su promedio en un intervalo dado, este corresponde al mismo valor de la aceleración en cualquier instante. Esto significa que si en la expresión que define la aceleración media se sustituye $\bar{a}$ (aceleración media) por a (aceleración instantánea) y se toma el instante inicial t_i como $t = 0$ y el instante t_f como t, encontramos una de las expresiones fundamentales que caracterizan al movimiento uniformemente acelerado, esto se presenta a continuación.

$$\boldsymbol{\bar{a}} = \frac{\boldsymbol{\hat{v}(t_f) - \hat{v}(t_i)}}{\boldsymbol{t_f - t_i}} \; (definición\ operacional\ de\ aceleración\ media)$$

$$\hat{a} = \frac{\hat{v}(t_f) - \hat{v}(0)}{t - 0} = \frac{\hat{v}(t_f) - \hat{v}(0)}{t}$$

Entonces:

$$\hat{a} = \frac{\hat{v}(t_f) - \hat{v}(0)}{t}$$

$$\hat{a}t = \hat{v}(t_f) - \hat{v}(0)$$

De donde se deduce que:

$$\boldsymbol{\hat{v}(t) = \hat{v}(0) + \hat{a}t} \qquad \textbf{(2.9)}$$

La forma escalar de la anterior ecuación es:

$$\boldsymbol{v(t) = v(0) + at} \qquad \textbf{(2.10)}$$

La anterior expresión permite hallar la velocidad, en cualquier instante t, de un cuerpo en movimiento uniformemente acelerado si se conoce la velocidad inicial del cuero (velocidad en el instante $t = 0$) y la aceleración del movimiento. La expresión también muestra que la velocidad depende linealmente del tiempo, lo que indica que la representación cartesiana del movimiento uniformemente acelerado en un diagrama V vs t es una línea recta.

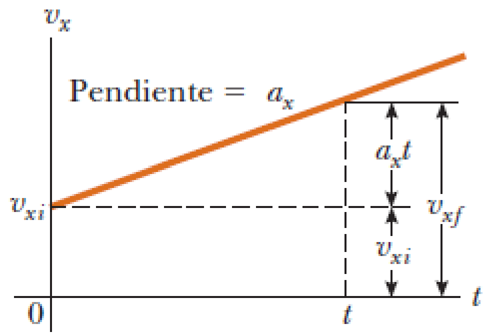


Figura 4. Representación gráfica de un movimiento uniformemente acelerado
Fuente: Propia.

Dada la variación lineal en el tiempo de la velocidad en un MUA, la velocidad media se puede expresar como la media aritmética de dos valores específicos de la velocidad instantánea $(v(t) - v_o)$, es decir:

$$\bar{v} = \frac{v(t) + v_o}{2}$$

Pero también es claro que la velocidad media corresponde a:

$$\bar{v} = \frac{\hat{X}(t) - \hat{X}_o}{t}$$

Entonces, al igualar las dos expresiones anteriores, encontramos:

$$\frac{\hat{X}(t) - \hat{X}_o}{t} = \frac{\hat{v}(t) + \hat{v}_o}{2}$$

$$\hat{X}(t) - \hat{X}_o = \frac{[\hat{v}(t) + \hat{v}_o]t}{2}$$

$$\boldsymbol{\hat{X}(t) = \hat{X}_o + \frac{[\hat{v}(t) + \hat{v}_o]t}{2}} \qquad (\mathbf{2.11})$$

Si lo que nos interesa es la distancia recorrida $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{t})$ en un tiempo t, desde la posición inicial, se tiene la expresión:

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{t}) = \frac{[\boldsymbol{v}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{v_o}]\boldsymbol{t}}{\mathbf{2}} \qquad (\mathbf{2.12})$$

Puesto que $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{v}(\mathbf{0}) + \boldsymbol{at}$ podemos remplazarla en $(\mathbf{2.11})$ con lo que encontramos

$$X(t) = X_o + \frac{[v_0 + at \ + v_0]t}{2} = X_0 + \frac{[2v_0 + at\ ]t}{2} = X_0 + \frac{2v_0 t}{2} + \frac{at.t}{2}$$

$$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{X_0} + \boldsymbol{v_0 t} + \frac{\boldsymbol{at^2}}{\mathbf{2}} \qquad (\mathbf{2.13})$$

Mediante el uso de la anterior expresión se puede hallar la posición, en un instante t, si se conoce la posición inicial X_0, la velocidad v_0 en el instante $t = 0$ y el valor de la aceleración a.

La fórmula análoga para la distancia recorrida es:

$$\boldsymbol{s}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{v_0 t} + \frac{\boldsymbol{at^2}}{\mathbf{2}} \qquad (\mathbf{2.14})$$

Al despejar la variable t de la expresión $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{v}(\mathbf{0}) + \boldsymbol{at}$ se obtiene:

$$\boldsymbol{t} = \frac{\boldsymbol{v}(\boldsymbol{t}) - \boldsymbol{v}(\mathbf{0})}{\boldsymbol{a}}$$

La expresión obtenida para t se sustituye en $(\mathbf{2.13})$ se encuentra**:**

$$X(t) = X_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2} = X_0 + v_0\left(\frac{v(t) - v_0}{a}\right) + \frac{a}{2}\left(\frac{v(t) - v_0}{a}\right)^2$$

$$X(t) = X_0 + \left(\frac{v_0.v(t) - v_0.v_0}{a}\right) + \frac{a}{2}\left(\frac{v^2(t) - 2v(t)v_0 + v_0^2}{a^2}\right)$$

$$X(t) = X_0 + \left(\frac{v_0.v(t) - v_0^2}{a}\right) + \left(\frac{v^2(t) - 2v(t)v_0 + v_0^2}{2a}\right)$$

$$X(t) = X_0 + \frac{2v_0.v(t) - 2v_0^2 + v^2(t) - 2v_0 v(t) + v_0^2}{2a}$$

$$X(t) = X_0 + \frac{-v_0^2 + v^2(t)}{2a}$$

Ecuación que se puede escribir como:

$$\boldsymbol{v^2(t) = v_0^2 + 2a[X(t) - X_0]} \qquad (\mathbf{2.15})$$

La fórmula análoga en términos de la distancia recorrida es:

$$\boldsymbol{S(t) = \frac{-v_0^2 + v^2(t)}{2a}}$$

La que se puede reescribir como:

$$\boldsymbol{v^2(t) = v_0^2 + 2a.S(t)} \qquad (\mathbf{2.16})$$

Nos permitimos resumir estas fórmulas en la siguiente tabla

Ecuaciones características del movimiento uniformemente acelerado			
$\boldsymbol{\hat{v}(t) = \hat{v}(0) + \hat{a}t}$	$(\mathbf{2.9})$	$\boldsymbol{v(t) = v(0) + at}$	$(\mathbf{2.10})$
$\boldsymbol{\hat{X}(t) = \hat{X}_o + \frac{[\hat{v}(t) + \hat{v}_o]t}{2}}$	$(\mathbf{2.11})$	$\boldsymbol{S(t) = \frac{[v(t) + v_o]t}{2}}$	$(\mathbf{2.12})$
$\boldsymbol{X(t) = X_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}}$	$(\mathbf{2.13})$	$\boldsymbol{S(t) = v_0 t + \frac{at^2}{2}}$	$(\mathbf{2.14})$
$\boldsymbol{v^2(t) = v_0^2 + 2a[X(t) - X_0]}$	$(\mathbf{2.15})$	$\boldsymbol{v^2(t) = v_0^2 + 2a.S(t)}$	$(\mathbf{2.16})$

Tabla 4.
Fuente: Propia.

Ejemplo 5:

Un motociclista que viaja ala este cruza una pequeña ciudad de Iowa y acelera apenas pasa el letrero que marca el limite de la ciudad (Figura 5) su aceleracion constante es de $4{,}0 mts/seg^2$. En $t = 0$ está a $5\,m$ al Este del letrero moviéndose al Este a $15\,mts/seg$ a) calcule su posicion y velocidad en $t\ =\ 2\,s$. b) ¿Dónde está el motociclista cuando su velocidad es de $25\,m/s$?

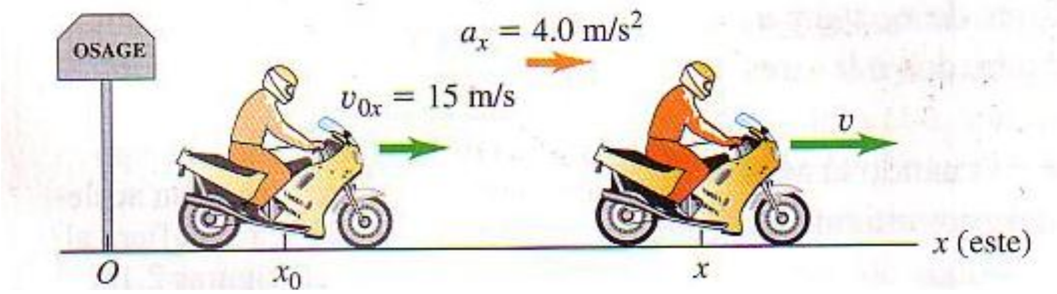


Figura 5. Ejemplo 5

Solución:

Tomamos el letrero como origen de coordenadas ($x = 0$) y decidimos que el eje +x apunta al este. En $t = 0$, la posicicon inicial es $x_0\ =\ 5\,m$ y la velocidad inicial es $v_0 = 15\,m/s.$ La aceleracion constante es $a =\ 4\,m/s^2$. Las variables desconocidas en la parte (a) son: los valores de la posicion x y la velocidad v en el instante posterior $t = 2\,s;$ la incógnita en la parte (b) es el valor de x cuando $v = 25m/s.$

a) Podemos hallar la posicion en $t =\ 2\,s$ usando la ecuación (2.13) que da la posición en función del tiempo:

$$\boldsymbol{X(t) = X_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}}$$

$$\boldsymbol{X(2) = 5m + \left(15\frac{m}{s}\right)\cdot(2\ s) + \frac{1}{2}\cdot\left(4\frac{m}{s^2}\right)(2\ s)^2 = 43\ m}$$

Podemos hallar la velocidad en ese instante con la ecuación (2.10) que da la velocidad en función del tiempo:

$$\boldsymbol{v(t) = v(0) + at}$$

$$\boldsymbol{v(2) = 15\frac{m}{s} + \left(4\frac{m}{s^2}\right)(2\ s) = 23\frac{m}{s}}$$

b) A partir de la ecuación (2.15):

$$\boldsymbol{v^2(t) = v_0^2 + 2a[X(t) - X_0]}$$

Despejando x y sustituyendo los valores conocidos, obtenemos

$$x = x_0 + \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$$
$$= 5\,m + \frac{(25\,m/s)^2 - (15\,m/s)^2}{2(4\,m/s^2)} = 55\,m$$

O bien, podemos encontrar el instante en que $v = 25\frac{m}{s}$ con la ecuación

$$v = v_0 + a \cdot t$$

Despejamos t y obtenemos

$$t = \frac{v - v_0}{a}$$
$$= \frac{25\frac{m}{s} - \frac{15m}{s}}{4\frac{m}{s^2}} = 2.5\,s$$

Después averiguamos la posición en ese instante con la ecuación (2.13):

$$X = 5m + \left(15\frac{m}{s}\right) \cdot (2.5\,s) + \frac{1}{2} \cdot \left(4\frac{m}{s^2}\right) \cdot (2.5\,s)^2 = 55\,m$$

Ejemplo 6:

Un conductor que viaja a velocidad constante de $15\,m/s$ pasa por un cruce escolar cuyo límite de velocidad es de $10\,m/s$ en ese momento, un policía en su motocicleta que está parado en el cruce, arranca para perseguir al infractor, con aceleración constante de $3\,m/s2$ ¿Cuánto tiempo pasa antes de que el policía alcance al infractor?

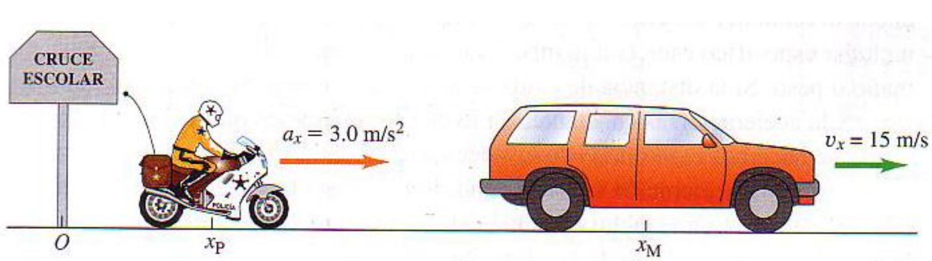


Figura 6. Ejemplo 6

Tomamos como origen el cruce, así que $x_0 = 0$ para ambos sea x_p la posición del policía y x_m la posición del conductor en cualquier instante las velocidades iniciales son $v_{p0} = 0$ para el poicia y $v_{m0} = 15\ m/s$ para el conductor la aceleración constante para cada uno es $a_p = 3\ m/s2$ y $a_m = 0$.
Determinamos el valor del tiempo en el que el conductor y el policía están en la misma posición es decir $x_p = x_m$ usando la ecuación:

$$x = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$$
$$x_p = 0 + 0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \left(3 \frac{m}{s^2}\right) \cdot t^2 = \frac{3}{2} \cdot t^2$$
$$x_m = 0 + \left(15 \frac{m}{s}\right) \cdot t + \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot t^2 = 15 \cdot t$$

Igualamos las dos expresiones y despejamos el tiempo para determinar el instante en que $x_p = x_m$

$$\frac{3}{2} \cdot t^2 = 15 \cdot t$$
$$\frac{3}{2} \cdot t^2 - 15 \cdot t = 0$$
$$\left(\frac{3}{2} \cdot t - 15\right) t = 0$$
$$t = 0 \quad \text{O} \quad \frac{3}{2} \cdot t - 15 = 0$$
$$t = 0 \quad \text{O} \quad t = 10\ s$$

Hay dos instantes en que los vehículos están en la misma posición el primero en $t = 0$ cuando el vehiculo pasa por el cruce donde esta la motocicleta. El segundo, $t = 10\ s$, es cuando el policía alcanza al conductor.

Movimiento de caída libre vertical

El movimiento de caída libre es tal vez el caso más representativo de los movimientos uniformemente acelerados, por lo tanto está gobernado por ecuaciones cinemáticas de la misma forma, pero específicamente el valor de la aceleración corresponde al de la aceleración de gravedad, además dado que es un movimiento vertical, se acostumbra a especificar la posición en términos de altura, en, asumiendo que $\boldsymbol{y(0) = 0}$, en este caso las ecuaciones son:
Ecuaciones características del movimiento de caída libre vertical.

$$\boldsymbol{v(t) = v(0) - gt} \qquad (\mathbf{2.17})$$
$$\boldsymbol{h(t) = \frac{[v(t) + v_o]t}{2}} \qquad (\mathbf{2.18})$$

$$h(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2} \qquad (2.19)$$
$$v^2(t) = v_0^2 - 2g.S(t) \qquad (2.20)$$

El signo menos se debe a que la aceleración de gravedad es un vector que siempre apunta hacia abajo y se acostumbra a considerar que el sentido positivo del sistema de coordenadas es hacia arriba. Además de la gravedad todos los vectores que apunten hacia abajo se consideran de sentido negativo.
Es de aclarar que cuando se lanza un cuerpo al aire, este sube y cae por la acción de la fuerza de gravedad, pero además actúan fuerzas de fricción debidas a la resistencia del aire, estas fuerzas dependen, entre otros factores, de la densidad del medio y la geometría del cuerpo, sin embargo las ecuaciones antes señaladas no contemplan estas fuerzas resistivas, por lo cual son aplicables a condiciones ideales en las que se supone no existen ese tipo de fuerzas.

Ejemplo 7:

Desde un edificio de 30 metros de altura se lanza hacia abajo un balón con una rapidez de $5mts/seg$. Ignorando los efectos de la resistencia del aire hallar a) el tiempo que tarda el balón en llegar al suelo y b) la velocidad del balón justo antes de chocar contra el suelo.

Solución:

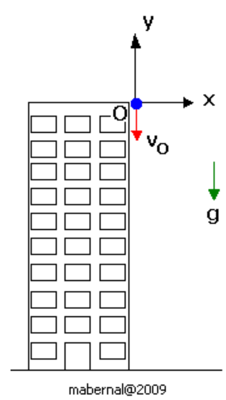


Figura 7. Ejemplo 7
Fuente: mabernal.

Se selecciona arbitrariamente el origen como el punto de partida del balón, note que la orientación positiva del eje *y* se mantiene hacia arriba, por lo cual el vector v_0 es negativo ya que apunta hacia abajo, la posición inicial y_0 es cero, mientras la posición final es $y = -30\ m$, porque el suelo está 30 *m* por debajo del nivel cero. Reemplazando en la ecuación 2.19 los valores correspondientes, se tiene:

$$-30\ mts = \left(-\frac{5mts}{seg}\right)t - \frac{1}{2}\left(\frac{9{,}8\ mts}{seg^2}\right)t^2$$

$$-\left(\frac{4{,}9\ mts}{seg^2}\right)t^2 - \frac{5mts}{seg}t + 30mts = 0$$

Al resolver la anterior ecuación cuadrática en t se encuentra $t_1 \approx 2{,}02$ seg y $t_2 \approx -3{,}04$ seg, de donde lógicamente se descarta el valor negativo y por tanto el tiempo que emplea el balón en llegar al suelo es 2,02 seg.

b) la velocidad del cuerpo justo antes de llegar al suele se halla mediante la ecuación (2.17) y los valores conocidos.

$$v_f = -\left(9{,}8\frac{mts}{seg^2}\right).t = -\left(9{,}8\frac{mts}{seg^2}\right).(2{,}02\ seg) = -24{,}8\frac{mts}{seg}.$$

El signo negativo de la respuesta obtenida indica que la orientación del vector velocidad es hacia abajo.

Unidad 2

Cinemática bidimensional

Física I

Autor: Danilo Ariza

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina

MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Introducción

En la cartilla de la semana 2 de este curso de Física hemos tenido la oportunidad de abordar fundamentalmente la idea de movimiento, pero considerando solo los casos en los que un cuerpo se mueve en línea recta, esto sin importar si la recta que define la trayectoria del movimiento es horizontal, vertical o inclinada, sin embargo en la cotidianidad encontramos muchos movimientos que no siguen una trayectoria rectilínea, vemos por ejemplo que un carro de carreras en un circuito casi permanentemente está cambiando la dirección de su movimiento, podemos apreciar también que un objeto lanzado al aire hacia arriba y hacia adelante, toma una trayectoria curva.

En esta cartilla extendemos al caso bidimensional los principios de movimiento estudiados anteriormente. Se considera específicamente el movimiento semiparabólico, el cual es realizado por un cuerpo que inicia una caída con una velocidad horizontal, se trata luego el movimiento parabólico, conocido también como movimiento de proyectiles y finalizamos la cartilla abordando el movimiento circular uniforme. En el desarrollo de los contenidos haremos uso de los principios de descomposición y suma de vectores tratadas en la cartilla de la semana 1. La comprensión de los conceptos y principios de la cinemática bidimensional, así como el análisis y solución de situaciones con base en ellos, es fundamental en el estudio de temáticas posteriores y una vía para cumplir el compromiso de formación académica.

Recomendaciones metodológicas

El estudio de la Cinemática bidimensional, requiere la clara comprensión de principios y fundamentos de la cinemática unidimensional, por lo cual se recomienda al estudiante, realizar una revisión o resumen de las temáticas anteriores y una juiciosa y cuidadosa lectura del contenido de esta cartilla. Siempre resulta conveniente elaborar un resumen de la estructura conceptual, incorporando su fundamento matemático expresado en las respectivas ecuaciones, esta síntesis podría ser a través de un mapa mental, un mapa conceptual, un cuadro sinóptico o cualquier esquema que el estudiante considere pertinente. Ya que el desarrollo se acompaña de ejemplos ilustrativos propios de las temáticas, se recomienda que el estudiante verifique los cálculos presentados. También se recomienda acudir a los diferentes recursos propuestos en plataforma con el fin de lograr un mayor afianzamiento y preparación para las actividades evaluativas a las que debe enfrentarse.

Desarrollo temático

Generalidades del movimiento en el plano

En el estudio de la cinemática en una dimensión hemos visto que los vectores asociados al movimiento tienen una componente, a las que generalmente llamamos x o y. Para el caso de un cuerpo que se mueve en un plano se debe considerar que el vector de posición tiene dos componentes que cambian con el tiempo.

Vector posición y vector desplazamiento

El vector o función posición está dado por:

$$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{t}) = [\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{y}(\boldsymbol{t})] = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})\hat{\boldsymbol{\imath}} + \boldsymbol{y}(\boldsymbol{t})\hat{\boldsymbol{\jmath}} \qquad (\mathbf{3.1})$$

En este caso un desplazamiento $\Delta\hat{\boldsymbol{r}}$, desde una posición $\boldsymbol{r_0} = \boldsymbol{r}(\mathbf{0})$ hasta una posición $\boldsymbol{r_t} = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{t})$ está dada por:

$$\Delta\hat{\boldsymbol{r}} = \hat{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{t_f}) - \hat{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{t_o}) = \hat{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{f}} - \hat{\boldsymbol{r}}_{\mathbf{0}}$$

$$\Delta\hat{\boldsymbol{r}} = [\hat{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t_f}), \hat{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{t_f})] - [\hat{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t_0}), \hat{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t_0})]$$

$$\Delta\hat{\boldsymbol{r}} = [\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t_f})\hat{\boldsymbol{\imath}} + \boldsymbol{y}(\boldsymbol{t_f})\widehat{\boldsymbol{\jmath}}\,] - [\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t_0})\hat{\boldsymbol{\imath}} + \boldsymbol{y}(\boldsymbol{t_0})\hat{\boldsymbol{\jmath}}]$$

$$\Delta\hat{\boldsymbol{r}} = [\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t_f}) - \boldsymbol{x}(\boldsymbol{t_0})]\hat{\boldsymbol{\imath}} + [\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t_f}) - \boldsymbol{y}(\boldsymbol{t_0})]\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

$$\Delta\hat{\boldsymbol{r}} = \Delta\boldsymbol{x}\hat{\boldsymbol{\imath}} + \Delta\boldsymbol{y}\hat{\boldsymbol{\jmath}} \qquad (\mathbf{3.2})$$

Vector velocidad media y vector velocidad instantánea

La velocidad media del movimiento bidimensional, en un intervalo de tiempo $\Delta t = t_f - t_0$ se define como:

$$\hat{\boldsymbol{v}} = \frac{\Delta\hat{\boldsymbol{r}}}{\Delta\boldsymbol{t}} = \frac{\Delta\boldsymbol{x}\hat{\boldsymbol{\imath}} + \Delta\boldsymbol{y}\hat{\boldsymbol{\jmath}}}{\Delta\boldsymbol{t}} = \frac{\Delta\boldsymbol{x}\hat{\boldsymbol{\imath}}}{\Delta\boldsymbol{t}} + \frac{\Delta\boldsymbol{y}\hat{\boldsymbol{\jmath}}}{\Delta\boldsymbol{t}} = \overline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{x}}\hat{\boldsymbol{\imath}} + \overline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{y}}\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

$$\hat{\boldsymbol{v}} = \overline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{x}}\hat{\boldsymbol{\imath}} + \overline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{y}}\hat{\boldsymbol{\jmath}} \qquad (\mathbf{3.3})$$

La velocidad instantánea, en un intervalo de tiempo $\Delta \boldsymbol{t} = \boldsymbol{t_f} - \boldsymbol{t_0}$ se define como:

$$\hat{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta \boldsymbol{t}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{x}\hat{\boldsymbol{\imath}} + \Delta \boldsymbol{y}\hat{\boldsymbol{\jmath}}}{\Delta \boldsymbol{t}} = \frac{\Delta \boldsymbol{x}\hat{\boldsymbol{\imath}}}{\Delta \boldsymbol{t}} + \frac{\Delta \boldsymbol{y}\hat{\boldsymbol{\jmath}}}{\Delta \boldsymbol{t}}$$

$$\hat{\boldsymbol{v}} = \frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{dt}}\hat{\boldsymbol{\imath}} + \frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{dt}}\hat{\boldsymbol{\jmath}} = \boldsymbol{v_x}\hat{\boldsymbol{\imath}} + \boldsymbol{v_y}\hat{\boldsymbol{\jmath}} \qquad (\mathbf{3.4})$$

Vector aceleración media y vector aceleración instantánea

La aceleración media corresponde a:

$$\hat{a} = \frac{\Delta \hat{\boldsymbol{v}}}{\Delta \boldsymbol{t}} = \frac{\Delta \boldsymbol{v_x}\hat{\boldsymbol{\imath}} + \Delta \boldsymbol{v_y}\hat{\boldsymbol{\jmath}}}{\Delta \boldsymbol{t}} = \frac{\Delta \boldsymbol{v_x}\hat{\boldsymbol{\imath}}}{\Delta \boldsymbol{t}} + \frac{\Delta \boldsymbol{v_y}\hat{\boldsymbol{\jmath}}}{\Delta \boldsymbol{t}} = \bar{\boldsymbol{a}}_x\hat{\boldsymbol{\imath}} + \bar{\boldsymbol{a}}_y\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

$$\bar{\boldsymbol{a}} = \bar{\boldsymbol{a}}_x\hat{\boldsymbol{\imath}} + \bar{\boldsymbol{a}}_y\hat{\boldsymbol{\jmath}} \qquad (\mathbf{3.5})$$

Mientras que la aceleración instantánea está dada por:

$$\hat{\boldsymbol{a}} = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{\boldsymbol{a}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta \boldsymbol{t}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{v_x}\hat{\boldsymbol{\imath}} + \Delta \boldsymbol{v_y}\hat{\boldsymbol{\jmath}}}{\Delta \boldsymbol{t}} = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{\Delta \boldsymbol{v_x}\hat{\boldsymbol{\imath}}}{\Delta \boldsymbol{t}} + \frac{\Delta \boldsymbol{v_y}\hat{\boldsymbol{\jmath}}}{\Delta \boldsymbol{t}}\right]$$

$$\hat{\boldsymbol{a}} = \frac{\boldsymbol{dv_x}}{\boldsymbol{dt}}\hat{\boldsymbol{\imath}} + \frac{\boldsymbol{dv_y}}{\boldsymbol{dt}}\hat{\boldsymbol{\jmath}} = \boldsymbol{a_x}\hat{\boldsymbol{\imath}} + \boldsymbol{a_y}\hat{\boldsymbol{\jmath}} \qquad (\mathbf{3.6})$$

Ejemplo 1

La función posición de una partícula que se mueve en el plano xy está dada por:

$$\boldsymbol{r(t)} = \mathbf{5}\boldsymbol{t}^{\mathbf{2}}\hat{\boldsymbol{\imath}} + (\mathbf{8}\boldsymbol{t}^{\mathbf{2}} - \mathbf{3}\boldsymbol{t}^{\mathbf{4}})\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

Hallar: a) la velocidad media en el intervalo comprendido entre 0 y 1 segundo b) la velocidad y aceleración instantánea en t = 1 seg.

Solución

La posición inicial $(en\, t = 0)$ se halla remplazando t en la función posición así:

$$\hat{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{t}) = \mathbf{5}\boldsymbol{t}^{\mathbf{2}}\hat{\boldsymbol{\imath}} + (\mathbf{8}\boldsymbol{t}^{\mathbf{2}} - \mathbf{3}\boldsymbol{t}^{\mathbf{4}})\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

$$\hat{\boldsymbol{r}}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}\hat{\boldsymbol{\imath}} + \mathbf{0}\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

Lo que significa en $t = 0$ el cuerpo está en el origen del sistema de coordenadas.

En $t = 1\, seg$ la posición es: $\boldsymbol{r}(\mathbf{1}) = \mathbf{5}\hat{\boldsymbol{\imath}} + (\mathbf{8} - \mathbf{3})\hat{\boldsymbol{\jmath}} = (\mathbf{5}\hat{\boldsymbol{\imath}} + \mathbf{5}\hat{\boldsymbol{\jmath}})\boldsymbol{mts}$

Por tanto el desplazamiento corresponde a:

$$\Delta\hat{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r}(\mathbf{1}) - \boldsymbol{r}(\mathbf{0}) = (\mathbf{5}\hat{\boldsymbol{\imath}} + \mathbf{5}\hat{\boldsymbol{\jmath}}) - (\mathbf{0}\hat{\boldsymbol{\imath}} + \mathbf{0}\hat{\boldsymbol{\jmath}})$$

$$\Delta\hat{\boldsymbol{r}} = (\mathbf{5}\hat{\boldsymbol{\imath}} + \mathbf{5}\hat{\boldsymbol{\jmath}})\boldsymbol{mts}$$

Con lo anterior el vector velocidad media es:

$$\overline{\boldsymbol{v}} = \frac{\Delta\hat{\boldsymbol{r}}}{\Delta\boldsymbol{t}} = \frac{(\mathbf{5}\boldsymbol{mts})\hat{\boldsymbol{\imath}} + (\mathbf{5}\boldsymbol{mts})\hat{\boldsymbol{\jmath}}}{\mathbf{1}\,\boldsymbol{seg}} = \frac{(\mathbf{5}\boldsymbol{mts})\hat{\boldsymbol{\imath}}}{\mathbf{1}\,\boldsymbol{seg}} + \frac{(\mathbf{5}\boldsymbol{mts})\hat{\boldsymbol{\jmath}}}{\mathbf{1}\,\boldsymbol{seg}}$$

$$\overline{\boldsymbol{v}} = (\mathbf{5}\boldsymbol{mts}/\boldsymbol{seg})\hat{\boldsymbol{\imath}} + (\mathbf{5}\boldsymbol{mts}/\boldsymbol{seg})\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

b) En un instante t, la velocidad instantánea es la derivada de la función posición respecto al tiempo, por tanto se tiene:

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{t}) = \frac{\boldsymbol{d}(\mathbf{5}\boldsymbol{t}^{\mathbf{2}})}{\boldsymbol{dt}}\hat{\boldsymbol{\imath}} + \frac{\boldsymbol{d}(\mathbf{8}\boldsymbol{t}^{\mathbf{2}} - \mathbf{3}\boldsymbol{t}^{\mathbf{4}})}{\boldsymbol{dt}}\hat{\boldsymbol{\jmath}} = \frac{[(\mathbf{10}\boldsymbol{t})\hat{\imath} + (\mathbf{16}\boldsymbol{t} - \mathbf{12}\boldsymbol{t}^{\mathbf{3}})\hat{\jmath}]\boldsymbol{mts}}{\boldsymbol{seg}}.$$

$$\hat{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{t}) = [(\mathbf{10}\boldsymbol{t})\hat{\boldsymbol{\imath}} + (\mathbf{16}\boldsymbol{t} - \mathbf{12}\boldsymbol{t}^{\mathbf{3}})\hat{\boldsymbol{\jmath}}]\boldsymbol{mts}/\boldsymbol{seg}$$

En el caso particular de $t = 1$, la velocidad del cuerpo es:

$$\hat{\boldsymbol{v}}(\mathbf{1}) = [(\mathbf{10})\hat{\boldsymbol{\imath}} + (\mathbf{16} - \mathbf{12})\hat{\boldsymbol{\jmath}}]\left(\frac{\boldsymbol{mts}}{\boldsymbol{seg}}\right) = [(\mathbf{10})\hat{\boldsymbol{\imath}} + \mathbf{4}\hat{\boldsymbol{\jmath}}]\left(\frac{\boldsymbol{mts}}{\boldsymbol{seg}}\right)$$

Al ser la aceleración la derivada de la velocidad se tiene entonces que en un instante t, la aceleración está dada por:

$$\hat{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{t}) = [(\mathbf{10})\hat{\boldsymbol{\imath}} + (\mathbf{16} - \mathbf{36}\boldsymbol{t}^{\mathbf{2}})\hat{\boldsymbol{\jmath}}]\left(\frac{\boldsymbol{mts}}{\boldsymbol{seg}^{\mathbf{2}}}\right)$$

En $t = 1$ el valor de la aceleración es:

$$\hat{\boldsymbol{a}}(\mathbf{1}) = [(\mathbf{10})\hat{\boldsymbol{\imath}} + (\mathbf{16} - \mathbf{36})\hat{\boldsymbol{\jmath}}]\left(\frac{\boldsymbol{mts}}{\boldsymbol{seg}^{\mathbf{2}}}\right) = [(\mathbf{10})\hat{\boldsymbol{\imath}} + (-\mathbf{20})\hat{\boldsymbol{\jmath}}]\left(\frac{\boldsymbol{mts}}{\boldsymbol{seg}^{\mathbf{2}}}\right)$$

Movimiento de lanzamiento horizontal - Movimiento semiparabólico

Uno de los ejemplos típicos de movimiento en dos dimensiones es el realizado por un cuerpo cuando es lanzado con una velocidad horizontal desde cierta altura, en este caso, por acción de la atracción gravitatoria, el cuerpo va cayendo y su trayectoria describe una semiparábola.

Este movimiento es realmente la superposición de dos movimientos, un movimiento horizontal rectilíneo uniforme y uno vertical uniformemente acelerado en el que la aceleración es la aceleración de gravedad.

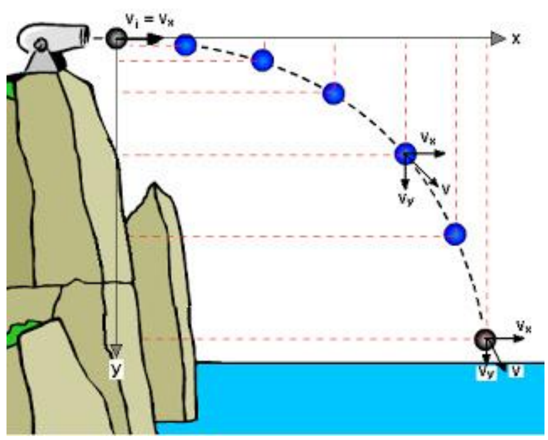


Figura 1: Movimiento semiparabólico
Fuente: Propia.

Ecuaciones del movimiento semiparabólico

Asumiendo que la posición inicial es $(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0}) = (0{,}0)$ y que el sentido positivo en y es hacia arriba, tenemos las siguientes expresiones que caracterizan al movimiento semiparabólico.

En el eje horizontal:

$$\boldsymbol{Velocidad\ \hat{v}_x = \hat{v}_i = constante}$$

$$\boldsymbol{posición\ \hat{x}(t) = \hat{v}_x t} \qquad \boldsymbol{(3.7)}$$

En forma escalar la ecuación (3.7) queda como:

$$\boldsymbol{x(t) = v_x t} \qquad \boldsymbol{(3.8)}$$

$$\boldsymbol{Aceleración\ \hat{a}_x = 0} \qquad \boldsymbol{(3.9)}$$

En el eje vertical y:

$$\boldsymbol{Velocidad\ inicial\text{:}\ \hat{v}_{0y} = 0} \qquad \boldsymbol{(3.10)}$$

$$\boldsymbol{Velocidad\text{:}\ \hat{v}_y = -\hat{g}t} \qquad \boldsymbol{(3.11)}$$

$$\boldsymbol{Posición\text{:}\ \hat{y}_t = -\frac{\hat{g}t^2}{2}} \qquad \boldsymbol{(3.12)}$$

Lo que también se puede escribir en forma escalar como:

$$\boldsymbol{y = \frac{gt^2}{2}} \qquad \boldsymbol{(3.13)}$$

De donde se puede establecer el tiempo requerido para que el cuerpo descienda una altura y mediante la siguiente ecuación:

$$\boldsymbol{t = \sqrt{-\frac{2y}{g}}} \qquad \boldsymbol{(3.14)}$$

La velocidad combinada del movimiento en cualquier instante t está dada por:

$$\boldsymbol{v = \sqrt{v_y^2 + v_y^2} = \sqrt{(gt)^2 + v_y^2}} \qquad \textbf{(3.15)}$$

Ejemplo 2

Desde un avión de guerra que viaja con una velocidad horizontal de 420 km/h, a una altura de 3500 m, se suelta una bomba con el fin de explotar un campamento militar que está situado en la superficie de la tierra. ¿Cuántos metros antes de llegar al punto exacto del campamento, debe ser soltada la bomba para dar con el blanco?

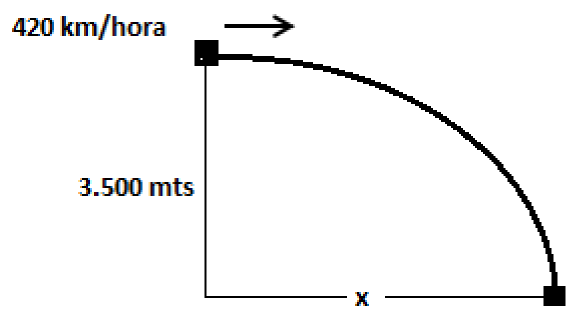


Figura 2.
Fuente: Propia.

Solución

La situación se esquematiza en la Figura 2. La velocidad del avión expresada en mts por segundo corresponde a:

$$v = 420\frac{Kmts}{hora} = 420\frac{1000\ mts}{3600\ seg} = \frac{420000\ mts}{3600\ seg} = 116{,}6\frac{mts}{seg}$$

El tiempo requerido para descender una altura de 3500 metros se puede hallar a partir de la ecuación (3.14)

$$\boldsymbol{t = \sqrt{\frac{2y}{g}} = \sqrt{\frac{2(3500\ mts)}{9.8\ mts/seg^2}} = 26{,}72\ seg}$$

Teniendo en cuenta que la velocidad horizontal es de $116{,}6\frac{mts}{seg}$, la distancia x antes de pasar por el comando militar está dada por la ecuación (3.8):

$$\boldsymbol{x(t) = v_x t}$$

$$\boldsymbol{x = \left(116{,}6\frac{mts}{seg}\right)(26{,}72\ seg) = 3.115{,}55\ mts}$$

Movimiento de proyectiles

Se entiende por movimiento de proyectil aquel realizado por un cuerpo que se mueve en un plano vertical, por ejemplo un balón pateado o lanzado por un jugador. Como es de esperarse, tal movimiento es descrito por principios de la física, el primero que dio la solución correcta al problema del movimiento de proyectiles en ausencia de la fricción del aire fue Galileo, y para esto tuvo la idea de considerarlo también como la superposición de dos movimientos unidimensionales, uno horizontal y otro vertical. El movimiento horizontal es un movimiento rectilíneo uniforme, mientras que el vertical es una caída libre. El análisis detallado de estos movimientos conduce a las ecuaciones que lo rigen, esto se describe a continuación:

Ecuaciones cinemáticas del movimiento parabólico

Para la deducción de las expresiones que gobiernan el movimiento parabólico es importante recordar que el movimiento se produce por un lanzamiento de un objeto con una velocidad inicial que tiene componentes perpendiculares, $\boldsymbol{\hat{v}_{0x}}$y $\boldsymbol{\hat{v}_{0y}}$, como se muestra en la Figura 3.3. Los valores de las componentes de velocidad dependen del ángulo θ, respecto al eje x, con el cual se realiza el lanzamiento.

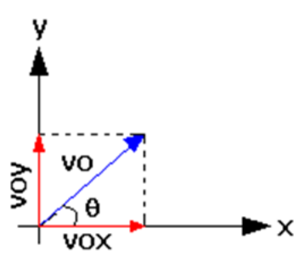


Figura 3. Vector velocidad inicial del movimiento parabólico
Fuente: Propia.

De aquí se puede deducir que las magnitudes de las componentes de la velocidad inicial están dadas por:

$$\boldsymbol{v_{0x} = v_0 Cos}$$

Y

$$\boldsymbol{v_{0y} = v_0 Sen\theta}$$

Con base en ello tenemos lo siguiente:

Componente horizontal de la velocidad

Dado que la componente horizontal es un movimiento uniforme, en cada instante t la componente horizontal de la velocidad es igual a la componente horizontal de la velocidad inicial, es decir:

$$\boldsymbol{v_x = v_{0x}}$$

$$\boldsymbol{v_x = v_0 Cos\theta} \qquad \boldsymbol{(3.16)}$$

Componente horizontal de la posición

En cada instante t, la componente $\hat{\boldsymbol{x}}$ de la posición de un cuerpo que describe un movimiento parabólico está dada por:

$$\boldsymbol{x_f = x_0 + x_x t}$$

$$\boldsymbol{x_f = x_0 + (v_0 Cos\theta) t} \qquad \boldsymbol{(3.17)}$$

Componente vertical de la velocidad

$$\boldsymbol{v_{fy} = v_{0y} - gt}$$

$$\boldsymbol{v_{fy} = v_0 Sen\theta - gt} \qquad \boldsymbol{(3.18)}$$

Componente vertical de la posición

La componente vertical de la posición en el movimiento de tiro parabólico corresponde a un movimiento de caída libre vertical, por tanto está dada por:

$$\boldsymbol{y_f = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2}$$

$$\boldsymbol{y_f = y_0 + (v_0 Sen\theta)t - \frac{1}{2}gt^2} \qquad \boldsymbol{(3.19)}$$

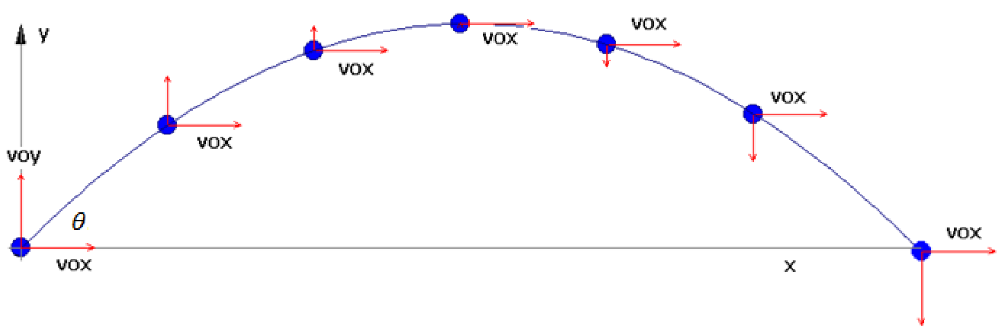


Figura 4. Movimiento parabólico
Fuente: Propia.

Recalcamos aquí que la velocidad en x no cambia, mientras que la velocidad en y cambia linealmente con el tiempo en razón a que es un movimiento uniformemente acelerado. Para un objeto que es lanzado de forma oblicua, como se muestra en la figura, se puede ver que a medida que va subiendo disminuye su velocidad en y a tal punto que esta llega a ser cero, razón por la cual inicia su descenso, pero en todo momento está avanzando horizontalmente a una velocidad constante.

Existen preguntas de particular interés en el movimiento de proyectiles, por ejemplo, dado un valor de la velocidad inicial y un ángulo de lanzamiento, ¿cuál es el tiempo que el cuerpo permanece en movimiento, cuál es la máxima altura alcanzada, y cuál es la distancia horizontal que recorre. Para responder a ellas consideremos un objeto que es lanzado con una velocidad inicial de magnitud $\boldsymbol{v_0}$ y un ángulo de inclinación $\boldsymbol{\theta}$ como se muestra en la Figura.

Altura máxima en el tiro parabólico

El proyectil alcanza su altura máxima en el instante en que la velocidad en y es cero, por tanto, a partir de la forma escalar de la ecuación (3.18) podemos hallar la expresión correspondiente al tiempo que tarda el cuerpo en subir, así:

$$\boldsymbol{v_{fy} = v_0 Sen\theta - gt}$$

Entonces, si llamamos $\boldsymbol{t_s}$ al tiempo que tarda el cuerpo en subir, se tiene:

$$\boldsymbol{gt_s = v_0 Sen\theta}$$

Entonces:

$$\boldsymbol{t_s = \frac{v_0 Sen\theta}{g}} \qquad (\mathbf{3.20})$$

Si tenemos en cuenta que $y_0 = 0$ y si denotamos con $\boldsymbol{h}$ la altura máxima alcanzada por el proyectil, la cual corresponde a $\boldsymbol{t = t_s}$, remplazando en la ecuación (3.19) encontramos:

$$\boldsymbol{y_f = y_0 + (v_0 Sen\theta)t - \frac{1}{2}gt^2}$$

$$\boldsymbol{h = (v_0 Sen\theta)t_s - \frac{1}{2}gt_s^2}$$

$$\boldsymbol{h = (v_0 Sen\theta)\left(\frac{v_0 Sen\theta}{g}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_0 Sen\theta}{g}\right)^2}$$

$$\boldsymbol{h = \left(\frac{v_0^2 Sen^2\theta}{g}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_0^2 Sen^2\theta}{g^2}\right)}$$

$$\boldsymbol{h = \left(\frac{v_0^2 Sen^2\theta}{g}\right) - \left(\frac{v_0^2 Sen^2\theta}{2g}\right)}$$

$$\boldsymbol{h = \left(\frac{v_0^2 Sen^2\theta}{2g}\right)} \qquad (\mathbf{3.21})$$

Tiempo de vuelo y alcance horizontal

Llamamos tiempo de vuelo $\boldsymbol{t_v}$, al tiempo que tarda el cuerpo en realizar todo su recorrido, tiempo en el cual recorre el alcance horizontal $\boldsymbol{R}$. Se debe tener en cuenta que el tiempo que el cuerpo tarda en subir es el mismo que tarda en bajar, por tanto el tiempo de vuelo corresponde al doble del tiempo de subida, por tanto su valor está dado por:

$$\boldsymbol{t_v = 2t_s = \frac{2v_0 Sen\theta}{g}} \qquad (\mathbf{3.22})$$

Remplazando en la ecuación (3.17) y teniendo en cuenta que $x_0 = 0$ y se tiene:

$$\boldsymbol{x_f = x_0 + (v_0 Cos\theta)t}$$

Entonces:

$$\boldsymbol{R = 0 + (v_0 Cos\theta)t_v}$$

$$\boldsymbol{R = (v_0 Cos\theta)\left(\frac{2v_0 Sen\theta}{g}\right)}$$

$$\boldsymbol{R = \left(\frac{2v_0^2 Sen\theta . Cos\theta}{g}\right)}$$

Finalmente, aplicando la identidad $2v_0^2 Sen\theta . Cos\theta = Sen2\theta$ encontramos la expresión compacta para el valor del alcance horizontal.

$$\boldsymbol{R = \left(\frac{v_0^2 Sen2\theta}{g}\right)} \qquad (\mathbf{3.23})$$

Si se quiere que este alcance horizontal tenga su mayor valor para un determinado valor de la velocidad, se tendría que cumplir que $Sen2\theta = 1$, con lo cual el valor de $2\theta = 90$ y por tanto $\theta = 45$ grados.

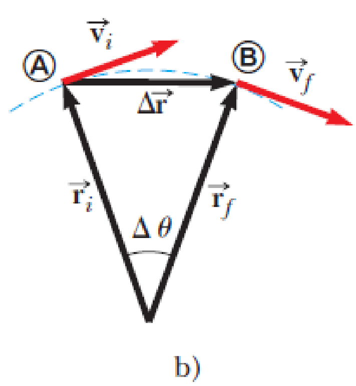
Movimiento circular uniforme

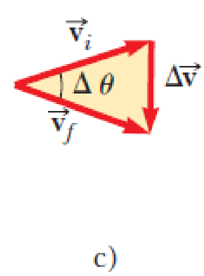
Anteriormente hemos estudiado el movimiento rectilíneo uniforme, caracterizado precisamente por llevarse a cabo en una trayectoria recta y a velocidad constante. Si hablamos de un movimiento circular, este debe tener un vector velocidad que permanentemente cambia de dirección, por lo cual no se podría decir que es a velocidad constante, sin embargo, es posible que la magnitud de la velocidad no cambie. Entonces tenemos que un Movimiento circular uniforme es aquel cuya trayectoria es una circunferencia y su velocidad es de magnitud constante.

Aceleración en el movimiento circular uniforme

¿Hay aceleración en un cuerpo que realiza un movimiento circular uniforme? Puesto que la aceleración significa cambio de velocidad, este cambio puede ser debido a un cambio en la magnitud, en la dirección o en ambos. En el caso del movimiento circular existe aceleración asociada solamente al cambio de dirección del vector velocidad.

La velocidad siempre es tangente a la trayectoria del cuerpo, lo que significa, en el caso del movimiento circular, que es perpendicular al radio de la circunferencia. Un cuerpo que describa un movimiento circular uniforme debe tener una aceleración que siempre sea perpendicular a la trayectoria del movimiento, de no ser así el vector aceleración tendría una componente paralela a la trayectoria, lo que daría lugar a un cambio en la magnitud de la velocidad, entrando en contradicción con el hecho de tener velocidad de magnitud constante.





La Figura 5b ilustra un esquema de dos vectores velocidad, pero acudiendo al principio de igualdad de vectores, en la Figura 5c, se ha planteado un esquema equivalente de tal manera que los dos vectores tienen igual origen. La misma Figura 5c muestra un vector $\Delta\hat{v}$ con lo que se puede afirmar que $\hat{v}_f = \hat{v}_i + \Delta\hat{v}$.

El ángulo formado por los vectores de posición de la Figura 5b tienen la misma medida que el formado por los vectores velocidad en la Figura 5, esto en razón a que la dirección del vector velocidad siempre resulta ser perpendicular al vector de posición $\boldsymbol{r_s}$. Por lo tanto, los dos triángulos son isósceles semejantes, con lo cual la relación de las longitudes de dichos lados son iguales, esto permite escribir la siguiente ecuación.

$$\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\boldsymbol{v}} = \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\boldsymbol{r}}$$

De donde se tiene:

$$\Delta \boldsymbol{v} = \frac{\Delta \boldsymbol{r}.\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{r}}$$

Teniendo en cuenta que la magnitud $\overline{\boldsymbol{a}}$ de la aceleración media corresponde al cociente de la magnitud $\Delta\boldsymbol{v}$ del cambio de velocidad y el tiempo Δt, teneomos que:

$$\overline{\boldsymbol{a}} = \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta \boldsymbol{t}} = \frac{\Delta \boldsymbol{r}.\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{r}\,\Delta \boldsymbol{t}} = \frac{\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{r}}.\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta \boldsymbol{t}}$$

La magnitud del vector aceleración instantánea o aceleración centrípeta, por apuntar siempre hacia el centro de la trayectoria, se puede hallar mediante la definición por paso al límite de la velocidad media, teniéndose entonces:

$$a_c = \lim_{\Delta t} \bar{a} = \lim_{\Delta t} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t} \frac{\Delta r.v}{r\,\Delta t} = \lim_{\Delta t} \frac{v}{r}.\frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{v}{r} \lim_{\Delta t} \frac{\Delta r}{\Delta t}$$

Puesto que:

$$\lim_{\Delta t} \frac{\Delta r}{\Delta t} = v$$

Se encuentra que:

$$a_c = \frac{v}{r}v$$

$$\boldsymbol{a_c = \frac{v^2}{r}} \qquad (\mathbf{3.24})$$

Periodo en el movimiento circular uniforme

En el movimiento circular uniforme se define el periodo como el tiempo requerido para que tenga lugar un giro completo, es decir para que se recorra una distancia equivalente a la longitud de la circunferencia asociada a la trayectoria del movimiento.

Si se representa mediante T el periodo de un movimiento circular uniforme sobre una trayectoria de radio r a una velocidad v se puede escribir las siguientes expresiones que relacionan la velocidad lineal, el radio y el periodo:

$$\boldsymbol{T = \frac{2\pi r}{v} \quad o \quad v = \frac{2\pi r}{T}} \qquad (\mathbf{3.25})$$

Frecuencia

En el movimiento circular uniforme la frecuencia f se define como el número de giros o revoluciones descritas en la unidad de tiempo. Si se conoce el periodo o cantidad de tiempo T requerido para una vuelta, se puede hallar el número de vueltas dividiendo la unidad por el periodo, es decir:

$$\boldsymbol{f = \frac{1}{T}} \qquad (\mathbf{3.26})$$

También tenemos las siguientes expresiones que relacionan la frecuencia con el radio y la velocidad lineal.

$$\boldsymbol{f = \frac{1}{\frac{2\pi r}{v}} = \frac{v}{2\pi r} \quad o \;\; v = 2\pi r f} \qquad (\mathbf{3.27})$$

Velocidad angular

La velocidad angular es la medida ω de la rapidez con la que un cuerpo, que describe un movimiento circular uniforme, barre un ángulo θ. La expresión genérica para la velocidad angular es:

$$\boldsymbol{\omega = \frac{\theta}{t}}$$

Se debe tener en cuenta que en un periodo T el movimiento gira un ángulo de $360\ grados$ o $2\pi\ radianes$, con lo cual se tiene la siguiente expresión que permite hallar la velocidad angular ω en términos del periodo o de la frecuencia del movimiento.

$$\boldsymbol{\omega = \frac{2\pi}{T}} \qquad (\mathbf{3.28})$$

Se puede observar que si multiplicamos la anterior ecuación por el radio r se tiene:

$$\boldsymbol{\omega r = \frac{2\pi r}{T} = v}$$

Entonces:

$$\boldsymbol{v = \omega r} \qquad (\mathbf{3.29})$$

2

Unidad 2

Dinámica

Física I

Autor: Danilo Ariza

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina

MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Introducción

Hasta las semanas anteriores de este curso de física se ha venido estudiando el movimiento de los cuerpos en una y dos dimensiones, fue así como abordamos el estudio del movimiento rectilíneo uniforme, el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, el movimiento semiparabólico, el parabólico y el circular uniforme. Todos estos movimientos se analizaron a la luz de los principios de la cinemática, es decir, sin tener en cuenta la causa que da lugar al movimiento ni la masa del cuerpo que se mueve.

En esta cuarta semana la cartilla la iniciaremos con la consideración de las causas que producen el movimiento y los efectos producidos dependiendo de una característica importante de todo cuerpo, su masa. Se considera como fundamento de estudio las llamadas leyes de Newton. En el desarrollo de los contenidos haremos uso de los principios de descomposición y suma de vectores tratadas anteriormente. La comprensión de los conceptos y principios de la dinámica, así como el análisis y solución de situaciones con base en ellos, es fundamental en el estudio de temáticas de la cartilla de la semana 5, la cual es una continuación de esta temática.

Recomendaciones metodológicas

El estudio de la dinámica, requiere que el estudiante se apropie de los principios y fundamentos que la rigen, así como de elementos de magnitudes vectoriales tratados en la semana 1, por lo cual se recomienda al estudiante, realizar una revisión o resumen de las temáticas anteriores y una juiciosa y cuidadosa lectura del contenido de esta cartilla. Es muy importante elaborar un resumen de la estructura conceptual, incorporando su fundamento matemático expresado en las respectivas ecuaciones, esta síntesis podría ser a través de un mapa mental, un mapa conceptual, un cuadro sinóptico o cualquier esquema que el estudiante considere pertinente tal como se ha señalado siempre en este aparte de las cartillas. Se recomienda al estudiante el análisis de ejemplos propuestos bien sea en esta cartilla o en otros recursos que sean referenciados en este curso, todo ello con el fin de lograr un mayor afianzamiento y preparación para las actividades evaluativas a las que debe enfrentarse.

Desarrollo temático

Generalidades de la dinámica

Tal como lo señalamos en los apartes anteriores el estudio de la dinámica contempla o toma en consideración la influencia externa que da lugar a que un cuerpo se mueva o permanezca en reposo. Los dos elementos fundamentales a tener en cuenta son las fuerzas que afectan a un cuerpo y la masa del mismo.

Fuerza

Según Newton una fuerza ejercida sobre un objeto es una interacción capaz de alterar o mantener el estado de reposo o movimiento del objeto. Son muchos los casos en que se pone de manifiesto este concepto, ejemplos de ello son: a) un futbolista patea un balón que se encuentra quieto sobre el césped, en este caso aplica una fuerza que pone al balón en movimiento, b) cuando se aplica los frenos a un vehículo esta acción hace que el vehículo disminuya su velocidad, c) un cuerpo que se suelta en el aire experimenta una fuerza de atracción gravitatoria que hace que el cuerpo caiga libremente, d) si un bloque de cemento se encuentra en reposo sobre el segundo piso de un edificio, el piso ejerce una fuerza sobre el bloque de tal manera que contrarresta la acción gravitatoria y el bloque puede permanecer estable en el piso.

Carácter vectorial de la fuerza

La fuerza es una magnitud vectorial ya que para estar completamente definida se requiere indicar su magnitud, dirección y sentido. Los efectos de la aplicación de una fuerza sobre un objeto dependen de la magnitud de la fuerza, y de la dirección en que se aplique, la Figura 4 ilustra esta idea, donde se muestran varias fuerzas actuando sobre un cuerpo ¿Hacia dónde se moverá el objeto bajo la acción de esta fuerza?

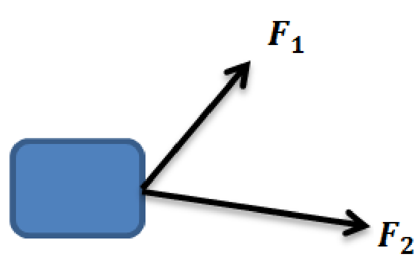


Figura 1. Dos fuerzas actuando sobre un cuerpo
Fuente: Propia.

Fuerzas fundamentales

Actualmente la comunidad científica reconoce cuatro fuerzas fundamentales:

1. La fuerza de gravedad.
2. La fuerza electromagnética.
3. La fuerza nuclear fuerte.
4. La fuerza nuclear débil.

A cada una de estas fuerzas se les asocia una propiedad de la materia, por ejemplo la fuerza gravitacional está asociada a la propiedad masa gravitacional, así mismo la propiedad carga eléctrica está asociada a la fuerza electromagnética. Es importante resaltar que la masa gravitacional y la masa inercial son nociones distintas: mientras la gravitacional es la responsable de la fuerza gravitacional, la inercial es una medida de la resistencia u oposición de un sistema cuando la acción de una fuerza intenta cambiar su estado de movimiento, es decir su velocidad.

Las fuerzas fundamentales, la correspondiente propiedad y otros aspectos se listan en la siguiente tabla:

Interacciones fundamentales			
Interacción	**Propiedad de la materia**	**Alcance**	**Partículas mediadoras**
Gravitacional	Masa gravitacional	Infinito	Gravitones
Eléctrica	Carga eléctrica	Infinito	Fotones virtuales
Nuclear débil	Sabor	$10^{-15}\,mts$	Bosones W y Z
Nuclear fuerte	Color	$10^{-18}\,mts$	Gluones

Tabla 1.
Fuente: Propia.

Leyes de Newton

Las leyes de Newton son un importante conjunto de principios físicos que describen el movimiento de los cuerpos. A continuación se presenta una descripción de las mismas.

Primera ley o ley de Inercia

Tal como se ha tratado anteriormente en este curso, todo movimiento se considera con relación a algún sistema o marco de referencia. En el análisis de la primera ley de Newton se hace uso de un tipo especial de marco de referencia, los marcos de referencia inerciales, o aquellos que se mueven sin aceleración. Para aclarar un poco más la idea podemos considerar un movimiento uniforme realizado por un carro en una carretera recta, es claro que como marco de referencia se toma un punto fijo en el planeta tierra, pero es claro también que la tierra en su movimiento experimenta la aceleración debida, por ejemplo a su movimiento de rotación alrededor de su eje y de traslación alrededor del sol. Sin embargo tales aceleraciones son tan pequeñas en comparación con la aceleración de gravedad terrestre que pueden considerarse como nulas. Dado esto se puede plantear una idea de la primera ley de Newton o ley de Inercia.

En ausencia de fuerzas externas, y visto desde un marco de referencia inercial, un objeto en reposo se mantiene en reposo y un objeto en movimiento continúa en movimiento rectilíneo uniforme.

Todos nosotros muy seguramente hemos experimentado situaciones que bien podrían ser explicadas por la ley de Inercia, por ejemplo, si vamos en un vehículo a apreciable velocidad y repentinamente disminuye la velocidad de manera significativa, notamos que nuestro cuerpo presenta la tendencia a continuar moviéndose en la dirección original.

Masa

En diferentes contextos hemos encontrado que se define la masa como la cantidad de materia que contiene un cuerpo, pero desde el punto de vista de la dinámica, la masa realmente es una medida de la inercia en el sentido que especifica que tanta oposición o resistencia presenta el objeto a que se cambie su estado de reposo o movimiento a rectilíneo a velocidad constante. Por ejemplo, si debemos levantar del suelo un yunque de hierro y una pequeña pelota de caucho, es claro que el yunque de hierro presenta mayor oposición a que se le altere su estado de reposo, por otra parte, si nos lanzan una pelota de caucho o una de bolos, encontramos que la de bolos presenta mayor oposición a que sea detenida. Lo anterior indica que frente a la aplicación de una fuerza sobre un cuerpo, a mayor cantidad de masa menor es la aceleración que se puede producir sobre el cuerpo. La masa es una magnitud escalar y, tal como se indicó en la cartilla de la semana uno, la unidad de medida de la masa en el Sistema Internacional de unidades (SI) es el kilogramo.

Segunda ley de Newton

La primera ley de Newton o Ley de inercia explica que si sobre un cuerpo no se ejerce fuerza externa alguna el cuerpo conserva su estado de reposo o movimiento rectilíneo uniforme. Frente a este planteamiento surge el interrogante sobre qué sucede si sobre el cuerpo actúa una fuerza neta. La respuesta la da Newton a través de su segunda ley. Newton descubrió que al aplicar una fuerza neta sobre un cuerpo, el efecto producido es una aceleración, si la fuerza se duplica o triplica, lo mismo sucede con la aceleración, tales observaciones dentro de los estudios de Newton lo llevaron a concluir que la aceleración producida sobre un cuerpo es directamente proporcional a la fuerza aplicada. También se tiene que si una misma fuerza se aplica sobre cuerpos cuya masa sea el doble o el triple, la aceleración se reduce a la mitad o a la tercera parte respectivamente, lo que indica que la masa y la aceleración son magnitudes inversamente proporcionales.

La segunda ley de Newton se enuncia formalmente de la siguiente manera:

En un marco de referencia inercial, la aceleración producida por una fuerza neta sobre un cuerpo es directamente proporcional a la fuerza e inversamente proporcional a la masa, es decir:

$$\hat{\boldsymbol{a}} \infty \frac{\hat{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{neta}}}{\boldsymbol{m}}$$

Donde la fuerza neta $\hat{F}_{neta}$ es la resultante o suma vectorial de todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo, es decir.

$$\hat{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{neta}} = \sum \hat{\boldsymbol{F}}.$$

La ecuación que relaciona la fuerza neta, la masa y la aceleración es la siguiente:

$$\hat{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{neta}} = \boldsymbol{m}\hat{\boldsymbol{a}} \qquad (\mathbf{4.1})$$

$$\sum \hat{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{m}\hat{\boldsymbol{a}} \qquad (\mathbf{4.2})$$

Se puede notar que la anterior expresión es de carácter vectorial, por lo cual es posible que la fuerza neta sea el resultado de fuerzas en las tres dimensiones espaciales, es decir, la fuerza resultante puede tener componentes en los ejes x, y, z, por tanto lo mismo sucede con la aceleración, esto conduce a las tres ecuaciones:

$$\sum \boldsymbol{F_x} = \boldsymbol{ma_x} \qquad \sum \boldsymbol{F_y} = \boldsymbol{ma_y} \qquad \sum \boldsymbol{F_z} = \boldsymbol{ma_z} \qquad (\mathbf{4.3})$$

Unidades de medidas de la fuerza

Puesto que la fuerza ejercida sobre un cuerpo es el producto de masa por aceleración se tiene que si sobre un cuerpo de un kilogramo de masa se aplica una fuerza que le produce una aceleración de $1mto/seg^2$, la magnitud de la fuerza es:

$$F = m.a$$

$$F = (1\,kg).\left(1\frac{mto}{seg^2}\right) = \left(1\frac{kg.mto}{seg^2}\right)$$

A la unidad resultante, en el sistema internacional de unidades se le da el nombre especial de newton, es decir, un newton es la magnitud de la fuerza que al actuar sobre un cuerpo de un kilogramo de masa produce una aceleración de $1mto/seg^2$.

Ejemplo 1

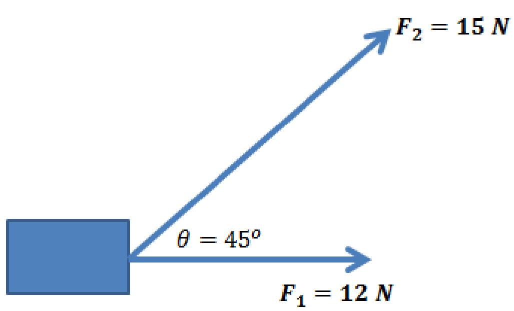


Figura 2. Ejemplo 1
Fuente: Propia.

Un cuerpo es halado sobre un plano por dos fuerzas de 12 N y 15 N que forman entre sí un ángulo de 45 grados, como se ilustra en la Figura 2. Hallar la magnitud y la dirección de la fuerza resultante aplicada, y la aceleración producida sobre el cuerpo si la masa es de 10 kilogramos.

Solución

Inicialmente hallamos la fuerza resultante, lo cual constituye un problema de suma de dos vectores, aplicamos los procedimientos de suma descritos en la cartilla de la semana 1.

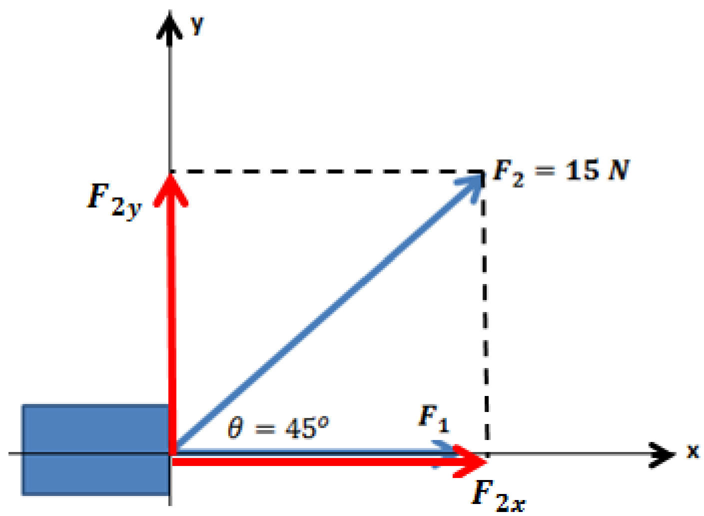


Figura 3. Ejemplo 2
Fuente: Propia.

Componentes de F_1: podemos considerar que la dirección de la fuerza de 12 N coincide con el eje x, por tanto esta fuerza solo tiene componente en x.

$$F_{1x} = F_1 = 12\ N$$
$$F_{1y} = 0$$

Descomposición de $\widehat{F}_2$

$$F_{2x} = F_2.Cos\theta = (15\ N)Cos45^o = (15\ N)(0,707) = 10,605\ N$$
$$F_{2y} = F_2.Sen\theta = (15\ N)Sen45^o = (15\ N)(0,707) = 10,605\ N$$

Componentes de la fuerza resultante $\widehat{F}_{r.}$

$$F_{Rx} = F_{1x} + F_{2x}$$
$$F_{Rx} = 12\ N + 10,605\ N$$

$$F_{Rx} = 22,605\ N$$

$$F_{Ry} = 10,605\ N$$

Magnitud del vector resultante $F_{r.}$

$$F_{r.} = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2}$$

$$F_{r.} = \sqrt{(22,605\ N)^2 + (10,605\ N)^2}$$

$$F_{r.} = \sqrt{(510,986\ + 112,466\ )N^2}$$

$$F_{r.} = \sqrt{625,452\ N^2} = 25,009\ N$$

Dirección de la fuerza resultante: el ángulo θ_R que el vector fuerza resultante forma con el eje x se halla a partir de:

$$Tan\theta_R = \frac{F_{Ry}}{F_{Rx}} = \frac{10,605\ N}{22,605\ N} = 0,469$$

$$\theta_R = Tan^{-1}(0,469)$$
$$\theta_R = 25,126^o$$

Peso de un cuerpo

Con frecuencia se tiende a confundir el peso y la masa de un cuerpo. El peso de un objeto corresponde a la fuerza de atracción gravitacional ejercida sobre él. El peso depende del valor de la aceleración de la gravedad, por ejemplo, en razón de la diferencia en los valores de la gravedad en la tierra y en la luna, todo objeto tiene en la luna un peso que es aproximadamente la sexta parte de su peso en la tierra.

En cercanías de la superficie de la tierra, el peso o fuerza de atracción gravitacional ejercida sobre un cuerpo es un vector que apunta siempre hacia el centro de la tierra, la ecuación correspondiente es:

$$\hat{\boldsymbol{w}} = \hat{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{g}} = \boldsymbol{m}\hat{\boldsymbol{g}}$$

Vista en forma escalar, se tiene la magnitud:

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{g}} = \boldsymbol{mg}$$

Es de aclarar que la gravedad varía ligeramente con la distancia al centro de la tierra, por ejemplo, al nivel del mar la gravedad es de $9{,}8\frac{mts}{seg^2}$, mientras que en una alta montaña el valor es de $9{,}77\frac{mts}{seg^2}$, una diferencia muy pequeña, pero importante tenerla en cuenta. En lo que sigue de este curso, a menos que se especifique lo contrario trabajaremos con el valor de $9{,}8\frac{mts}{seg^2}$.

Tercera ley de Newton

Cómo explica usted que, si en un ataque de furia, una persona le pega un fuerte puño a una pared finalmente quien más sufre es la persona alterada? Newton explica esto a través de su tercera ley, conocida también como ley de acción y reacción, esta establece lo siguiente:

Si dos objetos 1 y 2 interactúan, la fuerza F_{12} que ejerce el cuerpo 1 sobre el cuerpo 2 es de igual magnitud y dirección contraria a la fuerza F_{21}que ejerce el cuerpo 2 sobre el cuerpo 1. La ecuación vectorial correspondiente es:

$$\hat{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{12}} = -\hat{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{21}}$$

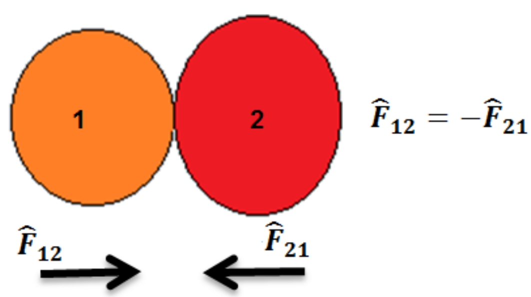


Figura 4. Tercera ley de Newton
Fuente: Propia.

La Figura 4 ilustra la situación. Comúnmente a una de las fuerzas se le llama fuerza de acción y a la otra fuerza de reacción. Las dos fuerzas en su conjunto se denominan pareja de fuerzas acción–reacción. Las parejas de fuerzas acción reacción actúan sobre objetos diferentes, es así como se explica que, al propinar un fuerte puño a una pared, el puño agresor también se ve afectado por una fuerza.

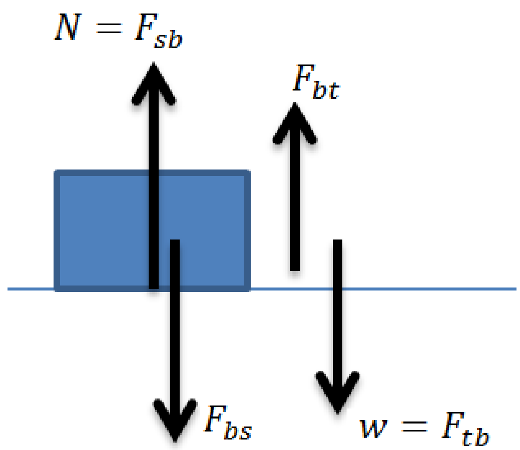


Figura 5. Parejas de fuerzas
Fuente: Propia.

La Figura 5 corresponde a un bloque o cuerpo sobre una superficie horizontal, aquí se tiene la pareja de fuerzas acción–reacción (F_{sb}, F_{bs}), F_{sb} es la fuerza que ejerce la superficie sobre el bloque, mientras que F_{bs} es la que ejerce el bloque sobre la superficie. A la fuerza ejercida por la superficie sobre el bloque comunmente se le conoce como fuerza normal, ya que es perpendicaular a la superficie. Por otro lado se tiene la pareja de fuerzas acción-reacción (F_{tb}, F_{bt}), entre el planeta tierra y el bloque. Obsérvese que en ambos casos la pareja actua sobre cuepos diferentes.

Con frecuencia, en la solución de problemas donde interviene uno o más cuerpos se requiere representar las fuerzas que actuan sobre cada uno de ellos independientemente, para ello se elabora un esquema, conocido como diagrama de cuerpo libre o diagrama de cuerpo aislado, a partir del cual se realiza el respectivo análisis. En el caso del bloque sobre la superficie, vemos que las fuerzas que actuan sobre el bloque son el peso w y la fuerza normal N.

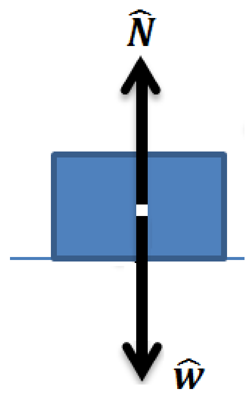


Figura 6. Diagrama de cuerpo libre
Fuente: Propia.

Dado que el bloque se encuentra en reposo, no hay aceleración, por tanto la fuerza neta sobre él es cero. Puesto que las unicas fuerzas actuando sobre el bloque son el peso y la normal se tiene que, esta dos fuerzas se anulan, es decir:

$$\sum \hat{\boldsymbol{F}} = \mathbf{0}$$
$$\hat{\boldsymbol{N}} + \hat{\boldsymbol{w}} = \mathbf{0}$$
$$\hat{\boldsymbol{N}} = -\hat{\boldsymbol{w}}$$

Es de aclarar que estas dos fuerzas son de igual magnitud y sentido contrario, pero no constituyen una pareja de acción reacción en razón a que no actuan sobre cuepos diferentes.

Estado de equilibrio

Frecuentemente se escucha que un cuerpo se encuentra en equilibrio, con ello se quiere indicar que la aceleración del cuerpo es cero o, lo que es lo mismo, el cuerpo se encuentra en reposo o movimiento rectilíneo a velocidad constante, lo anterior significa que la fuerza neta, o resultante de todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo, es igual a cero. La situación descrita anteriormente, en la que un bloque se encuentra en reposo sobre una superficie horizontal es un ejemplo de estado de equilibrio.

Fuerzas de fricción

Las fuerzas de fricción son fuerzas que se oponen al movimiento de los cuerpos, existen los diferentes tipos de fuerzas de fricción:

Fricción por rozamiento: es la fuerza que está presente cuando un cuerpo se desliza o descansa sobre una superficie con algún grado de rugosidad, ejemplo la fuerza de fricción que actúa sobre una caja que es desplazada sobre un plano ejerce oposición al desplazamiento. La fricción por rozamiento es necesaria para facilitar el caminar de las personas sobre una superficie. ¿Caminaría usted fácilmente sobre una superficie completamente lisa?

Fricción por rodadura: fuerza ejercida por una superficie cuando un cuerpo rueda sobre ella, por ejemplo para el adecuado desplazamiento de un vehículo sobre una vía se requiere cierto grado de fricción entre las ruedas y el asfalto o pavimento, de lo contrario se puede presentar deslizamiento de las llantas y una peligrosa pérdida de control del vehículo por parte del conductor.

Fricción por viscosidad: si un cuerpo se encuentra en un medio viscoso como líquido, aceite o aire, se presenta una oposición al movimiento debido a la fricción por viscosidad.

En este curso, a menos que se especifique lo contrario, se considerarán situaciones en las que intervienen fuerzas de fricción por rozamiento.

Consideremos un bloque de madera en reposo sobre una superficie horizontal, en este caso las únicas fuerzas que intervienen sobre el cuerpo son el peso y la Normal, no hay fuerza de fricción debido a que no hay una fuerza que intente mover el cuerpo sobre la superficie, sin embargo si aplicamos una pequeña fuerza horizontal F al bloque, probablemente no logremos hacer que el cuerpo se mueva en el sentido deseado, esto se debe a que al aplicar la fuerza F, surge una pequeña fuerza de fricción, paralela a la superficie pero en sentido contrario a la fuerza aplicada, suficiente para impedir el movimiento, esta fricción se denomina fuerza de fricción estática. Si intentamos con una fuerza F un poco mayor la fuerza de fricción estática puede crecer lo suficiente para continuar impidiendo el movimiento. Si continuamos intentado con fuerzas de mayor valor la fuerza de fricción estática irá creciendo hasta un su máximo valor, situación en la cual la fuerza aplicada es suficiente para iniciar a vencer la fricción. El cuerpo se mueve bajo la acción de la fuerza aplicada, pero con la oposición de la fuerza de fricción, a esta fricción presente cuando el cuerpo está en movimiento se le llama fuerza de fricción cinética $\hat{f}_k$, la fuerza resultante en la dirección del movimiento es entonces:

$$\boldsymbol{F_{neta}} = \sum \boldsymbol{F_x} = \boldsymbol{F} - \boldsymbol{f_k}$$

Los experimentos demuestran que tanto la fuerza de fricción cinética, como la estática son proporcionales a la magnitud de la fuerza normal, es decir, la fuerza de fricción es el producto de la fuerza normal por una constante de proporcionalidad, específicamente se tiene las siguientes expresiones:

$$f_s \leq \mu_s N \qquad (fuerza\ de\ fricción\ estática)$$

$$f_k = \mu_k N \quad (fuerza\ de\ fricción\ dinámica)$$

Donde μ_s y μ_k son respectivamente los coeficientes de fricción estática y dinámica y N es la magnitud de la fuerza normal. En el caso estático se cumple la igualdad cuando las dos superficies están a punto de deslizarse la una sobre la otra.

Fuerzas ejercidas por resortes

Un resorte solo ejerce fuerza cuando se comprime o estira y la magnitud de esta fuerza es directamente proporcional a la magnitud del estiramiento o compresión. La posición del resorte en la cual no hace fuerza se llama posición de equilibrio y es costumbre colocar el cero del sistema coordenado en el extremo libre del resorte cuando se encuentra en equilibrio.

El principio que describe la fuerza que ejerce un resorte se conoce como ley de Hooke y su ecuación en una dimensión es:

$$\mathbf{F = kx} \qquad (\mathbf{4.4})$$

Donde k es una constante conocida como constante de elasticidad del resorte y es propia de cada resorte, el valor de la constante k indica qué tan fuerte es el resorte, las unidades de k son las de fuerza dividida por longitud, en el SI es *N/m*. Si se compara la constante elástica de un resorte de la suspensión de un camión con la del resorte de un bolígrafo, la primera es muy grande. El signo menos indica que esta es una fuerza restitutiva, restauradora o recuperadora, porque siempre trata de recuperar el equilibrio del sistema.

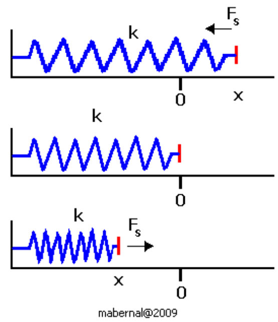


Figura 7. Ley de Hooke
Fuente: mabernal@2009.

En la Figura 7 La coordenada *x* es positiva a la derecha del origen, mientras que a la izquierda del cero la coordenada es negativa. Para aclarar lo del signo de la ecuación (4.4) y el carácter recuperador de la fuerza de Hooke, suponga que se estira el resorte, ver Figura 4.7, la coordenada *x* es positiva, luego el sentido positivo es hacia la derecha. Al calcular la fuerza, la constante elástica siempre es positiva, la coordenada en este caso también, pero el menos de la ecuación hace que la fuerza sea negativa, es decir que actúa hacia la izquierda, sentido negativo, tratando de llevar el sistema hacia el cero o punto de equilibrio. Ahora suponga que el resorte se comprime: en este caso la coordenada *x* es negativa y al hacer las multiplicaciones de la ecuación (4.4) resulta que la fuerza es positiva, es decir apunta hacia la derecha de nuevo tratando de llevar el sistema hacia el estado de equilibrio.

Si un resorte como el de la Figura 7 se estira y luego se suelta, la fuerza de resorte actúa (hacia la izquierda) para llevar el sistema hacia el equilibrio pero a medida que se acerca al cero la rapidez con que lo hace aumenta y cuando llega, va tan rápido que se pasa y entonces la fuerza cambia de dirección (hacia la derecha), la acción de la fuerza hace frenar el movimiento pero ya se ha alejado, hacia la izquierda, del punto de equilibrio y la situación inicial se repite pero hacia la derecha, hasta que llega de nuevo al punto donde inició todo y vuelve y se repite el ciclo. Por lo tanto si solo actúa la fuerza del resorte la ecuación de la ley de Hooke predice un movimiento infinito.

Pautas de solución de problemas de las leyes de Newton

A continuación se presenta un conjunto de pautas que pueden resultar útiles en la solución de problemas en relación a las leyes de Newton.

1. Leer cuidadosamente el problema para tener claridad de las preguntas que plantea.
2. Elaborar un dibujo o esquema general de la situación a resolver.
3. Elaborar un diagrama de cuerpo libre para cada uno de los cuerpos, en este diagrama se muestra los ejes coordenados necesarios. Es recomendable elegir los ejes de tal manera que haya fuerzas en esa dirección.
4. Descomponer las fuerzas que no se encuentren sobre alguno de los ejes coordenados.
5. Si la componente de aceleración sobre uno de los ejes es cero, en el planteamiento de ecuaciones le corresponde $\sum F = 0$, en caso contrario le corresponde $m.a$ en esa dirección.
6. Resolver las ecuaciones que surgen por cada eje coordenado para el sistema completo.

Ejercicios

En los ejercicios presentados a continuación se invita al estudiante a aplicar las pautas antes señaladas.

Ejercicio 1

Un automóvil de masa *m* está sobre un camino cubierto con hielo, inclinado en un ángulo θ, como en la Figura 8, encuentre la aceleración del automóvil, suponiendo que no hay fricción.

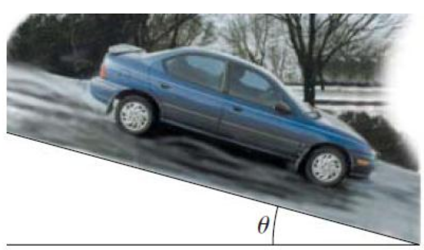


Figura 8. Ejercicio 1
Fuente: Propia.

Ejercicio 2

A un disco de hockey sobre un estanque congelado se le da una rapidez inicial de 20.0 m/s. Si el disco siempre permanece sobre el hielo y se desliza 115 m antes de llegar al reposo, determine el coeficiente de fricción cinética entre el disco y el hielo.

Ejercicio 3

Cuando empuja sobre una mesa una caja con una fuerza de 200 N en lugar de una fuerza de 50 N, puede sentir que hace un mayor esfuerzo. Cuando una mesa ejerce una fuerza normal hacia arriba de 200 N en lugar de una de magnitud más pequeña, ¿la mesa realmente hace algo de modo diferente?

Ejercicio 4

Al cuerpo de masa $m = 20,0\ kg$ que se muestra en la Figura 9 se le aplica una fuerza $T = 50N$ por medio de una cuerda, para que deslice por un piso rugoso. El coeficiente de fricción cinética entre el piso y el cuerpo es de $\mu = 0,1$. Calcule:

a) La aceleración del cuerpo.
b) La fuerza normal.
c) ¿Cuánto valdría la normal si la masa fuera de 1 kg? Interprete el resultado.

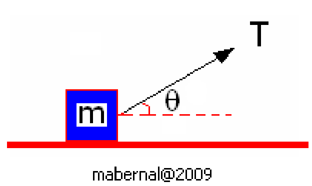


Figura 9. Ejercicio 4
Fuente: mabernal@2009.

Ejercicio 5. Máquina de Atwood: para el montaje de la Figura 10, $m_1 = 5\ kg$ y $m_2 = 12\ kg$. Calcule:

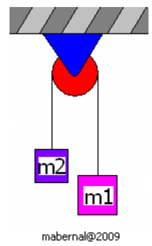


Figura 10. Ejercicio 5
Fuente: mabernal@2009.

a) La aceleración.
b) La tensión en la cuerda.
c) ¿Qué valor tendría la aceleración si $m_1 = m_2$?

Ejercicio 6

$m_1 = 10\ kg$ está ligado a $m_2 = 4\ kg$ por medio de una cuerda de masa despreciable que pasa por una polea también de masa despreciable como se ve en la Figura 11. El coeficiente de fricción cinética entre m_1 y el piso es de $\mu = 0{,}15$.

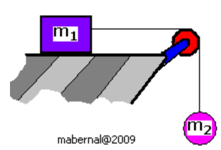


Figura 11. Ejercicio 6
Fuente: mabernal@2009.

a) ¿Hacia dónde se mueve el sistema?
b) Calcule el valor de la aceleración de los bloques.
c) Calcule el valor de la tensión en la cuerda.
d) Si la aceleración hubiese resultado negativa ¿Cómo se debería interpretar el resultado?

Ejercicio 7

*m*1 = 10 *kg* se mueve sobre un plano con inclinación $\alpha = 12^o$ sobre la horizontal y está ligado a *m*2 = 4 *kg* por medio de una cuerda de masa despreciable que pasa por una polea también de masa despreciable como se ve en la Figura 12. El coeficiente de fricción cinética entre *m*1 y el plano es de *μ* = 0,15.

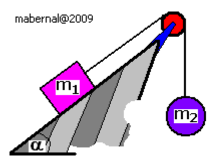


Figura 12: Ejercicio 7
Fuente: mabernal@2009.

a) ¿Hacia dónde se mueve el sistema?
b) Calcule el valor de la aceleración de los bloques.
c) Calcule el valor de la tensión en la cuerda.
d) Si la aceleración hubiese resultado negativa ¿Cómo se debería interpretar el resultado?
e) ¿Es posible que el sistema se encuentre en reposo? ¿Cómo nos daríamos cuenta?

Ejercicio 8

En la Figura 13, *m*1 = 10 *kg*, *m*2 = 6 *kg*, $\alpha = 12^o,\ \beta = 57^o, \mu = 0{,}1$ para todas las superficies.

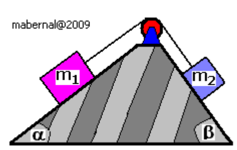


Figura 13. Ejercicio 8
Fuente: mabernal@2009.

a) ¿Hacia dónde se mueve el sistema?
b) Calcule el valor de la aceleración de los bloques.
c) Calcule el valor de la tensión en la cuerda.
d) Si la aceleración hubiese resultado negativa ¿Cómo se debería interpretar el resultado?
e) ¿Es posible que el sistema se encuentre en reposo? ¿Cómo nos daríamos cuenta?

Ejercicio 9

Para el sistema que se muestra en la Figura 14, m_1 = 20 kg, m_2 = 3 kg, m_3 = 2 kg, $\alpha = 12^o$, $\beta = 57^o$ y $\mu = 0{,}1$ para todas las superficies.

f) ¿Hacia dónde se mueve el sistema?
g) Calcule el valor de la aceleración de los bloques.
h) Calcule el valor de la tensión en la cuerda.
i) Si la aceleración hubiese resultado negativa ¿Cómo se debería interpretar el resultado?

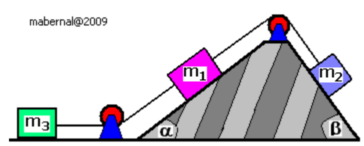


Figura 14. Ejercicio 9
Fuente: mabernal@2009.

3

Unidad 3

Energía mecánica

Física I

Autor: Danilo Ariza

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina
MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Introducción

El esquema de Newton, con base en el cual se ha trabajado el movimiento en la semana anterior, aunque es la base de la mecánica y en principio puede ser aplicado a toda situación, tiene una limitante muy importante con ciertas fuerzas, por ejemplo cuando estas dependan del tiempo y/o la posición ya que en la mayoría de los casos lleva a la necesidad de complejas técnicas numéricas. En otras palabras, los problemas en los que el esquema de Newton es aplicable y permite soluciones analíticas fáciles se reducen a menos de una decena y por esta razón se hace necesaria una forma alternativa de abordar los problemas de mecánica, este es el esquema de energías.

En esta quinta semana consideraremos un nuevo esquema de abordar problemas de mecánica, el esquema de energías. Se tratarán los conceptos de trabajo y las formas de energía cinética y potencial. La comprensión de los conceptos y principios así como el análisis y solución de situaciones con base en ellos, es fundamental en el estudio de temáticas de la cartilla de la semana 6, la cual es una continuación de esta temática.

Recomendaciones metodológicas

El estudio de los temas relacionados con trabajo y energía requiere que el estudiante este en permanente revisión de temas precedentes, por lo cual se recomienda realizar una revisión o resumen de las temáticas anteriores y una juiciosa y cuidadosa lectura del contenido de esta cartilla. También es importante elaborar un resumen de conceptos y principios incorporando en ello su fundamento matemático expresado en las respectivas ecuaciones. Se recomienda al estudiante el análisis de ejemplos propuestos bien sea en esta cartilla o en otros recursos que sean referenciados en este curso, todo ello con el fin de lograr un mayor afianzamiento y preparación para las actividades evaluativas a las que debe enfrentarse.

Desarrollo temático

Esquema de energía

La idea de energía es de fundamental importancia en ciencia e ingeniería, aunque no sea un concepto fácil de definir, todos los procesos físicos llevan asociado consumo, transferencia o transformación de energía, por ejemplo en cada uno de los casos de movimiento antes descritos se hace necesario que por efecto de las fuerzas aplicadas se deba emplear cierta cantidad de energía. Para pasar del esquema de fuerzas al de energías es necesario una variable que sirva de puente entre ambos mundos, pues como se verá finalmente son muy pocas las ocasiones en las que a nivel práctico los problemas se pueden resolver solo con energías, se requiere involucrar fuerzas aunque sin usar el esquema de Newton. Esta magnitud que enlaza los mundos de fuerza y energía se llama trabajo. En física el término trabajo tiene un significado diferente al que tiene en la vida cotidiana, donde se le da un sentido desde el punto de vista de lo laboral o el desarrollo de un oficio o tarea.

Trabajo

Si un objeto se mueve de un punto A a un punto B lo hace bajo la acción de una fuerza F sobre él, esto da lugar a la definición de trabajo que realiza dicha fuerza. Para mayor comprensión de las ideas que nos permitirán apropiarnos del concepto de trabajo consideremos un bloque en una superficie horizontal sobre el cual se aplica la fuerza F de tal manera que el cuerpo se mueve sobre la superficie desde un punto A hasta un punto B. La situación que se ilustra en la Figura 1.

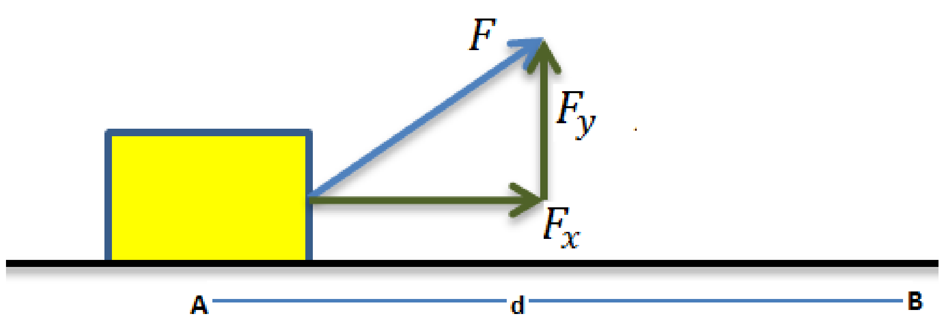


Figura 1. Fuerza F arrastrando a un cuerpo entre los puntos A y B
Fuente: Propia.

Al descomponer la fuerza F observamos que la componente F_y no contribuye al movimiento del cuerpo sobre la superficie, lo que permite afirmar que sólo la componente horizontal $F_x = FCos\theta$ es la que provoca el movimiento del bloque, además es lógico pensar que a mayor distancia que sea desplazado el bloque, la fuerza realiza mayor cantidad de trabajo. Con base en lo anterior se puede tener una primera definición asociada al trabajo.

Trabajo realizado por una fuerza constante

El trabajo W realizado por una fuerza constante F sobre un cuerpo a lo largo de una distancia Δr es el producto de la magnitud de la componente de la fuerza que contribuye al movimiento y la magnitud del desplazamiento. Es decir:

$$\boldsymbol{W = F.\Delta r\ Cos\theta} \qquad (\mathbf{5.1})$$

Donde θ es el ángulo formado por el vector fuerza y la dirección del movimiento.

Recordando el producto escalar de dos vectores, se puede observar que el trabajo realizado por un vector fuerza $\hat{F}$ a lo largo de un vector desplazamiento $\Delta\hat{r}$ corresponde precisamente al producto escalar de estos vectores, es decir:

$$\boldsymbol{W = \hat{F}.\Delta\hat{r}} \qquad (\mathbf{5.}2)$$

Se recalca aquí que cualquier fuerza perpendicular a la dirección del movimiento $(\theta = 90^o)$ no realiza trabajo.

¿Qué se puede afirmar si la componente de fuerza que realiza el trabajo apunta en la dirección contraria al desplazamiento? Esta situación se ilustra en la Figura 2, aquí se ve el cuerpo sometido a la acción de dos fuerzas, pero desplazándose hacia la derecha.

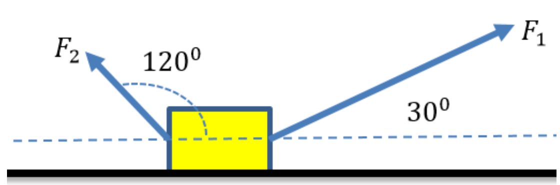


Figura 2. Cuerpo sometido a dos fuerzas
Fuente: Propia.

$$W_1 = (20\ N)(2\ mts)(\ Cos30^0) = (20\ N)(2\ mts)(0{,}86)$$

$$W_1 = julios$$

$$W_2 = (10\ N)(2\ mts)(\ Cos120^0) = (10\ N)(2\ mts)(-0{,}5) = -2{,}5\ julios$$

Podemos darnos cuenta que el trabajo realizado por una fuerza con componente opuesta a la dirección del movimiento es negativo. Un ejemplo de fuerzas que realizan trabajo negativo son las fuerzas de fricción.

Trabajo realizado por una fuerza dependiente de la posición

Si la fuerza ejercida sobre un cuerpo, a lo largo del eje x desde la posición x_i hasta la x_f, es dependiente de la posición no se puede aplicar la fórmula de la ecuación 5.2 debido a que en cada punto de la trayectoria la fuerza tiene diferente valor, sin embargo podemos considerar el trabajo total como la suma de una secuencia de trabajos muy pequeños realizados sobre desplazamientos muy pequeños, donde la fuerza se puede considerar casi invariable (ver Figura 3a). Se tendría entonces que el trabajo total correspondería a la siguiente aproximación:

$$W \approx \sum F_x \Delta x$$

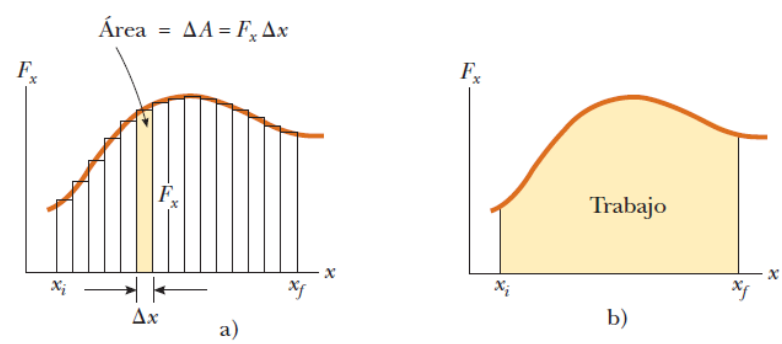


Figura 3. Trabajo realizado por fuerzas dependientes de la posición
Fuente: Propia.

Al considerar desplazamientos tan pequeños como se quiera, es decir, de valores tales que $\Delta x \rightarrow 0$, se tendría un gran número de pequeños desplazamientos y el trabajo total se aproxima a un valor que numéricamente corresponde al área bajo la curva de F_x, (Figura 3b) este valor está dado por:

$$\boldsymbol{W} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum \boldsymbol{F_x \Delta x} = \int_{x_i}^{x_f} \boldsymbol{F_x dx} \qquad (\mathbf{5.3})$$

Si sobre un cuerpo o sistema de partículas actúan varias fuerzas, el trabajo total realizado corresponde al trabajo realizado por la resultante de fuerzas.

Fuerza de resorte

Los resortes obedecen a la ley de Hooke, $F = -kx$, como se puede apreciar esta fuerza es dependiente del valor de x. Asumiendo que la posición $x = 0$ coincide con la posición de equilibrio del resorte, hallar una expresión para comprimir o estirar el resorte desde una posición $x = x_i$ hasta una posición $x = x_{f.}$

La expresión para el trabajo realizado por una fuerza dependiente de la posición es:

$$W = \int_{x_i}^{x_f} \boldsymbol{F_x dx} \qquad (\mathbf{5.4})$$

Entonces el trabajo está dado por:

$$\boldsymbol{W} = \int_{x_i}^{x_f} \boldsymbol{F_x dx} = \int_{x_i}^{x_f} \boldsymbol{-kxdx} - \boldsymbol{k} \int_{x_i}^{x_f} \boldsymbol{xdx} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \boldsymbol{k} \left(\boldsymbol{x_i}^{\mathbf{2}} - \boldsymbol{x_f}^{\mathbf{2}}\right) \qquad (\mathbf{5.5})$$

Para el caso particular en que se comprime el resorte desde $x_i = 0$ hasta $x_f = -x$, el trabajo corresponde a:

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx = \int_0^{-x_l} -kxdx - k \int_0^{-x_l} xdx = -\frac{1}{2} k \left(0 - x_f^{\,2}\right) = \frac{1}{2} k x_f^{\,2}$$

Energía

Habiendo estudiado las ideas básicas respecto al trabajo, se podría establecer la noción de energía como la capacidad para realizar trabajo. Consideremos un objeto sobre el que actúan varias fuerzas mientras se mueve del punto A al punto B, el trabajo total es la suma de los trabajos que cada una de las fuerza hace sobre el objeto.

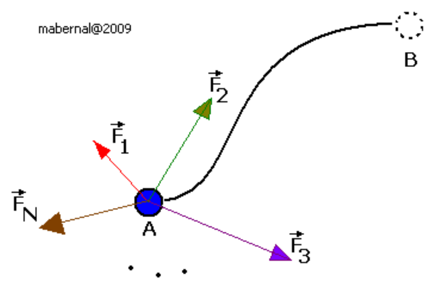


Figura 4. Cuerpo sometido a la acción de varias fuerzas
Fuente: Propia

Las diferentes fuerzas pueden ser de resortes, fuerzas constantes o de otra naturaleza. El trabajo total está dado por:

$$\boldsymbol{W_{total} = W_{F_1} + W_{F_2} + W_{F_3} + \cdots + W_{F_N}} \qquad (\mathbf{5.6})$$

Energía cinética - Teorema del trabajo y la energía cinética

El trabajo total por acción de diferentes fuerzas sobre un cuerpo también se puede calcular realizando la suma vectorial de las fuerzas que actúan sobre el objeto y resolviendo:

$$W_{total} = \int_{r=A}^{r=B} \hat{F}_{neta} \,. d\hat{r}$$

Como el efecto de esta fuerza neta es producir una aceleración, en la integral anterior se puede remplazar:

$$\hat{F}_{neta} = m\hat{a} = m\frac{d\hat{v}}{dt}$$

Entonces:

$$W_{total} = \int_{r=A}^{r=B} \hat{F}_{neta} \,. d\hat{r} = m\int_{r=A}^{r=B} \frac{d\hat{v}}{dt} . d\hat{r} = m\int_{r=B}^{r=B} \frac{d\hat{r}}{dt} . d\hat{v} = \ m\int_{v_A}^{v_B} \hat{v} \,. d\hat{v}$$

Como ahora la variable de integración es la velocidad, en la última integral se ha cambiado los límites de integración a valores de la velocidad, finalmente se tiene:

$$\boldsymbol{W_{total} = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = K_B - K_A} \qquad \textbf{(5.7)}$$

A una expresión de la forma $K = \frac{1}{2}mv^2$ recibe el nombre de energía cinética y está asociado a la energía que tiene un cuerpo en virtud de su rapidez, siempre es un valor positivo y solo vale cero si la rapidez del cuerpo es cero, es decir si el objeto está en reposo.

Al evaluar la integral resulta en la diferencia de energía cinética entre los puntos inicial y final, pero el trabajo calculado corresponde al trabajo realizado a lo largo de la trayectoria.

Insistiendo un poco en el concepto de energía cinética y a manera de ejemplo, imagine un carro que choca contra una pared, la magnitud del daño está asociada a la rapidez con que el carro llega a la pared, a mayor rapidez (energía cinética) mayor daño (trabajo).

La unidad de medida de energía cinética es [*K*] = [*Masa*] × $[rapidez]^2$, que en el sistema internacional corresponde a [*K*] = $kg\, m^2/s^2$, se puede comprobar que coincide con la dentición de joule, es decir que $1kg\, m^2/s^2 \ = \ 1J$.

La ecuación 5.7 es uno de los resultados más fuertes y útiles de la mecánica y se conoce como Teorema del trabajo y la energía cinética. Bajo estas consideraciones podemos decir que el trabajo total mide el cambio de energía cinética del sistema. Si la energía cinética aumenta significa que se realiza un trabajo positivo, el trabajo es negativo si la energía cinética disminuye.

Energía potencial gravitacional

Consideremos un sistema de dos cuerpos en los que uno de ellos sea tan masivo que pueda tomarse como fijo o de velocidad despreciable, por ejemplo, la tierra, y mientras una pequeña pelota cae a la tierra, se puede considerar que la energía cinética del sistema es solo la correspondiente a la de la pelota. El par tierra-pelota interactúa a través de la atracción gravitacional, por tanto se debe realizar trabajo para levantar la pelota desde una posición inicial y_i hasta una posición final y_f a lo largo de una trayectoria vertical como se muestra en la Figura 5.

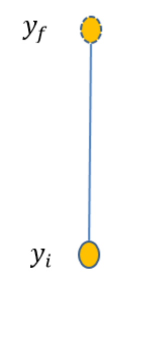


Figura 5. Trabajo convertido en energía potencial
Fuente: Propia.

El trabajo realizado corresponde a una transferencia de energía a la pelota, la cual se encuentra en reposo en las posiciones inicial y final, por lo que se deduce que no hay cambio en la energía cinética, lo que indica que la energía transferida a la pelota toma otra forma. Si luego de levantar la pelota se deja caer, al pasar nuevamente por la posición inicial la energía se libera y, puesto que en su caída va ganando velocidad, su energía cinética va en aumento, esta energía es el producto de la transformación de la energía transferida al realizar el trabajo que levantó la pelota. Cuando la pelota se encontraba en el punto más alto, su energía tenía el potencial para convertirse en energía cinética, como al final sucede. La forma de energía del cuerpo en virtud de la altura a la que se encuentra se conoce como energía potencial.

El trabajo realizado para llevar el cuerpo desde la posición inicial y_i hasta la posición final y_f corresponde a:

$$W = F.\Delta y = mg\Delta y = mg\left(y_f - y_i\right) = mgy_f - mgy_i = U_{gf} - U_{gi}$$

$$\boldsymbol{W = mgy_f - mgy_i = U_{gf} - U_{gi}} \qquad \mathbf{(5.8)}$$

Las cantidades de la forma $\boldsymbol{U_g = mgy}$ se conoce como energía potencial gravitacional, al igual que la energía cinética la unidad de energía potencial gravitacional es el julio.

El trabajo realizado corresponde a la diferencia de energía potencial gravitacional, la energía potencial gravitacional solo depende de la altura vertical del cuerpo sobre la superficie de la Tierra. La misma cantidad de trabajo es requerida si se empuja el cuerpo hacia arriba desde la misma altura inicial hasta la misma altura final sobre un plano inclinado sin fricción.

Energía potencial elástica

Consideremos ahora un resorte de constante de elasticidad k. Se sabe que la fuerza elástica que ejerce el resorte es:

$$F_s = -kx$$

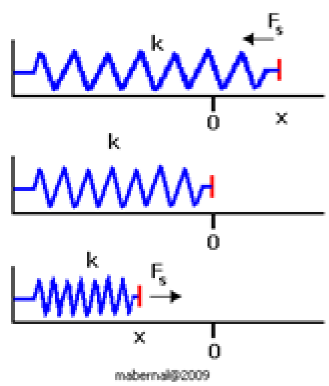


Figura 6. Energía potencial elástica debida a un resorte
Fuente: mabernal@2009.

El trabajo realizado con esta fuerza para llevar la configuración de una posición x_i a una posición x_f corresponde a:

$$\boldsymbol{W = \frac{1}{2}kx_f^2 - \frac{1}{2}kx_i^2 = U_{ef} - U_{ei}} \qquad (\mathbf{5.9})$$

Cada expresión de la forma $\boldsymbol{U_{ef} = \frac{1}{2}kx_f^2}$ es conocida como energía potencial elástica, teniéndose entonces que el trabajo realizado es igual a la diferencia entre el valor inicial y final de la energía potencial elástica del sistema.

Energía mecánica

La energía mecánica de un sistema en un estado o punto específico corresponde a la suma de las energías cinética y potencial en ese punto, teniendo en cuenta que la energía potencial se presenta en sus formas gravitacional y elástica, se tiene entonces que la energía mecánica está dada por:

$$\boldsymbol{Energ\acute{\imath}a\ Mec\acute{a}nica = U_m = K + U_g + U_e} \qquad (\mathbf{5.10})$$

Fuerzas conservativas y no conservativas

En apartes anteriores se introdujo la magnitud física trabajo y se vio que este mide el cambio en la energía cinética de un cuerpo o sistema de cuerpos, resultado conocido como el teorema del trabajo y la energía cinética. Su gran poder reside en la posibilidad de resolver fácilmente problemas en los cuales las fuerzas que intervienen dependen del tiempo o la posición y para los cuales el esquema de Newton lleva a integrales muy complicadas o imposibles de resolver analíticamente, por lo que en la mayoría de casos conducen a soluciones numéricas. Con esta idea en mente es lógico preguntarse si es posible llevar más allá la idea de energía, desde luego buscando ampliar el conjunto de tipos de energías y armar un cuerpo de conocimientos que promete hacer más fácil resolver los problemas de la mecánica. Después de pensar, organizar, reorganizar, volver a pensar mucho en este enfoque los físicos lograron clasificar las fuerzas en dos tipos que llamaron conservativas y no conservativas, los nombres tomarán sentido más adelante.

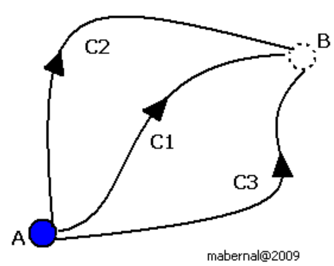


Figura 7. Movimiento de un cuerpo por caminos distintos
Fuente: mabernal@2009.

Una fuerza es conservativa cuando al actuar sobre un cuerpo que se mueve del punto A al punto B, el trabajo que realiza es independiente de la trayectoria, depende solo de los puntos inicial y final. En la Figura 7 se muestran tres posibles caminos para llevar el cuerpo del punto A al B, si la fuerza es conservativa se debe cumplir que:

$$W = \int_{C1} \hat{F}.d\hat{r} = \int_{C2} \hat{F}.d\hat{r} = \int_{C3} \hat{F}.d\hat{r}$$

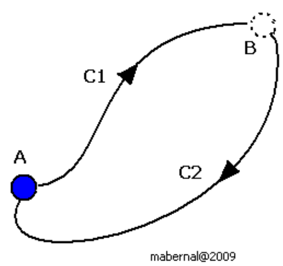


Figura 8. El trabajo realizado por una fuerza conservativa en un camino cerrado es cero
Fuente: mabernal@2009.

Más aún, el trabajo que hace esta fuerza debe ser igual para cualquier camino que una estos dos puntos. Parece lógico pensar que si el trabajo que hace esta fuerza conservativa cuando el cuerpo se mueve de A hasta B vale W, valdrá $-W$ cuando el cuerpo se mueve desde B hasta A, como se ilustra en la Figura 8 sin importar el camino seguido. Sumando los dos trabajos podemos concluir que cuando un cuerpo se mueve en una trayectoria cerrada, el trabajo que hace una fuerza conservativa actuando sobre el cuerpo es cero, es decir:

$$W = \oint \hat{F}.d\hat{r} = 0$$

Donde la integral se realiza sobre un camino cerrado.

Trabajo realizado por fuerzas no conservativas

Hasta ahora nos hemos referido al trabajo realizado por fuerzas conservativas, es decir aquellas en las cuales el trabajo realizado es independiente de la trayectoria, pero conviene en este momento analizar la situación en la que por ejemplo, se impulsa un bloque para que se deslice sobre una superficie horizontal, habiendo fricción entre el bloque y la superficie, se ve que el cuerpo finalmente se detiene, con lo cual ya no tiene energía cinética y, puesto que no ha habido transformación a ninguna de las formas de energía potencial, esto indica que la energía cinética del sistema se ha disipado (realmente se ha transformado en calor o energía interna de los cuerpos en contacto, es otra forma de energía, pero no es energía mecánica).

Consideremos ahora el caso de un cuerpo que se mueve verticalmente hacia abajo por acción de la atracción gravitacional o a través de un plano inclinado sin fricción. En estos casos el trabajo realizado es el mismo, no depende de la trayectoria. Sin embargo, en presencia de fuerza de fricción entre el plano inclinado y la superficie, se genera un aumento en la energía interna del sistema en detrimento de la energía cinética que debería tener el bloque en caso de no haber fuerza de fricción, se tiene entonces que una parte de la energía potencial inicial se ha convertido en energía interna del sistema, es más la cantidad de energía potencial transformada en energía interna depende de la distancia recorrida sobre el plano, a mayor distancia mayor energía interna, lo que indica que si el plano fuera más inclinado la distancia a lo largo del plano sería menor y por tanto menor la energía interna, esto significa que el trabajo realizado por la fuerza de fricción es dependiente de la trayectoria seguida. Se tiene entonces que una fuerza no conservativa es aquella cuyo trabajo realizado sobre un sistema depende de la trayectoria asociada al desplazamiento y el trabajo total realizado por esta fuerza da lugar a una disminución de la energía mecánica del sistema, es decir, el trabajo W_{NC} realizado por las fuerzas no conservativas, desde un punto inicial hasta un punto final está dado por:

$$\boldsymbol{W_{NC} = U_i - U_f} \qquad (\mathbf{5.11})$$

Fuerzas conservativas y función energía potencial

Una función energía potencial $\boldsymbol{U}$ se define de tal forma que el trabajo realizado por fuerzas conservativas sea igual a la disminución en la energía potencial del sistema. El sistema podría ser una configuración en la que un cuerpo se mueve a lo largo del eje *x,* bajo la acción de una fuerza conservativa $\boldsymbol{F_s}$. El trabajo realizado es:

$$\boldsymbol{W_C} = \int_{x_i}^{x_f} \boldsymbol{F_x dx} = -\Delta \boldsymbol{U} = -\left(\boldsymbol{U_f} - \boldsymbol{U_i}\right) \qquad (\mathbf{5.12})$$

Siendo la fuerza F_x la componente de $\boldsymbol{F_s}$ en la dirección del desplazamiento. Lo anterior significa que el trabajo realizado por la fuerza conservativa sobre el sistema es igual al negativo de la variación en la energía potencial relacionado con la fuerza, es decir, la variación de la energía potencial es negativa (y por tanto el trabajo es positivo) si la componente de fuerza F_x apunta en la misma dirección que dx, ejemplo de ello es cuando un objeto disminuye su altura (disminuye la energía potencial y por tanto el trabajo es positivo) o cuando un resorte empuja un objeto en el sentido de la posición de equilibrio.

Ejercicios

Ejercicio 1.

Se deja caer un bloque de 5 kg desde una altura de 10 m medida desde el piso, ignorando la resistencia del aire:

a) Calcule el valor de la energía mecánica en el punto donde se suelta el bloque.
b) Calcule el valor de la velocidad justo cuando llega al piso.
c) ¿Para qué altura h medida desde el piso es la energía cinética igual a la energía potencial gravitacional?
d) ¿Para qué altura h medida desde el piso es la velocidad justo la mitad de la que lleva el bloque al llegar al piso?
e) Elabore una gráfica a escala donde simultáneamente se pueda apreciar el comportamiento de la energía mecánica, la energía potencial gravitacional y energía cinética contra el tiempo.

Ejercicio 2.

Desde la parte más alta de un plano inclinado a 39 grados respecto a la horizontal y sin fricción se suelta un objeto de 7 kg de masa, al llegar al suelo sigue por una superficie horizontal rugosa, en la que el coeficiente de fricción cinético entre la superficie y el objeto es 0,15. Medida desde la base del plano ¿A qué distancia llega el objeto?

Ejercicio 3.

Un resorte de constante elástica k = 900 N/m se comprime 15 cm desde su posición de equilibrio para disparar verticalmente una bala de 1,00 kg, como se muestra en la siguiente Figura. Ignorando la resistencia del aire:

a) Calcule la altura máxima que alcanza la bala.
b) Calcule la velocidad que tiene la bala en el momento que el resorte regresa a la posición de equilibrio.

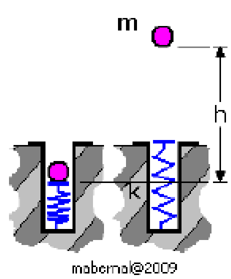


Figura 9. Ejercicio 3
Fuente: mabernal@2009.

Unidad 3

Conservación de la energía mecánica

Física I

Autor: Danilo Ariza

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina
MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Introducción

La cartilla de la semana 5 introdujo por primera vez en este curso los conceptos relacionados con trabajo, energía cinética, energía potencial gravitacional y energía potencial elástica, así como un principio que explica la relación entre el trabajo realizado y la variación en la energía cinética. En esta sexta semana continuamos tomando en consideración el trabajo y la energía pero ahondando en ideas o principios que explican cuantitativamente la transformación entre estas formas de energía, este es el principio de conservación de la energía.

Recomendaciones metodológicas

El estudio de los temas relacionados con trabajo y energía así como los principios de conservación requiere del estudiante la detallada revisión de los temas de la semana 5, es recomendable que elabore un resumen de las mismas y una juiciosa y cuidadosa lectura del contenido de esta cartilla. También es importante elaborar un resumen de conceptos y principios incorporando su fundamento matemático expresado en las respectivas ecuaciones. Se recomienda al estudiante el análisis de ejemplos propuestos bien sea en esta cartilla o en otros recursos que sean referenciados en este curso, todo esto con el fin de lograr un mayor afianzamiento y preparación para las actividades evaluativas a las que debe enfrentarse.

Desarrollo temático

Fuerzas conservativas y no conservativas

En la cartilla 5 se introdujo la magnitud física trabajo y se vio que éste mide el cambio en la energía cinética de un cuerpo o sistema de cuerpos, resultado conocido como el teorema del trabajo y la energía cinética. Su gran poder reside en la posibilidad de resolver fácilmente problemas en los cuales las fuerzas que intervienen dependen del tiempo o la posición y para los cuales el esquema de Newton lleva a integrales muy complicadas o imposibles de resolver analíticamente, por lo que en la mayoría de casos conducen a soluciones numéricas. Con esta idea en mente es lógico preguntarse si es posible llevar más allá la idea de energía, desde luego buscando ampliar el conjunto de tipos de energías y armar un cuerpo de conocimientos que promete hacer más fácil resolver los problemas de la mecánica. Después de pensar, organizar, reorganizar, volver a pensar mucho en este enfoque los físicos lograron clasificar las fuerzas en dos tipos que llamaron conservativas y no conservativas, tal clasificación se hace en términos del valor del trabajo realizado por una fuerza en relación a la trayectoria a lo largo de la cual se mueve el cuerpo bajo la acción de las fuerzas.

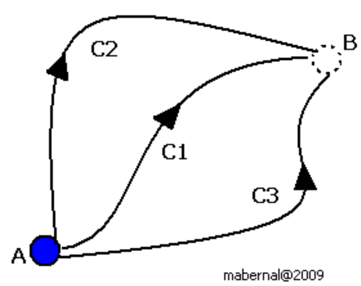


Figura 1. Movimiento de un cuerpo por caminos distintos
Fuente: Propia.

Trabajo realizado por fuerzas conservativas

Una fuerza es conservativa cuando al actuar sobre un cuerpo que se mueve del punto A al punto B, el trabajo que realiza es independiente de la trayectoria, depende solo de los puntos inicial y final. En la Figura 2 se muestran tres posibles caminos para llevar el cuerpo del punto A al B, si la fuerza es conservativa se debe cumplir que:

$$W = \int_{C1} \hat{F}.d\hat{r} = \int_{C2} \hat{F}.d\hat{r} = \int_{C3} \hat{F}.d\hat{r}$$

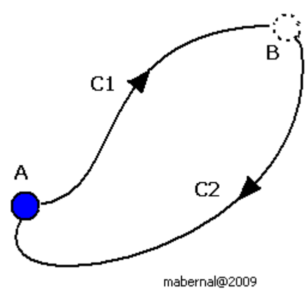


Figura 2. El trabajo realizado por una fuerza conservativa en un camino cerrado es cero
Fuente: Propia.

El trabajo que hace esta fuerza debe ser igual para cualquier camino que una estos dos puntos. Parece lógico pensar que si el trabajo que hace esta fuerza conservativa cuando el cuerpo se mueve de A hasta B vale *W*, valdrá $-W$ cuando el cuerpo se mueve desde B hasta A, como se ilustra en la Figura 8 de la cartilla 5 sin importar el camino seguido. Sumando los dos trabajos podemos concluir que cuando un cuerpo se mueve en una trayectoria cerrada, el trabajo que hace una fuerza conservativa actuando sobre el cuerpo es cero, es decir:

$$W = \oint \hat{F}.d\hat{r} = 0$$

Donde la integral se realiza sobre un camino cerrado.

Trabajo realizado por fuerzas no conservativas

Hasta ahora nos hemos referido al trabajo realizado por fuerzas conservativas, es decir aquellas en las cuales el trabajo realizado es independiente de la trayectoria, pero conviene en este momento analizar la situación en la que por ejemplo, se impulsa un bloque para que se deslice sobre una superficie horizontal, habiendo fricción entre el bloque y la superficie, se ve que el cuerpo finalmente se detiene, con lo cual ya no tiene energía cinética y, puesto que no ha habido transformación a ninguna de las formas de energía potencial, esto indica que la energía cinética del sistema se ha disipado. (Realmente se ha transformado en calor o energía interna de los cuerpos en contacto, es otra forma de energía, pero no es energía mecánica).

Consideremos ahora el caso de un cuerpo que se mueve verticalmente hacia abajo por acción de la atracción gravitacional o a través de un plano inclinado sin fricción. En estos casos el trabajo realizado es el mismo, no depende de la trayectoria. Sin embargo, en presencia de fuerza de fricción entre el plano inclinado y la superficie, se genera un aumento en la energía interna del sistema en detrimento de la energía cinética que debería tener el bloque en caso de no haber fuerza de fricción, se tiene entonces que una parte de la energía potencial inicial se ha convertido en energía interna del sistema, es más la cantidad de energía potencial transformada en energía interna depende de que la distancia recorrida sobre el plano, a mayor distancia mayor energía interna, lo que indica que si el plano fuera más inclinado la distancia a lo largo del plano sería menor y por tanto menor la energía interna, esto significa que el trabajo realizado por la fuerza de fricción es dependiente de la trayectoria seguida. Se tiene entonces que una fuerza no conservativa es aquella cuyo trabajo realizado sobre un sistema depende de la trayectoria asociada al desplazamiento y el trabajo total realizado por esta fuerza da lugar a una disminución de la energía mecánica del sistema, es decir, el trabajo W_{NC} realizado por las fuerzas no conservativas, desde un punto inicial hasta un punto final está dado por:

$$\boldsymbol{W_{NC} = U_i - U_f} \qquad (\mathbf{6.2})$$

Fuerzas conservativas y función energía potencial

Una función energía potencial $\boldsymbol{U}$ se define de tal forma que el trabajo realizado por fuerzas conservativas sea igual a la disminución en la energía potencial del sistema. El sistema podría ser una configuración en la que un cuerpo se mueve a lo largo del eje *x,* bajo la acción de una fuerza conservativa $\boldsymbol{F_s}$. El trabajo realizado es:

$$\boldsymbol{W_C = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx = -\Delta U = -(U_f - U_i)} \qquad (\mathbf{6.3})$$

Siendo la fuerza F_x la componente de $\boldsymbol{F_s}$ en la dirección del desplazamiento. Lo anterior significa que el trabajo realizado por la fuerza conservativa sobre el sistema es igual al negativo de la variación en la energía potencial relacionado con la fuerza, es decir, la variación de la energía potencial es negativa (y por tanto el trabajo es positivo) si la componente de fuerza F_x apunta en la misma dirección que dx, ejemplo de ello es cuando un objeto disminuye su altura (disminuye la energía potencial y por tanto el trabajo es positivo) o cuando un resorte empuja un objeto en el sentido de la posición de equilibrio.

Conservación de la energía mecánica

En la cartilla de la semana 5 abordamos fundamentalmente principios básicos asociados a la energía cinética, energía potencial gravitacional y energía potencial elástica, también analizamos algunos principios que relacionan el trabajo realizado por fuerzas que actúan sobre el sistema y las variaciones en los valores de la energía. Esta cartilla atañe a un importante principio que explica cuantitativamente la transformación entre estas formas de energía, este es el principio de conservación de la energía.

Según lo tratado en la cartilla anterior, una de las formas de transferir energía a un sistema es mediante la realización de trabajo, sin embargo existen otras formas de transferencia de energía entre las que se encuentran las ondas mecánicas, la transferencia de calor, la transmisión electrónica y la radiación electromagnética. Una idea básica de la conservación de energía es que la energía no se crea ni se destruye, solo se transforma, por tanto la cantidad total de energía se conserva. Siempre que un cuerpo o sistema adquiere o se le transfiere energía esta es tomada o proporcionada de otro agente o sistema, es decir, si la cantidad total de energía en un sistema cambia, el cambio se debe a algún mecanismo de transferencia de energía entre el sistema y su exterior, matemáticamente se puede escribir el principio de conservación de la energía asociada a un sistema mediante la siguiente ecuación:

$$\Delta E = \sum T_E$$

Lo que indica que la variación de energía de un sistema corresponde a la suma de todas las transferencias de energía entre el sistema y su exterior.

Considerando los casos particulares de sistemas en los que el mecanismo de transferencia es el trabajo realizado por una fuerza externa que al mover el cuerpo solo se modifica su velocidad, por tanto la única forma de energía que cambia es la energía cinética. En este caso la ecuación de conservación de energía se convierte en:

$$W = \Delta K$$

$$Trabajo = modificación\ en\ la\ energía\ cinética$$

Otro caso particularmente importante es un sistema en el que no hay transferencia de energía al interior del sistema, por ejemplo el sistema tierra bloque en el cual el bloque se encuentra inicialmente a una altura y_i asociada a una energía potencial gravitacional inicial $U_{gi} = mgy_i$. Si ahora al bloque se le permite descender por acción de la fuerza de gravedad, cuando se encuentra a una altura y_f, la gravedad ha realizado un trabajo $W_g$dado por:

$$W_g = mgy_i - mgy_f = -\left(mgy_f - mgy_i\right) = -\Delta U_g$$

Además, teniendo en cuenta que en su caída el bloque incrementa su velocidad, con lo cual, según el teorema del trabajo y la energía cinética, el trabajo realizado es igual al cambio en la energía cinética, es decir:

$$W_g = -\Delta U_g = \Delta K \quad o$$

$$\boldsymbol{\Delta K + \Delta U_g = 0} \qquad (\mathbf{6.4})$$

La ecuación anterior indica que si no hay transferencia de energía entre el sistema y su exterior, la suma de cambios de energía cinética y potencial gravitacional es cero. Sin embargo, aunque no se demuestra aquí, se puede afirmar que es válida para todo tipo de energía potencial, es decir si un sistema aislado contempla formas de energía cinética, potencial gravitacional y potencial elástica, se puede plantear la siguiente ecuación:

$$\Delta \boldsymbol{K} + \Delta \boldsymbol{U_g} + \Delta \boldsymbol{U_e} = \mathbf{0} \qquad (\mathbf{6.5})$$

Esta ecuación se puede desglosar en términos de los valores de energía inicial y final, como se muestra a continuación:

$$\Delta K + \Delta U_g + \Delta U_e = 0$$

$$\left(K_f - K_i\right) + \left(U_{gf} - U_{gi}\right) + \left(U_{ef} - U_{ei}\right) = 0$$

$$\boldsymbol{K_f} + \boldsymbol{U_{gf}} + \boldsymbol{U_{ef}} = \boldsymbol{K_i} + \boldsymbol{U_{gi}} + \boldsymbol{U_{ei}} \qquad (\mathbf{6.6})$$

La forma de la última ecuación indica que la suma de los valores iniciales de energía cinética, potencial elástica y potencial gravitacional es igual a la suma de los valores finales de estas formas de energía. Se da una variedad de casos en los que si la energía cinética aumenta o disminuye, la energía potencial disminuye o aumenta de tal manera que la suma de los componentes de energía mecánica permanece constante. Todo esto ocurre si en el sistema no intervienen fuerzas no conservativas.

Ejemplo 1

La figura representa un niño realizando un ejercicio de *skateboard*. Nos proponemos analizar los intercambios de energía que se producen a lo largo del recorrido cuando pasa por los puntos A, B y C de la Figura 3. Supondremos también que la masa del niño y su *skate* es 60 kg y que no hay ningún tipo de rozamiento entre las ruedas y la pista.

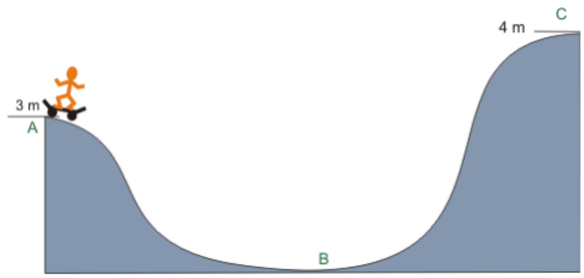


Figura 3. Ejemplo 1
Fuente: Propia.

El primer ejercicio que proponemos es realizar un análisis del movimiento del niño desde el punto de vista del esquema de energías.

Supongamos que el niño está en reposo cuando comienza el ejercicio, indica los tipos de energía que posee el niño en los puntos señalados y razona si podrá alcanzar el punto C sin darse impulso adicional. ¿Existe alguna variación en los valores de la energía mecánica, energía cinética y energía potencial a lo largo del recorrido?

¿Existe alguna relación entre los cambios de energía potencial y de energía cinética entre dos puntos cualesquiera (por ejemplo A y B)?

En segundo lugar vamos a hacer algunos cálculos:
¿Cuáles son los valores de energía potencial, cinética y mecánica del niño+*skate* en A, B y C?

En caso de que no alcanzara el punto C sin impulsarse, ¿Qué altura alcanzaría, y qué energía adicional necesitaría para alcanzarlo?

Finalmente, vamos a imaginar algunas situaciones distintas de las que se plantean en el problema y analicemos qué ocurriría en cada caso.

Solución

Los tipos de energía que están presentes a lo largo de todo el ejercicio realizado por el niño son:

a) Energía cinética: es la energía que tiene el niño cuando se está moviendo, está asociada a la velocidad en cada momento.
b) Energía potencial: es la que tiene el niño asociada a la posición que ocupa de tal forma que cuanto mayor sea la altura, mayor es su energía potencial.
c) Energía mecánica: la suma de la energía cinética y potencial.

En caso que en el movimiento no actúen fuerzas de rozamiento, el principio de conservación de energía mecánica dice que la energía mecánica total no cambia.

Comencemos en el punto A, aquí el cuerpo tiene una cierta energía potencial y, al estar en reposo, no tiene energía cinética. Su energía mecánica, en este punto, será igual a su energía potencial.

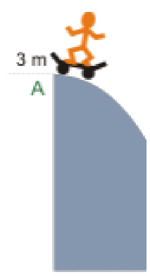


Figura 4. En el punto más alto solo hay energía potencial
Fuente: Propia.

En el tramo AB, conforme desciende hasta el punto B su altura disminuye y, por tanto, también disminuye su energía potencial. Además la velocidad ha debido aumentar, por lo que aumenta su energía cinética.

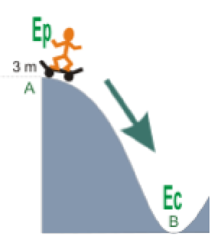


Figura 5. En el punto más bajo solo hay energía cinética
Fuente: Propia.

Como hemos supuesto que no hay rozamiento, podemos afirmar que su energía mecánica no ha cambiado en todo el trayecto por lo que, forzosamente, la pérdida de energía potencial tiene que haber sido igual al aumento de energía cinética.
En realidad este intercambio entre las energías cinética y potencial se produce en todo el recorrido ya que la energía mecánica no cambia en todo el recorrido por lo que podemos deducir que, en ningún caso, el niño puede alcanzar una altura mayor que la que tenía inicialmente (sin ningún impulso adicional), ya que esto significaría que su energía mecánica ha aumentado. Por lo tanto, sólo dejándose caer realizará casi todo el recorrido pero no llegará hasta el punto C, se quedará a una altura de 3 m.

Podría llegar hasta el punto C si, en el camino, consigue incrementar su energía cinética impulsándose con el pie. Esta energía adicional se obtiene a partir de su energía interna.

2. Haremos ahora unos cálculos. Para obtener los valores de la energía potencial y la energía cinética disponemos de las siguientes expresiones:

$$U_g = mgh$$

$$K = \frac{mv^2}{2}$$

En el punto A, la energía potencial es:

$$U_{gA} = mgh_A = (60\ kg)\left(9{,}8\frac{m}{s^2}\right)(3\ m) = 1764\ J$$

$$K_A = \frac{mv_A^2}{2} = 0$$

La energía mecánica en A es la suma de ambas: $U_{gA} + K_A = 1764\ J$

Este valor es muy importante ya que, como hemos visto, la energía mecánica no va a cambiar en todo el recorrido.

En el punto B la altura es cero y, por tanto, la energía potencial es cero. Como la energía mecánica es 1764 J, valor que en este caso corresponde a la energía cinética, es decir:

$$K_B = \frac{mv_B^2}{2}$$

Como vemos, los 1764 J de energía potencial que tenía el niño en A se han transformado en 1764 J de cinética en B, Como hemos visto, con 1764 J de energía mecánica solo puede alcanzar 3 m de altura. Si quisiera alcanzar justo el punto C (llegar a C sin velocidad), su energía allí sería

$$U_{gC} = mgh_C = (60\ kg)\left(9{,}8\frac{m}{s^2}\right)(4\ m) = 2352\ J$$

Por lo tanto, para llegar a E necesita impulsarse a incrementar su energía en, al menos, $2352\ J - 1764\ J = 588\ J$

Esta energía puede obtenerse impulsándose con un pie aumentando así su energía cinética. La energía extra del impulso se obtiene a cambio de una disminución de su energía interna.

Cambio de energía en presencia de fuerzas no conservativas

A partir del principio de conservación de la energía mecánica y teniendo en cuenta que la acción de fuerzas no conservativas dan lugar a una transformación de energía mecánica en energía interna del sistema, se puede modificar la ecuación que caracteriza la conservación de energía mecánica para considerar la acción de fuerzas no conservativas, con lo que se tiene la siguiente ecuación que relaciona el cambio de energía mecánica ΔE_{mec} y el trabajo W_{NC} realizado por las fuerzas no conservativas:

$$\Delta E_{mec} = \Delta K + \Delta U_g + \Delta U_e = -W_{NC}$$

Dado que en este curso, de las fuerzas no conservativas, solo se considera las fuerzas de fricción cinética f_k, el trabajo W_{NC} está dado por:

$$W_{NC} = f_k d$$

Por lo tanto en estos casos la ecuación xx queda se transforma en:

$$\Delta \boldsymbol{E}_{mec} = \Delta \boldsymbol{K} + \Delta \boldsymbol{U}_g + \Delta \boldsymbol{U}_e = -\boldsymbol{f}_k \boldsymbol{d} \qquad (\mathbf{6.6})$$

La ecuación 6.6 se reduce a la 6.5 si la magnitud de la fuerza de fricción es cero, es decir si no intervienen fuerzas no conservativas.

Ejemplo 2

Consideremos que en el problema 1 que existe fricción entre la superficie y las ruedas del *skate* del niño. 1. ¿Cómo sería el movimiento en esta situación?

El movimiento que hemos descrito en el ejemplo 1 es una situación ideal, en la que no hay ningún tipo de rozamiento. Si consideramos los rozamientos que inevitablemente existen, el movimiento del niño sería similar, pero parte de los 1764 J de la energía inicial se pierden por efecto del rozamiento. La consecuencia es que el niño alcanza el punto B con algo menos de energía cinética que antes y, por tanto, con menos velocidad. Esta pérdida de energía a lo largo del recorrido también se traducirá en una menor altura final.

Ejemplo 3

Un bloque de 6.0 kg, inicialmente en reposo, se jala hacia la derecha, a lo largo de una superficie horizontal mediante una fuerza horizontal constante de 12 N (Figura 6.6). Encuentre la rapidez del bloque después de que se ha movido 3.0 m si las superficies en contacto tienen un coeficiente de fricción cinética de 0,15.

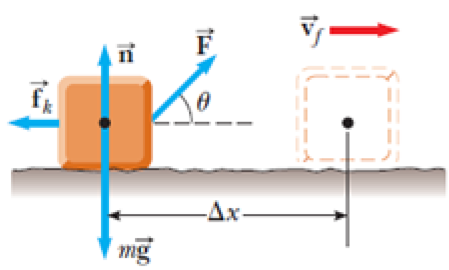


Figura 6. Ejemplo 4
Fuente: Propia.

Solución

En este caso debido a la rugosidad hay una fuerza de fricción, opuesta a la fuerza aplicada. Sobre el bloque actúan cuatro fuerzas externas. La fuerza normal equilibra la fuerza gravitacional y ninguna de estas fuerzas verticales realiza trabajo sobre el bloque.

El trabajo realizado por la fuerza horizontal de 12 N es:

$$W = f\Delta x = (12\ N)(3.00\ m) = 36\ J$$

La magnitud de la fuerza de fricción es $f_k = \mu_k n = \mu_k mg = (0{,}15)(6\ kg)\left(9{,}8\frac{m}{s^2}\right) = 8{,}82\ N$, por tanto el trabajo realizado por esta fuerza es:

$$W_{f_k} = -f_k\Delta x = -(8{,}82\ N)(3\ m) = 26{,}46\ J$$

El trabajo total realizado sobre el bloque es:

$$W_{Total} = W + W_{f_k} = 36\ J - 26{,}46\ J = 9{,}54\ J$$

Este trabajo total corresponde al cambio en la energía cinética, entonces:

$$W_{Total} = \Delta K = K_f - K_i = K_f - 0 = K_f$$

$$W_{Total} = \frac{1}{2}mv_f^2$$

$$v_f = \sqrt{\frac{2W_{Total}}{m}} = \sqrt{\frac{2(9{,}54\ J)}{6.0\ kg}} = 1{,}78\ m/s$$

4

Unidad 4

Colisiones y cantidad de movimiento

Física I

Autor: Danilo Ariza

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina

MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Introducción

Los objetivos principales de esta cartilla contemplan proporcionar elementos que permitan comprender los fenómenos que se dan cuando se produce un choque o colisión entre dos objetos, entre los primeros conceptos que se estudian se encuentra el impulso, su relación con la fuerza y se sigue con una nueva cantidad física muy importante, la cantidad de movimiento. También se estudia la relación entre la fuerza y la variación en la cantidad de movimiento por acción de la fuerza ejercida. La cantidad de movimiento de un objeto se relaciona con su masa y con su velocidad. Una ley de suma importancia en el estudio de la mecánica que incluyen colisiones es el principio de conservación de la cantidad de movimiento para sistemas aislados.

Según la relación entre la cantidad de energía cinética antes y después, las colisiones se clasifican en elásticas inelásticas y superelásticas. El estudio de estos tipos de colisiones permite predecir el comportamiento mecánico de un sistema de partículas conociendo la situación antes de la colisión.

Recomendaciones metodológicas

El estudio de las temáticas de esta cartilla requiere que el estudiante este en permanente revisión de los temas relacionados con la dinámica, por lo cual se recomienda realizar una revisión o resumen de tal objeto de estudio. También es importante elaborar un resumen de conceptos y principios incorporando en ello su fundamento matemático expresado en las respectivas ecuaciones. Se recomienda al estudiante el análisis de ejemplos propuestos bien sea en esta cartilla o en otros recursos que sean referenciados en este curso, todo esto con el fin de lograr un mayor afianzamiento y preparación para las actividades evaluativas a las que debe enfrentarse.

Desarrollo temático

Impulso y cantidad de movimiento

Cuando un cuerpo cae desde una altura *h* hasta el piso, con lo visto hasta el momento podemos describir bien su caída es decir desde el momento en que se soltó hasta el instante justo antes de tocar el piso, pero es muy válida la pregunta ¿Y qué sucede después?

Claramente lo que ocurre es el choque de la partícula con el piso, y si se desea describir lo que le sucede al objeto durante esta interacción es necesario saber la magnitud de la fuerza que intervino y el tiempo que duró la interacción. Lo que sí es claro es que la partícula en un instante de tiempo muy pequeño sufrió un cambio muy fuerte en su estado de movimiento, antes del choque venía bajando, después del choque rebotó hacia arriba. Este tipo de fuerzas que actúan en tiempos muy pequeños (del orden de las décimas, centésimas y hasta milésimas de segundo) pero que producen cambios muy grandes en el movimiento de los cuerpos, se llaman fuerzas impulsivas y están presentes en una gran cantidad de eventos que observamos a diario; colisiones de bolas de billar, en un partido de fútbol, en juego de golf, en colisiones de carros, asteroides con planetas, entre otras.

Para ilustrar un poco mejor lo que se acaba de decir, supongan que estudiamos el comportamiento de un balón de fútbol en el momento que un jugador ejecuta un tiro libre, como se observa en la Figura 1. El tiempo que dura en contacto el pie con el balón durante la *patada* es del orden de las centésimas de segundo, mientras que la fuerza involucrada puede ser del orden de las decenas de miles de newton, y dependiendo del jugador que patee el balón pasa de velocidad cero hasta una velocidad muy alta del orden de los 100 kp/h. La tecnología actual permite medir con facilidad el tiempo que dura la interacción (cámaras de alta velocidad), la velocidad inicial y anal (sensores infrarrojos), pero lamentablemente medir una fuerza tan grande que actúa en tiempos tan pequeños no es muy fácil.

Figura 1. Fotografías de alta velocidad registran el impacto del pie con el balón
Fuente: mabernal@2009.

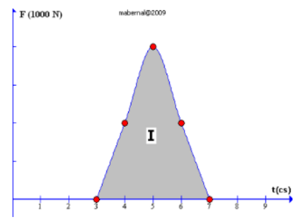


Figura 2. Gráfica aproximada de F vs. t, para el caso de la patada
Fuente: mabernal@2009.

La Figura 2 permite suponer que la gráfica de la fuerza contra el tiempo puede tener la forma de la Figura 7.2, para otros futbolistas la curva puede ser más ancha pero menos alta odel mismo ancho y mayor altura omenos ancha y de menor altura, observando varios casos se pudo deducir que a mayor área bajo la curva mayor es la velocidad final del balón, luego esta área bajo la curva nos indica algo y es por esto que se le llama impulso o impulso de una fuerza, magnitud que se simboliza con *I*.

Impulso

El Impulso (*I*) corresponde al área bajo la curva de la gráfica F vs. t. El impulso es una magnitud vectorial que tiene la misma dirección de la fuerza, por lo tanto en la definición anterior solamente se está tomando el módulo de esta magnitud. La herramienta matemática obteniendo el área bajo la curva es la integral, por lo tanto integrando desde el instante en que entra en contacto el pie con el balón hasta que pierden contacto, tendríamos:

$$\hat{\boldsymbol{I}} = \int_{t_0}^{t_f} \hat{\boldsymbol{F}} dt \qquad (7.1)$$

Su unidad SI es Ns, newton por segundo.

El problema de las definiciones anteriores es que nos exige saber algo de la fuerza impulsiva, ya sea su gráfica o su expresión analítica, y como ya se mencionó no siempre es fácil obtener esta información, por lo tanto se debe intentar otro enfoque u otra alternativa.

Partiendo de la ecuación 7.1 y recordando de $\boldsymbol{F = ma}$ obtenemos:

$$\hat{\boldsymbol{I}} = \int_{t_0}^{t_f} \hat{\boldsymbol{F}} \boldsymbol{dt} = \int_{t_0}^{t_f} \boldsymbol{m\hat{a}dt} = \int_{t_0}^{t_f} \boldsymbol{m} \frac{\boldsymbol{dv}}{\boldsymbol{dt}} \boldsymbol{dt} = \int_{\hat{v}_0}^{\hat{v}_f} \boldsymbol{md\hat{v}}$$

Como cambió la variable de integración igualmente cambian los límites, y se integra desde la velocidad inicial hasta la final. Al resolver la integral anterior se encuentra que:

$$\hat{\boldsymbol{I}} = \boldsymbol{m\hat{v}_f - m\hat{v}_i} \qquad (\mathbf{7.2})$$

Antes de seguir adelante note que apareció una magnitud física nueva que permite medir el impulso de la fuerza, es el producto de la masa por la velocidad $\boldsymbol{mv}$; volveremos sobre esto más adelante. El resultado de la última ecuación tiene una simplicidad y utilidad muy grande, pues el impulso quedó en términos de magnitudes físicas fácilmente medibles:

Podemos verificar que la unidad de medida del impulso, en el SI es $\boldsymbol{Ns = kg.m/s}$.

Solo falta relacionar el impulso con la fuerza impulsiva, para esto nos valemos del teorema del valor medio de las integrales que para nuestro caso dice que existe un único rectángulo de base $\Delta\boldsymbol{t}$ que tiene área exactamente igual a $\boldsymbol{I}$, ¡que ya lo podemos medir!

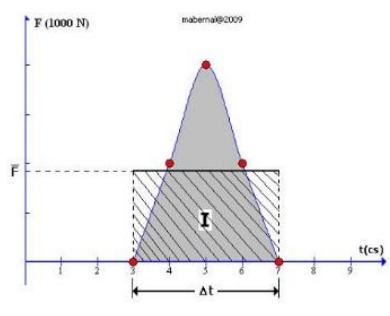


Figura 3. Existe un rectángulo de base $\Delta\boldsymbol{t}$ que tiene igual área bajo la curva de F vs t
Fuente: mabernal@2009.

La altura del rectángulo se conoce como valor medio y en este caso corresponde a una fuerza media y causa el mismo cambio en la velocidad en el objeto que la fuerza variable que empieza con valor cero en t_0 y crece rápidamente hasta su valor máximo y cae de nuevo a cero en t_f , ver la Figura 3. El área del rectángulo, base por altura, se expresa como $F.\Delta t$ y corresponde al impulso de acuerdo con la primera definición. Considerando que al principio no se tenía idea del valor de la fuerza involucrada en los eventos que se han mencionado; ahora y midiendo el tiempo y las velocidades sabemos la fuerza media involucrada, con lo cual se gana mucho en la descripción de lo que está ocurriendo, resumiendo tenemos:

$$\overline{F} = \frac{I}{\Delta t} = \frac{mv_f - mv_i}{\Delta t} \qquad (7.3)$$

De acuerdo con la ecuación 7.2, el impulso es posible calcularlo midiendo el cambio de una magnitud física nueva que se obtiene de multiplicar la masa del objeto con su velocidad. Esta magnitud es la cantidad de movimiento.

Cantidad de movimiento

Para una partícula de masa m y velocidad $\hat{v}$ la cantidad de movimiento se define operacionalmente mediante:

$$\hat{P} = m\hat{v} \qquad (7.4)$$

Su unidad SI es kg m/s.

En realidad esta magnitud no es muy nueva, ya desde la época de Descartes se hablaba del momentum hoy conocida como cantidad de movimiento o momento lineal y se entendía que el efecto de una fuerza sobre un cuerpo era producir cambios en la cantidad de movimiento e incluso Newton en sus famosos principios presenta la segunda ley en estos términos.

Para llegar a la forma completa de la segunda ley de Newton retomaremos la ecuación (7.3), utilizando la definición anterior, por tanto:

$$\overline{F} = \frac{P_f - P_i}{\Delta t} = \frac{\Delta P}{\Delta t}$$

Note que es la clásica decisión de una magnitud media. Se puede obtener la fuerza instantánea tomando el límite cuando el intervalo de tiempo Δt tiende a cero, con lo que se tiene:

$$\overline{\boldsymbol{F}} = \lim_{\Delta t} \frac{\Delta \boldsymbol{P}}{\Delta \boldsymbol{t}} = \frac{\boldsymbol{dP}}{\boldsymbol{dt}} \qquad (\mathbf{7.5})$$

La ecuación (7.5) es el segundo principio de Newton, que se puede leer como: el efecto de una fuerza actuando sobre un cuerpo es producir cambios en la cantidad de movimiento del mismo.

Como $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{mv}$, al derivar este producto se tiene:

$$\boldsymbol{F} = \frac{\boldsymbol{dP}}{\boldsymbol{dt}} = \frac{\boldsymbol{dmv}}{\boldsymbol{dt}} = \boldsymbol{m}\frac{\boldsymbol{dv}}{\boldsymbol{dt}} + \boldsymbol{v}\frac{\boldsymbol{dm}}{\boldsymbol{dt}} = \boldsymbol{ma} + \boldsymbol{v}\frac{\boldsymbol{dm}}{\boldsymbol{dt}} \qquad (\mathbf{5.6})$$

Donde $\frac{dm}{dt}$ es el cambio de la masa en el tiempo y expresa la posibilidad que el sistema gane o pierda masa a medida que se mueve y bajo la acción de una fuerza. Hasta el momento hemos trabajado con partículas y estas tienen propiedades como: no cambian de forma, no rotan, no pierden masa pues son indestructibles, para este caso está bien decir que $F = ma$, pero usted estará de acuerdo en que este modelo no siempre es aplicable a objetos reales, para aclarar solo piense en el movimiento de una persona mientras camina. A medida que se mueve adelanta un pie y un brazo, cambiando completamente la forma del cuerpo, que se deforma. Si la persona se tropieza, cae y rueda por el suelo se puede decir que efectuó una rotación alrededor de algún eje y si para completar lleva un maletín puede ser que en la caída lo bote y por lo tanto su masa cambie.

En un ejemplo no tan dramático como el anterior, suponga que un trencito avanza por el riel mientras arrastra un vagón desocupado. En medio de su camino cae un aguacero, el tren continua su recorrido pero a medida que avanza se acumula agua en el vagón. Producto de esto su masa cambia y puede ser que al final del recorrido haya aumentado varias toneladas.

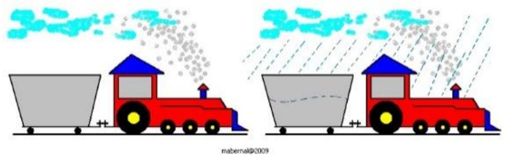


Figura 4. Sistema que cambia su masa a medida que se mueve
Fuente: Propia.

El segundo término de la ecuación (7.3) expresa el efecto que produce la fuerza en el estado de movimiento que ya se discutió en la sección de las leyes de Newton. Sin embargo y para efectos prácticos del curso de Física I se considerarán sistemas en los cuales la masa no cambia con el tiempo o si cambia es tan poquito que se puede despreciar y por lo tanto seguirá siendo válido $F = ma$.

Estudio de sistemas de partículas

Definiremos un sistema como dos o más partículas que pueden o no interactuar y como es lógico debemos esperar que aparezcan magnitudes físicas asociadas al sistema.

Cantidad de movimiento total de un sistema de partículas

Suponiendo que un sistema se compone de N partículas, la cantidad de movimiento total P_{Tot} se define como la suma de las cantidades de movimiento de cada una de las N partículas, en un instante del tiempo dado, es decir:

$$\boldsymbol{P_{Tot} = P_1 + P_2 + \cdots + P_N = m_1 v_1 + m_2 v_2 + \cdots + m_N v_N} \qquad (7.7)$$

Energía cinética total de un sistema de partículas

Para el sistema de N partículas la energía cinética total se define como la suma de las energías cinéticas de cada una de las N partículas, en un instante del tiempo dado, es decir:

$$\boldsymbol{K_{Tot} = K_1 + K_2 + \cdots + K_N = \frac{1}{2}m_1\, v_1^2 + \frac{1}{2}m_2\, v_2^2 + \cdots + \frac{1}{2}m_N\, v_N^2} \qquad (\mathbf{7.8})$$

Centro de masa de un sistema de partículas

El centro de masa de un sistema de partículas es el punto geométrico que se comporta como si la fuerza neta sobre el sistema actuara sobre él. La importancia de esta magnitud radica en que el movimiento de sistemas de partículas y de cuerpos se puede describir en gran parte como el movimiento del centro de masa, que como punto que es, se le puede aplicar toda la física de un solo punto, que es lo que se trabajó en capítulos anteriores. Volveremos sobre esto más adelante.

Supongamos un sistema compuesto por tres partículas sobre las cuales actúa una fuerza externa, digamos la gravedad. La fuerza neta sobre el sistema será la suma vectorial de todas las fuerzas presentes, es decir:

$$F_{Neta} = w_1 + w_2 + w_3 + F_{12} + F_{21} + F_{13} + F_{31} + F_{23} + F_{32} = Ma_{cm}$$

Donde M es la masa total del sistema y a_{cm} es la aceleración del centro de masa.

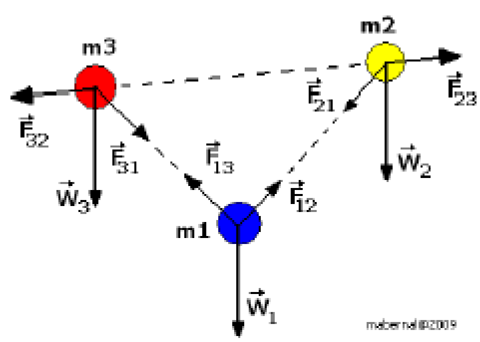


Figura 5. Sistema compuesto por tres partículas, actúa una fuerza externa
Fuente: mabernal@2009.

Estas fuerzas individuales se pueden separar en dos grupos, las fuerzas externas y las internas, con lo que se tiene:

$$F_{Neta} = \sum F_{Ext} + \sum F_{Int} = Ma_{cm}$$

Donde las parejas de fuerzas internas $(F_{12},\ F_{21})$, (F_{13}, F_{31}), (F_{23}, F_{32}) son tres parejas de acción y reacción que suman cero, con lo que se tiene:

$$F_{Neta} = \sum F_{Ext} = Ma_{cm}$$

Lo que significa que los cambios en el movimiento solo se deben a las fuerzas externas, pero si las fuerzas externas también suman cero, se tiene lo que se conoce como sistema aislado.

Sistema aislado

Un sistema aislado es un sistema en el cual solo actúan fuerzas internas y la fuerza neta externa es cero.

$$\boldsymbol{F_{Neta}} = \sum \boldsymbol{F_{Ext}} = \mathbf{0} \qquad (\mathbf{7.9})$$

Conservación de la cantidad de movimiento

Si un sistema de partículas es aislado entonces solo actúan fuerzas internas, pero estas siempre están en parejas acción-reacción y cada una de estas parejas suman cero. Considerando un sistema aislado de N partículas, la fuerza neta en el sistema está dada por:

$$F_{Neta} = F_{12} + F_{21} + F_1 + F_{31} + \cdots + F_{N-1,N} + F_{N,N-1} = 0$$

Agrupando las fuerzas sobre $m_1, m_2, \ldots m_N$ se tiene:

$$F_{Neta} = (F_{12} + F_{13} + \cdots + F_{1N}) + \cdots + (F_{N1} + F_{N2} + \cdots + F_{N,N-1}) = 0$$

Entonces:

$$F_{Neta\ sobre\ m_1} + F_{Neta\ sobre\ m_2} + \cdots + F_{Neta\ sobre\ m_n} = 0$$

Teniendo en cuenta que la fuerza neta F sobre una partícula de masa m es igual a la rapidez de variación de su cantidad de movimiento ($\frac{dP}{dt}$), se tienen entonces:

$$\frac{dP_1}{dt} + \frac{dP_2}{dt} + \cdots + \frac{dP_N}{dt} = 0$$

Lo que a la luz de las propiedades de la derivada se reduce a:

$$\frac{d}{dt}(P_1 + P_2 + \cdots + P_N) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\sum P_i\right) = 0$$

$$\frac{dP_{Tot}}{dt} = 0$$

Se tiene entonces que la derivada con respecto al tiempo de la cantidad de movimiento total del sistema es cero, lo que significa que la cantidad de movimiento total es constante. Lo anterior se conoce como principio de conservación de la cantidad de movimiento y se formula de la siguiente forma:

Principio de conservación de la cantidad de movimiento de un sistema de partículas:
Si la fuerza neta externa que actúa sobre un sistema de partículas es cero, la cantidad del movimiento del sistema no cambia, es decir:

$$\boldsymbol{P_i = P_f} \qquad (\mathbf{7.10})$$

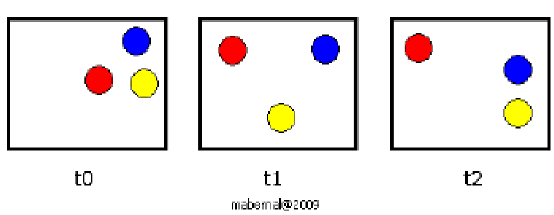


Figura 6. Sistema de tres partículas
Fuente: mabernal@2009.

Para mayor ilustración consideremos un sistema aislado compuesto por tres partículas, Figura 6, las partículas chocan entre sí, pero en cada choque se producen parejas de fuerzas de acción y reacción, que se consideran fuerzas internas que en su totalidad suman cero, como además no intervienen fuerzas externas, la cantidad de movimiento del conjunto permanece constante, lo que significa que de algún modo los valores de la velocidad de las partículas (de masas constantes) se acomodaron para que esta magnitud no cambie en el tiempo por lo tanto, siempre se mida lo mismo.

En la práctica tener sistemas aislados perfectamente no siempre es posible, por ejemplo en la situación ideal de carritos de laboratorio que deslizan sobre el riel de aire en experimentos de colisión, el riel se nivela para anular el efecto de la fuerza de gravedad con la normal, pero es inevitable e imposible eliminar la presencia de la fuerza de rozamiento y por esto el sistema ya no será aislado, sin embargo las fuerzas impulsivas que ejercen los carros en el instante de la colisión son muy grandes comparadas con la fuerza externa debido al rozamiento, que realmente es muy pequeño, y podemos aproximar como si el sistema fuera aislado.

Colisiones

La teoría de colisiones se fundamenta en la conservación de la cantidad de movimiento total, que a su vez requiere que el sistema sea aislado, por lo tanto en lo que sigue de este capítulo se supondrá que el sistema es aislado o que en el caso de existir fuerzas externas se debe asegurar, al menos en el intervalo de tiempo que ocurre la colisión, que la magnitud de las fuerzas externas sea muy pequeña comparada con la magnitud de las fuerzas impulsivas debidas a la interacción entre las partículas que componen el sistema. Si se cumple lo dicho antes, las colisiones se pueden clasificar en inelásticas, elásticas y superelásticas.

Colisiones inelásticas

En este tipo de colisiones solo se conserva la cantidad de movimiento total P_{Total}, pero no la energía cinética total. Antes de la colisión el sistema tiene un valor, distinto de cero, de $Ktotal$, pero debido a la interacción entre los cuerpos que componen el sistema, éstos cambian de forma, es posible que se fragmenten y se calienten, además de calentar el aire a su alrededor, pero todo lo anterior consume energía y la pregunta que subyace detrás de todo esto es “¿de dónde sale la energía para deformar, fragmentar, calentar, hacer ruido? la respuesta es de la energía cinética del sistema, por lo tanto, al hacer el balance de energía cinética resulta que después de la colisión hay menos que antes, es decir disminuyó la energía cinética o se gastó energía cinética en hacer alguno o todos los trabajos mencionados, $Ktotal\,inicial > Ktotal\,final$, y lo peor es que en la mayoría de los casos no es posible volverla a recuperar, pues se sabe que la energía tiene calidad y por ejemplo en el caso del calor la calidad es tan baja que para obtener trabajo de este hay que invertir mucha más energía y diseñar máquinas que en el mejor de los casos tienen eficiencias que no alcanzan el 50%.

Todas las colisiones que observamos al nivel de nuestra escala son inelásticas: choque de automóviles, apretón de manos, rebote de una pelota ya sea contra el piso o un bate o una mano, colisiones de planetas y asteroides, de galaxias, piedras contra un estanque de agua, en el boxeo, futbol, tenis, béisbol, golf, cuando bailamos y azotamos la baldosa, etc. Para efectos prácticos se puede escribir una ecuación de balance de energía como:

$$\boldsymbol{Ktotal\,0 = Ktotal\,f + Q} \qquad (\mathbf{5.11})$$

En el caso de las colisiones inelásticas Q es negativo y se interpreta como energía cinética que se convirtió en energía interna al sistema.

Colisiones elásticas

En las colisiones elásticas se conserva tanto la cantidad de movimiento total y la energía cinética total, luego $Q = 0$, y solo ocurren a nivel atómico, choques entre núcleos atómicos, entre moléculas, entre otros. Esto se debe a que en realidad estas partículas de escala atómica y subatómica no se tocan; al acercarse una a la otra se generan inmensas fuerzas de origen electromagnético que provocan repulsiones muy grandes sin dejar lugar a posibles deformaciones por el contacto. A nivel de nuestra escala de percepción algunos eventos se pueden considerar como elásticos, por ejemplo en la colisión entre bolas de billar; como las velocidades no son tan grandes y las bolas son muy rígidas, en un choque la deformación de las bolas es tan pequeña que puede despreciarse y considerarse que no se perdió energía cinética, es decir $\Delta K \approx 0$, en el laboratorio; en el riel de aire a los carritos se les puede agregar un soporte que lleve un caucho (banda elástica) o resorte de tal forma que cuando choquen la energía cinética utilizada para deformar el caucho o resorte, queda almacenada en forma de energía elástica que de nuevo se convierte en energía cinética cuando los cauchos recuperan su forma, igualmente se pierde un poco de energía por que los cauchos se calientan pero es tan poca que puede despreciarse.

Colisiones superelásticas

En este tipo de colisiones de repente se genera una gran cantidad de energía cinética, es decir Q > 0 en la ecuación xx. Para entender la situación piense en un sistema de dos masas en las que en la mitad se ha agregado un resorte, se juntan las dos masas, por lo que el resorte se comprime, y para que no se desbarate el sistema se pegan con cinta adhesiva, el resorte continua ejerciendo fuerza tratando de separar las masas y si la cinta no aguanta finalmente las masas salen disparadas una hacia un lado y la otra en dirección opuesta. La energía cinética antes que ocurra el evento es cero y claramente después que la cinta cede es distinta de cero (positiva) y por supuesto uno se pregunta ¿de dónde salió la energía?, la respuesta es de la energía interna que almacena el sistema, en el caso del ejemplo es energía elástica. En algunos contextos esta situación se conoce como explosión.

Colisiones en una dimensión

Cuando la colisión es frontal se supone que los objetos vienen por una línea y después del choque continúan por la misma línea, aunque puede ocurrir que sea en dirección contraria para juntos, uno o ninguno de los cuerpos. Para efectos prácticos supondremos que el sistema está compuesto por dos masas m1 y m2 y que estas colisiones siempre ocurren sobre el eje x.

Colisiones elásticas en una dimensión

En este caso se tienen dos ecuaciones, una por cada ley de conservación:

Conservación de la cantidad de movimiento total:

$$\boldsymbol{m_1 v_{i1} + m_2 v_{i2} = m_1 v_{f1} + m_2 v_{f2}} \qquad (\mathbf{7.12})$$

Recuerde que el carácter vectorial en una dimensión de la velocidad está dado por el signo y por lo tanto se debe tener claro cuál es el sentido positivo y tener mucho cuidado con el signo.

Conservación de la energía cinética total:

$$\boldsymbol{\frac{1}{2} m_1 v_{i1}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{i2}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{f1}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{f2}^2} \qquad (\mathbf{7.13})$$

Si se conocen las masas y las velocidades iniciales tan solo quedan dos incógnitas por despejar, las velocidades finales, y como se cuenta con dos ecuaciones 7.12 y 7.13 el panorama no parece tan complicado, sin embargo hay un pequeño problema, que el sistema no es lineal y no se puede proceder con algebra lineal para resolverlo, aun así no podemos rendirnos por esta dificultad.

Agrupando y factorizando en los términos que tienen m_1 y m_2 de las ecuaciones 7.12 y 7.13, obtenemos:

$$\boldsymbol{m_1(v_{i1} - v_{f1}) = m_2(v_{i2} - v_{f2})} \qquad (\mathbf{7.14})$$

$$\boldsymbol{m_1(v_{i1}^2 - v_{f1}^2) = m_2(v_{i2}^2 - v_{f2}^2)} \qquad (\mathbf{7.15})$$

Factorizando las diferencias de cuadrados en 7.15

$$\boldsymbol{m_1(v_{i1} - v_{f1})(v_{i1} + v_{f1}) = m_2(v_{i2} - v_{f2})(v_{i2} + v_{f2})} \qquad (\mathbf{7.16})$$

Despejando $m_1(v_{i1} - v_{f1})$ de 7.16 se obtiene:

$$m_1(v_{i1} - v_{f1}) = \frac{m_2(v_{i2} - v_{f2})(v_{i2} + v_{f2})}{(v_{i1} + v_{f1})}$$

Sustituyendo en 7.14

$$m_1(v_{i1} - v_{f1}) = m_2(v_{i2} - v_{f2})$$

$$\frac{m_2(v_{i2} - v_{f2})(v_{i2} + v_{f2})}{(v_{i1} + v_{f1})} = m_2(v_{i2} - v_{f2})$$

$$\boldsymbol{(v_{i1} + v_{f1}) = (v_{i2} + v_{f2})} \qquad (\mathbf{7.17})$$

Ecuación que permite calcular una incógnita en función de la otra, luego:

$$\boldsymbol{v_{f1} = (v_{i2} + v_{f2}) - v_{i1}} \qquad (\mathbf{7.18})$$

Remplazando 7.18 en 7.12 se tiene:

$$m_1v_{i1} + m_2v_{i2} = m_1v_{f1} + m_2v_{f2}$$

$$m_1v_{i1} + m_2v_{i2} = m_1\left(v_{i2} + v_{f2} - v_{i1}\right) + m_2v_{f2}$$

$$m_1v_{i1} + m_2v_{i2} = m_1v_{i2} + m_1v_{f2} - m_1v_{i1} + m_2v_{f2}$$

$$m_1v_{i1} + m_1v_{i1} + m_2v_{i2} - m_1v_{i2} = m_1v_{f2} + m_2v_{f2}$$
$$2m_1v_{i1} + v_{i2}(m_2 - m_1) = v_{f2}(m_1 + m_2)$$

Despejando v_{f2} encontramos:

$$v_{f2} = \frac{2m_1v_{i1} + v_{i2}(m_2 - m_1)}{(m_1 + m_2)}$$

$$\boldsymbol{v_{f2} = \frac{2m_1v_{i1}}{(m_1 + m_2)} + \frac{v_{i2}(m_2 - m_1)}{(m_1 + m_2)} \quad (7.19)}$$

Sustituyendo 7.19 en 7.18 se puede obtener:

$$\boldsymbol{v_{f1} = \frac{(m_1 - m_2)v_{i1}}{(m_1 + m_2)} + \frac{2m_2v_{i2}}{(m_1 + m_2)} \quad (7.20)}$$

A continuación se examinarán algunos casos límites de las ecuaciones 7.19 y 7.20 que tienen solución intuitiva.

Casos especiales de las ecuaciones 7.19 y 7.20

En cada uno de los casos que siguen se supondrá que el cuerpo 2 estará inicialmente en reposo, por lo tanto $v_{i2} = 0m/s$.

Caso 1: masas iguales

Suponga que estamos observando una colisión frontal entre dos bolas de billar; en este caso no es necesario distinguir las masas, de tal forma que $m_1 = m_2 = m$, en las ecuaciones queda:

$$v_{f1} = \frac{(m_1 - m_2)v_{i1}}{(\ m_1 + m_2)} + \frac{2m_2 v_{i2}}{(\ m_1 + m_2)}$$

$$v_{f1} = \frac{(m - m)v_{i1}}{(\ m + m)} \quad con\ \ v_{i2} = 0$$

$$v_{f1} = 0$$

$$v_{f2} = \frac{2m_1 v_{i1}}{(\ m_1 + m_2)} + \frac{v_{i2}(m_2 - m_1)}{(\ m_1 + m_2)}$$

$$v_{f2} = \frac{2m_1 v_{i1}}{(\ m_1 + m_2)} \qquad con\ v_{i2} = 0$$

$$v_{f2} = \frac{2m v_{i1}}{(\ m + m)} = v_{i1}$$

Note que en este caso la velocidad final de m_1 es la velocidad inicial de m_2 y la velocidad final de m_2 es la velocidad inicial de m_1, simplemente intercambian velocidades. Este caso es muy fácil de comprobar, basta observar en un juego de billar que en un choque frontal la bola blanca queda quieta después de impactar a la otra bola, que inicialmente estaba quieta y que después del impacto sale con la velocidad que traía la blanca. No olvide que este comportamiento sólo es aproximado.

Caso 2: masa 1 mucho mayor que la masa 2

Suponga que observamos el choque de una bola de boliche $m_1 = 3\ kg$ contra una bola de ping-pong $m_{21} = 30\ gr = 0{,}03\ kg$, en este caso $m_1 \gg\ \ m_1$, considerando esto en las ecuaciones:

$$v_{f1} = \frac{(m_1 - m_2)v_{i1}}{(\ m_1 + m_2)} + \frac{2m_2 v_{i2}}{(\ m_1 + m_2)}$$

$$v_{f1} = \frac{(m_1 - m_2)v_{i1}}{(\ m_1 + m_2)} \quad con\ v_{i2} = 0$$

$$v_{f1} \approx \frac{(m_1)v_{i1}}{(\ m_1)} \approx v_{i1}$$

Básicamente la velocidad de la bola de boliche no cambia, ahora miremos que pasa con la bola de ping-pong:

$$v_{f2} = \frac{2m_1 v_{i1}}{(\ m_1 + m_2)} \qquad con\ v_{i2} = 0$$

$$v_{f2} \approx \frac{2m_1 v_{i1}}{m_1} \approx \ \ 2v_{i1}$$

La bola de ping-pong sale disparada con velocidad igual a dos veces la velocidad de la bola de boliche, aunque esto no es tan intuitivo tampoco es difícil de comprobar.

Caso 3: masa 2 mucho mayor que la masa 1

Similar al caso anterior pero ahora es la bola de boliche la que está quieta, luego $m_1 =\ 30g,\ m_2 = 3kg$, veamos qué predicen las ecuaciones, primero para la bola de ping-pong:

$$v_{f1} = \frac{(m_1 - m_2)v_{i1}}{(\ m_1 + m_2)} + \frac{2m_2 v_{i2}}{(\ m_1 + m_2)}$$

$$v_{f1} = \frac{(m_1 - m_2)v_{i1}}{(\ m_1 + m_2)} \qquad con\ v_{i2} = 0$$

$$v_{f1} \approx \frac{-m_2 v_{i1}}{+m_2} = -v_{i1}$$

La bola de ping-pong rebota con la misma velocidad con que llegó antes de impactar la bola de boliche que por la diferencia de masas es como si fuera una pared, y ¿qué le ocurre a la bola de boliche?, veamos:

$$v_{f2} = \frac{2m_1 v_{i1}}{(\, m_1 + m_2)} + \frac{v_{i2}(m_2 - m_1)}{(\, m_1 + m_2)}$$

$$v_{f2} = \frac{2m_1 v_{i1}}{(\, m_1 + m_2)} \quad con\ v_{i2} = 0$$

$$v_{f2} = \frac{2m_1 v_{i1}}{m_2} \approx 0$$

Ya que el denominador es muy grande comparado con el denominador, la fracción tiende a cero, lo que predice que la bola de boliche no se va a mover por que la bola de ping-pong la impacte.

Colisiones inelásticas en una dimensión

En este caso solo contamos con la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento total:

$$\boldsymbol{m_1 v_{i1} + m_2 v_{i2} = m_1 v_{f1} + m_2 v_{f2}} \qquad \mathbf{7.21}$$

Si conocemos las masas y las velocidades iniciales, tendríamos dos incógnitas y por lo tanto en principio el problema no tiene solución, al menos única, por lo tanto se debe brindar información adicional, ya sea una de las velocidades finales o el valor de Q. En este tipo de colisión siempre hay pérdida de la energía cinética total y por lo tanto $Q < 0$ y es el comportamiento que con mayor frecuencia se observa al nivel de nuestra escala.

Hay un caso particular de este tipo de colisión que es cuando los dos cuerpos quedan pegados después del impacto, situación conocida como Colisión Perfectamente Inelástica, un ejemplo de esto es la colisión de un asteroide contra un planeta o una bola de plastilina contra una pared, en choque de vehículos también se observa. Como los dos cuerpos después de la colisión se mueven como si fuera uno sólo, la velocidad de ambos es igual y por lo tanto la velocidad final se obtiene de la ecuación 7.21 así:

$$m_1 v_{i1} + m_2 v_{i2} = m_1 v_f + m_2 v_f = v_f(m_1 + m_2)$$

Entonces:

$$v_f = \frac{m_1 v_{i1} + m_2 v_{i2}}{(m_1 + m_2)} \qquad (7.22)$$

Colisiones superelásticas

Este caso es el inverso de una colisión perfectamente inelástica, al principio las partes están todas juntas formando el objeto completo, y después de la explosión las partes se separan. En el caso que el sistema este inicialmente en reposo y se separe en dos partes, la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento total será:

$$0 = v_f + m_2 v_f \qquad (7.23)$$

Recuerde tener cuidado con el signo de las velocidades y también que Q > 0. En lo sucesivo no se va a tocar más este tipo de colisión pero si se propondrán ejercicios que lo aborden.

Colisiones en dos dimensiones

En este caso el choque no es frontal, de lo contrario se reduciría a una colisión en una dimensión, por lo tanto diremos que el choque es oblicuo para dar a entender que las partículas se dispersan en ángulos, respecto a la línea que une las partículas, distintos de cero. Como la cantidad de movimiento es una magnitud vectorial se debe asegurar que se conserve en la dirección x y en la dirección y, por lo tanto tendríamos dos ecuaciones para esta ley de conservación:

$$m_1 v_{i1x} + m_2 v_{i2x} = m_1 v_{f1x} + m_2 v_{f2x} \qquad (7.24)$$

$$m_1 v_{i1y} + m_2 v_{i2y} = m_1 v_{f1y} + m_2 v_{f2y} \qquad (7.25)$$

En el caso que la colisión sea elástica se cuenta con otra ecuación pero aun así, conociendo las masas y las velocidades iniciales, que es el mejor de los casos tenemos tres ecuaciones para cuatro incógnitas, por lo tanto es necesario tener información adicional, ya sea el valor de Q o algún ángulo de dispersión o el valor de alguna de las velocidades finales.

Ejemplo 1

Considere dos bolas de billar de masas idénticas, una de ellas (la número 8) quieta y la otra (la blanca) acercándose con velocidad v0. Considere que la colisión es elástica y oblicua, ver Figura 7. Encuentre la relación que hay entre los ángulos de dispersión.

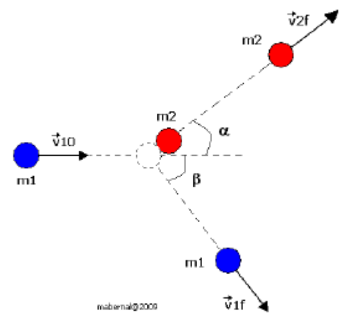


Figura 7. Colisión elástica en dos dimensiones de dos bolas de billar
Fuente: maberna@2009.

Solución

Recordemos las condiciones del ejercicio:

Masa iguales, $m_1 = m_2 = m$
Colisión oblicua.
Masa m_2 quieta antes de la colisi_on, luego $v_{i2} = 0$.
Colisión elástica, se conserva la energía cinética total.

De la Figura 7 se deduce que $v_{f1x} = v_{f1} cos\beta$, (a la derecha), $v_{f1y} = -v_{f1} sen\beta$ (hacia abajo) $v_{f2x} = v_{f2} Cos\alpha$ (a la derecha) y $v_{f2y} = v_{f2} Sen\alpha$ (hacia arriba). Como se puede observar se eligió que el sentido positivo del eje x es hacia la derecha, mientras que el del eje y es hacia arriba.

Conservación de la cantidad de movimiento total en x:

$$m_1 v_{i1} = m_1 v_{f1} cos\beta + m_2 v_{f2} cos\alpha$$

Conservación de la cantidad de movimiento total en y:

$$0 = -m_1 v_{f1} Sen\beta + m_2 v_{f2} Sen\alpha$$

Conservación de la energía cinética total:

$$\frac{1}{2}m_1v_{i1}^2 = \frac{1}{2}m_1v_{f1}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{f2}^2$$

Como las masas son iguales a m al sustituir y simplificar en las ecuaciones tenemos:

$$\boldsymbol{v_i = v_{f1}Cos\beta + v_{f2}Cos\alpha} \qquad (\mathbf{7.26})$$

$$\boldsymbol{0 = -v_{f1}Sen\beta + v_{f2}Sen\alpha} \qquad (\mathbf{7.27})$$

$$\boldsymbol{v_i^2 = v_{f1}^2 + m_2v_{f2}^2} \qquad (\mathbf{7.28})$$

Elevando al cuadrado las ecuaciones 7.26 y 7.27

$$\boldsymbol{v_i^2 = v_{f1}^2cos^2\beta + 2v_{f1}.v_{f2}cos\beta.cos\alpha + v_{f2}^2cos^2\alpha} \qquad (\mathbf{5.29})$$

$$\boldsymbol{0 = v_{f1}^2sen^2\beta - 2v_{f1}.v_{f2}sen\beta.sen\alpha + v_{f2}^2sen^2\alpha} \qquad (\mathbf{5.30})$$

Sumando 7.29 y 7.30

$$v_i^2 = v_{f1}^2(Cos^2\beta + Sen^2\beta) + 2v_{f1}v_{f2}(Cos\beta\ Cos\alpha - Sen\beta Sen\alpha) + v_{f2}^2(Cos^2\alpha + Sen^2\alpha)\ (7.31)$$

Haciendo uso de las identidades:

$$Cos^2\theta + Sen^2\theta = 1$$

$$Cos\beta\ Cos\alpha - Sen\beta Sen\alpha = Cos(\beta + \alpha)$$

Se tiene

$$\boldsymbol{v_i^2 = v_{f1}^2 + 2v_{f1}v_{f2}Cos(\beta + \alpha) + v_{f2}^2} \qquad (\mathbf{7.32})$$

Sustituimos el lado derecho de la ecuación 7.32 de acuerdo con la ecuación 7.28, por lo tanto:

$$v_{f1}^2 + v_{f2}^2 = v_{f1}^2 + 2v_{f1}v_{f2}Cos(\beta + \alpha) + v_{f2}^2$$

$$\boldsymbol{0 = 2v_{f1}v_{f2}Cos(\beta + \alpha)} \qquad (\mathbf{7.33})$$

De donde se tiene que:

$$Cos(\beta + \alpha) = 0$$

$$(\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{90^0} \qquad (\mathbf{7.34})$$

Esto significa que en esta condiciones las partículas se dispersan a 90^0.

Ejemplo 2

Un cuerpo de masa $M = 3\ kg$ inicialmente en reposo de repente explota en tres partes de $M/3$ cada una. Una parte sale disparada a 2 m/s en dirección x positiva, otra sale a 3 m/s en dirección y positiva.

a) Calcule la velocidad de la tercera parte.
b) ¿Cuánta energía se liberó en la explosión?

Solución:

a) Conservación de la cantidad de movimiento total:

$$(0\hat{\imath} + 0\hat{\jmath})Kg.\frac{m}{s} = \left(\frac{M}{3}2\hat{\imath}\right)Kg.\frac{m}{s} + \left(\frac{M}{3}3\hat{\jmath}\right)Kg.\frac{m}{s} + \left(\frac{M}{3}\right)(v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath}\ )Kg.\frac{m}{s}$$

Agrupando términos semejantes:

$$(0\hat{\imath} + 0\hat{\jmath})Kg.\frac{m}{s} = \left(\frac{M}{3}(2 + v_x)\hat{\imath}\right)Kg.\frac{m}{s} + \left(\frac{M}{3}(3 + v_y)\hat{\jmath}\right)Kg.\frac{m}{s}$$

Igualando componente a componente:

$$0 = \left(\frac{M}{3}(2 + v_x)\right)Kg.\frac{m}{s}$$

$$0 = \left(\frac{M}{3}(3 + v_y)\right)Kg.\frac{m}{s}$$

Despejando de cada una de estas ecuaciones se encuentra que:

$$v_x = -2\frac{m}{s}$$

$$v_y = -3\ \frac{m}{s}$$

Por tanto la velocidad del tercer fragmento es $(-2\hat{\imath} - 3\hat{\jmath})\frac{m}{s}$. La magnitud de esta velocidad es $3{,}61\ m/seg$ y un ángulo de 236 grados.

Q es la energía liberada en la explosión. Antes de la explosión la energía cinética total es igual a cero, después de la explosión es:

$$K_{Total} = \frac{1}{2}\left(\frac{M}{3}\right)\left(2\ \frac{m}{s}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{M}{3}\right)\left(3\ \frac{m}{s}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{M}{3}\right)\left(3{,}61\ \frac{m}{s}\right)^2$$

$$K_{Total} = \frac{1}{2}\left(\frac{M}{3}\right)\left[4\ \frac{m^2}{s^2} + 9\ \frac{m^2}{s^2} + 13\frac{m^2}{s^2}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{3\ Kg}{3}\right)\left[26\frac{m^2}{s^2}\right]$$

$$K_{Total} = \frac{1}{2}(1\ kg)\left[26\frac{m^2}{s^2}\right]$$

$$K_{Total} = \left[13\ \frac{kgm^2}{s^2}\right] = 13\ J$$

La energía interna que hizo posible que el objeto se partiera en tres pedazos se transformó en energía cinética del sistema.

Movimiento del centro de masa

El centro de masa es el punto geométrico que se comporta como si la fuerza neta del sistema actuara sobre él, puede considerarse como un punto que representa al sistema sobre el que está actuando la fuerza neta, tenemos entonces una forma de reducir un sistema de partículas a un solo punto y, aunque parezca extraño, este punto imaginario responde a la fuerza tal como lo hace una partícula real, por lo tanto es muy importante describir su movimiento.

Posición del centro de masa

El vector posición del centro de masa $\hat{r}_{cm}$ es posible ubicarlo en el espacio, y se calcula como un promedio ponderado de las posiciones de cada masa que compone el sistema, suponiendo que se componen de N partes, el vector está dado por:

$$\hat{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{cm}} = \frac{\boldsymbol{m_1}\hat{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{1}} + \boldsymbol{m_2}\hat{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{2}} + \cdots + \boldsymbol{m_N}\hat{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{N}}}{\boldsymbol{m_1} + \boldsymbol{m_2} + \cdots + \boldsymbol{m_N}} \qquad (\mathbf{5.35})$$

De acuerdo con esta definición el centro de masa se ubica cerca de donde está acumulada la mayor cantidad de masa.

Ejemplo 3

Un sistema se compone de tres partículas con masas y posiciones $m_1 = 2\ kg,\ \hat{r}_1 = (5,0)m\ ;\ m_2 = 3\ kg,\ \hat{r}_2 = (1,-4)m;\ m_3 = 12\ kg,\ \hat{r}_3 = (-4,\ 5)m$.

Encuentre la posición del centro de masa de este sistema.

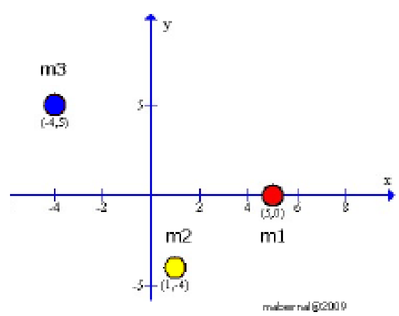


Figura 8. Sistema de tres partículas
Fuente: mabernal@2009.

Solución

Un diagrama del sistema se muestra en la Figura 8. La ecuación 7.35 se puede descomponer en sus componentes cartesianas, por lo tanto:

$$\boldsymbol{x_{cm}} = \frac{\boldsymbol{m_1 x_1} + \boldsymbol{m_2 x_2} + \cdots + \boldsymbol{m_N x_N}}{\boldsymbol{m_1} + \boldsymbol{m_2} + \cdots + \boldsymbol{m_N}} \qquad (\mathbf{7.36})$$

$$y_{cm} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \cdots + m_N y_N}{m_1 + m_2 + \cdots + m_N} \qquad (7.37)$$

En el ejercicio que estamos resolviendo:

$$x_{cm} = \frac{(2\ kg)(5\ m) + (3\ kg)(1\ m) + (12\ kg)(-4\ m)}{2\ kg + 3\ kg + 12\ kg} = \frac{-35\ kg.m}{17\ kg} \approx 2{,}06\ m$$

$$y_{cm} = \frac{(2\ kg)(0\ m) + (3\ kg)(-4\ m) + (12\ kg)(5m)}{2\ kg + 3\ kg + 12\ kg} \approx \frac{48\ kg.m}{17\ kg} = 2{,}82\ m$$

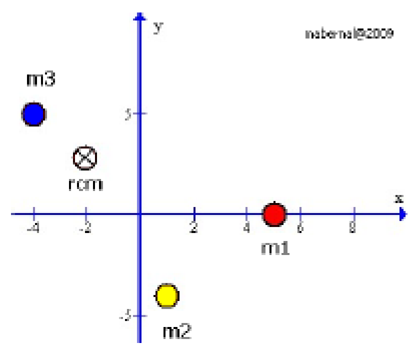


Figura 9: El centro de masa se ubica cerca de la partícula de mayor masa
Fuente: Propia.

La Figura 9 muestra la posición del centro de masa que acabamos de calcular y es de destacar que este punto no coincide con ninguno de las posiciones de las partículas que componen el sistema.

Velocidad del centro de masa

Continuando con la descripción del movimiento del centro de masa, una vez se tiene la posición, derivándola se obtiene la velocidad, luego:

$$\hat{v}_{cm} = \frac{d}{dt}(\hat{r}_{cm}) = \frac{1}{M}\frac{d}{dt}(m_1\hat{r}_1 + m_2\hat{r}_2 + \cdots + m_N\hat{r}_N)$$

Donde M es la masa total, es decir $M = m_1 + m_2 + \cdots + m_N$. Derivando término a término:

$$\hat{v}_{cm} = \frac{1}{M}\left[m_1\frac{d\hat{r}_1}{dt} + m_2\frac{d\hat{r}_2}{dt} + \cdots + m_N\frac{d\hat{r}_{\boldsymbol{N}}}{dt}\right]$$

Pero cada término de $\frac{d\hat{r}}{dt}$ corresponde a la velocidad de la respectiva partícula, por tanto se tiene que la velocidad del centro de masa está dada por:

$$\boldsymbol{\hat{v}_{cm} = \frac{1}{M}(m_1\hat{v}_1 + m_2\hat{v}_2 + \cdots + m_N\hat{v}_N)} \qquad \mathbf{(7.38)}$$

Observe que el numerador en el lado derecho de la ecuación 7.38 es la cantidad de movimiento total, por lo tanto:

$$M\hat{v}_{cm} = (m_1\hat{v}_1 + m_2\hat{v}_2 + \cdots + m_N\hat{v}_{\boldsymbol{N}})$$

$$\boldsymbol{M\hat{v}_{cm} = \left(\hat{P}_1 + \hat{P}_2 + \cdots + \hat{P}_N\right)} \qquad \mathbf{(7.39)}$$

Lo que quiere decir que si podemos medir la cantidad de movimiento total del sistema ya sabemos la velocidad del centro de masa o al revés.

Siguiendo los mismos razonamientos pero ahora derivando la velocidad del centro de masa, obtenemos la aceleración del centro de masa.

Aceleración del centro de masa

La aceleración del centro de masa de un sistema de N partículas de masas $m_1, m_2, \ldots, m_n$ y aceleraciones $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \ldots, \hat{a}_n$, el vector aceleración del centro de masa está dado por:

$$\boldsymbol{\hat{a}_{cm} = \frac{1}{M}(m_1\hat{a}_1 + m_2\hat{a}_2 + \cdots + m_N\hat{a}_N)} \qquad \mathbf{(7.40)}$$

Multiplicando la aceleración del centro de masa $\hat{a}_{cm}$ por la masa total del sistema, encontramos la fuerza neta que actúa sobre el sistema:

$$\boldsymbol{M\hat{a}_{cm} = (m_1\hat{a}_1 + m_2\hat{a}_2 + \cdots + m_N\hat{a}_N) = \sum F_{externas}} \qquad \mathbf{(7,41)}$$

Puesto que ya sabemos que las fuerzas internas están en pares acción-reacción y al sumar se cancelan, solo deja el aporte de las fuerzas externas sobre las partes que componen el sistema, pero que su efecto neto actúa sobre el punto llamado centro de masa. Si el sistema es aislado, el centro de masa estará en equilibrio, por lo tanto si este se encuentra en reposo seguirá en reposo, y si se mueve con velocidad constante seguirá con esta velocidad.

En el caso que la $\sum F_{externas} = 0$, las ecuaciones cinemáticas del centro de masa son:

$$\hat{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{cm}} = \hat{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{o\,cm}} + \hat{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{cm}}\boldsymbol{t} \qquad (\boldsymbol{7.42})$$

Donde la velocidad $\hat{v}_{cm}$ es constante. Si la fuerza neta $\sum F_{externas} = Constante \neq 0$ tendríamos un MUA y las ecuaciones son:

$$\hat{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{cm}} = \hat{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{o\,cm}} + \hat{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{0\,cm}}\boldsymbol{t} + \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}\hat{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{cm}}\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{2}} \qquad (\boldsymbol{7.43})$$

$$\hat{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{cm}} = \hat{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{o\,cm}} + \hat{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{cm}}\boldsymbol{t} \qquad (\boldsymbol{7.44})$$

Observe que aunque estamos trabajando con sistemas de partículas, que es mucho más complejo que tratar con una sola partícula, pero el hecho de poder contar y trabajar con el centro de masa, nos hace caer en la física de una sola partícula, que se estudió en detalle en los capítulos anteriores, y por lo tanto su relevancia empieza a ser manifiesta.

4

Unidad 4

Rotación de un cuerpo rígido lineal

Física I

Autor: Danilo Ariza

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina

MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Introducción

Cuando un cuerpo se lanza al aire describir su movimiento puede ser bastante complicado, pues a medida que avanza se puede deformar, rotar y trasladarse. La traslación ya no es problema porque basta ubicar el centro de masa y describir el movimiento de este punto, allí la física de una partícula es totalmente aplicable. Las otras partes que componen el todo rotan y vibran alrededor del centro de masa, pero describir la rotación de cada una no es tan fácil si el cuerpo se deforma (vibra). Para entender un poco mejor lo que se quiere decir piense como se comportaría una gelatina que se lanza al aire, imprimiéndole un efecto de tal forma que rote mientras avanza. Debido a la elasticidad del cuerpo puede ser que algunas partes completen una vuelta mientras otras no, además cada una de las partes cambian su distancia al centro de masa, por lo que tocaría describir la rotación y vibración de cada una de las partes que componen el sistema y esto es muy dispendioso, porque tranquilamente por centímetro cubico se pueden tener un número de Avogadro de moléculas, es decir del orden de 6×10^{23} partículas, que es igual a 600.000.000.000.000.000.000.000 seiscientos mil trillones de partes y deja de ser aplicable lo que hemos venido haciendo. Sin embargo hay una simplificación satisfactoria y justiciable en muchos casos que permite completar la descripción del movimiento de un cuerpo de una forma muy simple; la idea es tratar las cosas como cuerpos rígidos que no se deforman. El estudio del movimiento de cuerpos rígidos es lo que nos ocupa en esta última semana.

Recomendaciones metodológicas

El estudio de la rotación de un cuerpo rígido alrededor de un eje fijo extiende los principios de movimiento de partículas por tanto se recomienda al estudiante la detallada pero ágil revisión de los temas de las semanas anteriores, es recomendable que elabore un resumen de las mismas y una juiciosa y cuidadosa lectura del contenido de esta cartilla. También es importante elaborar un resumen de conceptos y principios incorporando en ello su fundamento matemático expresado en las respectivas ecuaciones. Se recomienda al estudiante el análisis de ejemplos propuestos bien sea en esta cartilla o en otros recursos que sean referenciados en este curso, todo ello con el fin de lograr un mayor afianzamiento y preparación para las actividades evaluativas a las que debe enfrentarse.

Desarrollo temático

Concepto de cuerpo rígido

Un cuerpo rígido es un objeto que no se deforma y por tanto las distancias entre sus partes no varían. La primera ventaja de tratar el sistema como un cuerpo rígido es que todas las partes, excepto el punto de rotación, se mueven describiendo círculos alrededor del centro de masa (o de cualquier otro punto desde el cual el cuerpo rote), porque las distancias entre ellas no varían y como consecuencia de lo anterior si una parte completa una vuelta entonces todas las partes también lo hacen de la misma forma, exceptuando el punto de rotación y gastando exactamente el mismo tiempo: así las magnitudes angulares son iguales para todas las partes que rotan, es decir, el desplazamiento, la velocidad y la aceleración angular tienen el mismo valor.

Para facilitar la descripción y utilizar lo que ya se ha construido se tomarán las siguientes consideraciones:

1. El cuerpo solo rota. Más adelante se logrará la descripción completa cuando junto con la rotación se introduzca la traslación.

2. El cuerpo no tiene que rotar estrictamente alrededor del centro de masa, lo puede hacer alrededor de cualquier otro eje, y el punto por el que pasa el eje de rotación se distinguirá con la letra O.

3. Solo se considerarán rotaciones en el plano, es decir en dos dimensiones.

4. Supondremos que el cuerpo se puede dividir en partes, esto para empezar con un problema conocido, el de un sistema de partículas.

5. Excepto el punto de rotación, todas las partes se mueven en círculos y en la misma forma (rotacionalmente hablando), entonces basta tomar una sola de ellas, describir su movimiento angular y después sumar por el número de partes, de tal forma que la cinemática del movimiento rotatorio y su relación con las magnitudes lineales, vistas en un capítulo anterior, es completamente aplicable a este caso.

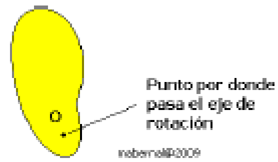


Figura 1. Cuerpo rígido pivotado en 0
Fuente: mabernal@2009.

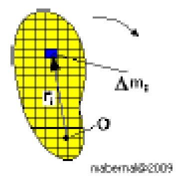


Figura 2. Cuerpo rígido pivotado en 0
Fuente: mabernal@2009.

La Figura 1 muestra un cuerpo rígido sobre el plano xy al que se le hizo un pequeño hueco en O por el que pasa el eje de rotación. Cuando se le aplica fuerza al objeto, este rota y por lo que está en un plano solo tiene dos opciones: en sentido anti horario o sentido horario. Es claro que cuando el objeto rota las partes se mueven y por lo tanto tienen energía cinética. Para calcular la energía cinética total dividimos el cuerpo en varias partes, ver Figura 2 como se mencionó antes, las magnitudes angulares son iguales para todas las partes, excepto para el punto de rotación de tal forma que la velocidad angular es una característica del cuerpo rígido. La parte i que tiene masa Δm_i, rapidez lineal v_i y está a una distancia r_i del punto de rotación, tiene energía cinética dada por:

$$K_i = \frac{1}{2}\Delta m_i v_i^2$$

Recordando de la semana 3 que $v = \omega r$ se tiene:

$$K_i = \frac{1}{2}\Delta m_i (\omega r)_i^2 = \frac{1}{2}\Delta m_i \omega_i^2 r_i^2$$

La energía total, sumando la de cada una de las partículas del sistema es:

$$K_{Total} = \sum_{i=1}^{N} K_i = \sum_{i=1}^{N} \Delta m_i \omega_i^2 r_i^2 = \frac{1}{2}\omega_i^2 \left(\sum_{i=1}^{N} \Delta m_i r_i^2\right) \qquad (8.1)$$

El término entre paréntesis se conoce como momento de inercia I, y es el análogo de la masa inercial (traslación) cuando el sistema rota, a mayor momento de inercia es mayor la resistencia del sistema a cambiar su estado de movimiento rotatorio. A diferencia de la masa inercial, el momento de inercia depende del punto de rotación, por lo tanto su valor depende de la distribución de masa alrededor del origen O.

Momento de inercia

El momento de inercia de un sistema de partículas es una magnitud escalar propia de sistemas que rotan y, para un conjunto de N partículas, se calcula mediante la ecuación:

$$\boldsymbol{I = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2} \qquad (\mathbf{8.2})$$

Para un cuerpo rígido la ecuación correspondiente es:

$$\boldsymbol{I = \int r^2 dm} \qquad (\mathbf{8.3})$$

La unidad de medida del momento de inercia, en el sistema internacional de unidades es $Kg.m^2$.

Energía cinética rotacional

La energía cinética debido al movimiento de rotación de sistemas de partículas o cuerpos que solo rotan está dada por:

$$\boldsymbol{K = \frac{1}{2} I \omega^2} \qquad (\mathbf{8.4})$$

Ejemplo 1

Hallar el momento de inercia y la energía cinética rotacional del sistema de tres partículas ubicadas en las coordenadas $\hat{r}_1 = (-3, -4)m$; $\hat{r}_2 = (1, 4)m$; $\hat{r}_3 = (5, 3)\ m\ - 3\ m\ m)\ m$, $\hat{r}_1 = -3\ m$ que tienen masas $m_1 = 8\ kg$, $m_2 = 2\ kg$, $m_3 = 1\ kg$, respectivamente. El sistema gira alrededor del origen del sistema de coordenado con rapidez angular de $\omega = 30\ rad/s$ y en la dirección que muestra la Figura.

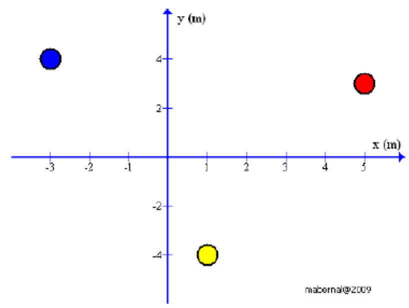


Figura 3. Ejemplo 1
Fuente: mabernal@2009.

Solución

Calculo del momento de inercia: debido a que es un sistema de partículas se debe utilizar la ecuación 8.2 y por lo tanto se necesita la distancia de cada una de las partículas al punto de rotación (origen en este caso), y como se sabe la coordenada x y y de cada una, basta aplicar el teorema de Pitágoras, así:

$$r_1^2 = (-3\,m)^2 + (4\,m)^2 = 25\,m^2$$

$$r_2^2 = (1\,m)^2 + (-4\,m)^2 = 17\,m^2$$

$$r_3^2 = (5\,m)^2 + (3\,m)^2 = 34\,m^2$$

Aplicando la ecuación 8.2

$$I = \frac{1}{2}(8\,kg)(25\,m^2) + \frac{1}{2}(2\,kg)(17\,m^2) + \frac{1}{2}(1\,kg)(34\,m^2) = 134\,kg.m^2$$

El cálculo de la energía cinética rotacional se hace con base en la ecuación 8.4.

$$K = \frac{1}{2}(134\,kg.m^2)(3\frac{rad}{s)^2} = 603\,J$$

Ejemplo 2

Una varilla muy delgada de masa $M = 5.00\,kg$ uniformemente distribuida y longitud $L = 0.40\,m$, rota con velocidad angular constante de $3\,rad/s$, alrededor de un eje que pasa por el centro de masa como como se muestra en la figura 8.4. Calcule el momento de inercia y la energía cinética.

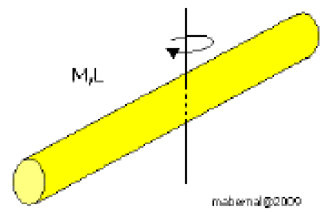


Figura 4. Varilla de densidad lineal de masa constante que rota en un plano alrededor de un eje que pasa por el centro de masa
Fuente: mabernal@2009.

Solución

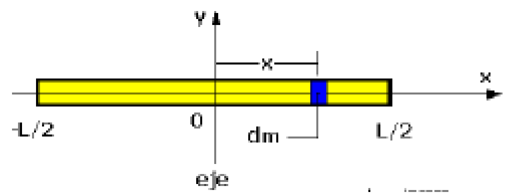


Figura 5. Descomposición de la varilla en elementos infinitesimales
Fuente: mabernal@2009.

Para calcular el momento de inercia se debe hacer uso de la ecuación 8.3, para esto consideremos un elemento infinitesimal de masa dm, ubicado a una distancia x del punto de rotación, (ver Figura 5) note que el origen del sistema coordenado coincide con el punto de rotación. Este elemento infinitesimal de masa aporta al momento de inercia la cantidad:

$$I = \int x^2 dm$$

Pero esta integral todavía no la podemos resolver, porque a pesar que la masa está distribuida uniformemente por toda la varilla está rotando y estrictamente la distribución de masa alrededor de O está cambiando, por lo tanto conviene pensar que el eje x es móvil y rota con la varilla y se integra por esta coordenada. Para esto se debe introducir una nueva magnitud física llamada densidad lineal de masa λ, que nos informa la cantidad de masa por unidad de longitud, es decir:

$$\lambda = \frac{dm}{dl}$$

La unidad en el SI. de esta magnitud es kg/m. Si la masa esta uniformemente distribuida por el cuerpo, entonces punto a punto esta magnitud tiene el mismo valor y por lo tanto será constante e igual a la unidad SI de esta magnitud es kg/m. Si la masa está uniformemente distribuida por el cuerpo, entonces punto a punto esta magnitud tiene el mismo valor y por lo tanto será constante e igual a:

$$\lambda = \frac{M}{L}$$

Donde M es la masa total del cuerpo y L su longitud.

En el ejemplo, como la varilla está sobre el eje x se tiene que $dl = dx$ y por lo tanto de la ecuación 8.4 se obtiene que:

$$dm = \lambda dx$$

Reemplazando en la integral y tomando el inicio de la varilla en -L/2 y termina en L/2,
Entonces:

$$I = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2 \lambda dx = \lambda \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2 dx = \frac{\lambda}{3}\left(\frac{L^3}{8} - \frac{-L^3}{8}\right) = \frac{M}{3L}\left(\frac{L^3}{8} - \frac{-L^3}{8}\right) = \frac{1}{12}ML^2$$

Remplazando los valores correspondientes se encuentra que:

$$I = \frac{1}{12}ML^2 = \frac{1}{12}(5\ kg)(0{,}4\ m)^2 \approx 0{,}0667\ kg.m^2$$

b) La energía cinética rotacional se obtiene por aplicación directa de la ecuación 8.4, por tanto:

$$K = \frac{1}{2}(0{,}0667\ kg.m^2)\left(3\frac{rad}{s}\right)^2 = 0{,}30\ J$$

Momento de inercia de algunos cuerpos

Se presenta una tabla con los momentos de inercia de cuerpos que tienen tal simetría que es posible calcular analíticamente con relativa facilidad la integral. A menos que se diga lo contrario, se considera que el eje pasa por el centro de masa y en todos los casos se consideran distribuciones uniformes.

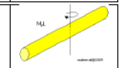
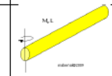
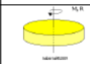
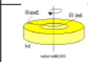
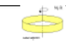
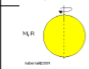
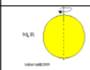
Objeto	Momento de inercia	Dibujo
Varilla de masa M y longitud L	$I_{cm} = \frac{1}{12} M L^2$	
Varilla de masa M y longitud L, eje pasa por un extremo	$I = \frac{1}{3} M L^2$	
Disco de masa M y radio R	$I_{cm} = \frac{1}{2} M R^2$	
Disco hueco de masa M, radio interno R_{int} y radio externo R_{ext}	$I_{cm} = \frac{1}{2} M (R_{int}^2 + R_{ext}^2)$	
Aro de masa M y radio R	$I_{cm} = M R^2$	
Esfera maciza de masa M, radio R	$I_{cm} = \frac{2}{5} M R^2$	
Esfera hueca de masa M, radio R	$I_{cm} = \frac{2}{3} M R^2$	

Tabla 1.
Fuente: mabernal@2009.

Teorema de los ejes paralelos

Si se conoce el momento de inercia de un cuerpo que rota alrededor de un eje que pasa por su centro de masa, es posible conocer el momento de inercia del cuerpo cuando gira alrededor de un eje paralelo al que pasa por el centro de masa. Suponga que para el caso de la Figura 5 el momento de inercia del cuerpo cuando este rota alrededor del eje que pasa por el centro de masa es Icm, entonces el momento de inercia cuando rota alrededor del eje paralelo es:

$$\boldsymbol{I_{o^*} = I_{cm} + MD^2} \qquad \mathbf{(8.5)}$$

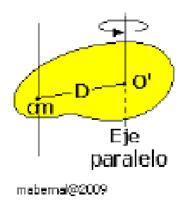


Figura 6. Conociendo el momento de inercia alrededor del eje que pasa por el centro de masa se puede hallar alrededor de uno que pase por un eje paralelo
Fuente: mabernal@2009.

La ecuación 8.5 es conocida como Teorema de Ejes Paralelos y su utilidad es de gran importancia en la solución de la mayoría de ejercicios de esta sesión. Note que se debe conocer la distancia desde el centro de masa hasta el nuevo punto de rotación.

Ejemplo 3

Calcular el momento de inercia de una varilla uniforme de masa M y longitud L, cuando rota alrededor de un eje que pasa por un extremo como se ve en la Figura 7.

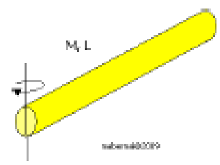


Figura 7.
Fuente: mabernal@2009.

Solución

Como la masa de la varilla esta uniformemente distribuida, se sabe que el centro de masa está ubicado en la mitad y además de la sesión anterior se conoce el momento de inercia cuando rota alrededor del eje que pasa por el centro de masa, lo que falta es saber el valor de D, pero observando un poco el dibujo se infiere que D = L/2. Aplicando la ecuación 8.5, obtenemos:

$$I = \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}ML^2 + \frac{1}{4}ML^2 = \frac{4}{12}ML^2 = \frac{1}{3}ML^2$$

Momento de torsión o torque

Como se vio en el capítulo 2, la acción de una fuerza sobre una partícula tiene el efecto de producir aceleración sobre esta, en la dirección de aplicación de la fuerza (suponiendo que no hay otras fuerzas involucradas) y como ya se sabe este efecto depende de la magnitud de la fuerza y de su dirección. Cuando se trata de un cuerpo la
situación ya no es tan sencilla, porque la acción de una fuerza aparte de mover el cuerpo lo puede hacer rotar e incluso cambiar su forma o romperlo y por esto es necesario atribuir a las fuerzas otras propiedades aparte de la norma y la dirección para lograr una mejor descripción del efecto de una fuerza. Sin embargo se mantendrá el razonamiento dentro del modelo de cuerpo rígido y solo supondremos rotación del cuerpo en un plano alrededor de un eje fijo. De forma muy intuitiva se entiende que no es lo mismo aplicar la fuerza en un punto del cuerpo alejado del punto de rotación que en otro que este muy cerca de O, e igualmente ocurre con la línea de acción.

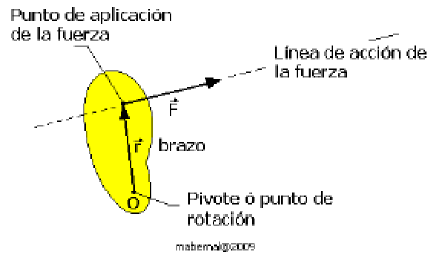


Figura 8. Características de la fuerza: magnitud, dirección, punto de aplicación y línea de acción.
Fuente: mabernal@2009.

Fijándose en la Figura 8 analice que pasaría si la línea de acción de la fuerza estuviera completamente vertical, los efectos serán completamente diferentes a como están en la Figura. Es claro que si el cuerpo está pivotado en un eje fijo que pasa por O, como se muestra en la Figura, el efecto de la fuerza no será trasladar el cuerpo, es decir moverlo en la dirección en que actúa la fuerza; su efecto será, hacerlo rotar alrededor de O.

El torque es el efecto rotatorio que produce una fuerza cuando actúa sobre un cuerpo. La ecuación que permite calcular el torque es:

$$\hat{\boldsymbol{\tau}} = \hat{\boldsymbol{r}} \times \widehat{\boldsymbol{F}} \qquad (\mathbf{8.6})$$

Donde $\hat{r}$ es llamado brazo y es el vector que va desde el punto de rotación O hasta el punto de aplicación. Las unidades SI para el torque son Nm. El torque también es llamado momento de torsión.

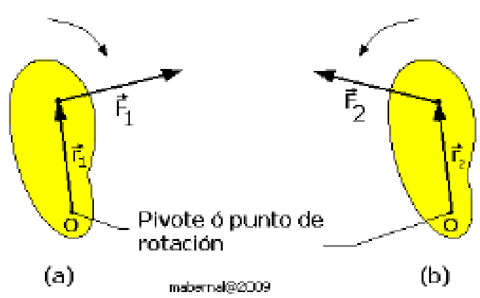


Figura 9. (a) La acción de la fuerza produce rotación en la dirección de las manecillas del reloj, en (b) la fuerza hace rotar el objeto en sentido contrario
Fuente: mabernal@2009.

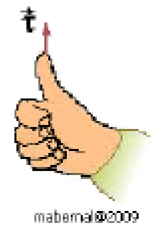


Figura 10. La dirección del torque es la dirección del dedo pulgar de la mano derecha, cuando se enrolla los otros dedos en la dirección que gira el cuerpo.
Fuente: mabernal@2009.

Dependiendo de la fuerza puede que el cuerpo rote en dirección de las manecillas del reloj o en sentido contrario (anti horario). Cuando el cuerpo rota en un plano fijo, sólo tiene estas dos opciones para girar, y utilizando la ley de la mano derecha se puede saber la dirección del torque, simplemente enrrollando los dedos de la mano derecha en la dirección que rota el cuerpo alrededor del pivote: si el dedo pulgar apunta hacia arriba quiere decir que la dirección del torque es en z positivo, pero si el dedo pulgar apunta hacia abajo el torque tiene dirección de z negativo. Cuando es posible saber la dirección del torque por la ley de la mano derecha solo basta encontrar la magnitud, que se calcula con la ecuación:

$$\tau = rFSen\theta$$

Donde θ es el ángulo más pequeño entre el brazo y la fuerza.

Si sobre un cuerpo pivotado en O actúan varias fuerzas, el torque neto o total se define mediante:

$$\hat{\tau}_{Tot} = \sum \hat{\tau}_i = \sum \hat{r}_i \times \hat{F}_i$$

En la Figura 10 la fuerza $\hat{F}_3$ no produce torque porque su línea de acción pasa por el punto de rotación, lo que es equivalente a decir que $r = 0$, $\hat{F}_4$ tampoco produce torque porque el punto de acción coincide con el punto de rotación, lo que es equivalente a decir que $\hat{F}_4 = 0$, $\hat{F}_1$ produce torque negativo pues produce giro en el sentido de las manecillas del reloj, por lo tanto el pulgar queda en la dirección de z negativo. Usted mismo puede comprobar que $\hat{F}_2$ produce torque positivo, luego para este caso el torque neto queda:

$$\tau_{Tot} = r_2F_2Sen\theta_2 - r_1F_1Sen\theta_1$$

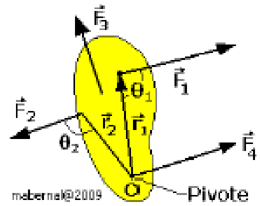


Figura 11. Varias fuerzas actuando sobre el cuerpo pivotado en O.
Fuente: mabernal@2009.

Mientras mayor magnitud tenga el torque neto, mayor será el efecto rotatorio sobre el cuerpo, es decir, mayor será el cambio en su estado de movimiento rotacional, por lo tanto el torque neto y la aceleración angular están directamente relacionadas mediante:

$$\hat{\tau}_{Tot} = \sum \hat{\tau}_i = I\hat{\alpha}$$

Donde I es el momento de inercia del cuerpo respecto al eje de rotación. Note la gran semejanza de esta expresión con la segunda ley de Newton vista en la semana 4, por lo tanto la interpretación es semejante. El efecto de un torque es producir aceleración angular, así que podemos concluir que:

1. El efecto de un torque es proporcional a la magnitud del mismo:

$$\alpha \propto \tau_{neto}$$

2. El efecto de un torque es inversamente proporcional al momento de inercia:

$$\alpha \propto \frac{1}{I}$$

De donde se deduce que:

$$\alpha = \frac{\tau_{neto}}{I}$$

Similar a $a = F_{neta}/m$. Note que entre mayor sea I menor es el efecto, es decir menor es α, luego el momento de inercia se interpreta como una medida de la resistencia del cuerpo a cambiar su estado de movimiento rotacional (similar a la masa inercial) y como tal es más difícil detener o poner en marcha un objeto de momento de inercia grande que otro de momento de inercia menor.

Ejemplo 4

Un volante de un carrito de impulso tiene radio 2.5 cm y masa de 150 g en el piñón acoplado a su eje de giro; por efecto del impulso de las ruedas con el piso, se produce una aceleración angular de 1 rad/s^2. Calcule el torque neto sobre el volante.

Solución

Como el volante está acoplado con el piñón por el eje de rotación tienen las mismas magnitudes angulares, luego:

$$\tau_{neto} = I\alpha$$

El momento de inercia del, disco que rota alrededor de un eje que pasa por su centro de masa (ver tabla) es:

$$I_{cm} = \frac{1}{2}MR^2 = \frac{1}{2}(150 \times 10^{-3}\ kg)(2{,}5 \times\ 10^{-2}) = 4{,}69\ \times 10^{-5}\ kg.m^2$$

Como se conoce la aceleración angular y el momento de inercia, se reemplaza directamente en la ecuación, por lo tanto:

$$\tau_{neto} = I\alpha = (4{,}69\ \times 10^{-5}\ kg.m^2)\left(1\frac{rad}{s^2}\right) = 4{,}69\ \times 10^{-5}\ N.m$$

Equilibrio del cuerpo rígido

Como se ha discutido ampliamente en este último capítulo, una fuerza sobre un cuerpo puede hacerlo rotar y/o trasladar, luego la condición de equilibrio para un cuerpo rígido es un poco más compleja que para una partícula porque se debe asegurar equilibrio tanto en lo traslacional como en lo rotacional, esto es un cuerpo rígido está en equilibrio si se cumple las dos siguientes condiciones:

Condición de equilibrio traslacional: la suma de fuerzas es igual a cero.

$$\sum \hat{F}_i = 0$$

Condición de equilibrio rotacional: la suma de torques es igual a cero.

$$\sum \hat{\tau}_i = 0$$

Ejemplo 5

En un sube y baja de un parque infantil papá e hijo se entretienen. Colocando al niño de 15.0 kg en un extremo de la barra, a 2.00 m del punto de rotación, el padre de 75.0 kg quiere saber en qué posición del otro lado del sube y baja se debe colocar para que queden en equilibrio.

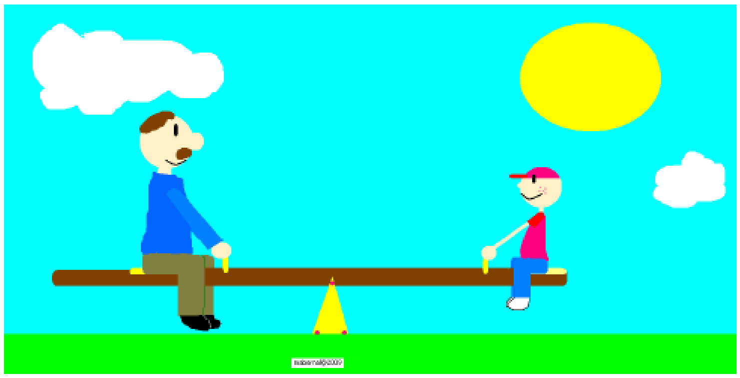


Figura 12. Padre e hijo divirtiéndose con el sube y baja.
Fuente: mabernal@2009.

Solución

Considerando que el sube y baja es una barra de masa M uniformemente distribuida y apoyada en la mitad, lo primero que se debe hacer es un diagrama de cuerpo libre. En la Figura 12 se puede apreciar que se han utilizado las siguientes convenciones: R la fuerza (resistencia) que produce el soporte que pivota al sube y baja, W_b el peso de la barra, W_n el peso del niño, W_p el peso del papá y $d = 2\ m$.

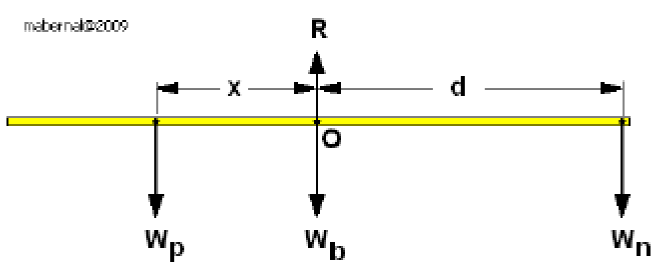


Figura 13. Diagrama de cuerpo libre de la barra que está pivota en O.
Fuente: mabernal@2009.

Las fuerzas que actúan en el punto de rotación no producen torque, por lo tanto solo se tendrán en cuenta los producidos por el peso del niño y el peso del papá. Siguiendo la ley de la mano derecha, y teniendo en cuenta que el sistema permanece en equilibrio, se puede establecer que:

$$\sum \tau_i = \tau_p - \tau_n = 0$$

$$\tau_p - \tau_n = xW_p Sen(90) - dW_n Sen(90) = 0$$

$$x = \frac{dW_n}{W_p} = \frac{(2\ m)(15\ kg)(9{,}8\ m/s^2)}{(75\ kg)(9{,}8\ m/s^2)} = \frac{(2\ m)(15\ kg)}{(75\ kg)} = 0{,}4\ m$$

Ejercicios

Ejercicio 1.

Una rueda de tejer requiere de 2 minutos y medio para girar 18 vueltas. Su rapidez angular después de los dos minutos y medio es de 20.0 rpm. Calcule el valor de la aceleración angular que es constante.

Ejercicio 2.

Una parte de una máquina se compone de una varilla de 2.5 kg de masa y de 35 cm de largo que rota alrededor de uno de sus extremos a velocidad constante de 35 rpm. Calcule su energía cinética.

Ejercicio 3.

Un reloj de péndulo consta de una varilla de 30.0 cm de largo y 250 g de masa, pivotado en su extremo superior. En el extremo inferior tiene soldada una esfera de 100 g de masa. Cuando la esfera pasa por su posición más baja lleva una velocidad angular de 1.5 rad/s. Encuentre la energía cinética del sistema.

Ejercicio 4.

Un sistema se sostiene con un contrapeso como se muestra en la figura 8.14. Con los datos de la figura calcule la tensión en el alambre.

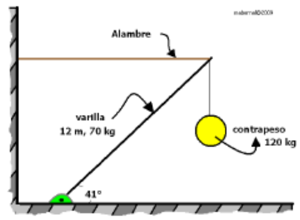


Figura 14. Ejercicio
Fuente: mabernal@2009.

Ejercicio 5.

En una construcción la grúa debe levantar una pared de 900 kg, cuál debe ser la masa del contrapeso, para mantener el brazo horizontal. Tome los datos de la Figura 15.

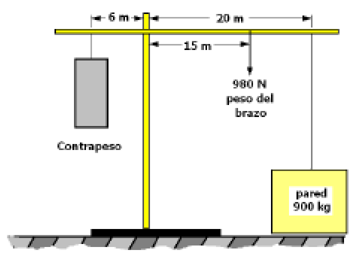


Figura 15.
Fuente: mabernal@2009.

Ejercicio 6.

Encuentre el valor de la aceleración de los bloques y las tensiones en la cuerda. Suponga que $m_1 = 2\ kg\ \ m_2 = 10\ kg, \quad \mu = 0{,}1$ y la masa de la polea es de 1.2 kg.

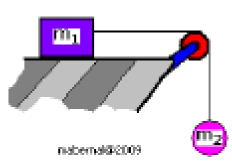


Figura 16.
Fuente: mabernal@2009.

Bibliografia

- **Benson, H.** (1997). *Física universitaria*. Volumen 1, Editorial CECSA.
- **Bernal, M**. (2010). *Física I: Cartilla.* Politécnico Grancolombiano.
- **Eisberg, R.** (1990). Física: fundamentos y aplicaciones. Mc GrawHill.
- **Giancoli.** (1997). *Física general.* (4ta Ed.). Prentice Hall.
- **Halliday, D.** (2002). *Física.* (5ta Ed.). Volumen I. CECSA.
- **Sears, F.** (1997). *Física universitaria.* (5ta Ed.). Volumen 1. Editorial Addison Wesley Longman.
- **Serway, R. & Jewet, J.** (2009). Física para ciencias e ingeniería. (7ma Ed.). Cengage Learning.

Esta obra se terminó de editar en el mes de noviembre
Tipografá Myriad Pro 12 puntos
Bogotá D.C,-Colombia.

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina

MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO