CÁLCULO DIFERENCIAL

Autor: Alexander Moreno Quiroga

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina
MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Cálculo Diferencial / Alexander Moreno Quiroga, / Bogotá D.C.,
Fundación Universitaria del Área Andina. 2017

978-958-5460-27-0

Catalogación en la fuente Fundación Universitaria del Área Andina (Bogotá).

Edición:
Fondo editorial Areandino
Fundación Universitaria del Área Andina
Calle 71 11-14, Bogotá D.C., Colombia
Tel.: (57-1) 7 42 19 64 ext. 1228
E-mail: publicaciones@areandina.edu.co
http://www.areandina.edu.co

Primera edición: noviembre de 2017

Corrección de estilo, diagramación y edición: Dirección Nacional de Operaciones virtuales
Diseño y compilación electrónica: Dirección Nacional de Investigación

Hecho en Colombia
Made in Colombia

CÁLCULO DIFERENCIAL

Autor: Alexander Moreno Quiroga

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina

MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Índice

i

Índice

1

Unidad 1

Introducción a funciones reales de variable real

Cálculo diferencial

Autor: Alexander Moreno Quiroga

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina
MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Introducción

Básicamente el concepto de función no solo es fundamental en las matemáticas, lo es también en cualquier ciencia en la que busque encontrar conexiones entre los diferentes objetos de estudio, ya que es una de las más útiles maneras de hacer corresponder una cantidad con otra. Nuestro universo se encuentra repleto de objetos en los que se asocian unos con otros. Es posible afirmar que durante la historia el hombre ha planteado relaciones con los objetos que lo rodean, con el firme propósito da dar una razón a los sucesos del mundo. Aun así, fue necesario que transcurriera bastante tiempo para encontrar la notación de función que conocemos hoy en día.

A lo largo de esta cartilla se presentaran las desigualdades basadas en intervalos, las cuales nos darán una idea clara del concepto de dominio, Codominio y rango, posteriormente estudiaremos los tipos de funciones y sus representaciones más comunes.

Recomendaciones metodológicas

Es importante realizar una lectura detallada de la cartilla, teniendo en cuenta que aquí se encuentran las bases para el curso de cálculo diferencial, de igual manera se recomienda leer los ejemplos planteados y luego procurar resolverlos autónomamente, esto con el fin de aprender los procesos para la resolución de los ejercicios relacionados y adquirir competencias en el trabajo con funciones.

Desarrollo temático

Introducción a funciones reales de variable real

Funciones

Desigualdades

Cuando se estudian los conjuntos numéricos $N, Z, Q\ y\ R$ queda establecida una relación de orden en cada uno de ellos, de tal manera que dados dos números a y b es posible determinara si a esta a la izquierda de b o está a la derecha de b al representarlos sobre una recta real.

La afirmación "una expresión algebraica es mayor que (o menor que) otra expresión" se llama desigualdad. Las expresiones llamadas miembros de la desigualdad deben ser números reales. Los símbolos más usuales de desigualdad son $>$ y $<$, se leen respectivamente "mayor que" y "menor que".

Propiedades de las desigualdades

- Si sumamos o restamos un mismo número a los dos miembros de una desigualdad, resulta otra del mismo sentido.
- Si multiplicamos o dividimos los dos miembros de una desigualdad por un mismo número positivo, resulta otra del mismo sentido.
- Si multiplicamos o dividimos los dos miembros de una desigualdad por un mismo número negativo, resulta otra de sentido contrario.

Teorema 1: si a, b y c son tres números reales cualesquiera, tales que $a < b\ y\ b < c$, entonces a < c; es decir, la relación ser menor que en R es transitiva.

Teorema 2: si $a, b\ y\ c$ son tres números reales cualesquiera, tales que $a < b$, entonces $a + c < b + c$; es decir el sentido de una desigualdad en R no cambia si se suma a ambos miembros de la desigualdad un número real.

Teorema 3: si a, b y c son tres números reales cualesquiera, tales que $a < b, c \in R^+ (c > 0)$, entonces $ac < bc$; es decir el sentido de una desigualdad no cambia si ambos miembros se multiplican por el mismo número real positivo.

Teorema 4: si $a, b\ y\ c$ son tres números reales cualesquiera, tales $que\ a\ <\ b\ y\ c\ \in R^{-}(c < 0)$, entonces $ac > bc$; es decir, el sentido de una desigualdad en R se invierte si ambos miembros se multiplican por el mismo número real negativo.

Teorema 5: si $a, b, c\ y\ d$ son cuatro números reales cualesquiera, tales que $a\ <\ b$ y $c\ <\ d$, entonces $a\ +\ c\ <\ b\ +\ d$; es decir si se suman miembro a miembro dos desigualdades del mismo sentido, se obtiene una desigualdad del mismo sentido.

Intervalos finitos o acotados

Si $a, b, c\ \in R$ y son tales que $a\ <\ b$ y $b\ <\ c$, escribimos $a\ <\ b\ <\ c$. Cuando esto ocurre decimos que b esta entre a y c.

Decimos que $a \leq b$ si ocurre una de las siguientes situaciones:

- $a\ <\ b$
- $a\ =\ b$

Es decir, a es menor o igual que b.

A continuación estudiaremos los tipos de intervalos.

Intervalo cerrado: sean a y b números reales tales que a < b. Si x es un número real tal que $a \leq b$ y $x \leq b$; es decir $a \leq x \leq b$, entonces el conjunto $\{x\ \in R/a \leq x \leq b\}$ se llama intervalo cerrado de extremos a y b y se denota por $[a, b]$.

Intervalo abierto: sean a y b números reales tales que a < b. Si x es un número real tal que $a < b$ y $x < b$; es decir $a < x < b$, entonces el conjunto $\{x\ \in R/a < x < b\}$ se llama intervalo abierto de extremos a y b y se denota por (a, b).

Intervalo abierto a la izquierda: sean a y b números reales tales que a < b. Si x es un número real tal que $a < b$ y $x \leq b$; es decir $a < x \leq b$, entonces el conjunto $\{x\ \in R/a < x \leq b\}$ se llama intervalo semiabierto a izquierda de extremos a y b y se denota por $(a, b]$.

Intervalo abierto a la derecha: sean a y b números reales tales que a ≤ b. Si x es un número real tal que $a \leq b$ y $x < b$; es decir $a \leq x < b$, entonces el conjunto $\{x\ \in R/a \leq x < b\}$ se llama intervalo semiabierto a derecha de extremos a y b y se denota por $[a, b)$.

Intervalos infinitos no acotados: sea a un número real cualquiera,

- El conjunto de números reales que son mayores o iguales que a, es decir $\{x\ \in R/a \leq x\} =\ \{x\ \in R/x \geq a\}$, se denota por $[a, +\infty)$.

- El conjunto de números reales que son mayores que a, es decir $\{x \in R/a < x\} = \{x \in R/x > a\}$, se denota por $(a, +\infty)$.
- El conjunto de números reales que son menores o iguales que a, es decir $\{x \in R/x \leq a\} = \{x \in R/a \geq x\}$, se denota por $(-\infty, a]$.
- El conjunto de números reales que son menores que a, es decir $\{x \in R/x < a\} = \{x \in R/a > x\}$, se denota por $(-\infty, a)$.

Tabla de resumen notaciones de intervalos

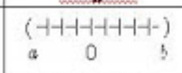
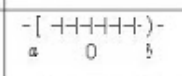
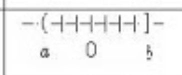
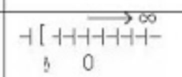
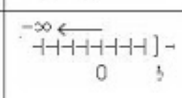
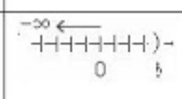
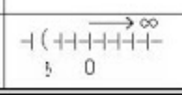
Notacion de Conjunto	Notacion de Intervalo	Notacion Grafica	
$\{x \mid a<x<b\}$	(a,b)		Intervalo abierto en ambos extremos
$\{x \mid a\leq x\leq b\}$	$[a,b]$		Intervalo cerrado en ambos extremos
$\{x \mid a\leq x<b\}$	$[a,b)$		Intervalo cerrado en "a" y abierto en "b"
$\{x \mid a<x\leq b\}$	$(a,b]$		Intervalo abierto en "a" y cerrado en "b"
$\{x \mid x\geq b\}$	$[b,\infty)$		Intervalo cerrado en "b" y abierto hasta infinito
$\{x \mid x\leq b\}$	$(-\infty,b]$		Intervalo abierto desde menos infinito y cerrado en "b"
$\{x \mid x<b\}$	$(-\infty,b)$		Intervalo abierto desde menos infinito y abierto hasta "b"
$\{x \mid x>b\}$	(b,∞)		Intervalo abierto en "b" y abierto hasta infinito

Tabla 1. Tabla de resumen notaciones de intervalos

Fuente: Propia.

Inecuaciones: son desigualdades que solo son satisfechas por algunos números reales, resolver una inecuación significa encontrar el intervalo para el cual se satisface la variable, para lograrlo es necesario utilizar las propiedades de las desigualdades.

Ejemplo

Hallemos el conjunto solución de la inecuación $3x + 2 > 2x + 4$

Solución:

$3x + 2 > 2x + 4 \iff 3x < 2x + 2$ (Sumando -2 a ambos miembros).

$3x + 2 > 2x + 4 \iff x < 2$ (Sumando -2x a ambos miembros).

Luego el conjunto solución es $S = \{x \in R/x < 2\}$= $(-\infty, 2)$

Gráficamente seria:

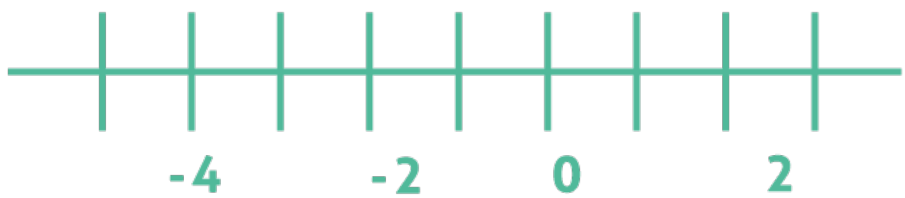


Figura 1

Fuente: Propia.

Funciones

Una función f de un conjunto X en otro Y es una correspondencia que asigna a cada elemento x de X exactamente un elemento y de Y. Diremos que y es la imagen de x bajo f, denotado $f(x)$.

Ejemplo

Sean $A = \{1,2,3,4,5\}, B = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ y f una relación de A en B, que asigna a cada elemento $x \epsilon A$, un elemento $y \epsilon B$, en donde *"y es el doble de x",* lo cual se notara así:

$$f: A \to B$$

$$x \to 2x$$

Las parejas que pertenecen a la relación son:

$$f = \{(1,2), (2,4), (3,6), (4,8), (5,10)\}$$

El diagrama sagital correspondiente es:

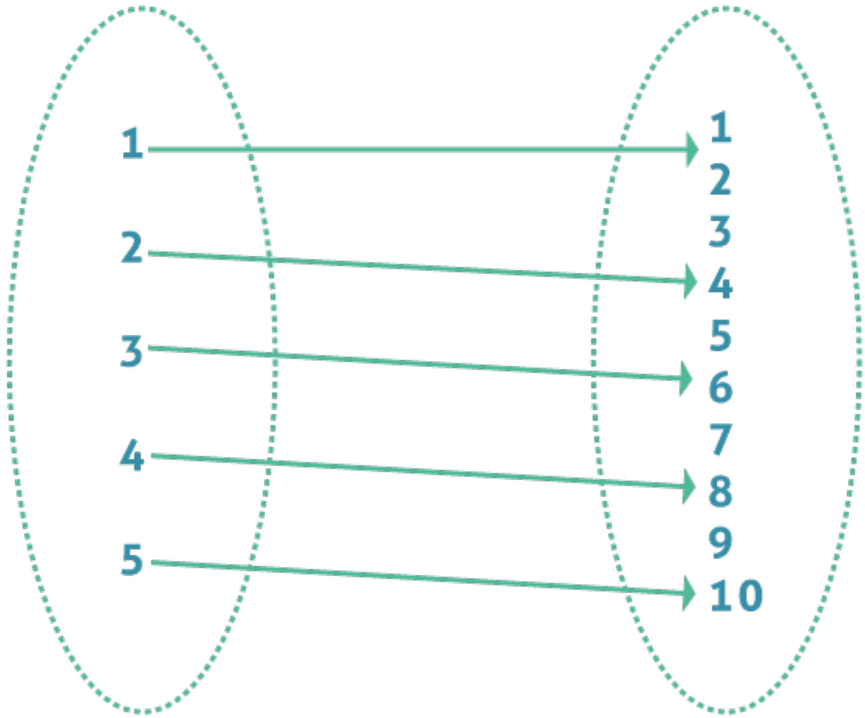


Figura 2

Fuente: Propia.

Como se puede observar todos los elementos de A tienen imagen; además a ninguno de los elementos de A le corresponde más de una imagen en B. Por lo tanto la relación es una función.

Ejemplo

La curva que se muestra a continuación representa una relación definida del intervalo (1,5) al intervalo (-2,2).

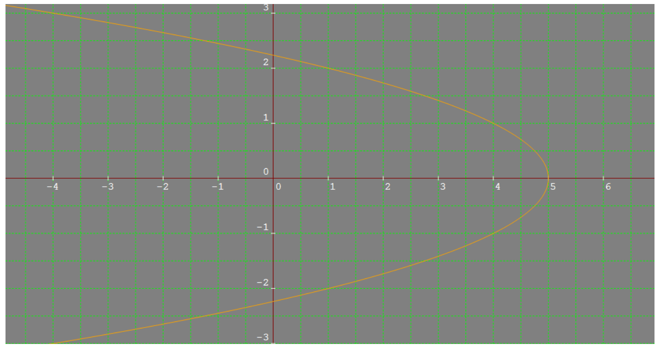


Imagen 1

Fuente: Propia.

Como se puede observar para cualquier punto comprendido en el intervalo (1,5) es posible encontrar su imagen, solo x=5 tiene una única imagen mientras que los demás puntos tienen dos imágenes, por tanto la grafica no representa una función.

Ejemplo

Para la grafica definida en el siguiente grafico es fácil ver que ocurre lo contrario al ejemplo anterior.

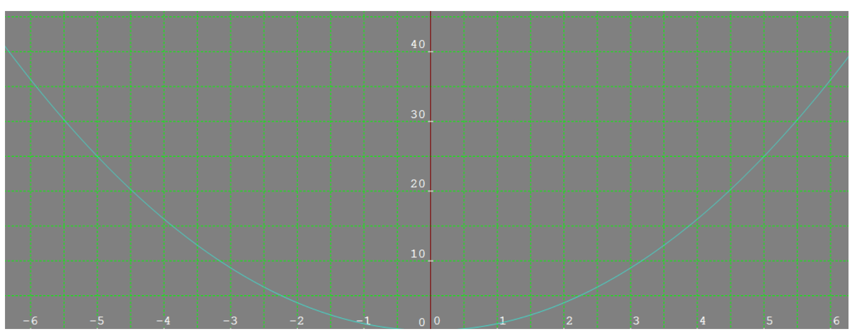


Imagen 2

Fuente: Propia.

Para los valores de x comprendidos entre (-5,5) se puede notar que cada uno de ellos tiene una única imagen lo cual evidencia que el grafico SI representa una función.

Elementos de una función

Dominio: es el conjunto de valores que toma la variable independiente x.

Codominio: es el conjunto de valores que puede tomar la variable dependiente y.

Rango: es el conjunto de valores que efectivamente toma la variable dependiente y.

Ejemplo

Sea $A = \{1,2,3,4,5\}, B = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ y f una relación de A en B, que asigna a cada elemento $x \epsilon A$, un elemento $y \epsilon B$, en donde *"y es el doble de x",* es decir $y = 2x$, según el ejemplo 2, los elementos de esta función seria:

Dominio: $D_f = \{1,2,3,4,5\}$

Codominio: $C_f = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

Rango: $R_f = \{2,4,6,8,10\}$

Ejemplo: establecer los elementos de la función de variable real.

$$f: R \to R$$

$$x \to x^2$$

Gráficamente se tendría:

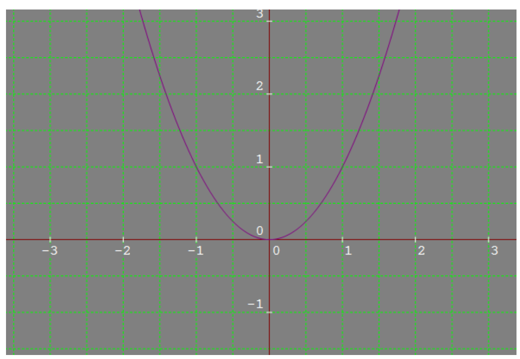


Imagen 3

Fuente: Propia.

El dominio de la función f es el conjunto de los números Reales R, ya que a todo número real se le puede asignar su cuadrado.

El Codominio de f es el conjunto de los números reales R puesto que el cuadrado de cualquier real pertenece al conjunto de los números reales.

El rango de la función f es el conjunto de los números reales positivos.

Dominio: $D_f = R$

Codominio: $C_f = R$

Rango: $R_f = R^+$

Clasificación de las funciones

Función creciente: una función es creciente si en la medida que crece el valor de los elementos del dominio también crece el valor de las imágenes, es decir para $x_1 x_2 \in D_f$ tales que $x_1 < x_2$, se cumple que $f(x_1) < f(x_2)$:

Ejemplo

Dada una función f cuya grafica es:

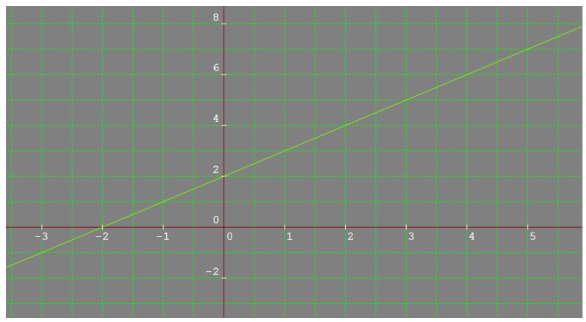


Imagen 4

Fuente: Propia.

Al tomar dos elementos cualesquiera del dominio es fácil ver que cumplen con la propiedad enunciada en la definición .

x	1	3
$f(x)$	3	5

Figura 3

Fuente: Propia.

Función decreciente: una función es decreciente si en la medida que crece el valor de los elementos del dominio decrece el valor de las imágenes, es decir para $x_1 x_2 \in D_f$ tales que $x_1 < x_2$, se cumple que $f(x_1) > f(x_2)$:

Ejemplo

Dada una función f cuya grafica es:

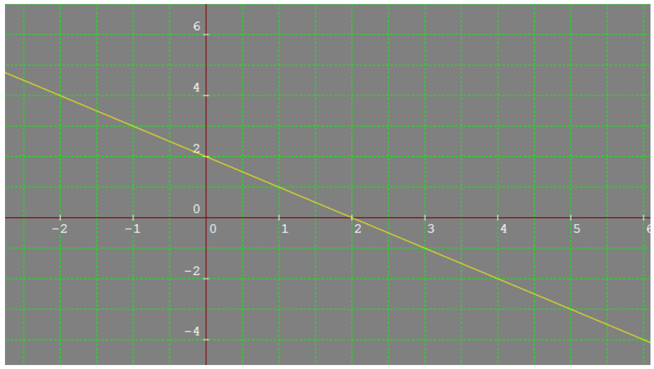


Imagen 5

Fuente: Propia.

Al tomar dos elementos cualesquiera del dominio es fácil ver que cumplen con la propiedad enunciada en la definición.

x	0	1
$f(x)$	2	1

Figura 4

Fuente: Propia.

Función par: una función f es par si a elementos opuestos aditivos del dominio le corresponden elementos iguales en el rango. Es decir $f\ es\ par\ si\ f(-x) = f(x)$ y su grafica es simetrica respecto a una recta.

Ejemplo

Sea la función f definida por $f(x) = x^2 - 3$

Algunos puntos de la función son:

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	1	-2	-3	-2	1

Figura 5

Fuente: Propia.

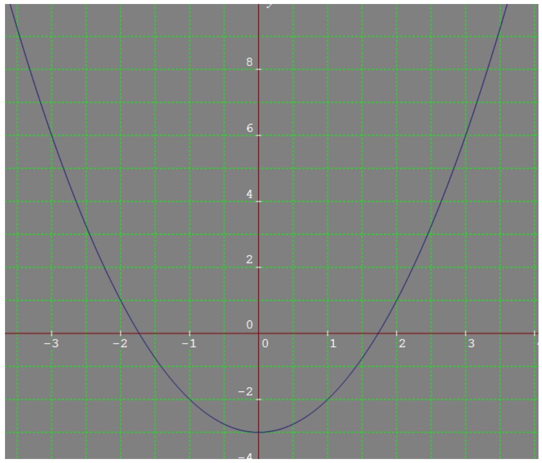


Imagen 6

Fuente: Propia.

En esta función se cumple que las parejas cuyas abscisas son opuestos aditivos poseen ordenadas iguales.

Función impar: una función en impar si a elementos opuestos aditivos del dominio corresponden también elementos aditivos en el rango. Es decir $f\ es\ impar\ si\ f(x) = -f(-x)$.

Ejemplo

Analicemos la siguiente gráfica:

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-4	-2	0	2	4

Figura 6

Fuente: Propia.

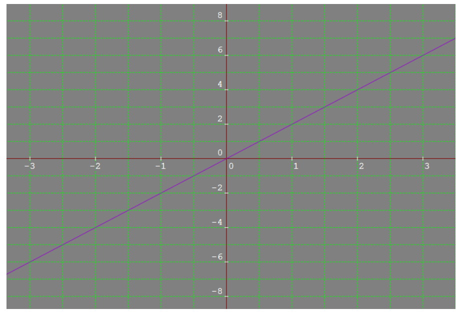


Imagen 7

Fuente: Propia.

Funciones polinómicas: en la clasificación de las funciones polinómicas se pueden hallar las lineales, las cuadráticas y las de orden superior. Siendo las primeras funciones de grado 1 y las segundas de grado dos, las demás son aquellas cuyo máximo grado es superior a 2. Ambas Funciones han sido trabajadas en cursos anteriores.

Formalmente, es una función:

$$f: x \rightarrow P(x)$$

Donde $P(x)$ es un polinomio definido para todo número real x; es decir, una suma finita de potencias de x multiplicada por coeficientes reales de la forma:

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

Función lineal: en cursos de álgebra básica y de geometría, se afirma que una función lineal es la primer clase de funciones polinómicas y al realizar la representación en un plano de coordenadas cartesianas se obtiene una línea recta, también es posible identificar una función como lineal si cualquier cambio o incremento en la variable independiente genera un cambio en la misma proporción en la variable dependiente. Esta función se puede escribir como:

$$f(x) = mx + b$$

En esta ecuación cada una de las letras tiene su significado así:

f Representa la función de la que estamos hablando.

x Es la variable real independiente.

m Es el valor de la pendiente de la recta que indica el grado de inclinación de la reta, si se modifica este valor, la gráfica también lo hará.

b Es el punto de corte de la grafica con el eje y, si se modifica este valor, la grafica subirá o

bajará dependiendo el cambio que sufra este valor.

Algunos autores llaman función lineal a aquella con b = 0 de la forma:

$$f(x) = mx$$

Mientras que llaman función afín a la que tiene la forma:

$$f(x) = mx + b$$

Gráficamente se tiene:

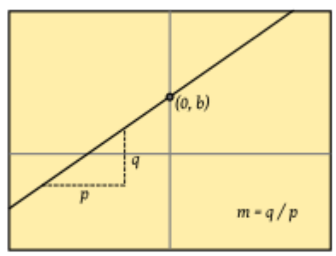


Imagen 8

Fuente: Propia.

Cuando b es distinto de cero, dado que la primera (b = 0) es un ejemplo también de transformación lineal, en el contexto de álgebra lineal.

Ejemplo

$$f(x) = 3x - 2$$

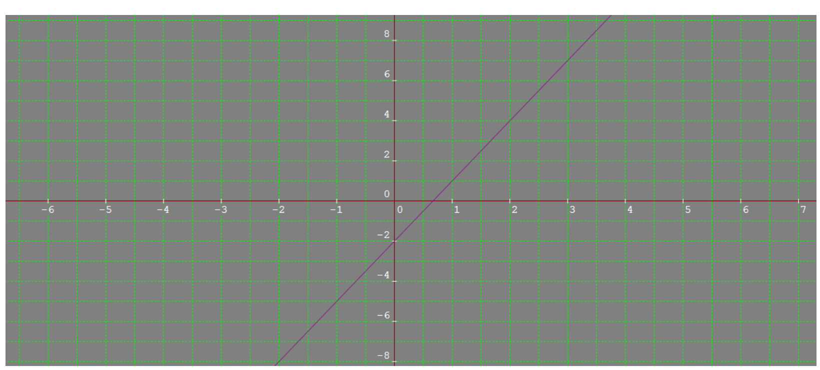


Imagen 9

Fuente: Propia.

Función constante: una función constante se define:

$$h: R \rightarrow R$$

$$x \rightarrow k$$

donde k representa un número real constante, el cual es el mismo para todo x del dominio

Ejemplo

Sea la Función definida por $f(x) = 2$.

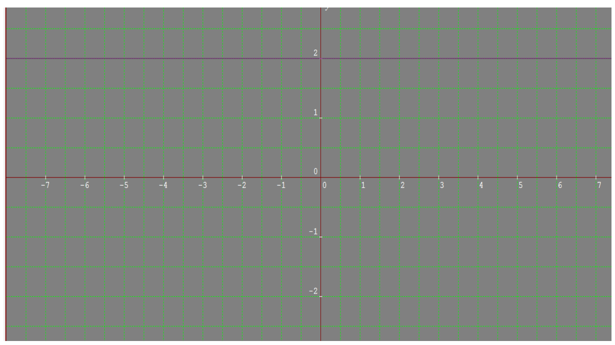


Imagen 10

Fuente: Propia.

La grafica de una función constante es una línea recta horizontal.

Función idéntica: la función idéntica está definida por:

$$h: R \rightarrow R$$
$$x \rightarrow x$$

Y su gráfica es:

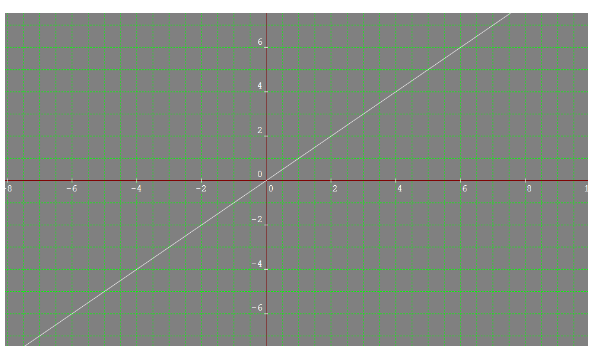


Imagen 11

Fuente: Propia.

Función cuadrática: las funciones de la forma $y = ax^2 + bx + c$; donde $a, b\ y\ c\ \in R, a \neq 0$, son Funciones cuadráticas.

Ejemplo

Son ejemplos de ecuaciones cuadráticas.

$y = x^2$ $\qquad$ $y = -x^2 + 3$ $\qquad$ $y = -(x-2)^2 + 9$

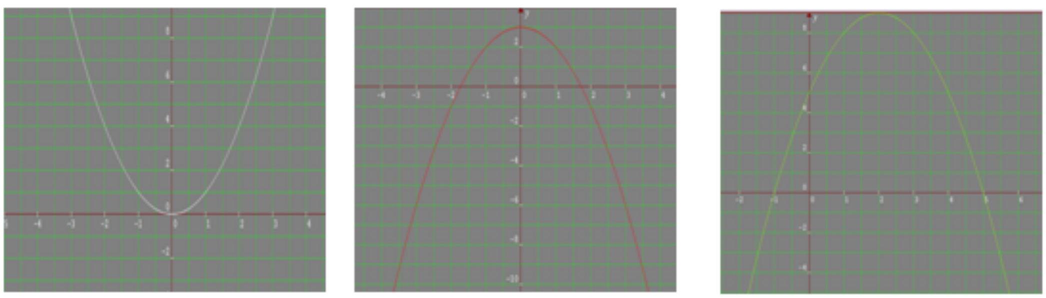


Imagen 12

Fuente: Propia.

Funciones polinómicas de orden superior: son Funciones donde la variable x posee un grado mayor a 2.

Ejemplo 14

$y = x^3$ $\qquad$ $y = -x^4 + 3$ $\qquad$ $y = -5x^5$

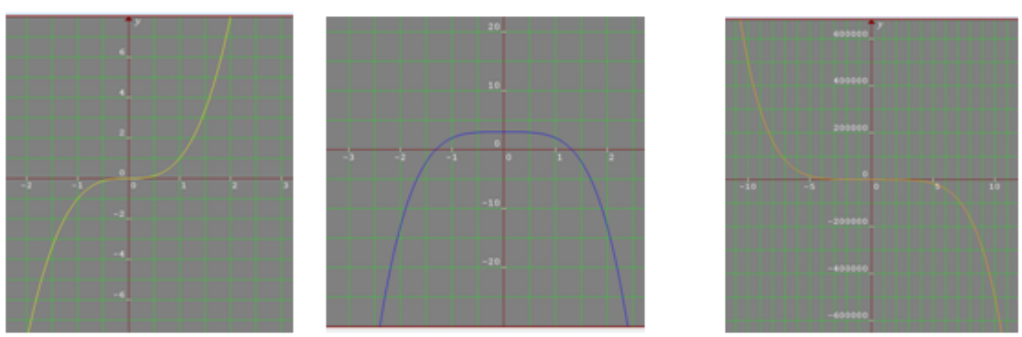


Imagen 13

Fuente: Propia.

El dominio de todas las Funciones polinómicas siempre es el conjunto de los números reales, mientras que el rango depende de cada función.

Función racional: la función racional es el cociente de dos funciones polinómicas, para hallar el dominio de una función que es el cociente entre dos funciones, hallamos los valores de x para los cuales la función del denominador es igual a cero y los exceptuamos del conjunto de los números reales. El rango de una función racional se calcula buscando los valores que puede tomar la variable dependiente después de excluir los que anulan el denominador en el dominio.

Ejemplo

Sea la función $f(x) = \frac{1}{x+2}$

Se puede ver que el denominador se hace cero para x = -2. El dominio de la función son los reales excluyendo el -2 o sea que:

$$D_f = R - \{-2\}$$

Para determinar el rango, nos ayudamos con la gráfica.

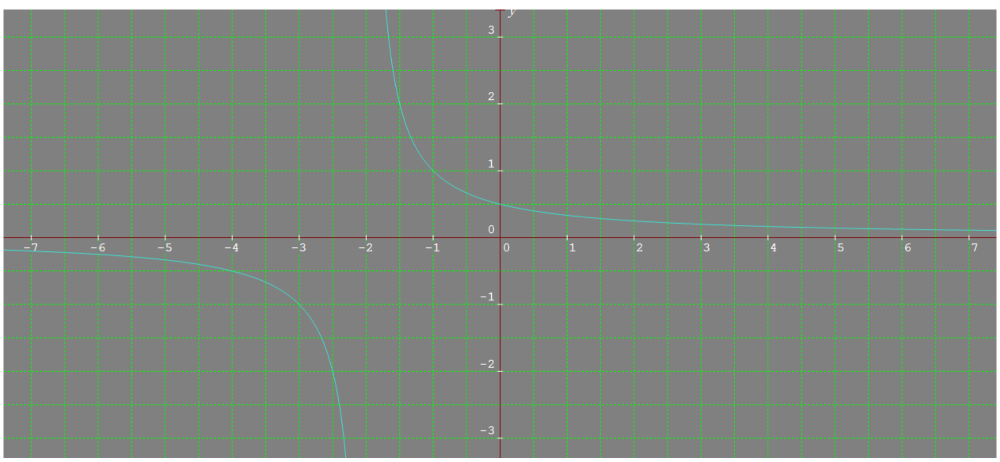


Imagen 14

Fuente: Propia.

Observamos que ningún valor de x tiene como imagen y = 0. Por lo tanto:

$$R_f = R - \{0\}$$

Funciones con radicales: la función raíz cuadrada se restringe para los valores en los cuales la cantidad subradical sea mayor o igual que cero Para hallar el dominio de la función raíz cuadrada se plantea la desigualdad y se resuelve, su resultado será un intervalo.

Ejemplo

Sea la función $f(x) = \sqrt{x-4}$

La raíz cuadrada por ser una raíz par, no está definida para números reales menores que cero. La función esta definida para valores los cuales.

$$x - 4 \geq 0$$

$$x \geq 4$$

Por tanto el dominio de la función será:

$$D_f = \{x \,/\, x \in R, x \geq 4\}$$

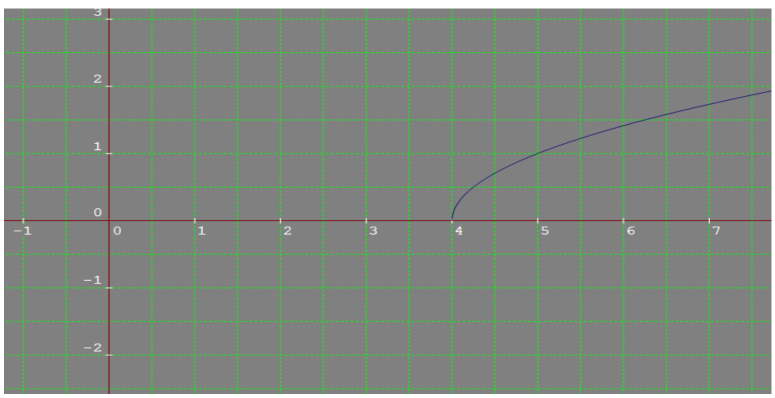


Imagen 15

Fuente: Propia.

Función valor absoluto: recordemos que si x es un número real, entonces $|x|$denota la distancia desde el punto x hasta el origen cero.

Si $x \geq 0, entonces\ |x| = x$

Si $x < 0, entonces\ |x| = -x$

Resumiendo la función valor absoluto queda definida de la siguiente manera:

$$|x| = \begin{cases} x\ si\ x \geq 0 \\ -x\ si\ x < 0 \end{cases}$$

Esta función tiene dominio el conjunto de los reales y por ser no negativa su rango es el conjunto de los reales positivos.

Gráficamente seria:

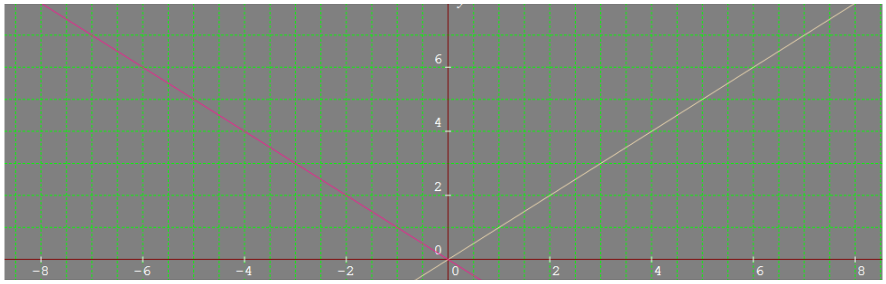


Imagen 16

Fuente: Propia.

Función parte entera: es la correspondencia que asigna a cada número real x el número entero $[\![x]\!]$que es un número entero máximo que no supera a x, es decir que es menor o igual a x.

Funciones trascendentales: en las funciones trascendentes aparece la variable independiente de una manera diferente estas pueden ser:

en forma de exponente.

índice de una raíz.

dentro de un logaritmo o como.

el ángulo de una función trigonométrica.

Función exponencial: es aquella que transforma a cualquier número real en una potencia que tiene por exponente el número real dado y por base un número positivo diferente de 1.

$$f(x) = a^x \ donde \ a \in R^+ \ y \ a \ \neq 1$$

Ejemplo

$$f(x) = 2^x$$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

Figura 7

Fuente: Propia.

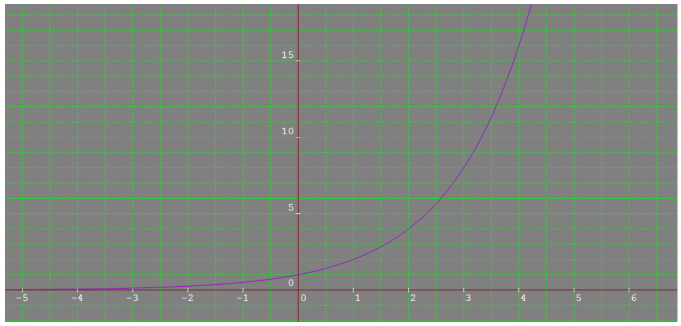


Imagen 17

Fuente: Propia.

Función logarítmica: la función logarítmica en base a es la función inversa de la función exponencial de base a.

$$f(x) = log_a x$$

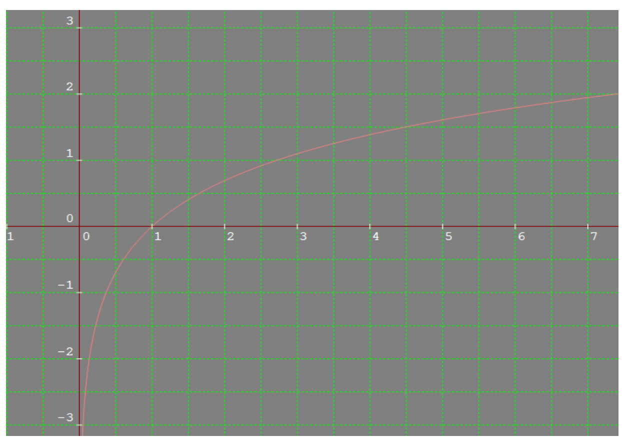


Imagen 18

Fuente: Propia.

Funciones trigonométricas: las funciones trigonométricas asocian a cada número real x el valor de la razón trigonométrica del ángulo cuya medida en radianes es x.

Función seno:

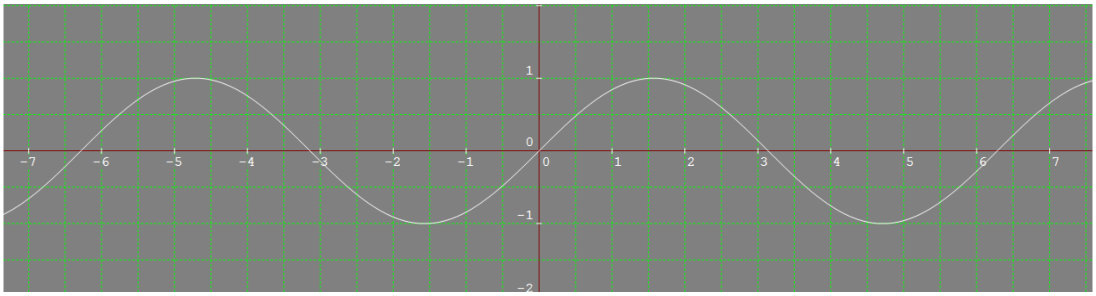


Imagen 19

Fuente: Propia.

Función coseno:

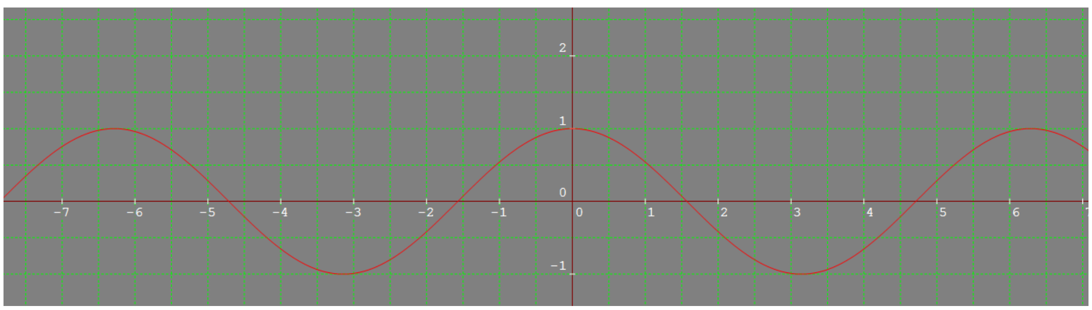


Imagen 20

Fuente: Propia.

Función tangente:

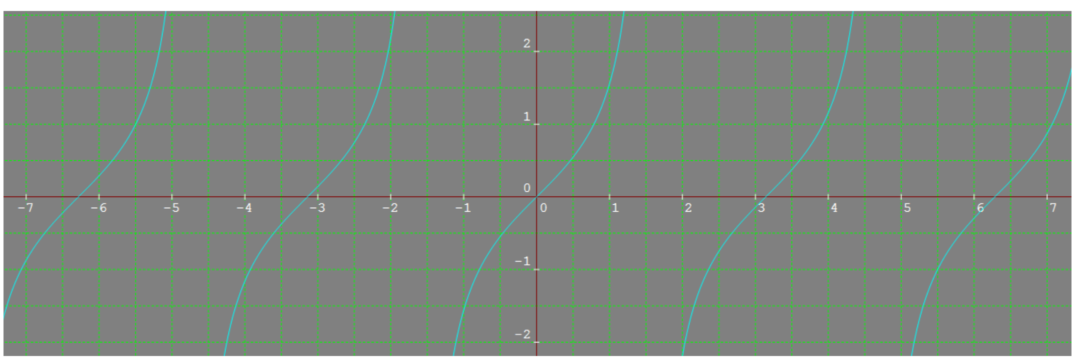


Imagen 21

Fuente: Propia.

Función cotangente:

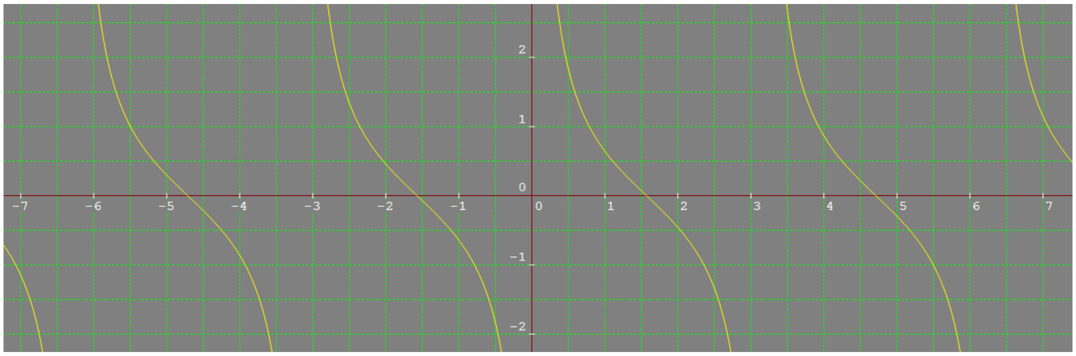


Imagen 22

Fuente: Propia.

Función secante:

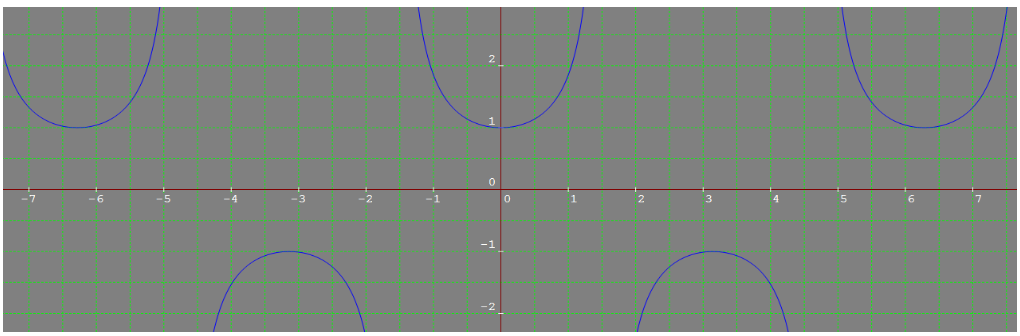


Imagen 22

Fuente: Propia.

Función cosecante:

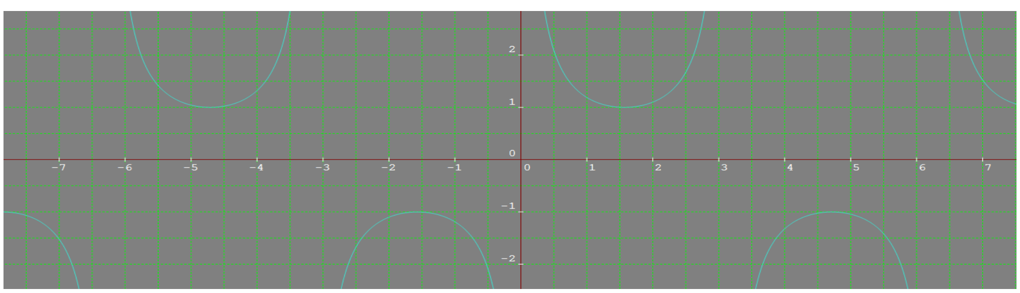


Imagen 23

Fuente: Propia.

Unidad 1

Operaciones sobre funciones

Cálculo diferencial

Autor: Alexander Moreno Quiroga

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina

MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Introducción

En el desarrollo del tema de las funciones resultan las operaciones entre ellas que surgen de la idea de interrelacionar dos o más de ellas aplicando operaciones del algebra básica, los resultados obtenidos nos conducen a analizar el dominio de las funciones $f+g, f-g, f.g, \frac{f}{g}, fog, gof$, este análisis es útil porque nos permite alcanzar una serie de reglas útiles para la toma de decisiones acerca de los dominios y codominios, entre otros. También se plantean las diferentes transformaciones que puede sufrir una función en el plano cartesiano lo cual nos proporciona una visión más espacial del tema de funciones.

Recomendaciones metodológicas

Es fundamental realizar un análisis juicioso de los temas planteados a lo largo de la cartilla analizando detalladamente los ejemplos y planteándose la pregunta ¿Qué pasaría si fuera diferente? Esta y otras dudas le surgirán a través de una lectura concienzuda, para despertar su interés y ganas de seguir adelante con el curso de cálculo diferencial.

Desarrollo temático

Operaciones sobre funciones

Operaciones entre funciones

Algunas funciones pueden definirse en términos de otras, por ejemplo:

- $f(x) = x^2 + 2x$ puede interpretarse como la función suma entre las funciones $f_1(x) = x^2$ y $f_2(x) = 2x$
- $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ puede interpretarse como la función obtenida de dividir la función $f_1(x) = x$ entre $f_2(x) = x^2 + 1$

Suma entre funciones

Sean f y g dos funciones, y supongamos que D_f y D_g denotan los dominios de f y g respectivamente, su suma denotada por $f + g$, es la función definida por:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

El dominio $f + g$ es $D_f \cap D_g$

Resta entre funciones

Sean f y g dos funciones, y supongamos que D_f y D_g denotan los dominios de f y g respectivamente, su diferencia denotada por $f - g$, es la función definida por:

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

El dominio $f - g$ es $D_f \cap D_g$

Producto entre funciones

Sean f y g dos funciones, y supongamos que D_f y D_g denotan los dominios de f y g respectivamente, su producto denotado por $f.g$, es la función definida por:

$$(f.g)(x) = f(x).g(x)$$

El dominio $f.g$ es $D_f \cap D_g$

Cociente entre funciones

Sean f y g dos funciones, y supongamos que D_f y D_g denotan los dominios de f y g respectivamente su cociente denotado por $f\ /g$, es la función definida por: $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0.$

El dominio $\frac{f}{g}$ es $D_f \cap D_g$ excluyendo los valores para los cuales $g(x) = 0.$

En cada caso el dominio de la nueva función lo constituyen aquellos valores de x comunes a los dominios de las funciones f y g con la condición adicional en la función cociente de excluir los valores de x que satisfagan $g(x) = 0.$

Ejemplo

Sean $f(x) = 2x$ y $g(x) = x$

Por definición:

$$(f + g)(x) = 2x + x = 3x$$

$$(f - g)(x) = 2x - x = x$$

$$(f.g)(x) = 2x.x = x^2$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{2x}{x} = 2$$

Gráficamente:

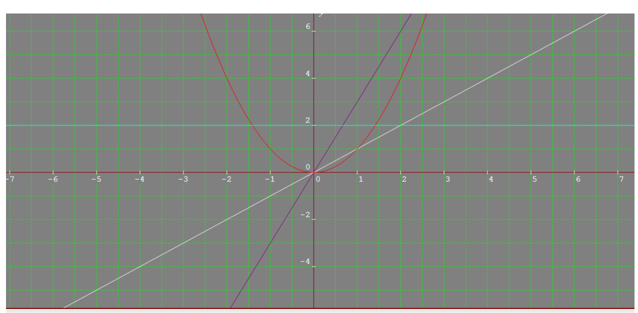


Imagen 1

Fuente: Propia.

En la figura se representa:

- $(f+g)(x)\ Color\ morado$
- $(f-g)(x) Color\ blanco$
- $(f.g)(x)\ Color\ rojo$
- $\left(\frac{f}{g}\right)(x) Color\ azul$

Según el capítulo anterior es fácil definir los dominios:

- $D_{(f+g)} = R$
- $D_{(f-g)} = R$
- $D_{(f.g)} = R$
- $D_{\left(\frac{f}{g}\right)} = R$

Ahora definamos los rangos:

- $R_{(f+g)} = R$
- $R_{(f-g)} = R$
- $R_{(f.g)} = R^+$
- $R_{\left(\frac{f}{g}\right)} = \{2\}$

Composición de funciones

Si $f\ y\ g$ son funciones, entonces la función compuesta, o composición de, de $f\ y\ g$ se define por $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ para todo x en el dominio de g, tal que $g(x)$esté en el dominio de g tal que $g(x)$ este en el dominio de f.

Así el dominio de $f \circ g$ es el conjunto $\{x \in Dom(g)\ /\ g(x) \in Dom(f)\}$.

El siguiente diagrama representa la operación de composición de funciones.

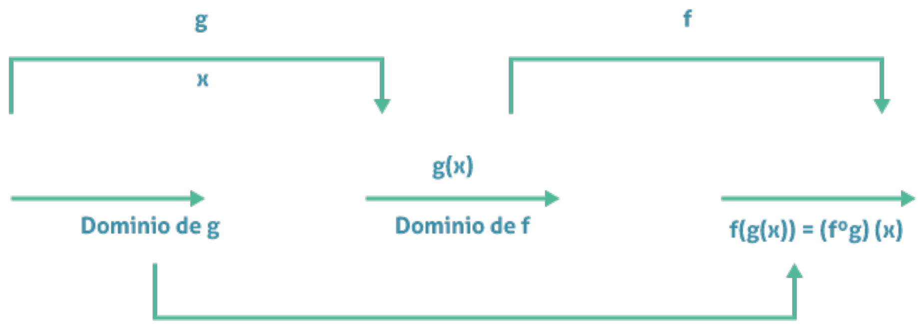


Figura 1

Fuente: Propia.

Ejemplo

Sean $f(x) = x + 1$ y $g(x) = x^2$

Hallemos las compuestas:

$$(f \circ g)(x) = x^2 + 1$$

$$(g \circ f)(x) = (x + 1)^2$$

Para este caso se tiene $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$

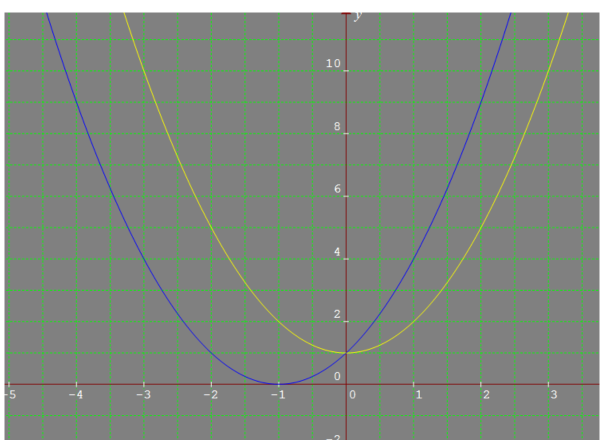


Imagen 2

Fuente: Propia.

La grafica azul representa $(g \circ f)(x)$ y la amarilla $(f \circ g)(x) = x^2$ Obviamente son diferentes.

Para ambas graficas se tiene que el dominio son los números reales pero el rango seria:

$$R_{(f \circ g)(x)} = [1, \propto)$$

$$R_{(g \circ f)(x)} = [0, \propto)$$

Simetrías

Simetría con respecto a una recta

La curva de una función es simétrica respecto a una recta L si para cada punto P de la curva, es posible encontrar el otro lado de la recta, otro punto P´, también perteneciente a la curva, tal que P y P´ equidistan de la recta L.

Ejemplo

Verificar que la curva de la función $y = (x - 3)^2$ es simétrica respeto a la recta $x = 3$.

Se realiza la gráfica:

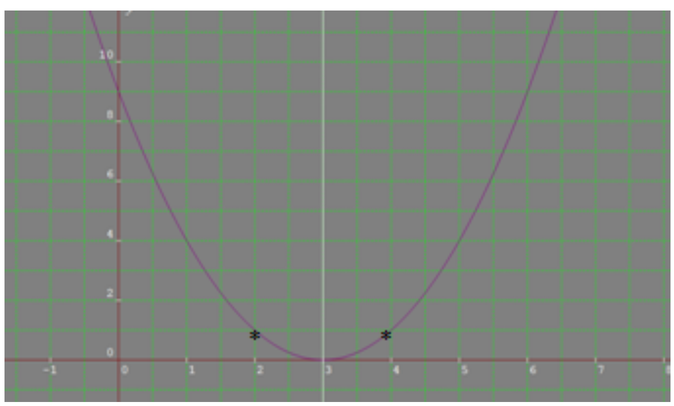


Imagen 3

Fuente: Propia.

La distancia del punto $(2{,}1)$ y el punto $(4{,}1)$ equidistan de la recta $x = 3$

La distancia del punto $(2{,}1)$ a la recta es:

$$d_1 = \sqrt{(3-2)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{1-0} = \sqrt{1} = 1$$

La distancia del punto $(4,1)$ a la recta es:

$$d_2 = \sqrt{(4-3)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{1-0} = \sqrt{1} = 1$$

De la misma forma es fácil ver que existen infinitos puntos que cumplen con esta propiedad aplicando la fórmula de la distancia.

Simetría con respecto a un punto

La curva de una función es simétrica respecto a un punto O, si dado un punto P se puede encontrar otro punto P´ sobre la recta OP, tal que P y P´ equidistan del punto O.

Ejemplo

Verificar que la función $f(x) = x^3$ es simétrica respecto al origen del sistema coordenado punto (0,0).

Graficamos la función:

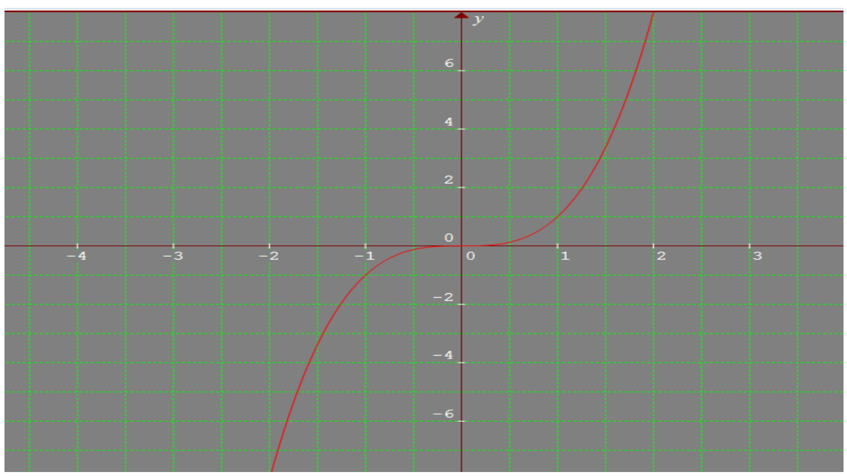


Imagen 4

Fuente: Propia.

Se puede verificar que los puntos $(-1,-1)$ y $(1,1)$ equidistan del punto $(0,0)$.

La distancia del punto $(-1,-1)$ al punto $(0,0)$ es:

$$d_1 = \sqrt{(-1-0)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

La distancia del punto $(1,1)$ al punto $(0,0)$ es:

$$d_1 = \sqrt{(1-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

Transformaciones sobre funciones

La notación de funciones también es empleada con el fin de realizar una descripción al detalle de las transformaciones de las funciones en el plano. A continuación se analizará la gráfica de la función $y = x^2$ y algunos movimientos en el plano.

Grafica original

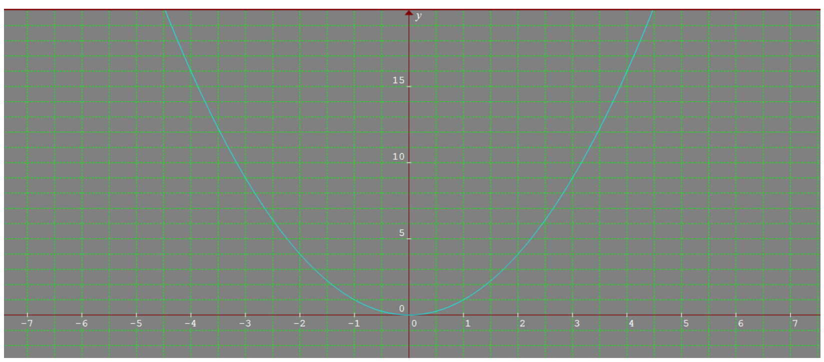


Imagen 5

Fuente: Propia.

a) Desplazamiento vertical hacia abajo $y = x^2 - 2$

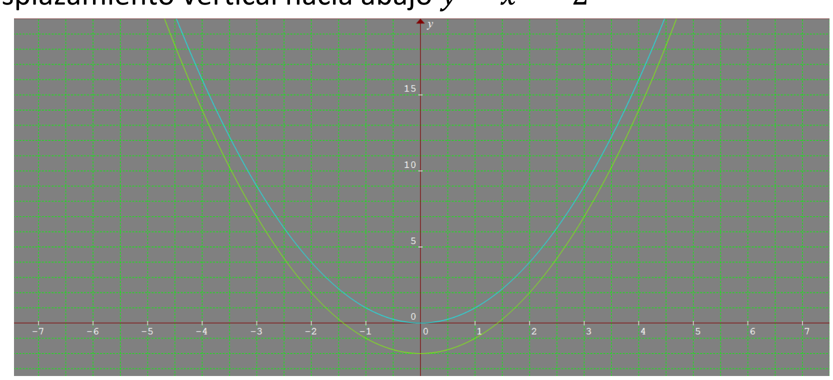


Imagen 6

Fuente: Propia.

b) Desplazamiento vertical hacia arriba $y = x^2 + 2$

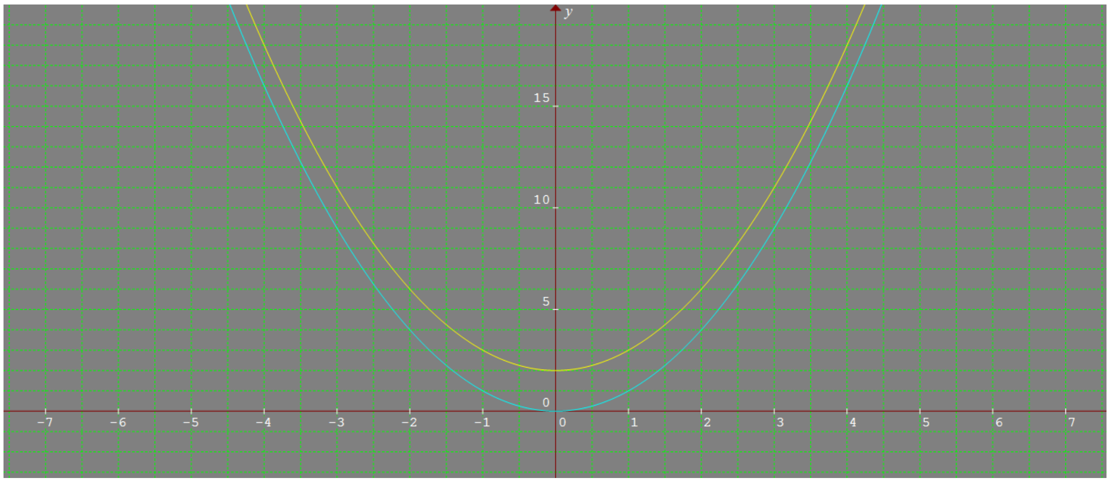


Imagen 7

Fuente: Propia.

c) Desplazamiento horizontal hacia la izquierda $y = (x + 2)^2$

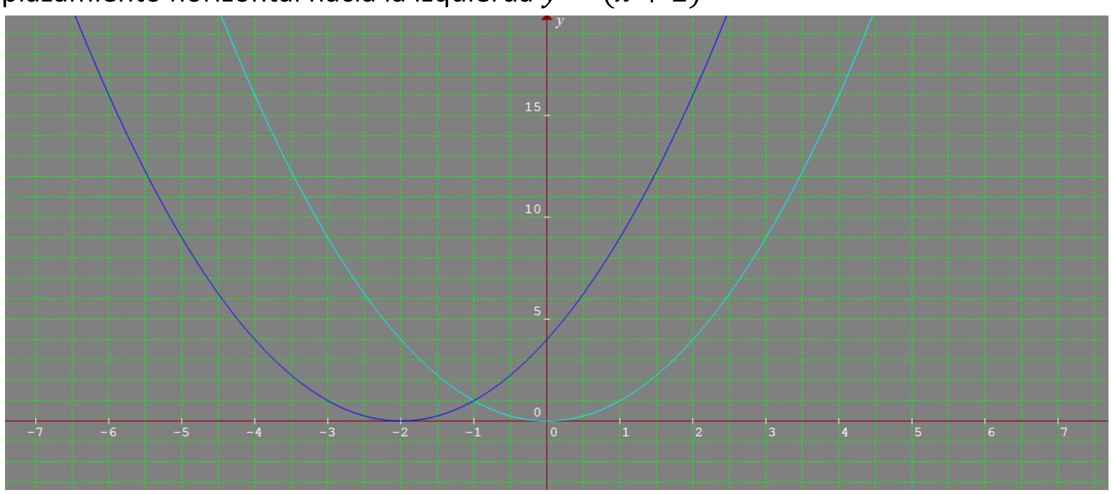


Imagen 8

Fuente: Propia.

d) Desplazamiento horizontal hacia la derecha $y = (x-2)^2$

Imagen 9

Fuente: Propia.

e) Reflexión y desplazamiento vertical $y = -x^2 + 2$

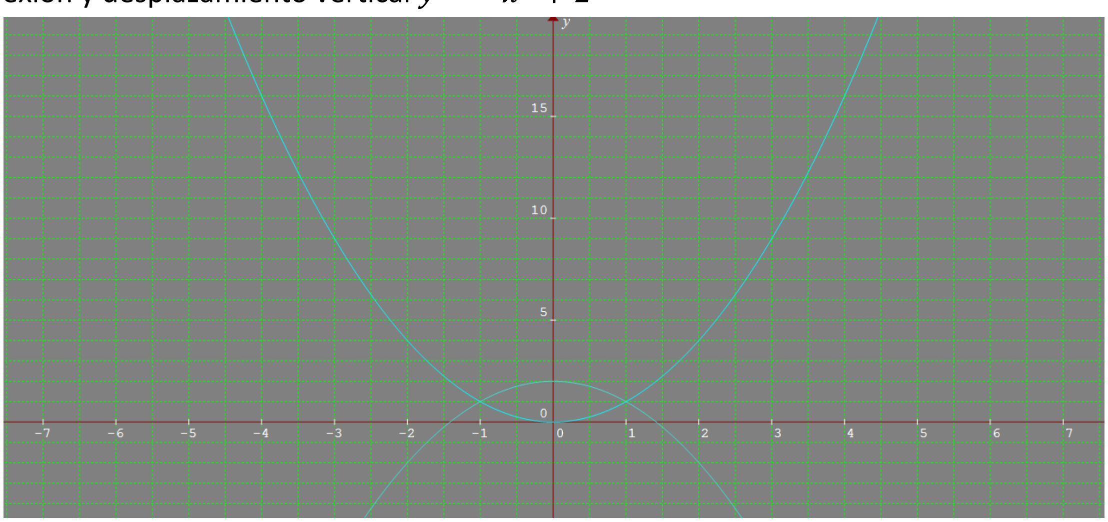


Imagen 10

Fuente: Propia.

f) Reflexión y desplazamiento horizontal y vertical $y = -(x-1)^2 + 1$

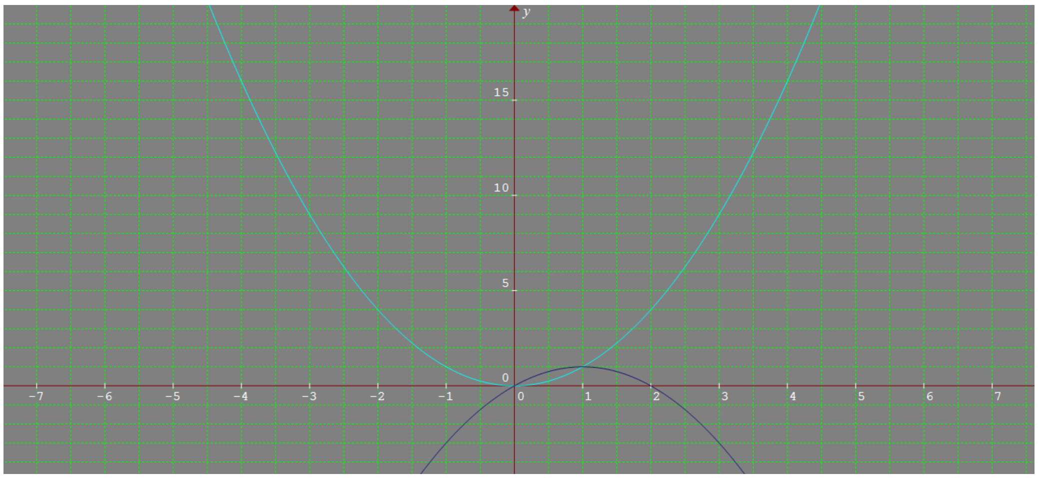


Imagen 11

Fuente: Propia.

Cada una de las gráficas anteriores es una transformación de la grafica $y = x^2$. Los tres tipos de transformaciones implicadas en estas seis graficas son:

- Traslaciones horizontales.
- Traslaciones verticales.
- Reflexiones.

Dichos movimientos están resumidos en la siguiente tabla (c > 0).

Movimiento	Ecuación
Grafica original.	$y = f(x)$
Traslación horizontal de c unidades a la derecha.	$y = f(x-c)$
Traslación horizontal de c unidades a la izquierda.	$y = f(x+c)$
Traslación vertical de c unidades hacia abajo.	$y = f(x) - c$
Traslación vertical de c unidades hacia arriba.	$y = f(x) + c$
Reflexión en el eje x.	$y = -f(x)$

Cuadro 1

Fuente: Propia.

Funciones inversas

Dos funciones son inversas una de otra si:

$f\big(g(x)\big) = x \; para \; todo \; x \; en \; el \; dominio \; de \; g$, y
$g\big(f(x)\big) = x \; para \; todo \; x \; en \; el \; dominio \; de \; f$.

Denotamos a g como f^{-1}(se lee inversa de f).

Para esta definición es importante tener en cuenta los siguientes aspectos:

- Si g es la inversa de f entonces f es la inversa de g. es decir $(f^{-1})^{-1} = f$.
- El dominio de f debe ser idéntico al recorrido de f^{-1} y viceversa.
- Si bien la notación usada para denotar la función inversa se parece a la notación exponencial, el uso del símbolo superior -1 es diferente. Es decir, en general $f^{-1}(x) \neq \frac{1}{f(x)}$.

Ejemplo

Sea $f(x) = 2x - 1$, para todo número real, hallar la inversa de f.

Es fácil ver que f es uno a uno y por lo tanto la función inversa existe. Pongamos $y = 2x - 1$ y despejamos x en términos de y.

$$x = \frac{y+1}{2}$$

Esta ecuación nos permite hallar el valor de x cuando se conoce y. Así que la función inversa de $f(x)$ es:

$$y = \frac{x+1}{2}$$

Ejemplo

Analicemos algunos ejemplos:

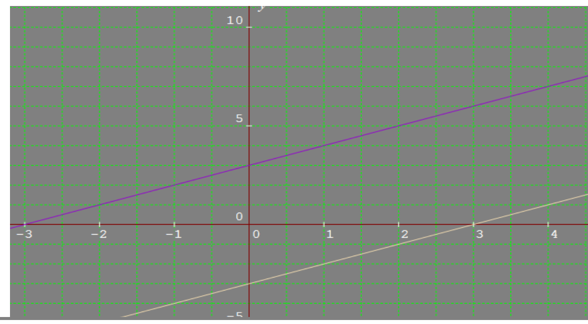
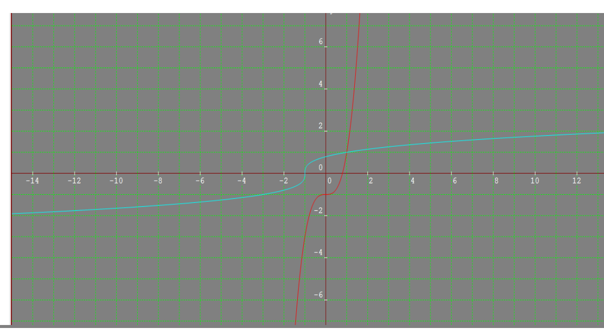
Función	Inversa	Grafico
$\boldsymbol{f(x) = x + 3}$	$f^{-1}(x) = x - 3$	
$\boldsymbol{f(x) = 3x}$	$f^{-1}(x) = \frac{x}{3}$	
$\boldsymbol{f(x) = 2x^3 - 1}$	$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{x+1}{2}}$	

Tabla 1

Fuente: Propia.

Función inyectiva:

Una función es inyectiva cuando a elementos distintos del dominio le corresponden imágenes distintas del codominio, En otras palabras, de todos los pares (x, y) pertenecientes a la función, las y no se repiten.

Para determinar si una función es inyectiva, graficamos la función por medio de una tabla de pares ordenados. Luego trazamos líneas horizontales para determinar si las y (las ordenadas) se repiten o no.

Ejemplo

Sea la función f:

$$f: R \to R$$

$$x \to \frac{1}{x}$$

Algunos puntos de la función son:

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$

Gráficamente:

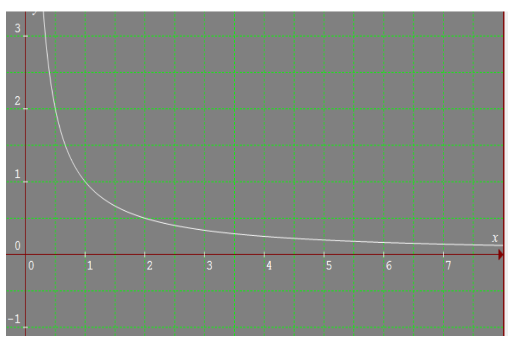


Imagen 12

Fuente: Propia.

Como se puede observar la imagen de cada x particular es única puesto que a números naturales distintos les corresponden inversos multiplicativos distintos.

Función Sobreyectiva

Una función es sobreyectiva cuando todos los elementos del Codominio pertenecen al rango de la función. En tal caso, a cada uno de los elementos del conjunto de llegada es imagen de por lo menos un elemento del dominio en otras palabras. Una función f (de un conjunto A a otro B) es sobreyectiva si para cada y en B, existe por lo menos un x en ***A*** que cumple $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$, en otras palabras $\boldsymbol{f}$ es sobreyectiva si y sólo si $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{B}$.

Ejemplo

Sea la función g:

$$g: (-5,2) \to (0,25)$$

$$x \to x^2$$

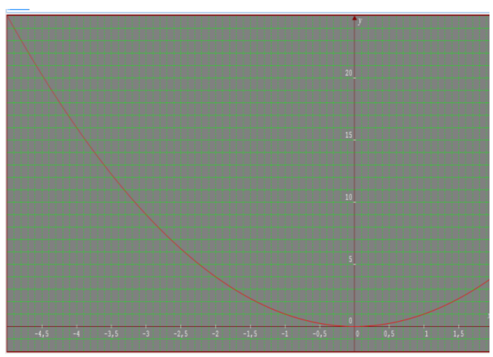


Imagen 13

Fuente: Propia.

Algunos elementos del Codominio son imágenes de uno de los valores de x. Otros elemento del Codominio son imágenes de dos elementos de x.

En general todos los valores de la variable independiente son imágenes de algún x del dominio, es decir que todos los elementos del Codominio pertenecen al rango de G.

Función biyectiva

Una función es biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva a la vez. Es decir cuando todos los elementos del Codominio son imágenes, y cada uno de ellos son imagen de solamente un elemento del dominio. En otras palabras Una función f (del conjunto ***A*** al ***B***) es **biyectiva** si, para cada y en ***B***, hay exactamente un x en ***A*** que cumple que $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$.

Ejemplo

$$h: R \to R$$

$$x \to x^3$$

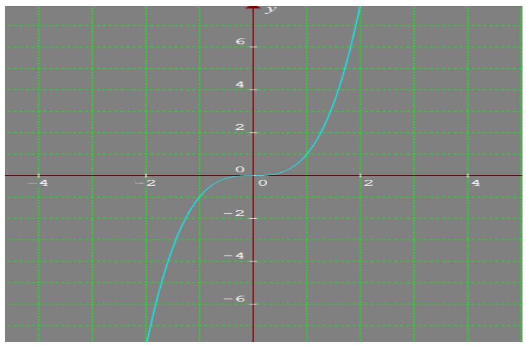


Imagen 14

Fuente: Propia.

Como se puede observar en la función h todos los elementos del Codominio R son cubos de algún elemento del dominio y únicamente de uno de ellos.

2

Unidad 2

Límite de una función

Cálculo diferencial

Autor: Alexander Moreno Quiroga

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina

MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Introducción

La importancia de los límites radica básicamente en su utilidad para la resolución de situaciones particulares en las cuales se ve implícita una función y necesitamos determinar valores aproximados a un punto en particular. Este tema es de suma importancia para estudiar el comportamiento de algunos casos que se han organizado en ecuaciones, tales como crecimiento o decrecimiento de una población, inversiones, gastos, costos, multiplicación de bacterias, velocidades alcanzadas por un móvil, etc.

Recomendaciones metodológicas

La noción de límite es fundamental en el cálculo, de modo que es importante adquirir un buen manejo practico de los límites antes de seguir hacia otras unidades , el concepto de límite se analizará a partir del hecho de que para estudian el comportamiento de una función alrededor de un punto, siempre se toman sucesiones convergentes al punto por la izquierda y por la derecha posteriormente se profundizará más allá en el concepto y nos acercaremos a la idea de asíntotas mediante el manejo de los límites infinitos y los límites al infinito.

Desarrollo temático

Límite de una función

Límites

Nociones preliminares de los límites

Normalmente hablamos de la velocidad límite, el límite de nuestra propia resistencia, los límites de la tecnología moderna, o de estirar un resorte al límite. Todo ello sugiere que el límite es una cota que en algunas ocasiones puede no ser alcanzable y en otras no solo alcanzable sino superable.

La noción matemática de límite la presentamos mediante un ejemplo:

Ejemplo

Supongamos que se nos pide dibujar la gráfica de la función.

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}, x \neq 1$$

Para todo punto diferente de 1 podemos usar técnicas estándar, pero en el punto $x = 1$ no estamos seguros de qué esperar. Para tener una idea del comportamiento de la gráfica de f cerca de $x = 1$, podríamos usar dos conjuntos de valores x, uno que se aproxime al 1 por la izquierda y al otro por la derecha.

En la tabla presentada a continuación se muestran los valores de $f(x)$.

X se acerca a 1 por la izquierda *x se acerca por la derecha*

X	0.5	0.75	0.9	0.99	0.999	1	1.001	1.01	1.1	1.25	1.5
F(x)	1.75	2.313	2.71	2.97	2.997		3.003	3.03	3.31	3.813	4.75

F(x) se acerca a 3 *F(x) se acerca a 3*

Tabla 1
Fuente: Propia.

Al marcar estos puntos, se ve que la gráfica de f es una parábola con un hueco en el punto $(1,3)$.

Imagen 1

Fuente: Propia.

Aunque x no puede ser igual a1, si puede acercarse cuanto se quiera y como resultado $f(x)$ se aproxima cuanto queramos a 3. Usando notación de límites decimos que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a 1 es 3, y lo denotamos como.

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 3$$

Ejemplo

Evaluar $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$ en varios puntos cercanos a x = 0 y evaluar el límite.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$$

X se acerca a 1 por la izquierda *x se acerca por la derecha*

X	-0.1	-0.01	-0.001	-0.0001	0	0.0001	0.001	0.01	0.1
F(x)	1.9487	1.995	1.9995	1.9999		2.0001	2.0005	2.005	2.04

F(x) se acerca a 3 *F(x) se acerca a 3*

Tabla 2

Fuente: Propia.

Al graficar estos puntos en el plano obtenemos:

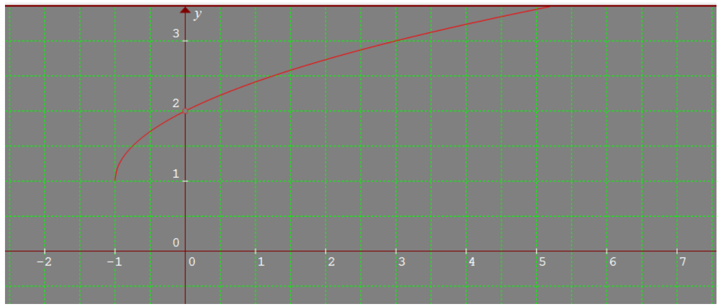


Imagen 2

Fuente: Propia.

Lo cual nos lleva a indicar que:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{x+1} - 1} = 2$$

Ejemplo

Probar que el límite siguiente no existe.

$$\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$$

Gráficamente es fácil ver:

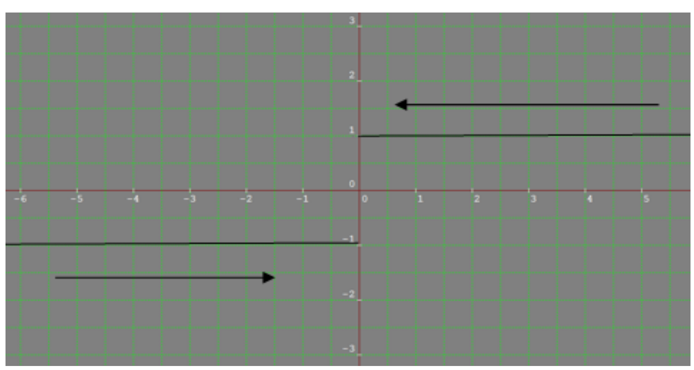


Imagen 3

Fuente: Propia.

Cuando los valores de x se acercan por la izquierda $f(x) = -1$.

Cuando los valores de x se acercan por la derecha $f(x) = 1$.

Esto implica que los el límite no existe.

Definición formal de límite

Si $f(x)$ se situa arbitrariamente próximo a un único numero L cuando x tiende hacia c por ambos lados, decimos que el límite de f(x), cuando x se acerca a c, es L y lo simbolizamos.

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

Quien primero dio significado riguroso a este concepto fue Augustin- Louis Cauchy. Su definición con $\varepsilon - \delta$ del límite sigue hoy en uso. En la figura presentada a continuación ε representa un pequeño número positivo. Entonces la frase "se situa arbitrariamente próximo a L" significa que $f(x)$ está en el intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. En términos de valor absoluto, se escribe:

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

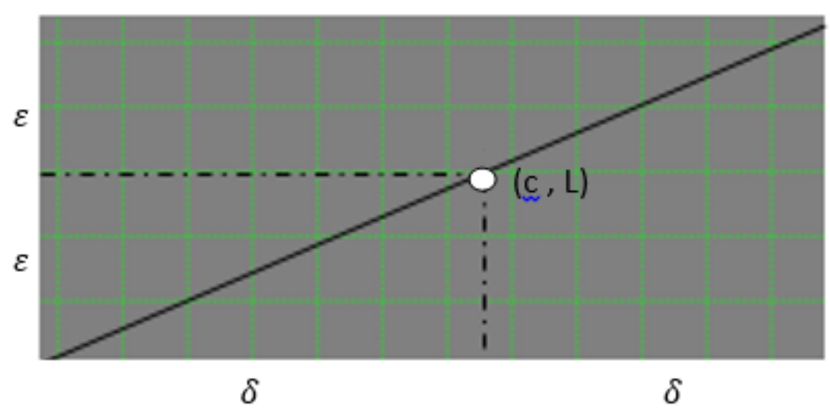


Imagen 4

Fuente: Propia.

Análogamente, la frase "x se acerca a c" significa que existe un numero $\delta > 0$ tal que x esta en el intervalo $(c - \delta, c)$ o en el intervalo $(c, c + \delta)$. En términos de valor absoluto esto quiere decir que:

$$0 < |x - c| < \delta$$

Uniendo estas dos desigualdades se obtiene la siguiente definición rigurosa de límite.

La afirmación:

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

Significa que para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que:

$|f(x) - L| < \varepsilon$ Siempre que $0 < |x - c| < \delta$

Ejemplo

Dado el límite $\lim_{x \to 3}(2x - 5) = 1$

Hallar δ tal que $|(2x - 5) - 1| < 0{,}01$ siempre que $0 < |x - 3| < \delta$

Tenemos ε dado, a saber $\varepsilon = 0{,}01$. Para hallar un δapropiado intentaremos establecer una relación entre los dos valores absolutos $|(2x - 5) - 1|$y $|x - 3|$. Simplificando el primero, obtenemos:

$$|(2x - 5) - 1| = 2|x - 3|$$

Así, la desigualdad $|(2x - 5) - 1| < 0{,}01$ equivale a $2|x - 3| < 0{,}01$ y se tiene que:

$$|x - 3| < \frac{0{,}01}{2} = 0{,}005$$

Por tanto $\delta = 0{,}005$

Propiedades de los límites

Teorema 1
Funciones que coinciden en todos sus puntos excepto en uno.

Sea c un número real y $f(x) = g(x)$ para todo $x \neq c$ en un intervalo abierto conteniendo al c. Si existe el límite de $g(x)$ cuando $x \to c$ entonces el límite de $f(x)$ también existe y es:

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x)$$

Ejemplo

Probar que $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$ y $g(x) = x^2 + x + 1$ tienen los mismos valores en todo x=1

Factorizando el numerador de f, tenemos:

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{(x - 1)}$$

De modo que si $x \neq 1$, podemos cancelar factores iguales, obteniendo:

$$f(x) = x^2 + x + 1 = g(x), \neq 1$$

Teorema 2
Límites básicos.

- $\lim_{x \to c} b = b$
- $\lim_{x \to c} x = c$
- $\lim_{x \to c} x^n = c^n$

Ejemplo

- $\lim_{x \to 2} 3 = 3$
- $\lim_{x \to 4} x = 4$
- $\lim_{x \to 5} x^2 = 5^2 = 25$

Teorema 3
Propiedades de los límites

Si b y c son números reales, n un número entero positivo y f, g funciones que tienen límite cuando $x \to c$, entonces son ciertas las siguientes propiedades:

- Múltiplo escalar:

$$\lim_{x \to c}(b(f(x))) = b(\lim_{x \to c} f(x))$$

- Suma o diferencia:

$$\lim_{x \to c}([f(x) \pm g(x)]) = \lim_{x \to c} f(x) \pm \lim_{x \to c} g(x)$$

- Producto:

$$\lim_{x \to c}\left(f(x).\, g(x)\right) = \left[\lim_{x \to c} f(x)\right].\left[\lim_{x \to c} g(x)\right]$$

- Cociente:

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to c} \mathrm{f(x)}}{\lim_{x \to c} \mathrm{g(x)}}, si \lim_{x \to c} \mathrm{g(x)} \neq 0$$

- Potencia:

$$\lim_{x \to c}[f(x)]^n = \left[\lim_{x \to c} f(x)\right]^n$$

Ejemplo

Hallar

$$\lim_{x \to 2}(4x^2 + x - 6)$$

Aplicando las propiedades de los teoremas 2 y 3 la solución del anterior límite es:

$$\mathbf{Lim}_{x\to 2}(4x^2 + x - 6) = \mathbf{lim}_{x\to 2}\, 4x^2 + \mathbf{lim}_{x\to 2}\, x - \mathbf{lim}_{x\to 2}\, 6 = 4[\mathbf{lim}_{x\to 2}\, x^2] + \mathbf{lim}_{x\to 2}\, x - \mathbf{lim}_{x\to 2}\, 6$$

$$4(4) + 2 - 6 = 12$$

Límite de un polinomio
Si p es un polinomio y c es un número real, entonces:

$$\lim_{x \to c} p(x) = p(c)$$

Límite de una función racional
Si r es una función racional dada por $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ y c es un número real tal que $q(c) \neq 0$, entonces:

$$\lim_{x \to c} r(x) = r(c) = \frac{p(c)}{q(c)}$$

Ejemplo

Hallar:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x + 2}{x + 1}$$

Puesto que el denominador no es cero para x = 1, se puede aplicar el teorema 3 y se obtiene:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x + 2}{x + 1} = \frac{1^2 + 1 + 2}{1 + 1} = \frac{4}{2} = 2$$

Límites trigonométricos especiales.

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen\, x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

Ejemplo

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{sen\ x}{x} . \frac{1}{\cos x}$$

Ahora bien:

$\lim_{x \to 0} \frac{sen\ x}{x} = 1$ y $\lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = 1$

Se deduce que:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = \left[\lim_{x \to 0} \frac{sen\ x}{x}\right]\left[\lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x}\right] = 1$$

Límites laterales

Para que exista el límite de una función, deben existir los límites laterales y coincidir.

El significado de los signos en la notación para límites laterales se interpreta de la siguiente manera.

$x \to c^-$ Significa que x tiende a c tomando valores menores que c, es decir valores que se encuentran a su izquierda.

$x \to c^+$ Significa que x tiende a a tomando valores mayores que a, es decir valores que se encuentran a su derecha.

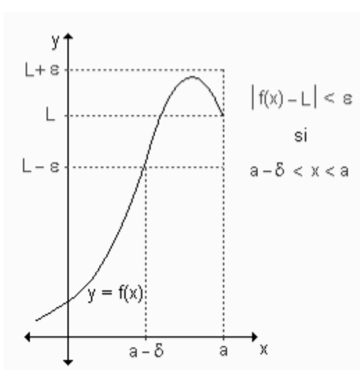
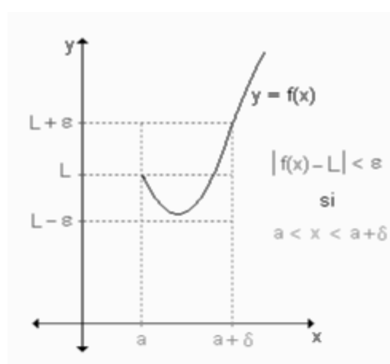
<table>
<tr><td>Límite lateral por la izquierda</td><td>Límite lateral por la derecha</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Figura 1

Fuente: Propia.

Límites infinitos

La afirmación:

$$\lim_{x \to c} f(x) = \infty$$

Significa que para cada $M > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $f(x) < M$ siempre que $0 < |x - c| < \delta$

La afirmación:

$$\lim_{x \to c} f(x) = -\infty$$

Significa que para cada $N < 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $f(x) < N$ siempre que $0 < |x - c| < \delta$

Ejemplo

Determinar a partir de la gráfica los límites laterales.

a) $f(x) = \frac{1}{x-1}$

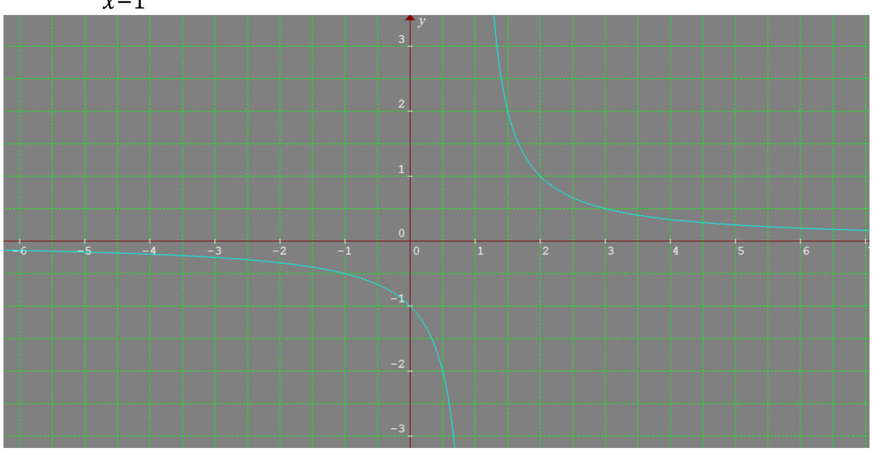


Imagen 5

Fuente: Propia.

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$ $\qquad$ $\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$

b) $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$

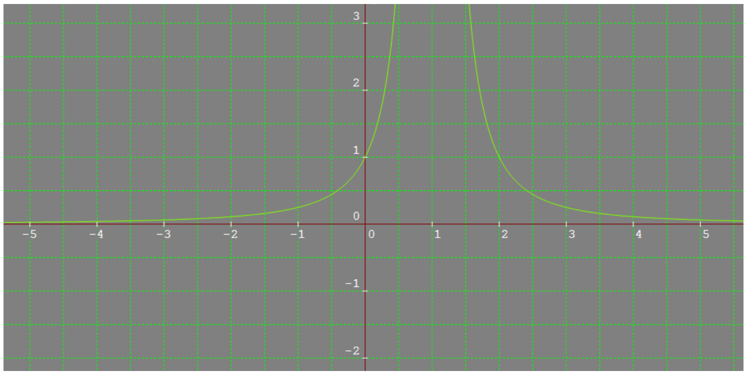


Imagen 6

Fuente: Propia.

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$

c) $f(x) = -\frac{1}{x-1}$

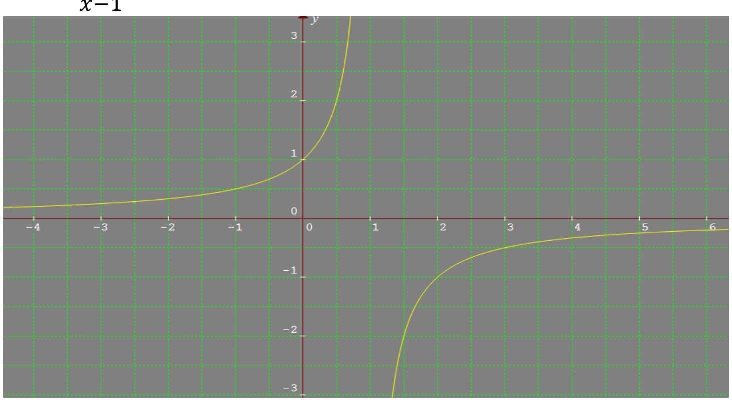


Imagen 7

Fuente: Propia.

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$

d) $f(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}$

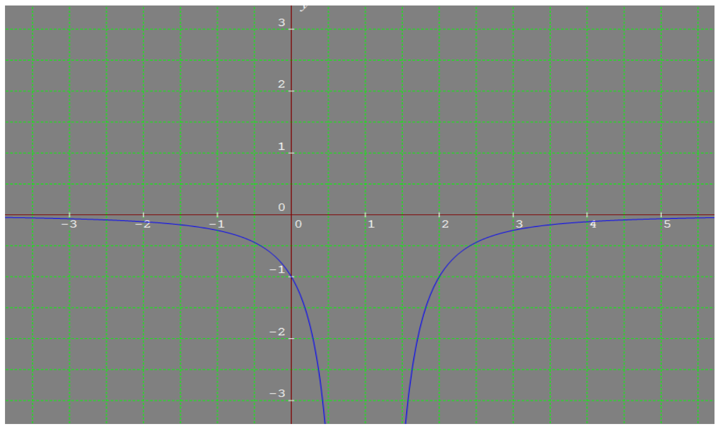


Imagen 8

Fuente: Propia.

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$ $\qquad$ $\lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$

Asíntotas

Las asíntotas son rectas a las cuales la función se va aproximando indefinidamente, cuando por lo menos una de las variables $(x\ o\ y)$ tienden al infinito.

Si un punto (x, y) se desplaza continuamente por una función $y = f(x)$ de tal forma que, por lo menos, una de sus coordenadas tienda al infinito, mientras que la distancia entre ese punto y una recta determinada tiende a cero, esta recta recibe el nombre de asíntota de la función.

Asíntotas verticales (paralelas al eje Y)
Si existe un número "a" tal, que:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

La recta $x = a$ es la asíntota vertical.

Ejemplo

$f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$, $\lim_{x\to 3} f(x) = \infty$, Entonces la recta $x = 3$ es una asíntota vertical.

Gráficamente:

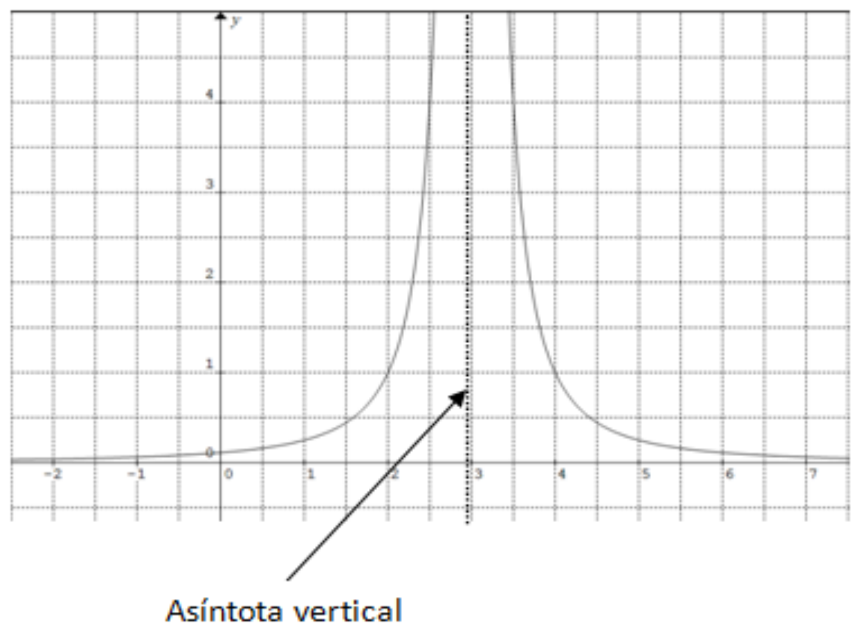


Figura 2

Fuente: Propia.

Asíntotas horizontales (paralelas al eje X)
Si existe el límite:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b$$

La recta y = b es la asíntota horizontal.

Ejemplo

$f(x) = \frac{x+1}{x+3}$, $\lim_{x\longrightarrow\infty} f(x) = 1$, la recta y=1 es la asíntota horizontal.

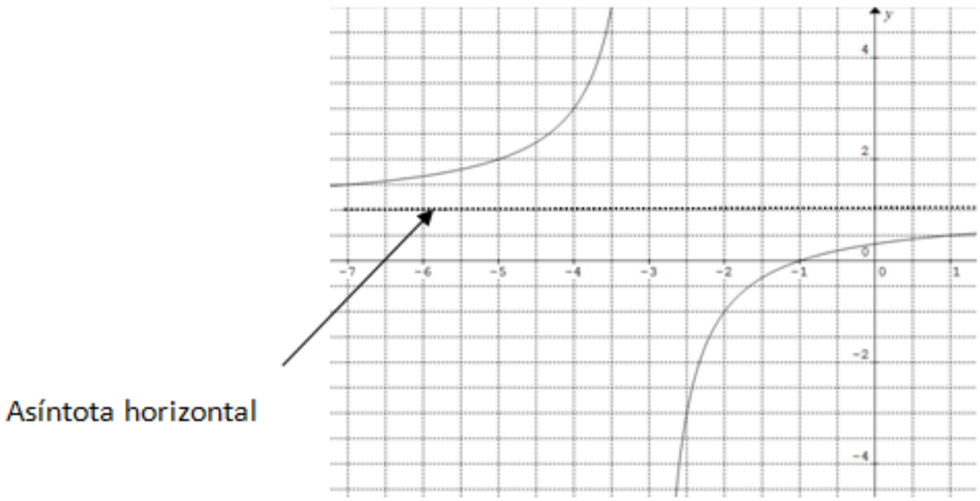


Figura 3

Fuente: Propia.

Asíntotas oblicuas (inclinadas)
Si existen los límites:

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=m, \lim_{x\to\infty}[f(x)-m.x]=n$

La recta "$y=mx+n$ es la asíntota oblicua

Ejemplo 13

$$f(x)=\frac{2x^2}{x+3}$$

Asíntota horizontal

$$\frac{2x^2}{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+3}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x^2+3x}=2=m$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2}{x^2+3x}-2x\right)=-6=n$$

Luego

$y = 2x - 6$ Es la asíntota oblicua

Gráficamente:

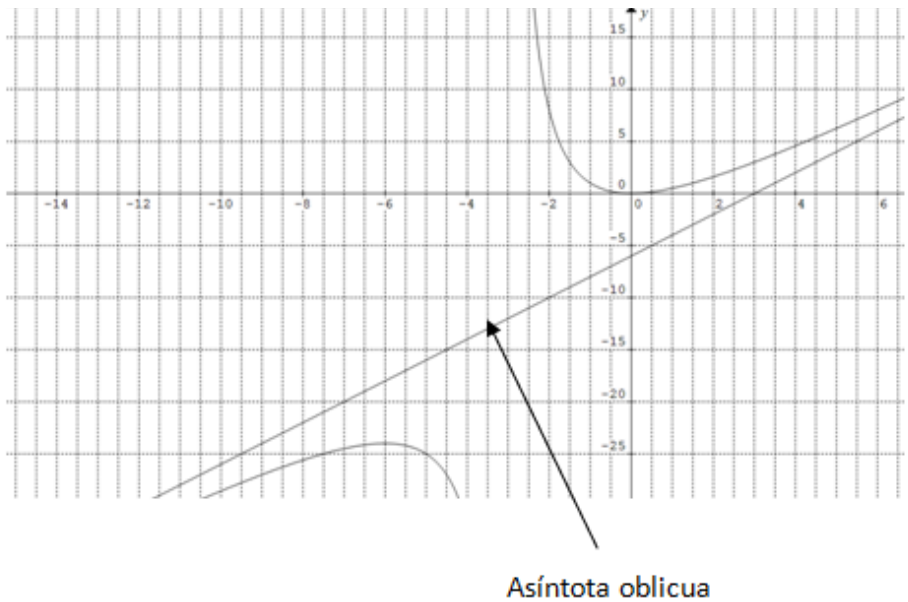


Figura 4

Fuente: Propia.

2

Unidad 2

Continuidad

Cálculo diferencial

Autor: Alexander Moreno Quiroga

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina
MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Introducción

La cartilla ha sido diseñada con el fin de mostrar de una forma clara y desglosada el tema de la continuidad, se inicia con un análisis de las ideas intuitivas para luego construir la definición formal, posteriormente se hace un recorrido por los teoremas que sustentan este núcleo temático tan importante en el cálculo, como base del estudio y construcción de las gráficas de las funciones.

Recomendaciones metodológicas

Es necesario tener claras las ideas de cartillas anteriores tales como definición de función, dominios, rangos, codominios, límites etc. Esto con el fin de aprovechar al máximo los contenidos aquí presentados, se recomienda trabajar a conciencia los ejemplos mostrados y los teoremas definidos ya que serán base fundamental para posteriores definiciones.

Desarrollo temático

Continuidad

En forma intuitiva, una función continua tiene una gráfica sin interrupciones lo que significa que podríamos trazarla sin levantar la mano con un solo trazo continuo.

Un ejemplo se muestra en la figura:

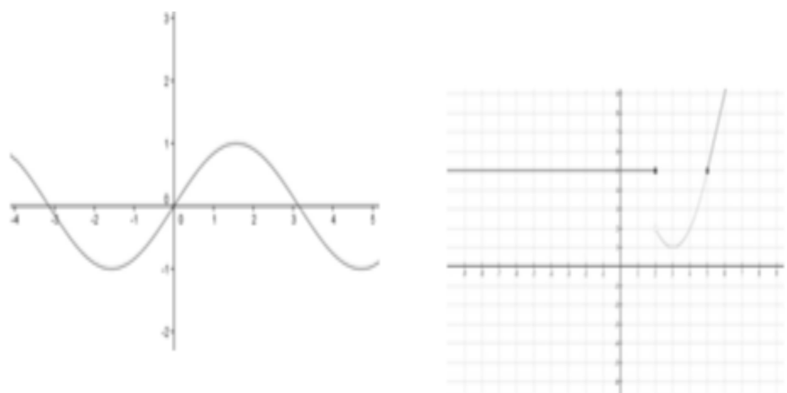


Figura 1

Fuente: Propia.

Aunque en términos generales no podemos decir que la función de la derecha es continua si podemos afirmar que es continúa a trozos. El primer trozo continuo corresponde al intervalo $(-\infty, 2]$, el segundo intervalo $(2, \infty)$. La continuidad debe estudiarse en un sentido local, en las vecindades de un punto a.

Continuidad en un punto

Una función f se dice continua en c si se verifican las condiciones.

- $f(c)$ esta definido
- El límite de $f(x)$ existe
- $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

Continuidad en un intervalo abierto

Una función f se dice continua en un intervalo (a, b) si lo es en todos los puntos del intervalo.

Se dice que f es discontinua en c si f está definida en un intervalo abierto que contiene a c (excepto quizás c) y f no es continua en c. Las discontinuidades caen en dos categorías: **evitables y no evitables.**

Se dice que una discontinuidad en x = c es evitable si f puede hacerse continua redefiniéndola en x = c.

Ejemplo

Verificar la continuidad de la función $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ en el intervalo $(0,2)$.

La gráfica se puede ver de la siguiente forma:

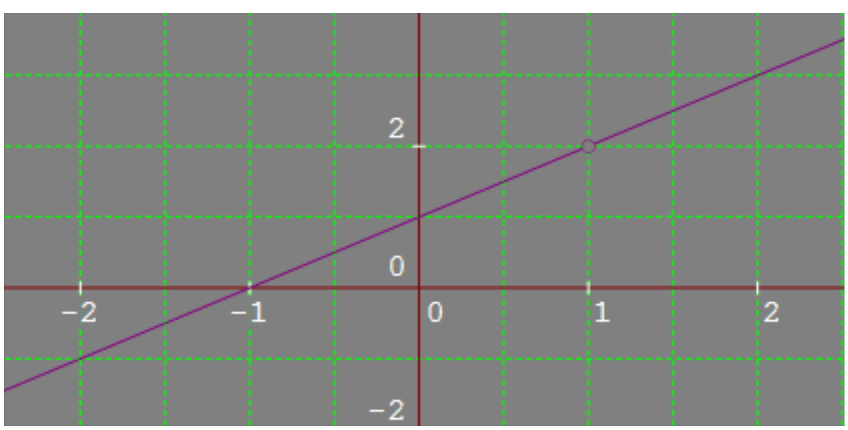


Imagen 1

Fuente: Propia.

Es fácil ver que f no está definida en x = 1, luego es discontinua en ese punto y continua en el resto del intervalo $(0,2)$.

Existencia de un límite

Si f es una función y c, L números reales, entonces $\lim_{x \to c} f(x) = L$

$\lim_{x \to c^-} f(x) = L$ y $\lim_{x \to c^+} f(x) = L$.

Definición de continuidad en un intervalo cerrado

Si f está definida en un intervalo cerrado$[a, b]$, continua en (a, b) y

$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ y $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$.

Se dice que f es continua en $[a, b]$.

Ejemplo

Discutir la continuidad de:

$$g(x) = \begin{cases} 5 - x, -1 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 1, 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

Por definición los polinomios $5 - x$ y $x^2 - 1$son continuos para todo real x. luego para ver que g es continua en $[-1,3]$, basta estudiar el comportamiento de g en x=2. Tomando límites laterales para x=2 vemos que:

$$\lim_{x \to 2^-} g(x) = \lim_{x \to 2^-} 5 - x = 3$$

$$\lim_{x \to 2^+} g(x) = \lim_{x \to 2^-} x^2 - 1 = 3$$

Como estos dos límites coinciden el teorema nos permite concluir que:

$$\lim_{x \to 2} g(x) = g(2) = 3$$

Continuidad de la función racional

Teorema 1

Si $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ es una función racional, donde P y Q son polinomios es continua en todos los puntos a donde $Q(a) \neq 0$.

El siguiente teorema muestra muchas funciones continuas que pueden obtenerse a partir de otras funciones continuas, a través de las operaciones básicas de adición, sustracción, multiplicación y división de funciones.

Continuidad entre funciones que surgen de otras funciones.

Funciones obtenidas a partir de operaciones básicas:

Teorema 2

Si las funciones$f(x)\ y\ g(x)$son continuas en un numero a, entonces $f(x) + g(x), f(x) - g(x), f(x). g(x), f(x)/g(x)\ con\ g(a) \neq 0\ y\ cf(x)\ (c\ es\ una\ constante)$ también son continuas en a.

Ejemplo

Sabiendo que $\lim_{x\to 0} sen\ x = 0$ y $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$, se puede concluir que las funciones$f(x) = senx$ y $g(x) = cosx$ son continuas en $X = 0$, porque $sen\ 0 = 0$ y $cos\ 0 = 1$.

Mediante un cambio de variable podemos mostrar que estas funciones son continuas en cualquier punto a, por ejemplo:

$$\lim_{x\to 0} sen\ x = \lim_{y\to 0} sen\ (y + a) = \lim_{y\to 0}(sen\ y. \cos a + cosy. sena)$$

$$= \left(\lim_{y\to 0} sen\ y\right)cosa + \left(\lim_{y\to 0} cos\ y\right)sena$$

$$= 0. \cos a + 1. sena = sen\ a$$

Ejemplo

Si escribimos las funciones$f(x) = tanx$ y $f(x) = secx$ en términos de $senx$ y $\cos x$ concluimos que son continuas en todo valor de x donde $cosx \neq 0$. Igual sucede con las funciones$f(x) = cotx$ y $f(x) = cscx$son continuas en todo valor de x donde los denominadores son distintos de cero.

Ejemplo

Las funciones logarítmica y exponencial son continuas en sus respectivos dominios de definición. Por ejemplo $f(x) = e^x$ es continua en R, mientras que $g(x) = \ln x$ es continua en los reales positivos: $(0, \infty)$.

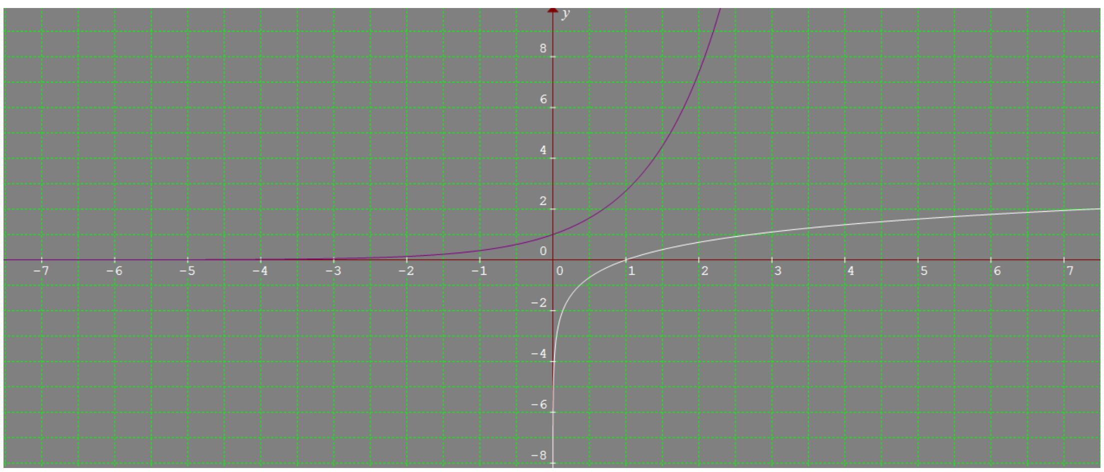


Imagen 2

Fuente: Propia.

La línea morada representa la función exponencial y la línea amarilla la función logarítmica.

Ejemplo

Verificar si la función $f(x) = x^2 senx + 1$ es continua en R.

La función es continua en todo R, pues la forman un producto y una suma de tres funciones continuas $y = x^2, y = sen, y = 1$.

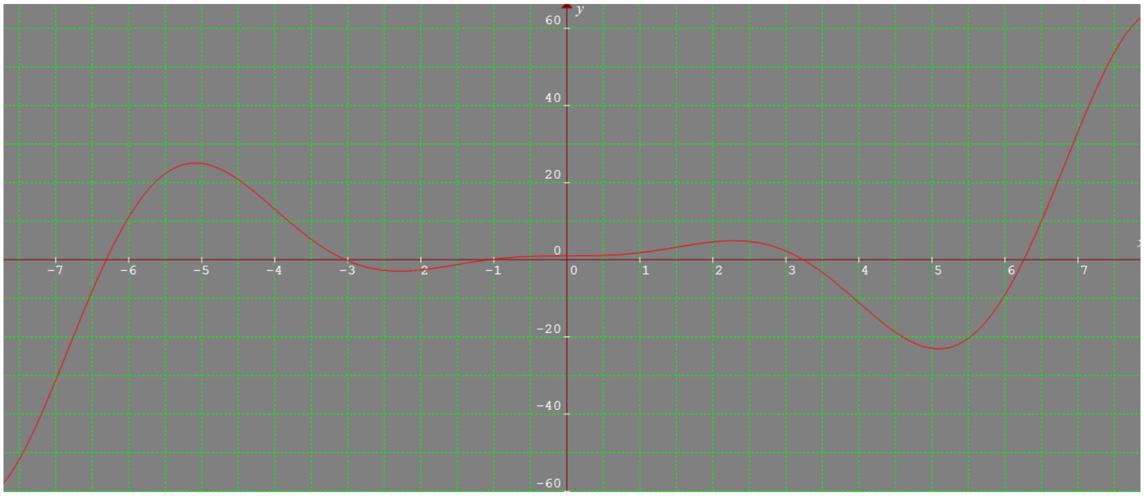


Imagen 3

Fuente: Propia.

Ejemplo

Verificar la continuidad de la función $g(x) = \frac{sen\ x}{x^2 - x}$.

Esta función es un cociente entre dos funciones continuas: $y = sen\ x$ y $x^2 - x$, por tanto es continua en todos los puntos en donde el denominador es distinto de cero. Para determinarlos, se realiza el siguiente procedimiento.

$x^2 - x = x(x-1) = 0$ lo cual ocurre cuando:

$x = 0$, o $x = 1$.

Luego estos puntos son de discontinuidad.

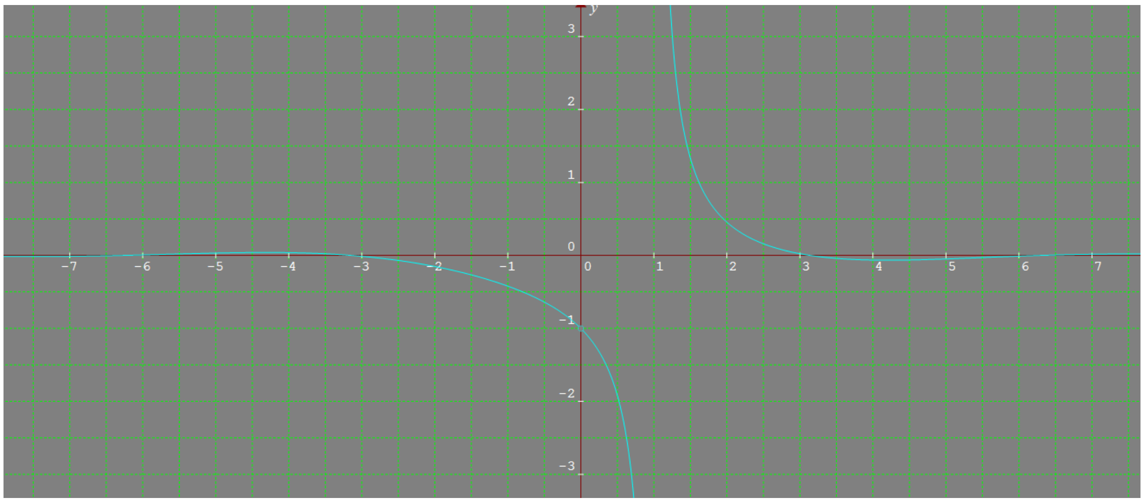


Imagen 4

Fuente: Propia.

Para calcular las discontinuidades hallamos:

$\lim_{x\to 0} g(x)$ y $\lim_{x\to 1} f(x)$

$\lim_{x\to 0} \frac{sen\, x}{x^2-x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{sen\, x}{x}\right)\left(\frac{1}{x-1}\right) = 1(-1) = -1$,Luego el punto 0 es un punto de **discontinuidad evitable;** pero $\lim_{x\to 1} \frac{sen\, x}{x^2-x}$ no existe, por esta razón, el punto 1 es una **discontinuidad inevitable.**

Continuidad de la función compuesta.

La tarea de calcular el límite de una función $f(x)$ discontinua en a cuando $x \to a$, consiste en encontrar una función $g(x)$ continu en a, que coincida con $f(x)$ en los puntos $x \neq a$. Siendo $g(x)$ continua, lo único que resta es evaluar el $g(a)$. Si no existe tal función continua $g(x)$ el limite no existe.

Ejemplo

Calculemos:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$$

Consideramos l función $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$, que no es continua en el punto 2, y la escribimos como $\frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} = x + 2, para\ x \neq 2$, y consideramos también la función $g(x) = x + 2$ que sì es continua en 2. Como la función f coincide con la función g, tenemos: $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+2) = 2 + 2 = 4$.

Por consiguiente:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$$

El siguiente teorema establece que la composición de dos funciones continuas es una función continua.

Teorema 3

Si $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y $g(x)$ es una función continua en L, entonces

$\lim_{x\to a} g\big(f(x)\big) = g(\lim_{x\to a} f(x)) = g(L)$.

Ejemplo

Determina donde es continua la función $h(x) = \cos\,(x^2 - 5x + 2)$.

Se puede ver que:

$$h(x) = f\big(g(x)\big)$$

Donde:

$$f(x) = Cos\ x$$

$$g(x) = x^2 - 5x + 2$$

Puesto que $f(x) y\ g(x)$ son funciones continuas para todo x, entonces $h(x)$.

Es continua para todo x por la continuidad de la función compuesta.

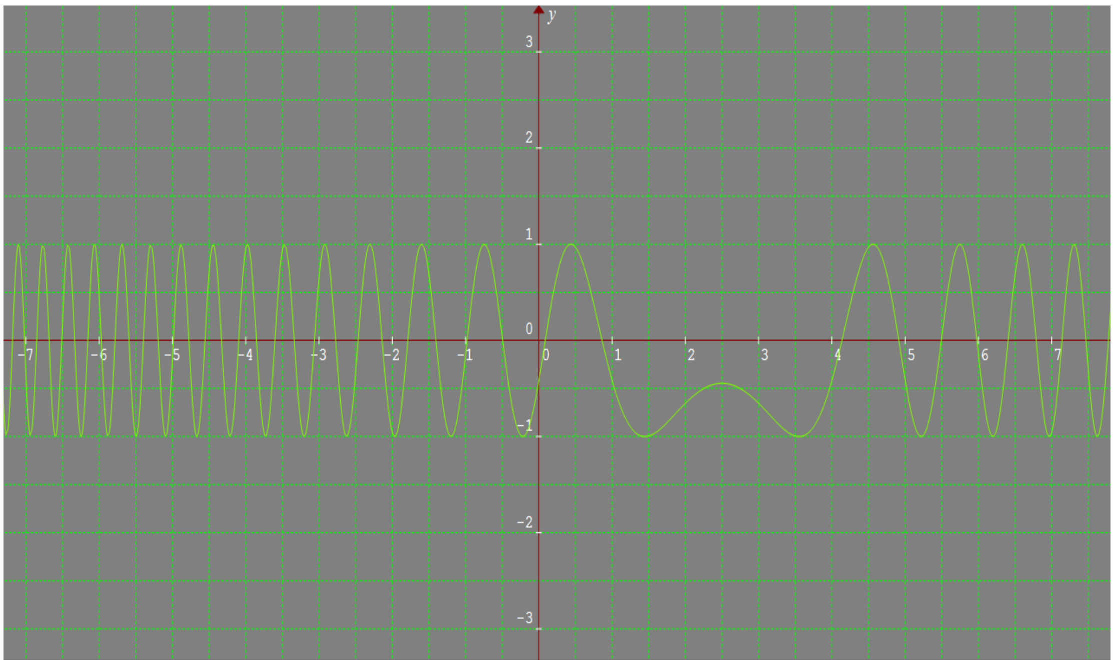


Imagen 5

Fuente: Propia.

Teorema del valor intermedio

Supongamos que f es continua sobre el intervalo cerrado $[a, b]$ y K es cualquier numero entre $f(a) y\ f(b)$. Entonces existe un número $c \in [a, b]$ para el cual $f(c) = K$.

Es fácil ver gráficamente lo expresado por Augustin Louis Cauchy en su teorema.

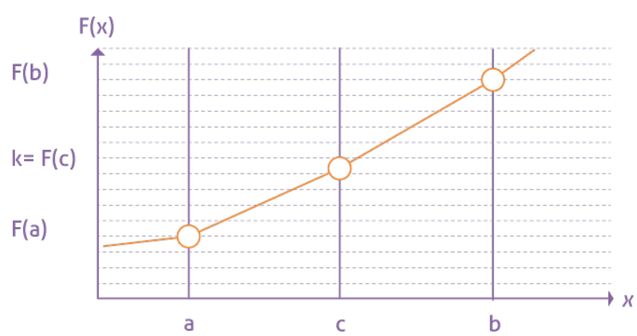


Figura 2

Fuente: Propia

El teorema del valor intermedio expresa que si f es continua sobre $[a, b]$ entonces f debe tomar cada valor comprendido entre $f(a) y\ f(b)$ por lo menos una vez. Es decir una función continua no puede saltarse números entre los valores de sus dos extremos. Par hacerlo, la gráfica necesitaría sobre la línea horizontal $y = K$, algo que las funciones continuas no pueden hacer.

Ejemplo

Dado que $f(x) = x^5 + 2x - 7$. Determine un número c tal que $f(c) = 50$.

Se puede ver que la función f es continúa n todo su dominio por ser una función polinómica, consideramos el intervalo $[2,3]$, como:

$f(2) = 2^5 + 2(2) - 7 = 29$, y $f(3) = 3^5 + 2(3) - 7 = 242$

Se cumple que:

$$f(2) = 29 < 50 < 242 = f(3)$$

Por el teorema del valor intermedio, existe un valor c en el intervalo $[2,3]$, por lo tanto en todo $\mathbb{R}$, tal que:

$$f(c) = 50$$

Ejemplo

Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Si existe para la función:

$$f(x) = sen\ (2x)$$

Al calcular el límite se encuentra:

$$\lim_{h \to 0} \frac{sen\big(2(x+h)\big) - sen(2x)}{h} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{sen\big(2(x+h)\big) - sen(2x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{sen(2x+2h) - sen(2x)}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{sen(2x)\cos(2h) + \cos(2x)\,sen(2h) - sen(2x)}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{[\cos(2h) - 1]sen(2x) + \cos\,(2x)sen(2h)}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{[\cos(2h) - 1]sen(2x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{[\cos(2x)sen(2h)]}{h}$$

$$sen(2x) \lim_{h \to 0} \frac{[\cos(2h) - 1]}{h} + \cos\,(2x) \lim_{h \to 0} \frac{[\quad (sen(2h)]}{h}$$

Donde:

$$\lim_{h \to 0} \frac{sen(2h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2sen(2h)}{h}$$

3

Unidad 3

Derivada de una función primera parte

Cálculo diferencial

Autor: Alexander Moreno Quiroga

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina

MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Introducción

A través del cálculo se proporcionaron los principales métodos para la investigación cuantitativa de los diferentes procesos de cambio de dos magnitudes. Así, nace el cálculo, en una etapa determinante proporcionando una gran variedad de observaciones, teorías e hipótesis a la tecnología y la navegación, lo cual impulsaba a la ciencia hacia procesos de investigación cuantitativa de las diferentes maneras como se mueve el universo.

En este apartado trataremos las derivadas desde su definición por límite hasta sus propiedades más utilizadas, aprenderemos las reglas básicas de derivación y algunas aplicaciones.

Recomendaciones metodológicas

El nivel aumenta en esta cartilla, es importante que dedique más tiempo para su comprensión, recurra a las lecturas adicionales para encontrar mayor profundidad de los temas, busque más ejemplos relacionados con el tema y proceda a derivar con facilidad.

Desarrollo temático

Derivada de una función primera parte

Calculo diferencial

Incrementos

Siempre que entre dos variables exista una dependencia, por ejemplo el caso de la velocidad en la cual interviene el desplazamiento y el tiempo, decimos que existe un incremento.

En la historia, el cálculo se ha convertido en el instrumento más acertado para definir las relaciones, variaciones e incrementos.

En las funciones, al producirse un cambio en la variable independiente (x), también se produce un cambio en la variable dependiente (y).

Las siguientes relaciones son ejemplo de la situación anterior:

- La demanda de un producto se ve afectada por un incremento en el precio del mismo.
- La fuerza magnética entre dos polos sufre un aumento al disminuir la distancia entre ellos.
- La población de bacterias en un cultivo, varía a medida que el tiempo transcurre.

Simbolización de los incrementos

Si el valor de la variable y depende el valor que tome x, se afirma que y es una función de x, y se expresa:

$$y = f(x).$$

Un valor x_1 de la variable independiente, representa el primer valor de x y x_2, el otro valor considerado.

La expresión:

$$x_2 - x_1$$

Representa el cambio o incremento de la variable x.

Esta diferencia se simboliza:

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

Donde Δ es la letra griega delta. Que se lee "variación de x" o "cambio de x" o simplemente "delta de x".

Como $y = f(x)$; un cambio en la variable x produce un cambio en y.

Sea:

y_1 es el valor de y cuando $x = x_1 y$

y_2 es el valor de y cuando $x = x_2$

El incremento en y es:

$\Delta y = y_2 - y_1$ o

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$$

Conocida la expresión matemática que relaciona dos variables, se puede calcular el incremento en la variable dependiente cuando se conoce entre que valores cambia la variable independiente.

Ejemplo

Si $f(x) = 2x^2$; calcular Δy uando $x_1 = 3{,}0$ y $x_2 = 3{,}1$

Como $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$, entonces

$$\Delta y = 2(x_2)^2 - 2(x_1)^2$$

$$\Delta y = 2(2{,}1)^2 - 2(2{,}0)^2$$

$$\Delta y = 2(4{,}41) - 2(4{,}0)$$

$$\Delta y = 8{,}82 - 8{,}0$$

$$\Delta y = 0{,}82$$

Gráficamente se ve de la siguiente manera:

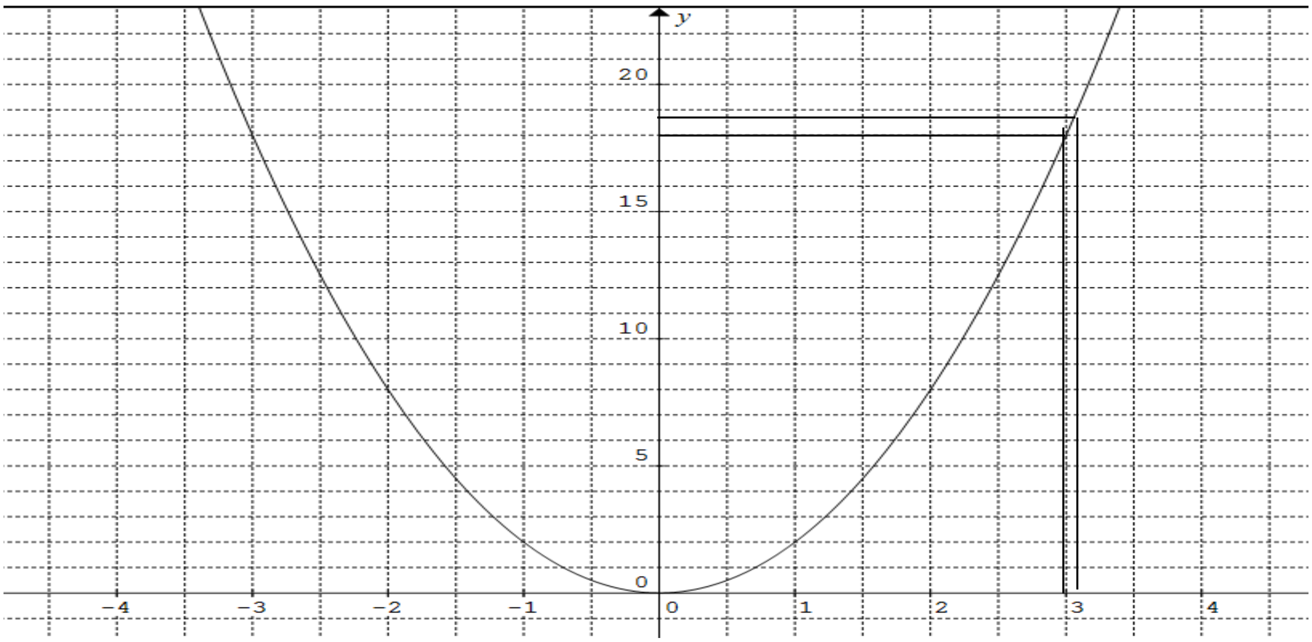


Figura 1

Fuente: Propia.

Mientras x cambia 0,1, y varía 0,8.

Ejemplo

Si $f(x) = e^{-2x}$, calcular Δy cuando $\Delta x = 0{,}4$ y $x_1 = 2{,}0$.

Solución:

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$$

$\Delta y = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$; ya que $\Delta x = x_2 - x_1 \; y \; x_2 = \Delta x + x_1$

$$\Delta y = e^{-2(\Delta x + x_1)} - e^{-2x_1}$$

$$\Delta y = e^{-2(2+0{,}4)} - e^{-2x_1}$$

$$\Delta y = e^{-4{,}8} - e^{-4} = \frac{1}{e^{4{,}8}} - \frac{1}{e^{4}} = 0{,}0082297 - 0{,}0183156 = 0{,}0100858$$

Recta secante y recta tangente a una curva:

- Una recta secante a una curva es una recta que la corta en al menos dos puntos.
- Una recta tangente es aquella recta que se apoya en un punto específico de una curva.

En el siguiente grafico se observa una curva representada por el color azul, tres rectas secantes (verde, roja y amarilla) y una tangente color rosado.

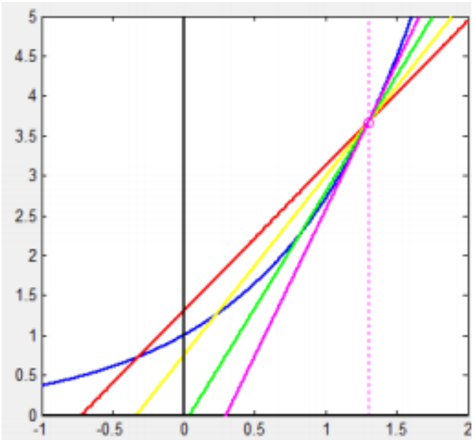


Imagen 1

Fuente: Propia.

Si deseamos hallar la pendiente de una recta secante a una curva, nos concentramos en los puntos en los cuales la corta, dichos puntos son comunes a ambas funciones, es decir que comparten sus coordenadas, una gráfica que represente la información suministrada seria.

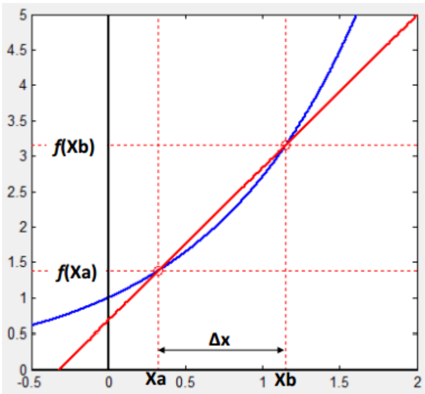


Imagen 2

Fuente: Propia.

Fundación Universitaria del Área Andina 84

Como se puede ver en la figura cualesquiera que sean Xa y Xb, sus correspondientes imágenes serán $f(Xa)$ y $f(Xb)$, la pendiente de una recta (m)puede calcularse mediante la expresión.

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Siempre que (x_1, y_1) y (x_2, y_2) sean dos puntos de la recta. En el caso particular de la recta secante esos dos únicos puntos son los únicos que se conocen y son:

$$(X_a; f(X_a))$$

$$(X_b; f(X_b))$$

Así, l pendiente e la recta secante a la curva es:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(X_b) - f(X_a}{X_b - X_a}$$

Podríamos definir X_a como el punto y Δx como la distancia al segundo punto. De esta manera las coordenadas de los puntos serian:

$$\big((Xa); f(Xa)\big)$$

$$(Xa + \Delta x; f(Xa + \Delta x))$$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(Xa + \Delta x) - f(Xa)}{Xa + \Delta x - Xa} = \frac{f(Xa + \Delta x) - f(Xa)}{\Delta x}$$

A esta fracción se le conoce como el cociente incremental.

Concepto de derivada

El concepto más importante del cálculo y en general de todas las matemáticas es el de “derivada”.

Calcular la pendiente a una curva en un punto dado, o calcular la velocidad instantánea de un cuerpo que se desplaza con movimiento variado son problemas que nos pueden acercar a la idea de derivada, problemas que a pesar de ser diferentes cualitativamente hablando, el procedimiento para obtener la solución es similar.

La razón de cambio en un instante y l pendiente de la recta tangente a una curva se definen como el límite del cociente entre el incremento de la variable dependiente sobre el incremento de la variable independiente, cuando este último tienda a cero, siempre que exista.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Este cociente incremental se conoce en matemáticas como la derivada de la función en un punto dado.

Se llama derivada de la función $y = f(x)$ en el punto x; al límite del cociente incremental:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

La derivada ha tenido diferentes notaciones según la época y las circunstancias donde se presentó. La forma más común como se simboliza la derivada de una función $f(x)$ es $f´(x)$, notación introducida por Lagrange a finales del siglo XVIII, Newton utilizó una notación que actualmente ha quedado en desuso, simbolizó la derivada de la función con Y en lugar de $y´$. Leibniz utilizó la notación $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, para los incrementos, y $\frac{dy}{dx}$ para la drivada de y con respecto a x.

Por consiguiente estas notaciones son equivalentes:

$$y´ = f´(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Ejemplo

Calcular la derivada de la función $y = 5x^2 + 1$en el punto $x = 3$

Aplicando la definición de derivada.

$$y´ = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Se reemplazan: $f(x)\ y\ f(x + \Delta x)$.

$$y´ = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5(x + \Delta x)^2 + 1 - (5x^2 + 1)}{\Delta x}$$

Se calcula el cuadrado del binomio:

$$y´ = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5(x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2) + 1 - 5x^2 - 1}{\Delta x}$$

Se aplica la propiedad distributiva:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5x^2 + 10x\Delta x + 5(\Delta x)^2 + 1 - 5x^2 - 1}{\Delta x}$$

Se reducen términos semejantes:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{10x\Delta x + 5(\Delta x)^2}{\Delta x}$$

Se distribuye el divisor:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{10x\Delta x}{\Delta x} + \frac{5(\Delta x)^2}{\Delta x}\right)$$

Se aplica límite para la suma de funciones $y' = 10x + 0 = 10x$

Se calcula la derivada en $x = 3$

$$y'(3) = 10(3) = 30$$

Derivada de una función como pendiente de la recta tangente a una curva de la geometría analítica, el cálculo tomo la representación grafica de las funciones en un plano de coordenadas cartesianas. El problema de calcular la pendiente de la recta tangente a una curva no se pudo resolver con las herramientas que hasta ese entonces había en las matemáticas. Hoy en día, cualquiera de las ramas del conocimiento necesita de la investigación científica como fuente fundamental para el análisis de los fenómenos, objeto de su estudio.

La pendiente de la recta tangente a una curva en un punto dado se calcula con el mismo procedimiento que se utilizó con el cálculo de la derivada en un punto.

Gráficamente se pude visualizar algo así:

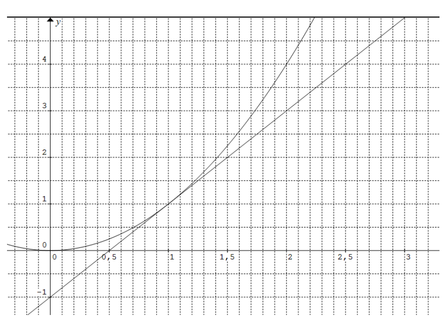


Figura 2

Fuente: Propia.

La fórmula a utilizar es la misma y el procedimiento esta resumido en el siguiente ejemplo:

Ejemplo

Calcular la pendiente de la recta tangente a la curva de ecuación $y = 3x^2 + 2x + 1$ en el punto $x = 1$.

Aplicando la definición de derivada:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Se reemplazan $f(x)$ y $f(x + \Delta x)$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3(x + \Delta x)^2 + 2(x + \Delta x) + 1 - (3x^2 + 2x + 1)}{\Delta x}$$

Se calcula el cuadrado del binomio.

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3(x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2) + 2x + 2\Delta x + 1 - 3x^2 - 2x - 1}{\Delta x}$$

Se aplica la propiedad distributiva.

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x^2 + 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 + 2x + 2\Delta x + 1 - 3x^2 - 2x - 1}{\Delta x}$$

Se reducen términos semejantes.

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{6x\Delta x + 2\Delta x + 3(\Delta x)^2}{\Delta x}$$

Se distribuye el divisor.

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} (\frac{6x\Delta x}{\Delta x} + \frac{2\Delta x}{\Delta x} + \frac{3(\Delta x)^2}{\Delta x})$$

Se aplica límite para la suma de funciones $y' = 6x + 2 + 0 = 6x + 2$

Se calcula la derivada en $x = 1$

$$y'(1) = 6(1) + 2 = 8$$

Por tanto la pendiente de la recta tangente a la curva $y = 3x^2 + 2x + 1$ en el punto $x = 1$ es:

$$m = 8$$

Ecuación de la recta tangente:

Una recta se caracteriza porque el valor de la pendiente es siempre el mismo, no importa cuales puntos de la recta se utilicen para su cálculo ya que el ángulo de inclinación se mantiene constante.

Dada una recta que pasa por dos puntos $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_{2)}$ y cuya pendiente es m, tiene por ecuación.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Ejemplo

Tomemos la función del ejemplo anterior y calculemos la ecuación de la recta tangente a esa curva en el punto $P_1(1,6)$ es:

$$y - 6 = 8(x - 1)$$

Aplicando propiedad distributiva.

$$y - 6 = 8x - 8$$

Despejando y

$$y = 8x - 2$$

Veamos las graficas.

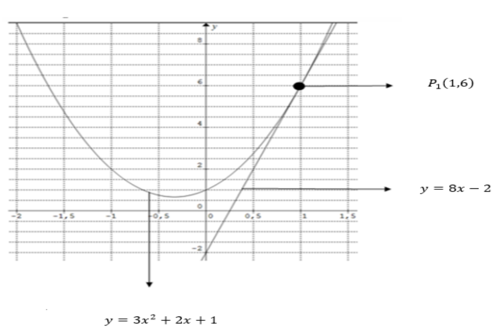


Figura 3

Fuente: Propia.

Derivada de una función como velocidad instantánea de una partícula

Para calcular l velocidad de un móvil en un instante dado, el intervalo donde se calcula la velocidad media debe tender a cero. Es decir, ser lo más pequeño posible. Este es el razonamiento que dio origen al cálculo diferencial, desde el punto de vista de la mecánica de Galileo.

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Ejemplo

Calcular la velocidad instantánea del cuerpo que con velocidad variable se mueve a lo largo de una trayectoria recta. El cuerpo se lanza verticalmente hacia arriba con velocidad inicial v_0:

$$x = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$$

Si se desea calcular la velocidad del móvil en un tiempo t, se traza la recta secante que corte a la curva en los puntos correspondientes a $t \; y \; t + \Delta t$ donde Δt es un incremento del tiempo.

Para $t = t$ la correspondiente imagen es $x = v_0 t + \frac{gt^2}{2}$ y para el tiempo $t + \Delta t$ la imagen es $x + \Delta x$, donde:

$$x + \Delta x = v_0(t + \Delta t) - \frac{g(t + \Delta t)^2}{2}$$

Al despejar $x + \Delta x = v_0(t + \Delta t) - \frac{g(t+\Delta t)^2}{2} - v_0 t - \frac{gt^2}{2}$

Como la velocidad instantánea en el tiempo t es:$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$

Entonces:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_0(t + \Delta t) - \frac{g(t+\Delta t)^2}{2} - v_0 t - \frac{gt^2}{2}}{\Delta t}$$

Al desarrollar los cuadrados de los binomios y reducir términos semejantes, se obtiene:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_0 \Delta t - gt\Delta t + (\Delta t)^2}{\Delta t}$$

Al cancelar Δt se tiene.

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} (v_0 - gt + \Delta t)$$

Al reemplazar Δt por cero se obtiene.

$$v = v_0 - gt$$

Esta última expresión nos permite calcular la velocidad en un instante dado en un movimiento uniformemente acelerado.

Ejemplo

Si la velocidad inicial es de $38\, {}^{m}/_{s}$, la velocidad del cuerpo a los 3 segundos es:

$$v = 38\, {}^{m}/_{s} - 9{,}8\, {}^{m}/_{s^2}\,(3s)$$

$$v = 76\, {}^{m}/_{s} - 29{,}4\, {}^{m}/_{s} = 46{,}6\, {}^{m}/_{s}$$

Razón de cambio

En la actualidad, los conceptos de cálculo se aplican en casi cualquier campo del quehacer humano, las aplicaciones de esta sección representan solamente una muy pequeña muestra de algunos usos elementales de la derivada.

Es importante recordar que la derivada de una función da la rapidez instantánea de cambio de esa función. Así, que cuando se halle la palabra razón, índice, tasa, es necesario pensar en derivadas.

La derivada entendida como razón de cambio se usa en física para hallar cambios instantáneos de velocidades, áreas o volúmenes, y en el campo de la economía al determinar índices de inflación, tasas de interés, índices de desempleo, etc.

Ejemplo

Supongamos que Q(t) representa la carga eléctrica de un alambre en el instante t. Entonces la derivada Q´(t), da la corriente que fluye por el alambre. Par ver esto se toma una sección transversal de un alambre.

Entre los instantes $t_1 \ y \ t_2$, la carga neta que pasa por la sección transversal es $Q(t_2) - Q(t_1)$. La corriente media (carga por unidad de tiempo) en este intervalo se define como:

$$\frac{Q(t_2) - Q(t_1)}{t_2 - t_1}$$

La corriente instantánea $I(t)$ en cualquier instante t se puede hallar alculando el límite.

$$I(t) = \lim_{t_1 \to t} \frac{Q(t) - Q(t_1)}{t - t_1}$$

Ejemplo 9

Análisis del costo marginal de producir un artículo comercial.

Supongamos que:

$$C(x) = 0{,}02x^2 + 2x + 4000$$

Es el costo total en miles para que una compañía produzca x unidades de cierto producto. Calcular el costo marginal en $x = 100$ y comparar este valor con el costo real de producir la unidad numero 100.

La función de costo marginal es la derivada de $C(x)$.

Es necesario hallar:

$$C'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{C(x + \Delta x) - C(x)}{\Delta x}$$

Lo cual después de repetir el proceso anteriormente explicado, nos da como resultado:

$$C'(x) = 0{,}04x + 2$$

Así que el costo marginal en $x = 100$ es:

$$C'(100) = 0{,}04(100) + 2 = 4 + 2 = 6 \ dolares \ por \ unidad$$

De otro lado, el costo real de producir el artículo numero 100 seria:

$$C(100) - C(99) = 200 + 200 + 4000 - (196{,}02 + 198 + 4000)$$

$$= 4400 - 4394{,}02 = 5{,}98 \ dolares$$

Diferenciabilidad de una función

Una función real de una variable que admite derivada en todos sus puntos y tal que dicha derivada sea continua es trivialmente una función diferenciable. Por esa razón para funciones reales de una variable el concepto de función derivable y función diferenciable son básicamente equivalentes.

Teorema de continuidad

Si $f(x)$ es derivable en $x = a$, entonces $f(x)$ es continua en $x = a$

Se observa que el teorema expresa que si una función no es continua en un punto, entonces no puede tener una derivada en ese punto, también resulta que las funciones no son derivables en algún punto donde la gráfica tenga un "esquina aguda".

Ejemplo

Demostrar que $f(x) = \begin{cases} 4 \; si \; x < 2 \\ 2x \; si \; x \geq 2 \end{cases}$ no es derivable en $x = 2$.

Analicemos la grafica:

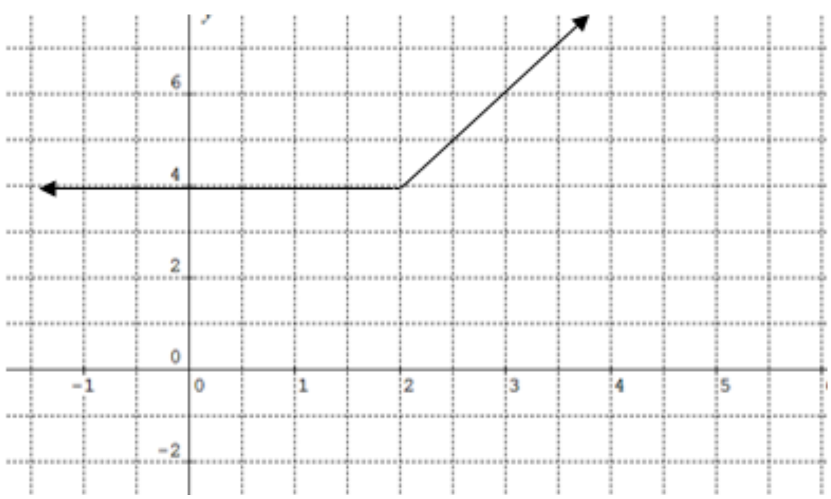


Figura 4

Fuente: Propia.

Es fácil ver en la gráfica que existe un recodo en $x = 2$. Esto califica como una esquina aguda, lo cual indica que es muy posible que la derivada no exista en dicho punto. Para verificar esta afirmación es necesario calcular las derivadas por los límites laterales.

Para $h > 0$ se observa que $(2 + h) > 2$ y por tanto, $f(2 + h) = 2(2 + h)$, lo cual da

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{2(2+h) - 4}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{4 + 2h - 4}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{2h}{h} = 2$$

De la misma manera, si $h < 0, (2 + h) < 2$, así que $f(2 + h) = 4$. De modo que se llega a

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{4 - 4}{h} = 0$$

Como los límites laterales no concuerdan f no es derivable en $x = 2$

Reglas básicas de derivación: derivadas de suma, producto, cociente y funciones compuestas.

Regla	Propiedad	Derivada
1	Función constante	$f(x) = k, entonces\ f'(x) = 0$
2	Suma de funciones	$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
3	Producto por escalar	$(kf)' = kf'(x), con\ una\ k\ constante$
4	Producto de funciones	$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
5	Cociente de funciones	$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$
6	Regla de la cadena	$(fog)'(x) = f'[g(x)]g'(x)$
7	Potencia de una función	$[(u(x))^n]' = n(u(x))^{n-1}u'(x)$
8	Logaritmo natural de una función	$f(x) = lnx, entonces\ f'(x) = \frac{1}{x}$
9	Función exponencial e^x	$f(x) = e^x, entonces\ f'(x) = e^x$
10	Exponencial a^x	$f(x) = a^x, entonces\ f'(x) = a^x lna$

Tabla 1

Fuente: Propia.

Ejemplo

Calcular la derivada para la función.

$$f(x) = 5$$

Como es una función constante se aplica la regla número 1, entonces su derivada es:

$$f'(x) = 0$$

Ejemplo

Calcular la derivada para la función.

$$c$$

Es una función que contiene un escalar se resuelve con la propiedad 3, así:

$$f'(x) = 3$$

Ejemplo

Calcular la derivada para la función.

$$f(x) = x^6$$

Se resuelve aplicando la potencia de una función.

$$f'(x) = 6x^5$$

Ejemplo

Calcular la derivada para la función.

$$f(x) = 4x^2 - 5x + 2$$

Se soluciona aplicando la regla de la suma de funciones.

$$f'(x) = 8x - 5$$

Ejemplo

Calcular la derivada para la función.

$$f(x) = (3x^4 + 2x^2)(6x^3 + 2x + 1)$$

Como es claro, es un producto de funciones.

$$f'(x) = (12x^3 + 4x)(6x^3 + 2x + 1) + (3x^4 + 2x^2)(18x^2 + 2)$$

Resolviendo.

$$f'(x) = 72x^6 + 24x^4 + 12x^3 + 24x^4 + 8x^2 + 4x + 54x^6 + 6x^4 + 36x^4 + 4x^2$$

Reduciendo términos semejantes.

$$f'(x) = 126x^6 + 90x^4 + 12x^3 + 12x^2 + 4x$$

Ejemplo

$$f(x) = \frac{4x^2 + 5}{2x^5}$$

Apliquemos cociente de funciones.

$$f'(x) = \frac{8x(2x^5) - 4x^2(10x^4)}{[2x^5]^2}$$

Realizando las multiplicaciones.

$$f'(x) = \frac{16x^6 - 40x^6}{4x^{10}} = \frac{-24x^6}{4x^{10}} = -6x^4$$

Ejemplo

Calcular la derivada para la función.

$$f(x) = (2x^2 - 3x)^3$$

Es necesario aplicar la regla de la cadena ya que se trata de una función compuesta.

$$f'(x) = 3(2x^2 - 3x)^2(4x - 3)$$

Resolviendo:

$$f'(x) = 3((2x^2)^2 - 2(2x^2)(3x) + (3x)^2)(4x - 3)$$

$$f'(x) = 3(4x^4 - 12x^3 + 9x^2)(4x - 3)$$

$$f'(x) = (12x^4 - 36x^3 + 27x^2)(4x - 3)$$

$$f'(x) = 48x^5 - 36x^4 - 144x^4 + 108x^3 + 108x^3 - 81x^2$$

$$f'(x) = 48x^5 - 180x^4 + 216x^3 - 81x^2$$

Ejemplo

$$f(x) = \ln\,(2x^4 - x^3 + 3x^2 - 3x)$$

$$f'(x) = \frac{8x^3 - 3x^2 + 6x - 3}{2x^4 - x^3 + 3x^2 - 3x}$$

Ejemplo

$$f(x) = ln\left(\frac{e^x + 1}{e^x - 1}\right)$$

Aplicando propiedades de los logaritmos la expresión anterior es equivalente a:

$$f(x) = \ln(e^x + 1) - ln(e^x - 1)$$

$$f'(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} - \frac{e^x}{e^x - 1} = \frac{e^{2x} - e^x - e^{2x} - e^x}{(e^x + 1)(e^x - 1)} = \frac{-2e^x}{e^{2x} - 1}$$

Ejemplo

$$f(x) = \frac{1}{2}[\log(1 + x) - \log\,(1 - x)]$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1 + x} - \frac{-1}{1 - x}\right).loge = \frac{1}{2}.\frac{1 - x + 1 + x}{1 - x^2}.loge = \frac{1}{1 - x^2}.loge$$

3

Unidad 3

Derivada de una función segunda parte

Cálculo diferencial

Autor: Alexander Moreno Quiroga

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina

MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Introducción

Se trabajaran ejercicios de derivadas aplicando los conocimientos adquiridos en la semana anterior, se introducen conceptos nuevos basados en teoremas los cuales proporcionan grandes bases para la resolución de ejercicios más complejos del cálculo diferencial. Se realiza una aproximación a la resolución de problemas aplicando lo aprendido hasta este momento.

Recomendaciones metodológicas

Es importante consultar acerca de la demostración de los teoremas enunciados, ya que en ellas se utilizan los diferentes conceptos y nos sirven para recordar aspectos que tal vez se han olvidado pero que es fundamental poseer en este momento. De igual manera se sugiere consultar ejercicios relacionados, observar video tutoriales, realizar las lecturas sugeridas con el propósito de reforzar las bases teóricas hasta aquí estudiadas.

Desarrollo temático

Derivada de una función segunda parte

Derivadas de funciones trigonométricas

Función	Derivada
$f(x) = senx$	$f(x) = cosx$
$f(x) = cosx$	$f(x) = -senx$
$f(x) = tanx$	$f(x) = sec^2x$
$f(x) = cotx$	$f(x) = -csc^2x$
$f(x) = secx$	$f(x) = secxtanx$
$f(x) = cscx$	$f(x) = -cscxcotx$

Tabla 1

Fuente: Propia.

Ejemplo

Hallar la derivada de la función $y = \ tanx$, aplicando las reglas de derivación.

La función tangente puede expresarse según las identidades trigonométricas de la siguiente manera.

$$y = tanx = \frac{senx}{cosx}$$

Aplicando la derivada de un cociente obtenemos.

$$y\acute{} = \frac{cosxcosx - senx(-senx)}{cos^2x}$$

$$y' = \frac{cos^2x + sen^2x}{cos^2x} = \frac{cos^2x}{cos^2x} + \frac{sen^2x}{cos^2x} = 1 + tan^2x = sec^2x$$

Ejemplo

Hallar la derivada de la función $y = \ secx$, aplicando las reglas de derivación.

La función tangente puede expresarse según las identidades trigonométricas de la siguiente manera.

$$y = secx = \frac{1}{cosx}$$

Aplicando la derivada de un cociente obtenemos.

$$y' = \frac{0.cosx - 1(-senx)}{cos^2x}$$

$$y' = \frac{senx}{cos^2x} = \frac{1}{cosx} . \frac{senx}{cosx} = secx. tanx$$

Derivación implícita

Hasta ahora en las funciones estudiadas, es fácil ver que la ordenada esta expresada en términos de la abscisa $y = f(x)$.

En la práctica al tratar de resolver problemas se llega a funciones en las que la variable y no esta despejada explícitamente, es decir que y no está expresado en función de x.

Como ejemplo de esta situación analicemos la circunferencia de radio 3 y centrada en el origen $P = (0,0)$, la ecuación es: $y^2 + x^2 = 9$. En dicha función la variable y no está expresada en función de $x, asi \ \ y = f(x)$ se dice que la variable dependiente está implícita como función de x.

Ejemplo

Sea la circunferencia dada por la formula $y^2 + x^2 = 9$, Hallar una expresión que permita determinar la tangente en diferentes puntos.

Instintivamente despejaríamos la variable y con el fin de expresarla en función de x. Siendo así llegamos a la siguiente expresión:

$$y = \pm\sqrt{9 - x^2}$$

Como trabajamos con raíces cuadradas siempre existirán dos valores uno positivo y uno negativo, Solo se tuene en cuenta uno de ellos para obtener una semicircunferencia. Y posteriormente se deriva con respecto a x.

Un proceso un poco más práctico, es hallar implícitamente la derivada de la ecuación $y = \pm\sqrt{9 - x^2}$, el procedimiento consiste en derivar los dos miembros de la igualdad con respecto a x:

$$\frac{d}{dx}(y^2 + x^2) = \frac{d}{dx}(9)$$

Se aplica, la regla de la derivada de la suma de funciones:

$$\frac{d}{dx}y^2 + \frac{d}{dx}x^2 = \frac{d}{dx}(9)$$

El primer término se deriva utilizando la regla de la cadena, y en el segundo se deriva aplicando la potencia de una función.

La función queda convertida en:

$$2yy\acute{} + 2x = 0$$

En ésta ecuación se factoriza el número 2 y se cancela.

$$2(yy\acute{} + x) = 0$$

$$yy\acute{} + x = 0$$

Así, $y\acute{} = -\frac{x}{y}$

Ejemplo

Calcular la derivada implícita $\frac{dy}{dx}$ en la ecuación $\frac{x^2}{4} + y^2 - 2y = 0$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{4} + y^2 - 2y\right) = \frac{d}{dx}0$$

Regla de derivación de la suma de funciones.

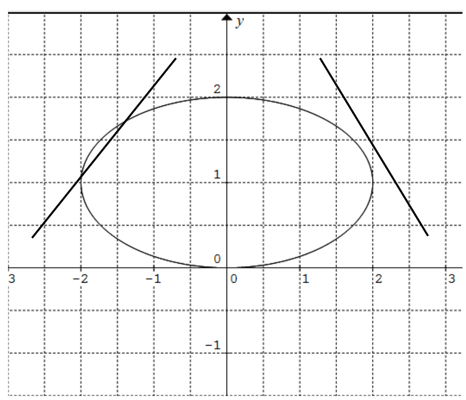
$$\frac{d}{dx}\frac{x^2}{4} + \frac{d}{dx}y^2 - \frac{d}{dx}2y = \frac{d}{dx}0$$

$$\frac{2x}{4} + 2y\frac{dy}{dx} - 2\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{x}{2} + 2\frac{dy}{dx}(y-1) = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{4(1-y)}$$

Gráficamente se obtiene una elipse, con centro en el punto $(0,1)$, he aquí algunas tangentes que se calculan con el resultado del ejercicio anterior, ya que dicha derivada proporciona la fórmula de la pendiente de cualquier recta pendiente a la elipse dado un punto de ella.



Grafica 1

Fuente: Propia.

Ejemplo

Si $x^2y + 2y^3 = 3x + 2y$, hallar $\frac{dy}{dx}$

Resumiendo procesos obtenemos:

$$\frac{dy}{dx}(x^2 + 6y^2 - 2) = 3 - 2xy$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3 - 2xy}{x^2 + 6y^2 - 2}$$

Derivadas de funciones inversas

Dada una función $y = f(x)$su inversa se denota como f^{-1} por esta razón se cumple que $y = f(x)$ y $x = f^{-1}(y)$ son equivalentes, también se cumple que sus derivadas son reciprocas, asi:

$$\frac{dx}{dy}.\frac{dy}{dx} = 1$$

Lo cual es posible afirmar gracias a la regla de la cadena.

$$\frac{dx}{dy}.\frac{dy}{dx} = \frac{dx}{dx}$$

Y esta expresión equivale a 1.

La fórmula para calcular la derivada de la inversa de una función f en un valor $x = a$.

$$[f^{-1}]'(a) = \frac{1}{f['f^{-1}(a)]}$$

Ejemplo

La función:

$$y = x^2$$

Para valores positivos de x tienen inverso.

$$x = \sqrt{y}$$

$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$ $\frac{dy}{dx} = 2x$

Se calcula: $\frac{dx}{dy}.\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dx}{dy}.\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{y}}.2x = \frac{2x}{2x} = 1$$

Ejemplo

La función:

$$y = e^x$$

El inverso de y es $x = lny$

$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y}$ $\frac{dy}{dx} = e^x$

Se calcula: $\frac{dx}{dy} . \frac{dy}{dx}$

$$\frac{dx}{dy} . \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} . e^x = \frac{e^x}{e^x} = 1$$

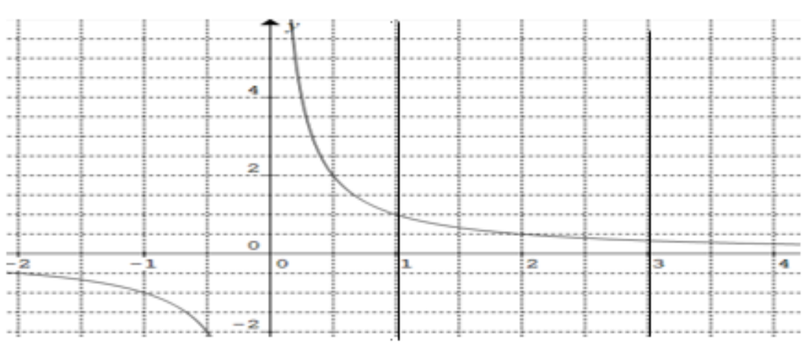
Teorema del valor extremo

Una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ asume tanto un valor máximo absoluto como un mínimo absoluto en ese intervalo.

El teorema expresa que existe una garantía de que las funciones continuas tienen un máximo absoluto en un intervalo cerrado y acotado.

Ejemplo

Determinar los extremos absolutos de $f(x) = \frac{1}{x}$ en el intervalo $[1,3]$



Grafica 2

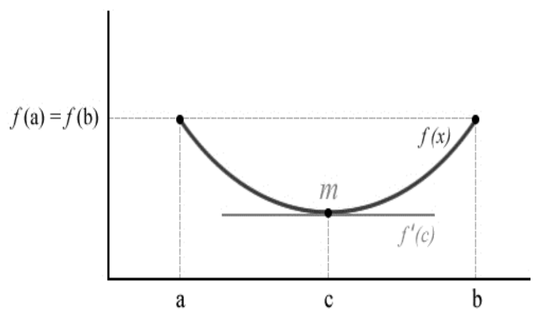
Fuente: Propia.

Se observa que en intervalo $[1,3]$ f es continua. En consecuencia el teorema enunciado anteriormente garantiza que allí existe un máximo y un mínimo absolutos. A partir de la gráfica es fácil ver que f alcanza su máximo en $x = 1$ y su mínimo en $x = 3$.

Teorema de Rolle

Sea f una función continua en un intervalo $[a, b]$ y derivable en el abierto (a, b) y $f(a) = f(b)$, entonces: Por lo menos existe y punto c tal que $a < c < b$ donde se cumple que $f'(c) = 0$. Existen tres casos.

Caso 1

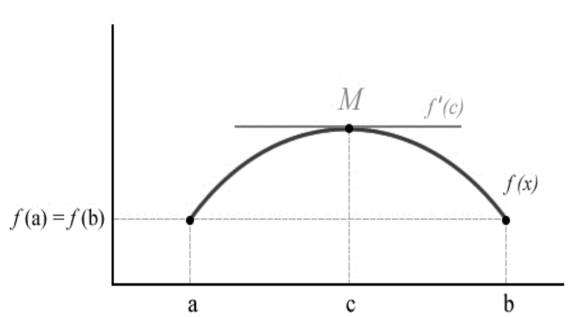


Grafica 3

Fuente: Propia.

Los valores máximos del intervalo son iguales y la imagen de c está por debajo de dichos valores por tal motivo es claro deducir que existe un mínimo absoluto en $x = c$ y que la curva en ese intervalo es cóncava hacia arriba.

Caso 2

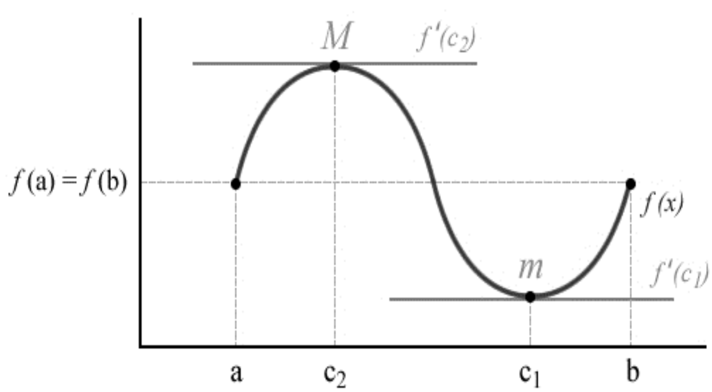


Grafica 4

Fuente: Propia.

Los valores mínimos del intervalo son iguales y la imagen de c está por encima de dichos valores, se infiere que existe un máximo absoluto en en $x = c$ y que la gráfica es cóncava hacia abajo en ese intervalo.

Caso 3



Grafica 5

Fuente: Propia.

Los valores máximo y mínimo son diferentes para este caso existe un máximo absoluto en c_2 y un mínimo absoluto en c_1.

Teorema del valor medio

Sea f una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$y derivable en el abierto (a, b) existe por lo menos un punto c, $a < c < b$ tal que la recta secante que une los puntos $(a, f(a))y$ $(b, f(b))$ es paralela a la recta tangente a la curva en c. En símbolos.

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Ejemplo

Determinar si es posible aplicar el teorema del valor medio a la función definida por $f(x) = 4x^2 - 5x + 1$ en [0,2].

f es continua y derivable en el intervalo asignado por tanto es posible aplicar la formula.

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{7 - 1}{2 - 0} = 3$$

Luego:

$$f'(c) = 3$$

Además:

$f'(x) = 8x - 5$, o sea que $f'(c) = 8c - 5$ entonces:

$$3 = 8x - 5$$

$$x = 1$$

Para $x = 1$ se tiene que $f(1) = 0$ entonces utilizamos la ecuación punto- pendiente $y - y_1 = m(x - x_{1)}$ conociendo que $f'(c) = 3$ por tanto $m = 3$.

La ecuación de la recta tangente a la curva en este punto es:

$$\boldsymbol{y = 3x - 3}$$

Encontremos la ecuación de la recta que pasa por los puntos.

$$\big(a, f(a)\big) y \ (b, f(b))$$

$$\big(a, f(a)\big) = (0,1)$$

$$\big(b, f(b)\big) = (2,7)$$

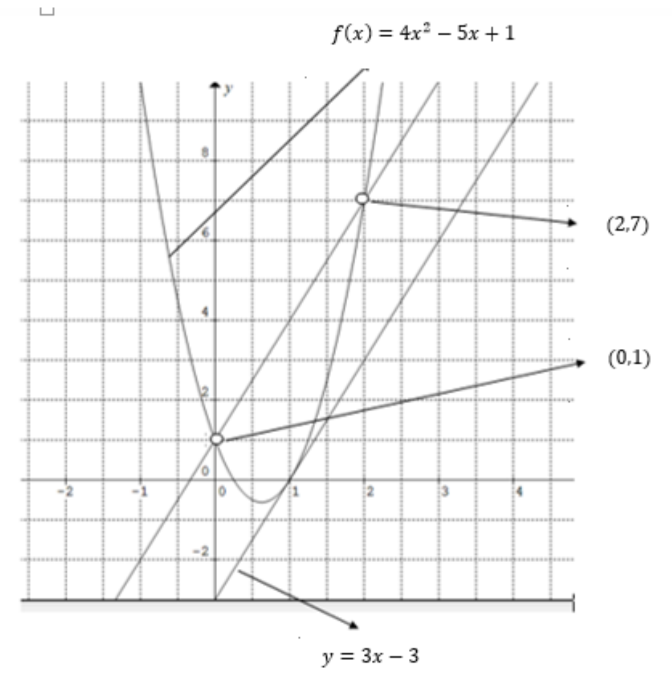
Si $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{7-1}{2-0} = 3$

Aplicando un proceso análogo al utilizado para hallar la anterior ecuación se llega a que esta recta está representada por:

$$\boldsymbol{y = 3x + 1}$$

Algebraicamente es fácil ver que ambas rectas tienen la misma pendiente por tanto son paralelas.

Gráficamente se puede ver:



Grafica 6

Fuente: Propia.

Y evidentemente las dos rectas son paralelas.

Razones de cambio relacionadas

Cuando se definió la derivada de una función f en un punto fijo c, se estableció que:

$$f(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \lim_{x\to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Donde:

$$\Delta y = f(x) - f(c) = f(c+h) - f(c)$$

$$\Delta x = x - c = h$$

Δy Y Δx representan los incrementos de las variable y y x.

De aquí podemos afirmar que:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

Esta igualdad nos muestra el cambio que ha sufrido y, cuando x h presentado un cambio Δx.

Problemas que se resuelven mediante razones de cambio relacionadas

Aunque los detalles cambian de problema a problema, el patrón general de soluciones es el mismo para todos los problemas de razones relacionadas.

El proceso sugerido para ellos es el siguiente:

1. Establecer una ecuación que relaciona todas las cantidades relevantes.
2. Derivar ambos lados de la ecuación.
3. Sustituir los valores de todas las cantidades y derivadas, con excepción de una.
4. Se resuelven con respecto a la razón restante.

Ejemplo

Razón de cambio del volumen con respecto a la presión.

Supongamos que la ecuación de van der Waal para un gas especifico e.

$$P+\frac{5}{V^2}(V-0{,}03)=9{,}7$$

Considerando el volumen V como una función de la presión P, usa derivación implícita para hallar la derivada $\frac{dV}{dP}$ en el punto (5,1).

Al derivar ambos lados de la ecuación con respecto a P, se obtiene.

$$\frac{d}{dP}[(P+5V^{-2})(V-0{,}03]=\frac{d}{dP}9{,}7$$

Aplicando la regla del producto y la regla de la cadena.

$$\left(1-10V^{-3}\frac{dV}{dP}\right)(V-0{,}03)+(P+5V^{-2})\frac{dV}{dP}=0$$

Separando los términos que tienen $\frac{dV}{dP}$ de los que no lo tienen quedaría.

$$[-10V^{-3}(V-0{,}03)+P+5V^{-2}]\frac{dV}{dP}=0{,}03-V$$

Resolviendo $\frac{dV}{dP}$

$$\frac{dV}{dP} = \frac{0{,}03 - 1}{-10(1)(0{,}97) + 5 + 5(1)} = -\frac{0{,}97}{0{,}03} = -\frac{97}{3}$$

Ejemplo

Un barco transportador de petróleo tiene un accidente y el petróleo se derrama a razón de 150 litros por minuto. Supóngase que el petróleo se esparce sobre el agua en un disco circular de 2mm de espesor. Determinar la razón a la que el radio de la mancha está creciendo cuando el radio alcanza los 15 metros.

Como el área de un disco circular de radio r es πr^2, el volumen de petróleo está dado por:

$$V = (altura)(área) = 0{,}002\pi r^2$$

Ya que la altura es de 2mm =0,002m. tanto el volumen como el radio son funciones del tiempo, así que:

$$V(t) = \frac{2\pi}{1000}[r(t)]^2$$

Derivando a ambos lados del signo de igualdad, se obtiene:

$$V'(t) = \frac{2\pi}{1000}2[r(t)]r'(t)$$

Como el radio es 15m. El volumen crece a razón de 1500 litros por minuto, o sea, 1.5 metros cúbicos por minuto. Al sustituir $V'(t) = 1{,}5$ y $r = 15$, se llega a:

$$1{,}5 = \frac{4\pi}{1000}(15)r'(t)$$

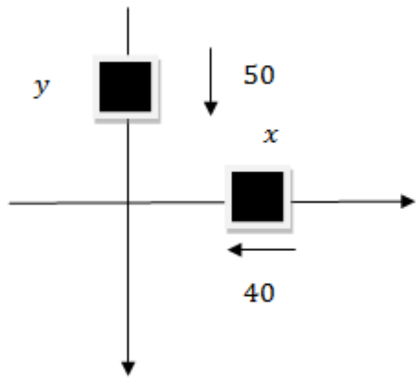
Al resolver para $r'(t)$se encuentra que el radio está creciendo a la razón de:

$$\frac{25}{\pi} = 7{,}9577\ metros\ por\ minuto$$

Ejemplo

Un auto se está desplazando a 50 Kilómetros por hora hacia el sur en un punto situado a medio kilometro del norte de una intersección. Un vehículo de la policía se desplaza a 40 kilómetros por hora hacia el oeste, en un punto situado a un cuarto de kilometro hacia el este en la misma intersección. En ese instante, el radar del vehículo de la policía mide la razón a la cual está cambiando la distancia entre los dos vehículos ¿Qué valor registra dicho radar?

En el gráfico representamos la información del problema, los vehículos que se aproximan a la intersección.



Grafica 7

Fuente: Propia.

Como el vehículo de la policía se está moviendo en el sentido del eje x entonces podemos afirmar.

$$\frac{dx}{dt} = -40$$

Por otra parte, el otro vehículo se está moviendo en el sentido negativo de las y, entonces.

$$\frac{dy}{dt} = -50$$

Por el teorema de Pitágoras, la distancia entre los dos vehículos es $d = \sqrt{x^2 + y^2}$. Como todas las cantidades están cambiando con el tiempo, la ecuación es:

$$d(t) = \sqrt{x^2 + y^2} = (x^2 + y^2)^{1/2}$$

Derivando a ambos lados de la ecuación con respecto a t, se obtiene usando la regla de la cadena.

$$d'(t) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-1/2}.2\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right)$$

$$= \frac{\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Sustituyendo $x = \frac{1}{4}, y = \frac{1}{2}, \frac{dx}{dt} = -40, \frac{dy}{dt} = -50$, se obtiene.

$$d´(t) = \frac{\left(-\frac{1}{4}.40 - \frac{1}{2}.50\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{-35}{\sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{4}}} = \frac{-35}{\sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{4}}} = \frac{-35}{\sqrt{\frac{5}{16}}} = \frac{-35}{\frac{\sqrt{5}}{4}} = -\frac{140}{\sqrt{5}} = -62{,}6$$

Esto significa que el radar registra 62,6 Kilómetros por hora.

4

Unidad 4

Análisis de funciones con base en sus derivadas

Cálculo diferencial

Autor: Alexander Moreno Quiroga

Fundación Universitaria del Área Andina

MIEMBRO DE LA RED ILUMNO

Introducción

Se realiza una clasificación hasta ahora no estudiada, las funciones crecientes y decrecientes, se establecen los criterios para determinar el crecimiento y para hallar los puntos críticos, se analiza la determinación de los máximos y mínimos utilizando las derivadas, también se estudia los puntos de inflexión y con ellos la concavidad de las funciones.

Recomendaciones metodológicas

Es importante ser muy organizado en este punto del proceso de aprendizaje, aquí se empiezan a relacionar todos los conceptos adquiridos anteriormente, así que si en este momento tiene alguna duda participe en los foros de dudas, consulte bibliografía relacionada, mire videos de youtube, e introdúzcase en el fascinante mundo de las derivadas y sus diversas aplicaciones.

Desarrollo temático

Análisis de funciones con base en sus derivadas

Funciones crecientes

Una función f es **estrictamente creciente** en el intervalo (a, b) si para todos los $x_1, x_2 \in (a, b)$ con $x_1 < x_2$ y $f(x_1) < f(x_2)$, es decir que $f(x)$ se hace mayor cuando x se hace mayor.

Funciones decrecientes

Una función es estrictamente decreciente en el intervalo (a, b) si para todos los $x_1, x_2 \in (a, b)$ con $x_1 < x_2$ y $f(x_1) > f(x_2)$, es decir que $f(x)$ se hace menor cuando x se hace mayor.

Ejemplo

Analicemos la función $f(x) = x^2 senx$.

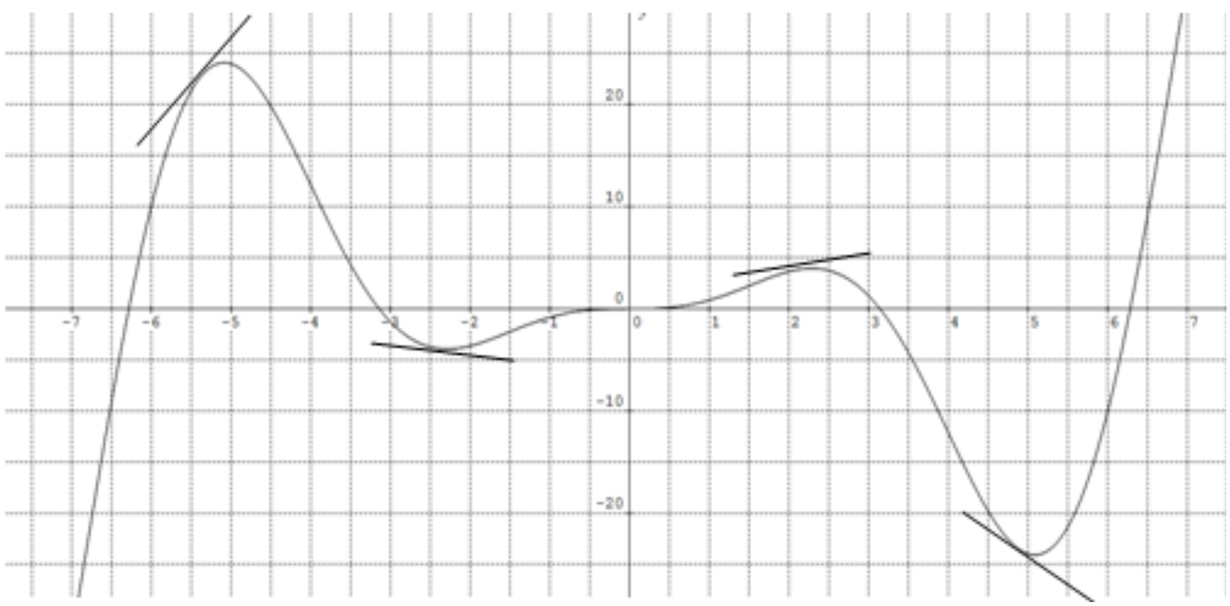


Figura 1

Fuente: Propia.

La función es creciente en los intervalos $x \in (-\infty, -5) \cup (-2.3\ , 2.3) \cup (5, \infty)$.

De igual manera se puede ver que es decreciente en $x \in (5, -2{,}3) \cup (2.3, 5)$.

Valores máximos y mínimos

En diversas ocasiones necesitamos maximizar o minimizar una cantidad. Por ejemplo minimizar el tiempo requerido para una ejecutar una labor, maximizar la ganancia de la venta de un producto, maximizar la utilidad del trabajo de una máquina, etc.

Para una función f definida en un conjunto S de números reales, y un número $c\ \in S$,

i) $f(c)$ es el máximo absoluto de f en S si $f(c) \geq f(x)$ para todo $x \in S$.
ii) $f(c)$ es el mínimo absoluto de f en S si $f(c) \leq f(x)$ para todo $x \in S$.

Si f tiene un máximo o un mínimo local en x_0, entonces o $f'(x_o) = 0$ o bien $f'(x_o)$ no existe. Los puntos x para los cuales $f'(x_o) = 0$ o $f'(x_o)$ no existe se denominan **puntos críticos.**

Ejemplo

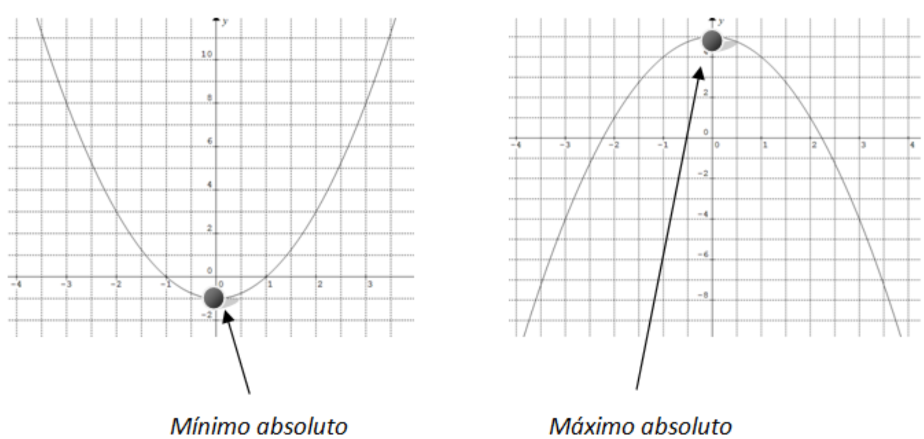


Figura 2

Fuente: Propia.

Observamos que la primera gráfica posee un mínimo absoluto pero no un máximo absoluto, y la segunda gráfica ocurre lo contrario.

Criterios basados en derivadas para determinar máximos y mínimos:

La derivada de la función nos brinda fácilmente la posibilidad de determinar si una función e creciente o no en un intervalo, así:

- La función es creciente en un punto, si la pendiente de la tangente a la curva es positiva en dicho punto.
- La función es decreciente en un punto, si la pendiente de la tangente a la curva es negativa en dicho punto.
- La función no crece ni decrece si la pendiente de la recta tangente es cero.

En la gráfica del ejemplo 1 se puede ver claramente que en los intervalos donde la función f es creciente, la pendiente de las rectas tangentes es positiva, mientras que los intervalos donde f es decreciente, las rectas tangentes tienen pendiente negativa.

A partir de esta información es posible formular el siguiente teorema.

Teorema:

Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Supongamos que f es derivable en el intervalo (a, b).

Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces f es creciente en (a, b).

Si $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces f es decreciente en (a, b).

Ejemplo

Hallar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función.

$$f(x) = x^3$$

Se deriva la función.

$$f'(x) = 3x^2$$

Como la función encontrada $3x^2 > 0$ para todo x, es posible afirmar que la función es creciente en todo el dominio.

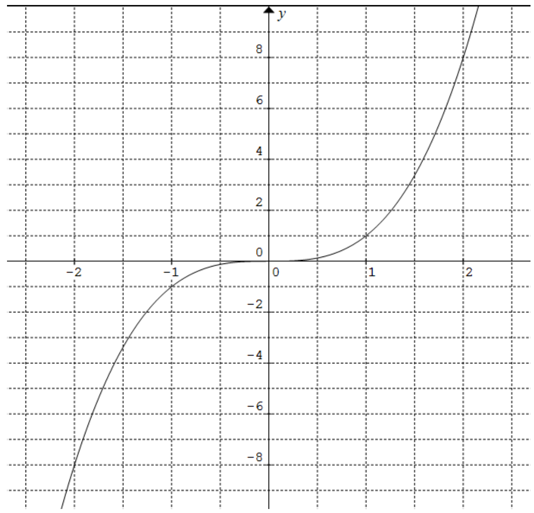


Figura 3

Fuente: Propia.

Ejemplo

Hallar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función.

$$f(x) = 5x^2 - 20x + 2$$

Se deriva la función.

$$f'(x) = 10x - 20$$

La función f será creciente cuando $f'(x) > 0$, entonces:

$$10x - 20 > 0$$

$$10x > 20$$

$$x > \frac{20}{10}$$

$$x > 2$$

La función f será decreciente cuando $f'(x) < 0$, entonces:

$$10x - 20 < 0$$

$$10x < 20$$

$$x < \frac{20}{10}$$

$$x < 2$$

Así, se puede concluir que $f(x)$ crece en $(2, \infty+)$, decrece en $(-\infty, 2)$.

Gráficamente:

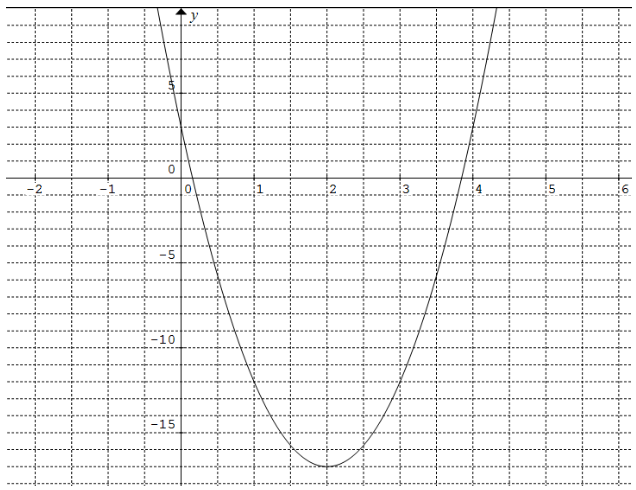


Figura 4

Fuente: Propia.

Ejemplo

Hallar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función.

$$f(x) = x^3 + \frac{9}{2}x^2 + 6x + 5$$

Hallamos la derivada.

$$f'(x) = 3x^2 + 9x + 6$$

Factorizamos la expresión.

$$f'(x) = 3(x^2 + 3x + 2)$$

$$f'(x) = 3(x + 2)(x + 1)$$

Se resuelve de la siguiente manera.

Primero hallamos los puntos críticos de la función haciendo $f'(x) = 0$

Estos puntos son:

$$(x + 2) = 0 \qquad (x + 1) = 0$$
$$x = -2 \qquad x = -1$$

Con estos puntos se construye el siguiente diagrama:

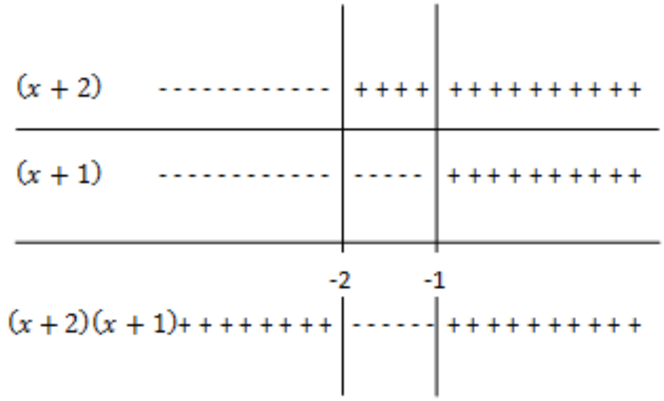


Figura 5

Fuente: Propia.

La función f será creciente cuando $f\,'(x) > 0$, entonces.

$$3(x+2)(x+1) > 0$$

Según el diagrama anterior:

- El intervalo donde la función derivada es positiva, o sea donde la función es creciente es $(-\infty, -2) \cup (-1, \infty)$.
- El intervalo donde la función derivada es negativa, o sea donde la función es decreciente es $(-2, -1)$.

La gráfica de la curva es:

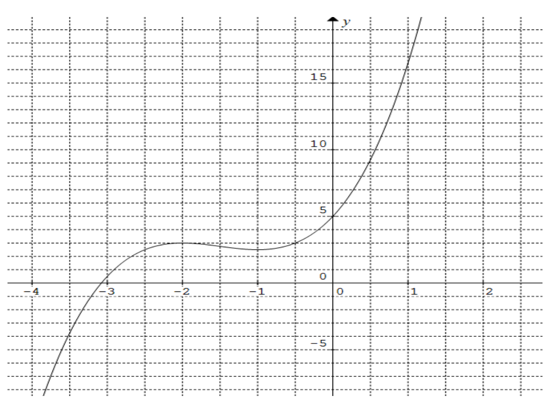


Figura 6

Fuente: Propia.

Criterio de la segunda derivada para determinar concavidad y puntos de inflexión.

Otro aspecto fundamental en la generación de la gráfica de una función es su concavidad, ya que independientemente de si es creciente o no este aspecto determina en gran parte su forma. A la curvatura de una gráfica se le denomina concavidad.

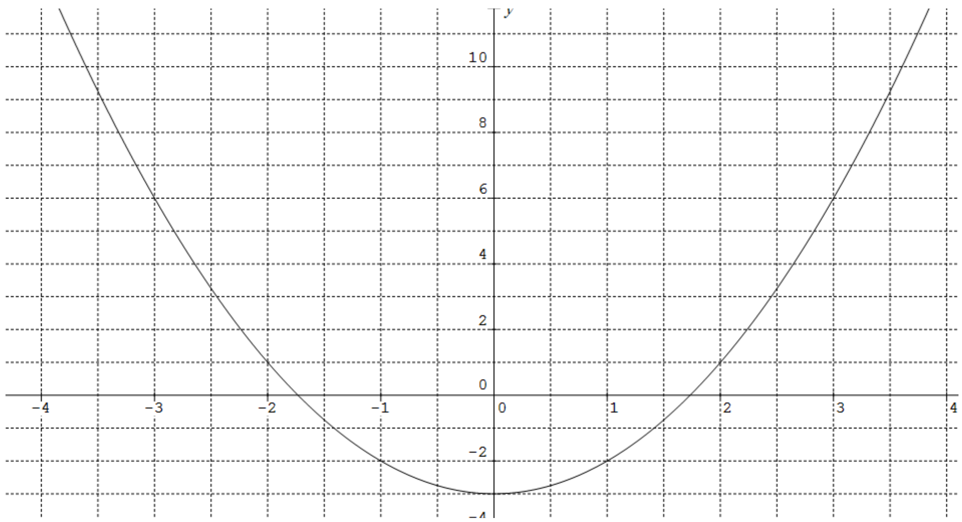


Figura 7. Cóncava hacia arriba

Fuente: Propia.

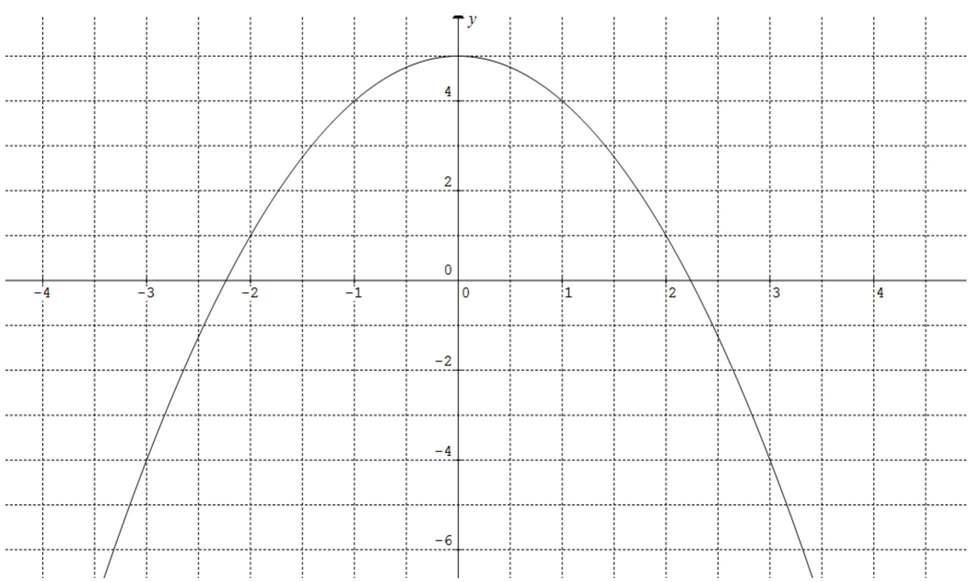


Figura 8. Cóncava hacia abajo

Fuente: Propia.

El criterio para determinar el tipo de concavidad de una gráfica de una función f, es proporcionado por la segunda derivada.

La curva es cóncava hacia arriba, si la segunda derivada de una función es positiva.

La curva es cóncava hacia abajo, si la segunda derivada de una función es negativa.

Si la segunda derivada es igual a cero no es criterio determinante.

Ejemplo

Determinar la concavidad de la gráfica de la función $f(x) = x^3$.

Calculemos la segunda derivada.

Se halla la primera derivada.

$$f´(x) = 3x^2$$

Luego la segunda derivada.

$$f´´(x) = 6x$$

$f(x)$ es cóncava hacia arriba si $f´´(x) > 0$, o sea cuando $6x > 0$, es decir cuando $x > 0$.

$f(x)$ es cóncava hacia abajo si $f´´(x) < 0$, o sea cuando $6x < 0$, es decir cuando $x < 0$.

Por tanto la concavidad se describe así:

- Cóncava hacia arriba $(0, \infty+)$.
- Cóncava hacia abajo $(-\infty, 0)$.

En el ejemplo 3 se ve claramente en la gráfica.

Ejemplo

Hallar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función.

$$f(x) = x^3 + \frac{9}{2}x^2 + 6x + 5$$

En el quinto ejemplo hallamos la primera derivada.

$$f´(x) = 3x^2 + 9x + 6$$

Hallemos ahora la segunda.

$$f''(x) = 6x + 9$$

$f(x)$ es cóncava hacia arriba si $f''(x) > 0$, o sea cuando $6x + 9 > 0$, es decir cuando $x > -\frac{3}{2}$.

$f(x)$ es cóncava hacia abajo si $f''(x) < 0$, o sea cuando $6x + 9 < 0$, es decir cuando $x < -\frac{3}{2}$.

El punto donde una función cambia la forma de la concavidad se denomina **punto de inflexión.**

La función $f(x) = senx$ tiene infinitos puntos de inflexión.

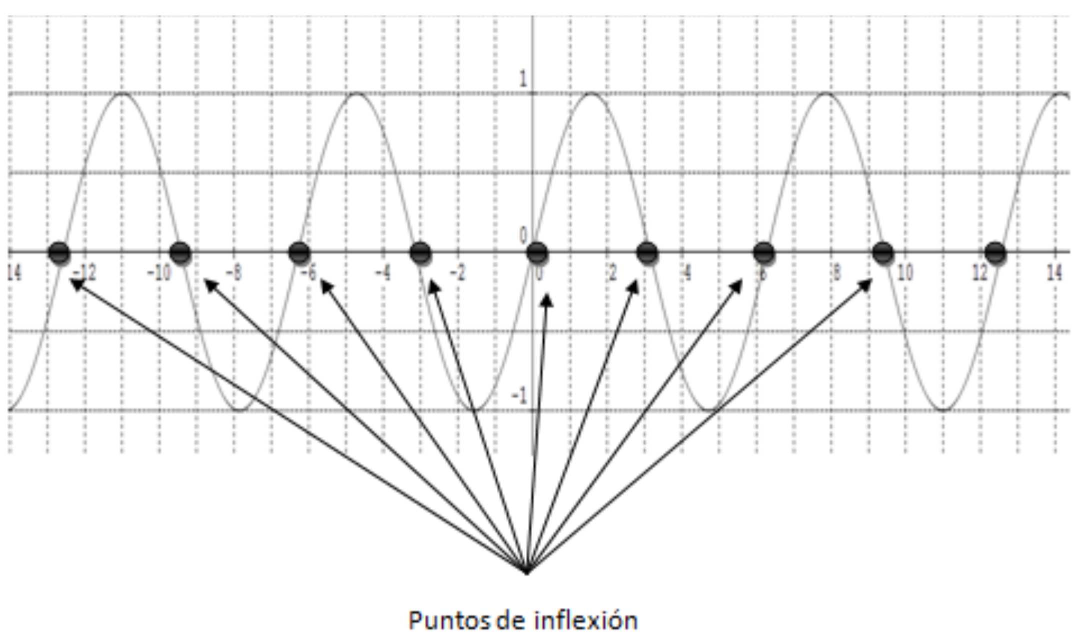


Figura 8. Puntos de inflexión

Fuente: Propia.

Ejemplo

Hallar los puntos de inflexión y los intervalos de concavidad de la función.

$$f(x) = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{2} + x^2 + 10$$

Hallemos las derivadas.

$$f'(x) = \frac{4x^3}{12} + \frac{3x^2}{2} + 2x$$

$$f''(x) = x^2 - 3x + 2$$

Hacemos $f''(x) = 0$.

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

Factorizando la expresión.

$$(x-2)(x-1) = 0$$

Los puntos de inflexión se hallan en $x = 2$ y $x = 1$

- El intervalo donde la segunda derivada es positiva, o sea donde la función es cóncava hacia arriba es $(-\infty, 1) \cup (2, \infty)$.
- El intervalo donde la segunda derivada es negativa, o sea donde la función es cóncava hacia abajo es $(1,2)$.

4

Unidad 4

Trazado de curvas y problemas de optimización

Cálculo diferencial

Autor: Alexander Moreno Quiroga

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina

MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Introducción

Se llega a la parte cumbre de las derivadas, realizando la construcción completa de las gráfica s utilizando todas las herramientas posibles que nos proporciona el cálculo diferencial, se hace un estudio riguroso de los diferentes casos que se presentan en el proceso de gráfica do de una función en un plano cartesiano, en segunda instancia se presentan los problemas de optimización, los que son base fundamental para este proceso de formación ya que se realizan algunos ejemplos relacionados con la ingeniería.

Recomendaciones metodológicas

Es fundamental que a estas alturas ya se encuentre en un buen nivel calculando derivadas, analizando diferentes criterios, aplicando diversos teoremas y utilizando su capacidad de raciocinio como herramienta para la resolución de problemas del cálculo diferencial.

Desarrollo temático

Trazado de curvas y problemas de optimización

Trazado de curvas con ayuda de principios asociados con derivadas

Sugerencias para esbozar la gráfica de una función:

- Hacer un esbozo preliminar que incluya cualquier intersección con ejes o asíntotas fáciles de determinar.
- Localizar los valores x en los que $f'(x)$ y $f''(x)$ son nulas o no están definidas.
- Estudiar el comportamiento de f en y entre cada uno de esos valores de x.
- Refinar la figura final señalando los extremos relativos, los puntos de inflexión y algunos puntos entre ellos.

Ejemplo

Sea la función $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 7$, hallar:

a. Puntos críticos.
b. Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
c. Intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo.
d. Valores máximos y mínimos.
e. Puntos de inflexión.
f. Gráfica.

Solución:

a. $f'(x) = 3x^2 - 18x + 24 = 3(x-4)(x-2)$, por lo tanto los puntos críticos son $x = 4$ y $x = 2$.
b. f es creciente en el intervalo donde $f'(x) > 0$, es decir, en $(-\infty, 2) \cup (4, \infty)$, por lo tanto f es decreciente en $(2{,}4)$.
c. $f''(x) = 6x - 18 = 6(x-3)$, luego f es cóncava hacia arriba en el intervalo $(3, \infty)$ y cóncava hacia abajo en el intervalo $(-\infty, 3)$.

d. Del inciso b se puede deducir que en $x = 2$ la función tiene un máximo local, ya que a la izquierda de 2, f es creciente y a la derecha f es decreciente, resultado que se puede confirmar con el inciso c, ya que $f''(2) = 6(2-3) = -6 < 0$, directamente de la parte c se deduce que f tiene un mínimo local en $x = 4$, pues $f''(4) = 6$.
e. De la parte c, se concluye que en $x = 3$ la función f tiene un cambio de concavidad, que cambia de cóncava hacia abajo (en el intervalo $(-\infty, 3)$ a cóncava hacia arriba en $(3, \infty)$.
f. Gráfico.

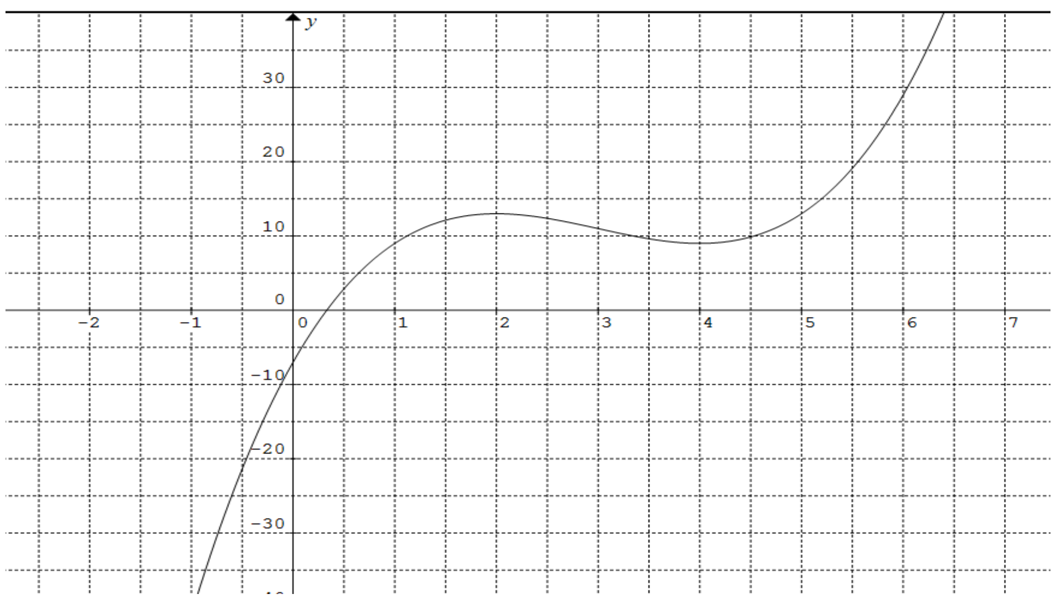


Figura 1

Fuente: Propia.

Ejemplo

Sea la función $f(x) = x^4 - 8x^2$, hallar:

a) Puntos críticos.
b) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
c) Intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo.
d) Valores máximos y mínimos.
e) Puntos de inflexión.

Solución:

a. Como la primera derivada $g'(x) = 4x^3 - 16x = 4x(x^2 - 4) = 4x(x-2)(x+2)$, entonces los puntos críticos de la función g son $x = 0, \quad x = 2, \quad x = -2$.
b. g es creciente en $(-2,0) \cup (2,\infty)$ y decreciente en $(-\infty,-2) \cup (0,2)$.
c. Como $g''(x) = 12x^2 - 16 = 12\left(x - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(x + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$, la función tiene concavidad hacia arriba en $\left(-\infty, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \infty\right)$y con concavidad hacia abajo en $\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$.
d. De la prueba de la segunda derivada se tiene:

- $g''(0) = -16 < 0$, implica que en $x = 0$ en la función existe un máximo local.
- $g''(-2) = 32 > 0$, implica que en $x = -2$, la función tiene un mínimo local.
- $g''(2) = 32 > 0$, implica que en $x = -2$, la función tiene un mínimo local.

e. Del inciso c, se concluye que en $x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$, la gráfica de g tiene un cambio de concavidad.
f. Gráfico.

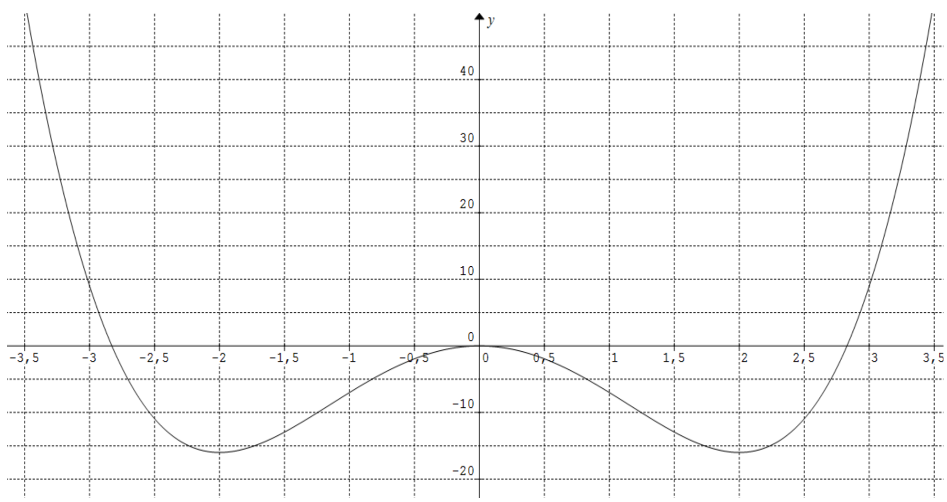


Figura 2

Fuente: Propia.

En la unidad 2, semana tres, analizamos el concepto de asíntota horizontal, recordemos esta definición:

Si $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L \quad o \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = L$, entonces la recta $y = L$ se llama una asíntota horizontal de la gráfica de f.

Ejemplo

Realizar la gráfica de:

$$f(x)=\frac{2(x^2-9)}{x^2-4}$$

Solución:

$$f'(x)=\frac{20x}{(x^2-4)^2}$$

$$f''(x)=\frac{20(3x^2+4)}{(x^2-4)^3}$$

- Intersecciones con el eje x:

$$f(x)=0$$

$$0=\frac{2(x^2-9)}{x^2-4}$$

$$0=2(x^2-9)$$

$$0=(x^2-9)$$

$$0=(x+3)(x-3)$$

Los puntos de corte con el eje x son $x=-3$ y $x=3$, es decir que la gráfica pasa por los puntos.

$(-3,0)$ y $(3,0)$

- Intersecciones con el eje y:

$$x=0$$

$$f(0)=\frac{2(0^2-9)}{0^2-4}=\frac{18}{4}=\frac{9}{2}$$

El punto de corte con el eje y es en $y=\frac{9}{2}$, es decir que la gráfica pasa por el punto.

$$\left(0,\frac{9}{2}\right)$$

- Asíntotas verticales:

$$x^2 - 4 = 0$$

$$(x + 2)(x - 2) = 0$$

Las asíntotas verticales se encuentran en $x = 2$ y $x = -2$

- Asíntota horizontal:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$$

La asíntota horizontal se encuentra ubicada en:

$$y = 2$$

- Punto crítico:

$$f´(x) = 0$$

$$\frac{20x}{(x^2 - 4)^2} = 0$$

$$x = 0$$

- Puntos de inflexión:

$$f´´(x) = 0$$

$$\frac{20(3x^2 + 4)}{(x^2 - 4)^3} = 0$$

Ningún valor para x cumple con esta condición por tanto no tiene puntos de inflexión.

Posterior a realizar este análisis resumamos los aspectos más importantes para realizar el esbozo de esta función.

	$f(x)$	$f´(x)$	$f´´(x)$	Forma de la gráfica
$-\infty < x < -2$		-	-	Decreciente y cóncava hacia abajo.
$x = -2$	No definida	No definida	No definida	Asíntota vertical.
$-2 < x < 0$		-	+	Decreciente cóncava hacia arriba.

$x = 0$	$\frac{9}{2}$	0	+	Mínimo relativo.
$0 < x < 2$		+	+	Creciente cóncava hacia arriba.
$x = 2$	No definida	No definida	No definida	Asíntota vertical.
$2 < x < \infty$		+	-	Creciente cóncava hacia abajo.

Tabla 1

Fuente: Propia.

Ahora ya es posible proceder a realizar la gráfica:

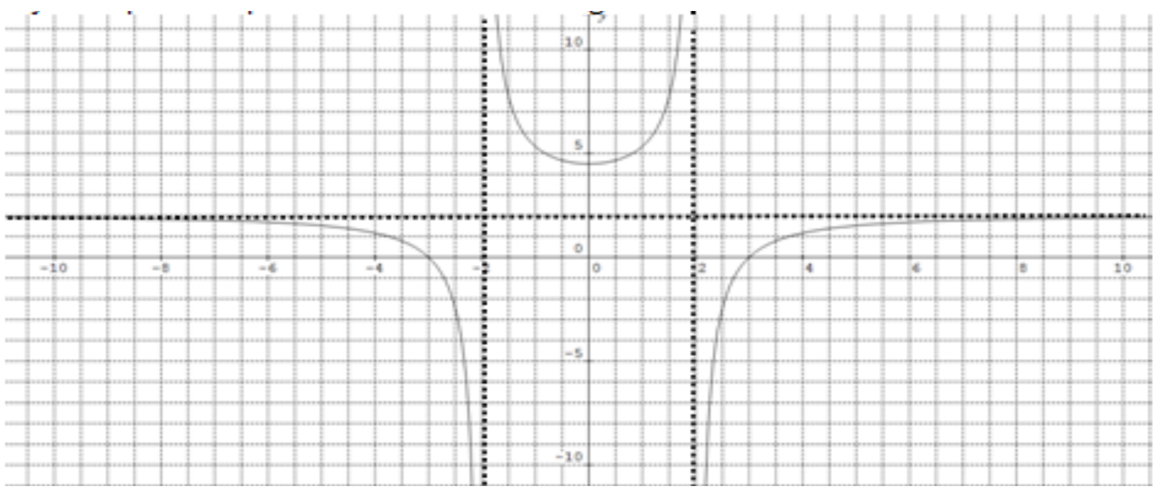


Figura 3

Fuente: Propia.

Ejemplo

Realizar la gráfica de:

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}}$$

Solución:

$$f'(x) = \frac{2}{(x^2 + 2)^{3/2}}$$

$$f''(x) = \frac{-6x}{(x^2+2)^{5/2}}$$

- Intersecciones con el eje x:

$$f(x) = 0$$

$$0 = \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$$

$$0 = x$$

El punto de corte con el eje x es $x = 0$, es decir que la gráfica pasa por el punto.

$(0,0)$

- Intersecciones con el eje y:

$$x = 0$$

$$f(0) = \frac{0}{\sqrt{0^2+2}} = 0$$

El punto de corte con el eje y es en $y = 0$, confirmando el resultado anterior.

- Asíntotas verticales:

$$\sqrt{x^2+2} = 0$$

$$x^2 = -2$$

Ningún valor de x cumple con esta condición en el campo de los reales, por esta razón no hay asíntotas verticales.

- Asíntota horizontal:

$\lim_{x\to-\infty+} f(x) = 1$, $\lim_{x\to-\infty-} f(x) = -1$

Las asíntotas horizontales se encuentran ubicadas en:

$y = -1$ Por la izquierda y $y = 1$ por la derecha.

Punto crítico:

$$f'(x) = 0$$

$$No\ hay$$

Puntos de inflexión:

$$f''(x) = 0$$

$$f''(x) = \frac{-6x}{(x^2+2)^{5/2}}$$

$$x = 0$$

Posterior a realizar este análisis resumamos los aspectos más importantes para realizar el esbozo de esta función.

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Forma de la gráfica
$-\infty < x < 0$		+	+	Creciente y cóncava hacia arriba
$x = 0$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	Punto de inflexión
$0 < x < \infty$		+	-	Creciente cóncava hacia abajo

Tabla 2

Fuente: Propia

Gráfico:

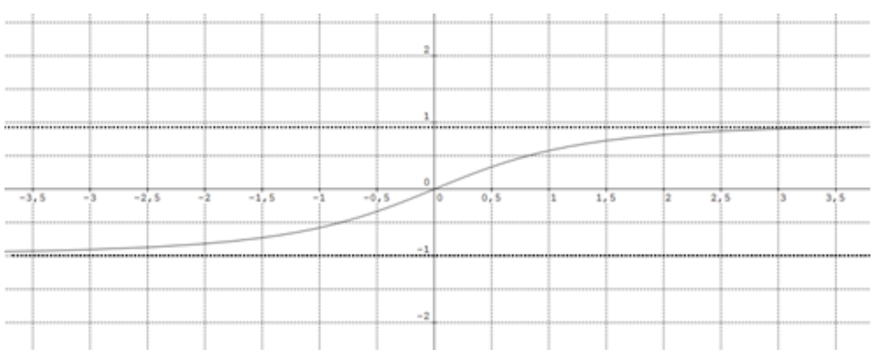


Figura 4

Fuente: Propia.

Problemas de optimización: máximos y mínimos en contexto de ingeniería

Procedimiento para resolver problemas de máximos y mínimos

- Asignar variables a las cantidades suministradas por el problema y a las cantidades que se pide calcular. En la mayoría de los casos ayuda mucho un dibujo.
- Definir una ecuación inicial para la magnitud que se desea maximizar.
- Reducir dicha ecuación a una en la que exista una sola variable independiente, en algunas ocasiones usando ecuaciones alternas donde aparezcan relacionadas las variables a trabajar.
- Tener presente el dominio de la ecuación inicial, con el fin de que el problema no pierda su sentido lógico.

Hallar los valores máximos o mínimos según lo aprendido durante el curso.

Ejemplo

Se necesita construir una caja sin tapa con base cuadrada, disponiendo de 108 metros cuadrados de cartón ¿Cuáles dimensiones se deben asignar a la caja para que tenga un volumen máximo?

Solución:

Teniendo en cuenta que la base de la caja es cuadrada entonces su volumen estará dado por la expresión.

$$V = x^2 . h$$

Podemos utilizar la fórmula del área superficial, teniendo en cuenta que no tiene tapa:

$$S = area\ de\ la\ base + area\ de\ las\ cuatro\ caras$$

$$S = x^2 + 4xh = 108$$

La función a maximizar es V, por tanto despejamos h en la ecuación del área superficial:

$$h = \frac{108 - x^2}{4x}$$

Valor que sustituimos en la ecuación del volumen.

$$V = x^2.\left(\frac{108 - x^2}{4x}\right)$$

$$V = 27x - \frac{x^3}{4}$$

Luego se procede a hallar los puntos críticos, así:

$$\frac{dV}{dx} = 27 - \frac{3x^2}{4} = 0$$

$$3x^2 = 108$$

$$x = \pm 6$$

Es necesario analizar el dominio de la función Volumen ya que no es posible admitir valores negativos porque se trata de una longitud, y tampoco valores superiores a $\sqrt{108}$ por ser de base cuadrada, así que V está restringida para $0 < x < \sqrt{108}$.

Se evalúa V en los números críticos del dominio y en los extremos del mismo, y se puede ver que:

$V(0) = 0 \quad V(6) = 108 \quad V(108) = 0$

Se concluye que V es máximo cuando $x = 6$, valor que se reemplaza en:

$$h = \frac{108 - x^2}{4x}$$

Obteniendo la otra dimensión.

$$h = \frac{108 - 6^2}{4(6)} = \frac{108 - 36}{24} = \frac{72}{24} = 3$$

Como la base es cuadrada entonces las dimensiones para que el volumen sea máximo son $6\ x\ 6\ x\ 3$.

Ejemplo

Al multiplicar dos números positivos se obtiene 288, encontrar los números tales que la suma del doble del primero más el segundo sea mínima.

Solución:

Definimos la función suma como S y sean x y y los números buscados.

$$S = 2x + y$$

La multiplicación arroja como resultado 288 entonces se tiene.

$$x.y = 288$$

Luego:

$$y = \frac{288}{x}$$

Representando la función suma en términos de una sola variable se tiene.

$$S = 2x + \frac{288}{x}$$

En el problema se establece la condición que los números deben ser positivos, entonces su dominio se restringe a $(0, \infty)$.

Se calculan los puntos críticos, igualando la derivada a cero.

$$\frac{dS}{dx} = 2 - \frac{288}{x^2} = 0$$

$$x^2 = 144$$

$$x = \pm 12$$

Tomando el valor positivo de x, se tiene en cuenta el criterio de la primera derivada para determinar que S es decreciente en $(0,12)$y creciente en $(12, \infty)$, entonces en $x = 12$hy un mínimo, por tanto los números buscados son:

$x = 12$ y $y = 24$.

Ejemplo

Existe una distancia de 30 metros entre dos postes, los cuales miden 28 y 12 metros de alto. Se busca enviar un lazo fijado en un punto del suelo, al punto más alto de cada poste ¿En qué punto debe ser asegurado el lazo para que sea mínima la cantidad a usar?

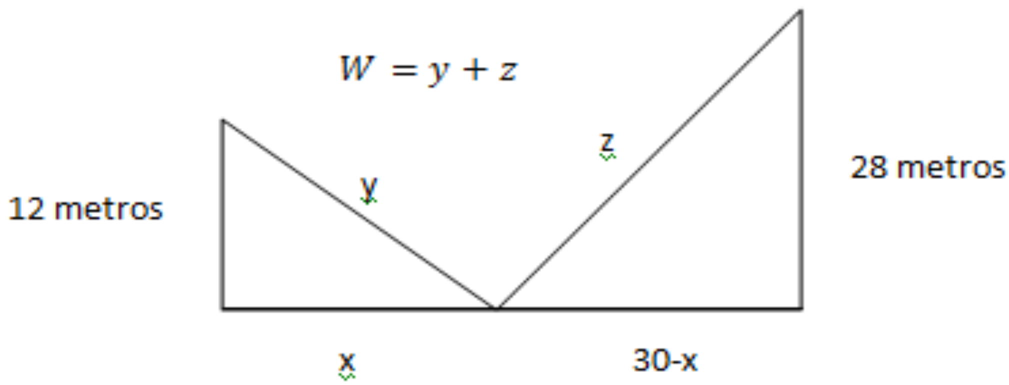


Figura 5

Fuente: Propia.

Definimos la función inicial:

$$W = y + z$$

Aplicando el teorema de Pitágoras:

Para el primer triangulo:

$$x^2 + 12^2 = y^2$$

$$y = \sqrt{x^2 + 144}$$

Para el segundo triangulo:

$$(30 - x^2)^2 + 28^2 = z^2$$

$$z = \sqrt{x^2 - 60x + 1684}$$

Entonces:

$W = \sqrt{x^2 + 144} + \sqrt{x^2 - 60x + 1684}, 0 \leq x \leq 30$

Derivando W respecto a x:

$$\frac{dW}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 144}} + \frac{x - 30}{\sqrt{x^2 - 60x + 1684}}$$

Verificando $\frac{dW}{dx} = 0$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+144}}+\frac{x-30}{\sqrt{x^2-60x+1684}}=0$$

$$x^2(x^2-60x+1684)=(30-x)^2(x^2+144)$$

Simplificado queda:

$$320(x-9)(2x+45)=0$$

Los valores para los cuales se hace cero esta igualdad son.

$x=9, \quad x=-22{,}5$

Descartamos $x=-22{,}5$ por estar fuera del dominio.

Hallamos:

$W(9)=50, \quad W(0)=53{,}04, \quad W(30)=60{,}31$

Se concluye que la cuerda debe fijarse a 9 metros del poste de 12 metros y 21 del poste de 28 metros.

Ejemplo

Una compañía de telecomunicaciones fabrica piezas para computadores, se entiende que su ganancia G se puede representarse como una función del número x de piezas producidas y vendidas durante un mes, la expresión es:

$$G(x)=3x^5-10x^3+15x$$

¿Cuál es la cantidad de piezas por producir y vender en un mes para que la ganancia sea máxima?

Se calcula la primera derivada de G.

$$G'(x)=15x^4-30x^2+15$$

Que factorizando nos da:

$$G'(x)=15(x^4-2x^2+1)$$

Se hallan los puntos críticos de la función haciendo $G'(x)=0$

$$15(x^4-2x^2+1)=0$$

$$(x^4-2x^2+1)=0$$

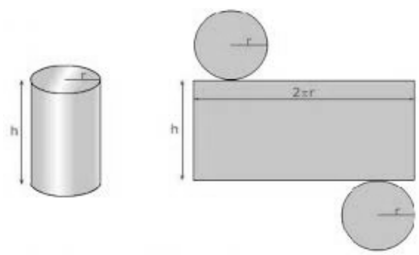
$$(x^2-1)^2=0$$

Sus soluciones son $x = -1 \quad y \quad x = 1$

A simple vista se descarta el valor -1, pero el valor 1 por simple lógica también debe ser descartado ya que no es posible que con la venta de una pieza la ganancia se maximice, si observamos la primera derivada, esta siempre va a ser positiva, lo que indica que en la vecindad de 1 no existe cambio de signo, por esto podemos afirmar que la ganancia máxima depende exclusivamente de la capacidad de la compañía para producir y vender sus piezas para computadora.

Ejemplo

Se van a fabricar tanques, en serie, para almacenar fertilizantes químicos en forma de cilindro circular recto completamente cerrado, cuya capacidad sea $16\pi\ m^3$. ¿Cuáles deben ser las dimensiones del tanque más económico?



Las dimensiones que generen un menor costo serán las que necesiten menor material para la construcción del tanque, o sea que se debe minimizar la función área superficial del tanque.

Dicha área está dada por la fórmula:

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

El volumen del tanque es $\pi r^2 h$ y es igual a 16π por tanto:

$$\pi r^2 h = 16\pi$$

$$h = \frac{16}{r^2}$$

Valor que se reemplaza en la función S.

$$S(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{16}{r^2}$$

$$S(r) = 2\pi r^2 + \frac{32\pi}{r}$$

Calculamos la primera derivada.

$$\frac{dS}{dr} = 4\pi r + \frac{32\pi}{r^2}$$

Procedemos a hallar los puntos críticos.

$$4\pi r + \frac{32\pi}{r^2} = 0$$

$$r^3 = 8$$

Luego $r = 2$ es el único punto crítico posible.

Para $r = 2$ se tiene que:

$$h = \frac{16}{2^2} = 4$$

Por esto se afirma que las dimensiones deben ser 2metros de radio por 4 metros de alto.

Forma indeterminada

Se denominan así expresiones algebraicas en las cuales intervienen límites del tipo:

Forma indeterminada	Ejemplo
$\frac{0}{0}$	$\lim_{x\to 0} \frac{sen\ x}{x}$
$\frac{\infty}{\infty}$	$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x}$
$0.\infty$	$\lim_{x\to 0^+} xlnx$
1^∞	$\lim_{x\to 0} (e^x.)^{\frac{1}{x}}$
0^0	$\lim_{x\to 0^+} x^x$

Tabla 3

Fuente: Propia.

Regla de L´hopital

Sean f y g funciones definida en un intervalo cerrado $[a, b]$, derivables en el intervalo abierto (a, b) y continuas, y sea c tal que $a < c < b$de tal suerte que:

$f(c) = g(c) = 0$ y $g´(x) \neq 0$ si $x \neq c$

Se cumple que:

Si el Limite de L de $\frac{f'}{g'}$ en c, entonces existe el limite de $\frac{f}{g}$ (en c) y equivale a L. Por esto:

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

Ejemplo

$$\lim_{x \to 0} \frac{Sen\ x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{Sen\ x}{x} \to \frac{Cos\ x}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

Ejemplo

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - sen\ x} = \frac{0}{0} \to \lim_{x \to 0} \frac{e^x - (-e^{-x}) - 2}{1 - cosx} \to \lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{sen\ x} \to \lim_{x \to 0} \frac{e^x - (-e^{-x})}{cos\ x}$$
$$\to \frac{e^0 - e^{-0}}{Cos\ 0} \to \frac{1+1}{1} = 2$$

En el anterior ejemplo se puede ver que si la función es n veces continua y derivable, la regla se puede aplicar n veces hasta eliminar la forma indeterminada.

Ejemplo

$$\lim_{x \to \infty} x - \sqrt{x^2 - x} = \infty - \infty$$

$$\lim_{x \to \infty} x - \sqrt{x^2 - x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\left(x - \sqrt{x^2 - x}\right)\left(x + \sqrt{x^2 - x}\right)}{\left(x + \sqrt{x^2 - x}\right)}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - (x^2 - x)}{\left(x + \sqrt{x^2 - x}\right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{\left(x + \sqrt{x^2 - x}\right)} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{\left(x + \sqrt{x^2 - x}\right)} \to \lim_{x \to \infty} \frac{(x)'}{\left(x + \sqrt{x^2 - x}\right)'}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}\right)} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Bibliografia

- **Apóstol, T. (1984).** Cálculo con Introducción al Álgebra Lineal. Ed. Neverte.
- **Leithold, L. (1998).** El Cálculo.

Esta obra se terminó de editar en el mes de noviembre
Tipografá Myriad Pro 12 puntos
Bogotá D.C,-Colombia.

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina

MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO