Fundamentos de matemáticas

Autor: Danilo De Jesús Ariza Agámez

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina
MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Fundamentos de matemáticas / Danilo De Jesús Ariza Agámez /
Bogotá D.C., Fundación Universitaria del Área Andina. 2017

978-958-5459-65-6

Catalogación en la fuente Fundación Universitaria del Área Andina (Bogotá).

Edición:
Fondo editorial Areandino
Fundación Universitaria del Área Andina
Calle 71 11-14, Bogotá D.C., Colombia
Tel.: (57-1) 7 42 19 64 ext. 1228
E-mail: publicaciones@areandina.edu.co
http://www.areandina.edu.co

Primera edición: noviembre de 2017

Corrección de estilo, diagramación y edición: Dirección Nacional de Operaciones virtuales
Diseño y compilación electrónica: Dirección Nacional de Investigación

Hecho en Colombia
Made in Colombia

Fundamentos de matemáticas

Autor: Danilo De Jesús Ariza Agámez

Fundación Universitaria del Área Andina

MIEMBRO DE LA RED ILUMNO

Índice

Índice

1

Unidad 1

Expresiones algebraicas en los números reales

Fundamentos de matemáticas

Autor: Danilo de Jesús Ariza

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina

MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Introducción

Desde nuestros primeros años escolares hemos tenido la oportunidad de tratar con diferentes conjuntos numéricos y las operaciones que sobre ellos se pueden realizar, sin embargo, en ocasiones no hemos sido lo suficientemente conscientes de las relaciones de inclusión que entre ellos existen, y podemos presentar la tendencia a aplicar propiedades que no corresponden.

Mediante el desarrollo de esta unidad, el afianzamiento propuesto se orienta, más que a procesos operativos, hacia el análisis de algunos principios y conceptos fundamentales, así como la aclaración de su ámbito de aplicación, ello con el fin de evitar errores frecuentes a la hora de realizar cálculos.

Recomendaciones metodológicas

Es claro que el estudiante tiene la total autonomía de desarrollar el estudio de las temáticas de esta semana acudiendo a los recursos en el orden que lo desee, sin embargo creemos que el acercamiento se debe buscar inicialmente a través de la cuidadosa lectura de esta cartilla, donde se presenta los conceptos y principios básicos, algebraicos lo que se puede complementar mediante la visualización de video capsulas y la revisión de los ejercicios resueltos que se presentan en las lecturas complementarias, teniendo siempre como referencia la cartilla misma. Luego de abordar los recursos antes señalados resulta conveniente afrontar los ejercicios de repaso a través de los cuales usted puede validar sus avances en la incorporación de los contenidos a su cúmulo de conocimientos.

Desarrollo temático

Expresiones algebraicas en los números reales

Conjuntos numéricos

Los diferentes conjuntos numéricos básicos son: conjuntos de números naturales, números enteros, números racionales, números irracionales y números reales. Algunas de las operaciones que podemos definir sobre estos conjuntos, así como los elementos correspondientes a ellas, son:

Operación	Operandos	Resultado
Adición	Sumandos	Total o suma
Sustracción o resta	Minuendo y sustraendo	Diferencia
Multiplicación	Factores	Producto
División	Dividendo y divisor	Cociente (y residuo en división entera)
Potenciación	Base (Elevada a un exponente)	Potencia
Radicación	Radicando (asociado a un índice)	Raíz

Cuadro 1
Fuente: Propia.

Conjunto de números naturales N

Intuitivamente se puede ver como el conjunto de números usado para contar objetos, es un conjunto infinito y normalmente se escribe mediante:

N = {0, 1, 2, 3, 4,…,}

Conjunto de números enteros Z

Al analizar la sustracción en el conjunto de números naturales, notamos que se presentan casos en los cuales no es posible obtener un resultado dentro del mismo conjunto, esta situación da origen a los llamados números negativos, ejemplos reales que evidencian la validez de números negativos son, por ejemplo, una temperatura de 4 grados bajo cero, la cual se representa matemáticamente mediante el número -4 (menos 4) y es totalmente diferente a una temperatura de 4 grados. Otras cantidades que se pueden representar mediante números negativos son una deuda de 1000 pesos (-1000), o la posición de un pez que se encuentra 3 metros por debajo de la superficie del agua (-3).

La "combinación" o unión del conjunto de números naturales, y todos los números negativos da lugar al conjunto de números enteros. El conjunto de números enteros es un conjunto infinito y normalmente se escribe mediante:

Z = {…,-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4,…,}

Otra situación en la cual surge la necesidad de hacer uso de números enteros es, por ejemplo, hallar el valor de X de tal forma que X + 7 = 5, la cual da como resultado X = -2.

Conjunto de números racionales Q

Al intentar hallar el valor de X de tal manera que 3X - 5 = 2, nos encontramos que la solución no la podemos encontrar ni en el conjunto de números naturales, ni en el de los números enteros, esta puede ser una situación que explica la necesidad de utilizar otro conjunto numérico más amplio, en este caso nos referimos al conjunto de números racionales, denominados así por corresponder a la razón (o división) de dos números enteros. La solución al problema antes planteado se puede escribir, por ejemplo, como X = 7/3, o X = 14/6 o cualquier otra forma equivalente. Notamos que 7/3 es la simplificación de 14/6, y 7/3 es irreducible (no puede simplificarse).

El conjunto de números racionales suele representarse mediante:

$$Q = \{a/b: a\ y\ b\ son\ n\acute{u}meros\ enteros\ y\ b \neq 0\}$$

Importante: el divisor b no puede ser cero ¿por qué?

Para dar respuesta al anterior interrogante debemos tener en cuenta cual es el razonamiento que realmente realizamos, consideremos los siguientes casos:

Si queremos, por ejemplo, realizar la división 240/8, tenemos:

$$\frac{240}{8} = x, es\ decir\ 240 = (8)(x), es\ claro\ que\ x = 30$$

Si en cambio intentamos realizar 240/0 tenemos:

$$\frac{240}{0} = x, es\ decir\ 240 = (0)(x), es\ claro\ que\ no\ podemos\ hallar\ tal\ n\acute{u}mero\ \ x$$

Por tanto no tiene sentido intentar realizar una división por cero. La división por cero no existe o no está definida.

Conjunto de números irracionales I

Al intentar hallar el valor de X que satisfaga $X^2 - 2 = 0$, obtenemos $X = \sqrt{2}$, nos encontramos con la imposibilidad de hallar la solución en los conjuntos de números naturales, enteros y racionales, es decir, el resultado ni se puede expresar como una razón, por tanto a este tipo de números se les llama números irracionales. Otros números irracionales son por ejemplo $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}$ y el muy importante número π.

Conjunto de números reales R

El conjunto de números reales corresponde a la unión de los conjuntos de números racionales e irracionales.

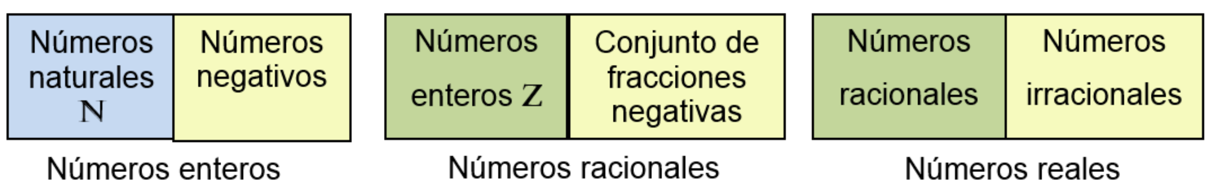


Figura 1
Fuente: Propia.

Axiomas de los números reales

Axiomas de cuerpo

Son el soporte de diferentes principios aritméticos y algebraicos sobre los números reales, tales como regla de signos, reglas de signos de agrupación. Se asume que si $a \ y \ b$ son dos números reales, entonces el resultado de la suma y el producto también es un número real, esto es lo que se conoce como propiedad de clausura o cerradura. El conjunto de axiomas de cuerpo, así como el nombre que corresponde a cada axioma se muestra a continuación:

a1.)	$a + b = b + a,$	Conmutativa
a2.)	$a \cdot b = b \cdot a,$	Conmutativa
a3.)	$a + (b + c) = (a + b) + c$	Asociativa
a4.)	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c,$	Asociativa
a5.)	$a + 0 = 0 + a = a, \ \forall 0 \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0,$	Identidad aditiva
a6.)	$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a, \ 1 \in \mathbb{R},$	Identidad multiplicativa
a7.)	$a + (-a) = (-a) + a = 0,$	Inverso aditivo
a8.)	$aa^{-1} = a^{-1}a = 1, \ a \neq 0, \ \left(a\frac{1}{a}\right),$	Inverso multiplicativo
a9.)	$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c),$	Distributiva

Axiomas de orden

Es un conjunto de axiomas que se refieren a las ideas de ordenación entre números reales en el sentido de que un número real es mayor, menor o igual que otro. Continuando con la numeración anterior para el conjunto de axiomas, mostramos a continuación los relacionados al orden entre números reales:

a10. $a \in \mathbb{R}^+ \vee a = 0 \vee a \in \mathbb{R}^-$

a11.
$$\begin{cases} (a+b) \in \mathbb{R}^+, & \forall a, b \in \mathbb{R}^+ \\ (a-b) \in \mathbb{R}^+, & \forall a, b \in \mathbb{R}^+ \quad \wedge \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^- \end{cases}$$

a12. $\forall a \in \mathbb{R}$: es positivo o negativo, pero no ambos.

a13. El número cero (0) no es positivo ni negativo.

a14. A partir de los axiomas anteriores podemos definir los símbolos: $<, >, \leq$ y $\geq$ de la siguiente manera:

- **i)** $a < b$, significa que $b - a$ es positivo
- **ii)** $a \leq b \Leftrightarrow a < b \vee a = b$
- **iii)** $a \geq b \Leftrightarrow a > b \vee a = b$
- **iv)** $a \geq b \Leftrightarrow a + c \geq b + c,\ c \in \mathbb{R}^+$
- **v)** $a > b \Rightarrow a \cdot c \geq b \cdot c,\ c \in \mathbb{R}^+$
- **vi)** $a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$
- **vii)** $a > 0 \Rightarrow a$ es positivo
- **viii)** $a < 0 \Rightarrow a$ es negativo
- **ix)** $a \geq 0 \Rightarrow a$ no es negativo
- **x)** $a < b \wedge a > b \wedge a = b$ (Tricotomía)

Jerarquía de las operaciones

Si en una expresión encontramos una operación como $4 + 2 * 5$, la falta de claro conocimiento nos llevaría a dudar si el resultado es 30 o 14, pero en matemática existe un convenio según el cual primero se realiza la operación de multiplicación y luego la de adición, este convenio se conoce como jerarquía de operaciones, y simplemente establece el orden en el cual deben realizarse las operaciones presentes en una expresión. La jerarquía de las operaciones, de mayor a menor es la siguiente:

Potenciación y radicación
Multiplicación y división
Adición y sustracción

El siguiente ejemplo ilustra la aplicación de este principio:

$$7 + 12 * 3 \div 4 = 7 + \frac{12 * 3}{4} = 7 + \frac{36}{4} = 7 + 9 = 16$$

Signos de agrupación

Son, por ejemplo, los signos (), {}, [], utilizados con fines de organización y para modificar la jerarquía de la operaciones, es decir, son importar la jerarquía, se desarrolla primero las operaciones que se encuentran dentro de los signos de agrupación. El siguiente ejemplo ilustra la secuencia de pasos para llegar al resultado en una expresión con varios agrupamientos.

$$15 + \{-2 - [3 + (8 - 10) - 4]\} + 9 - \{17 - [4 - (5 + 4)] - 9\}$$

$$= 15 + \{-2 - [3 + (-2) - 4]\} + 9 - \{17 - [4 - (9)] - 9\}$$

$$= 15 + \{-2 - [3 - 2 - 4]\} + 9 - \{17 - [4 - 9] - 9\}$$

$$= 15 + \{-2 - [-3]\} + 9 - \{17 - [-5] - 9\}$$

$$= 15 + \{-2 + 3\} + 9 - \{17 + 5 - 9\}$$

$$= 15 + \{1\} + 9 - \{13\}$$

$$= 15 + 1 + 9 - 13$$

$$= 12$$

Principios relativos a los exponentes

Exponentes enteros

Si x es un número real y n, es un entero, x^n representa la n-sima potencia de x y corresponde al producto de la multiplicación que toma a x como factor n veces, por ejemplo para el caso en que $x = \frac{2}{3}$ y $n = 5$, tenemos:

$$x^n = \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{32}{243}\right)$$

Exponentes fraccionarios

Si $x$es un número real y n, es un entero, positivo se tiene que:

$$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$$

Con lo anterior vemos la estrecha relación existente entre exponentes y radicales, a continuación presentamos un resumen de propiedades con ellos relacionados acompañadas de un ejemplo ilustrativo.

Propiedad	Ejemplo
1) $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$	$2^4 \cdot 2^5 = 2^{4+5} = 2^9$ $x^2 \cdot x^3 = x^5$
2) $x^0 = 1$, si $x \neq 0$	$3^0 = 1$
3) $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$	$2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8}$
4) $\dfrac{1}{x^{-n}} = x^n$	$\dfrac{1}{3^{-2}} = 3^2 = 9$
5) $\dfrac{x^m}{x^n} = x^{m-n} = \dfrac{1}{x^{n-m}}$	$\dfrac{2^8}{2^5} = 2^{8-5} = 2^3 = 8$
6) $\dfrac{x^m}{x^m} = x^{m-m} = \dfrac{1}{x^{m-m}}$	$\dfrac{7^4}{7^4} = 7^{4-4} = 7^0 = 1$
7) $(x^m)^n = x^{m \cdot n}$	$(2^3)^5 = 2^{3 \cdot 5} = 2^{15}$
8) $(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$	$(3 \cdot 4)^5 = 3^5 \cdot 4^5$
9) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^n = \dfrac{x^n}{y^n}$	$\left(\dfrac{3}{2}\right)^4 = \dfrac{3^4}{2^4} = \dfrac{81}{16}$
10) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^{-n} = \left(\dfrac{y}{x}\right)^n$	$\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-4} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^4 = \dfrac{2^4}{3^4} = \dfrac{16}{81}$
11)$x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$	$2^{1/3} = \sqrt[3]{2}$
12) $x^{-1/n} = \dfrac{1}{x^{1/n}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{x}}$	$3^{-1/5} = \dfrac{1}{3^{1/5}} = \dfrac{1}{\sqrt[5]{3}}$
13) $\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x \cdot y}$	$\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{8 \cdot 5} = \sqrt[3]{40}$
14) $\dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\dfrac{x}{y}}$	$\dfrac{\sqrt[5]{20}}{\sqrt[5]{10}} = \sqrt[5]{\dfrac{20}{10}} = \sqrt[5]{2}$
15) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[m \cdot n]{x}$	$\sqrt[3]{\sqrt[4]{5}} = \sqrt[3 \cdot 4]{5} = \sqrt[12]{5}$
16)$x^{m/n} = \sqrt[n]{m} = (\sqrt[n]{x})^m$	$5^{2/3} = (\sqrt[3]{5})^2 = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$
17) $(\sqrt[m]{x})^m = \sqrt[m]{x^m} = x$	$(\sqrt[5]{9})^5 = \sqrt[5]{9^5} = 9$

Cuadro 2
Fuente: Propia.

Expresiones algebraicas

Al iniciar nuestros estudios de matemáticas, lo hacemos a partir de la aritmética, entendida esta como la rama del conocimiento matemático que aborda su estudio tomando como insumo cantidades conocidas, un mayor avance en nuestros estudios en el campo matemático, nos ha de llevar a trabajar con elementos de álgebra y aritmética sin que debamos detenernos en establecer diferenciaciones entre ellas, es así como aplicamos los principios de la aritmética al estudio de situaciones que involucran cantidades más generales en lugar de cantidades fijas, lo que en sí corresponde al estudio del álgebra elemental. Al tratarse de cantidades genéricas, que pueden tomar cualquier valor dentro de un conjunto de valores permitidos, se les suele llamar cantidades variables y son representadas mediante letras.

A partir de este punto en esta semana nos enfocamos en la extensión de los principios aritméticos a un breve estudio de operaciones que involucran expresiones algebraicas. Antes de entrar en el estudio formal de conceptos en relación con las expresiones algebraicas, conviene considerar una situación que nos puede ayudar a comprender la necesidad de su utilización. La situación es la siguiente:

Un estudiante tiene la tarea de encerrar un terreno a las orillas de un rio utilizando para ello 400 metros de cerca, lo debe hacer de tal manera que se busca que la superficie encerrada se un rectángulo ¿Cuál es la expresión que da las diferentes posibilidades para las dimensiones del rectángulo y cuál es la expresión correspondiente al área de la superficie?

La situación se ilustra en el siguiente esquema:

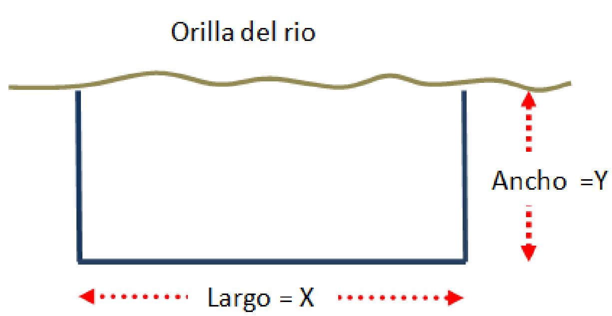


Figura 2
Fuente: Propia.

Mediante la letra L representamos la cantidad total de metros de cerca, lo cual corresponde a 400 metros, esta cantidad, en términos de las longitudes X, Y , está dada por:

$$X + 2Y = 400$$

El área de la superficie encerrada corresponde a $A = XY$.

El anterior es un ejemplo muy sencillo que pone de manifiesto la necesidad de utilizar expresiones algebraicas para estudiar situaciones de la vida real, de la misma forma, en diferentes áreas de la dinámica social, económica y diferentes áreas de la ciencia y la ingeniería, se requiere la utilización de expresiones algebraicas, desde las muy simples hasta otras altamente complejas.

Expresión algebraica

Una expresión algebraica es toda expresión que combina cantidades fijas y variables mediante diferentes operaciones. Algunos ejemplos de expresiones algebraicas son los siguientes:

$$4xy^3 \; ; \qquad \frac{3}{4}z^2y^5; \qquad \frac{5z}{2-3y^2} - \frac{5}{2z+1} \; ; \qquad 5xy^2 + 7x^3 - 6$$

Términos en una expresión algebraica

Corresponden a las partes de la expresión algebraica relacionadas mediante operaciones de suma o resta, es decir, separadas por los signos “+” y “—”. El ejemplo d) antes señalado corresponde a una expresión algebraica con tres términos.

Componentes de un término

Un monomio consta de diferentes elementos como coeficiente, parte literal y exponentes de las partes literales, tal como se ilustra con el ejemplo dado a en el esquema adjunto.

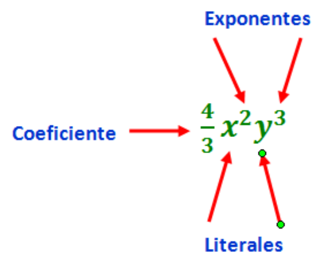


Figura 3
Fuente: Propia.

Término independiente

Es un componente que no tiene parte literal, por ejemplo, en la expresión $5xy^2 + 7x^3 - 6$ hay un término independiente que es el 6. Se dice término independiente por que su valor numérico no se altera con el cambio de valores de la parte literal.

Clasificación de las expresiones algebraicas según su número de términos

Considerando el número de términos de una expresión algebraica. La siguiente tabla resume la correspondiente clasificación, indicando casos particulares y ejemplos.

Clasificación	Definición	Ejemplo
Monomio	Expresión algebraica de un solo término.	$\mathbf{32x^3}$
Polinomio	Expresión algebraica de varios términos (caso general).	$\mathbf{\frac{5}{4}x^4 + 2x^3 - x^2 + 5x + 8}$
Binomio	Expresión algebraica de dos términos.	$\mathbf{x^2 - 16}$
Trinomio	Expresión algebraica de 3 términos.	$\mathbf{x^2 + 5x + 8}$

Cuadro 3
Fuente: Propia.

Operaciones entre expresiones algebraicas

Un elemento importante en la comprensión de las operaciones entre expresiones algebraicas tiene que ver con la idea de términos semejantes. Dos términos son semejantes si coinciden en su parte literal y exponentes, puede darse diferencia en sus coeficientes, veamos algunos ejemplos relacionados con esta idea:

$5x^2y^3\ ;\ -\frac{2}{3}x^2y^3\ son\ semejantes\ porque\ las\ variables\ coinciden\ en\ sus\ exponentes$

$2x^3y^2\ ;\ 4x^2y^3\ no\ son\ smejantes\ porque\ las\ variables\ tienen\ exponentes\ diferentes$

$3x^3\ ;\ 4x^3y^3\ no\ son\ términos\ semejantes$ ¿$por\ qué$?

La importancia del concepto de términos semejantes radica en su utilidad al simplificar resultados de operaciones entre expresiones algebraicas. Una idea en relación con ello, que nos puede ayudar a una mejor comprensión, es considerar los términos x, x^2 y x^3 como representaciones de las dimensiones espaciales, representadas a continuación.

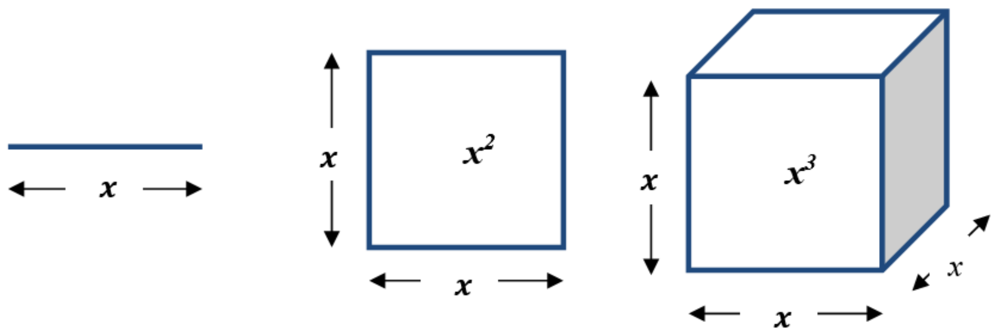


Figura 4
Fuente: Propia.

El término x se asocia con una medida de longitud, por ejemplo, 1 metro de cable eléctrico. El término x^2 se puede asociar a una medida de superficie, por ejemplo, 1 metro cuadrado de baldosas o de tela. Y el término x^3 se asocia a una medida de volumen como 1 metro cúbico de agua.

Es claro que podemos sumar o restar cantidades de la misma naturaleza espacial para obtener como resuldtado una sóla cantidad, ejemplos de ello son:

Si decimos que compramos 50 metros de cable y luego 30 metros más, podemos decir que en total hemos comprado 80 metros de cable (50 mstros más 30 metros).

La compra de 40 metros cuadrados de baldosas inicialmente y la compra de 25 metros cuadrados despues, da como resultado una sóla cantidad de 65 metros cuadradoos de baldosas.

Si en cambio decimos que compramos 50 metros de cable y 40 metros cuadrados de baldosas, no es posible expresar esta suma en una sóla cantidad.

Lo anterior nos ayuda a comprender el siguiente principio:

Reducción de términos semejantes

la necesidad de reducción de dos o más términos semejantes se presenta en resultados parciales de operaciones entre expresiones algebraicas, esta reducción corresponde a la suma o resta de sus coeficientes, asociada a la misma parte literal con sus respectivos exponentes, a manera de ejemplos tenemos:

$$4x^2 + 3x^2 = 7x^2$$

$$-3x^2y^3 + 5x^2y^3 = 2x^2y^3$$

$$\frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^2 = \frac{7}{4}x^2$$

Suma y resta de dos polinomios

Correponde al polinomio que resulta de la reducción de terminos semejantes de los dos polinomiios que se están operando, a continuación se ilustra con ejemplos:

Ejemplo 1: dados los polinomios $4x^3 + 5x^2 - 3x + 1 \quad y \quad -2x^4 + 8x^3 - 6x^2 + 3$. Hallar la suma y la resta de los dos polinomios.

Solución:

La suma de los polinomiios se expresa mediante:

$(4x^3 + 5x^2 - 3x + 1) + (-2x^4 + 8x^3 - 6x^2 + 3) \qquad (planteamiento\ de\ la\ operación)$

$= 4x^3 + 5x^2 - 3x + 1 - 2x^4 + 8x^3 - 6x^2 + 3 \qquad (expresión\ a\ reducir)$

$= -2x^4 + (4x^3 + 8x^3) + (5x^2 - 6x^2) - 3x + (1 + 3) \quad (agrupación\ de\ terminos\ a\ reducir)$

$= -2x^4 + 12x^3 - x^2 - 3x + 4$

El procedimiento correspondiente a la resta es el siguiente:

$(4x^3 + 5x^2 - 3x + 1) - (-2x^4 + 8x^3 - 6x^2 + 3) \qquad (planteamiento\ de\ la\ operación$

$4x^3 + 5x^2 - 3x + 1 + 2x^4 - 8x^3 + 6x^2 - 3 \qquad (expresión\ a\ reducir)$

$= 2x^4 + (4x^3 - 8x^3) + (5x^2 + 6x^2) - 3x + (1 - 3) \quad (agrupación\ de\ terminos)$

$= 2x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 3x - 2.$

Multiplicación de expresiones algebraicas

La multiplicación de dos monomios constituye el elemento primordial de la multiplicación de expresiones algebraicas en general, como acercamiento a ello consideremos la siguoente situación:

Si se pide calcular el área de una habitación cuyas medidas son 4 metros de largo y 3 metros de ancho, podemos tratar la situación de la siguiente forma:

$$Área\ = (4\ metros) * (3\ metros) = (4m) * (3m)\ =\ 12m^2\ =\ 12\ mts\ cuadrados.$$

Si se nos pide calcular el el volumen de agua que puede contener una piscina de 2 metros de profindidad y con un fondo horizontal de 120 metros cuadrados, podriamos realizar lo siguiente:

$$Volumen\ =\ (área\ de\ superficie) * (profundidad)\ =\ (120m^2) * (2m)\ =\ 240m^3$$

Los dos casos anteriores, vistos como expresiones algebraicas, nos facilitan comprender el principio básico de la multiplicación de polinomios.

Multiplicación de monomios

la multiplicación de dos monomios da como resultado otro monomio cuyo coeficiente es el producro de los monomios originales y las partes literales quedan elevadas a la suma de los respectivos exponentes.

Ejemplo:

a) $(3x^2) * (5x^4)$ = $15x^6$

b) $\left(\frac{2}{5}x^5y^2\right) * \left(-\frac{4}{3}x^2y^3\right) = -\frac{8}{15}x^7y^5$

c) $\left(\frac{2}{3}xy^2\right) * (7x) = \frac{14}{3}x^2y^2$

Multiplicación de un monomio por un polinomio

Aplicando la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición encontramos que el producto de un monomio por un polinomio, es el polinomio obtenido al multiplicar el monomio por cada uno de los terminos del polinomio.

Ejemplo

$$(3x^2) * (2x^2 + 5xy - 3y^2) = 6x^4 + 15x^3y - 9x^2y^2$$

Multiplicación de dos polinomios

Extendiendo las odeas anteriores, encontramos que el producto de dos polinomios es otro polinomio que resulta al multiplicar cada término del promer factor por todos los terminos del segundo y realizando las posibles reducciones de términos independiente.

Ejemplo: Hallar el producto de los polinomios $P = (3x^2 + 5x - 2)\ y\ \ Q = (2x^2 + 5xy - 3y^2)$.

La solución detallada de esta operación se presenta a continuación:

$P * Q = (3x^2) * (2x^2 + 5xy - 3y^2) + (5x) * (2x^2 + 5xy - 3y^2) - 2 * (2x^2 + 5xy - 3y^2)$

$6x^4 + 15x^3y - 9x^2y^2 + 10x^3 + 25x^2y - 15xy^2 - 4x^2 - 10xy + 6y^2$

Ejemplo: Hallar el producto de los polinomios $P = (3x^4 - 5x^3 + 2x)\ y\ Q = (2x^3 + 4x^2 + 3)$.

Solución:

$P * Q = (3x^4) * (2x^3 + 4x^2 + 3) - (5x^3) * (2x^3 + 4x^2 + 3) + (2x) * (2x^3 + 4x^2 + 3)$

$P * Q = 6x^7 + 12x^6 + 9x^4 - 10x^6 - 20x^5 - 15x^3 + 4x^4 + 8x^3 + 6x$

$P * Q = 6x^7 + (12x^6 - 10x^6) - 20x^5 + (9x^4 + 4x^4) + (-15x^3 + 8x^3) + 6x$

$P * Q = 6x^7 + 2x^6 - 20x^5 + 13x^4 - 7x^3 + 6x$

Productos notables

Algunas multiplicaciones de expresiones algebraicas tienen forma especial de tal manera que se puede hallar su resultado de forma inmediata, algunos de estos son:

Cuadrado de un binomio:

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$. A esta expresión se le conoce como Trinomio cuadrado perfecto.

Producto de la suma o diferencia de dos cantidades:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Producto de la forma $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

La verificación de la validez de estas expresiones se deja como ejercicio para el estudiante.

División

Es claro que la división se entiende como la operación inversa de la multiplicación. Para el caso de la división de monomios se aplica el siguiente principio general apoyado en las propiedades relacionadas con los exponentes.

División de monomios

La división de dos monomios es otro monomio que resulta al dividir sus coeficientes y restar los exponentes de las variables. Ejemplos de ello son los siguientes:

$$\frac{4x^5}{5x^2} = \frac{4}{5}x^3$$

$$-7x^4 \div 2x = -\frac{7}{2}x^3$$

$$\frac{x^4y^5}{3x^2\,y^2} = \frac{1}{3}x^2y^3$$

División de un polinomio por un monomio

Las ideas previas sobre las diferentes operaciones realizadas nos permiten comprender que la división de un polinomio por un monomio resulta de dividir cada término del polinomio por el monomio. Veamos un ejemplo.

$$\frac{5x^2y^3 + 3x^3y^2 - 4x^2y^2}{2xy^2} = \frac{5x^2y^3}{2xy^2} + \frac{3x^3y^2}{2xy^2} - \frac{4x^2y^2}{2xy^2} = \frac{5}{2}xy + \frac{3}{2}x^2 - 2x$$

División de polinomios en una variable

La división de un polinomio por otro no siempre se obtiene otro polinomio, esta operación obedece el siguiente principio conocido como algoritmo de la división.

Algoritmo de la división aplicado a polinomios: dados dos polinomios $A(x)\ y\ B(x)\ con\ B(x)\ \neq 0$, existen únicos polinomios $Q(x)\ y\ R(x)$ tales que:

$$A(x) = B(x) * Q(x) + R(x)$$

El polinomio $A(x)$ es el dividendo, $B(x)$, el divisor, $Q(x)$ es el cociente y $R(x)$, el residuo.

Los correspondientes resultados se obtienen mediante la siguiente secuencia de procedimientos:

- Ordenar, en forma descendente, los polinomios $A\ y\ B$ en caso que no estén ordenados.

- Dividir el primer término del dividendo por el primer término del divisor, resultando con ello el primer término del cociente.

- Multiplicar el resultado obtenido anteriormente por los términos del divisor y el resultado se resta del dividendo, obteniendo así un residuo parcial.

- Si el residuo obtenido en paso anterior es cero o de grado menor que el divisor, finaliza la operación, de lo contrario se repiten los pasos anteriores tomando como dividendo el último residuo parcial.

La secuencia de procedimientos descrita se comprende mejor a la luz de los siguientes ejemplos:

Ejemplo: Hallar cociente y residuo de las siguientes divisiones:

a) Dividir el polinomio $A(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 2$ por $B(x) = x - 1$.
b) Dividir el polinomio $A(x) = x^3 - 5x^2 + 2$ por $B(x) = x + 1$.

Solución: la aplicación del algoritmo se ilustra a continuación, en cada caso se indica el cociente y el residuo. Se hace notar que el divisor en la situación b) es un polinomio completo puesto que contiene todos los términos, desde el mayor exponente, que en este caso es 3, hasta el término independiente; en el caso b) el polinomio no está completo, ya que no contiene el término en x a la uno, razón por la cual se escribe este término pero con coeficiente cero.

a.

$$
\begin{array}{rl}
x^3+2x^2-4x+2 & \big|\,\underline{x-1\quad\quad} \\
\underline{-x^3+x^2\quad\quad\quad} & x^2+3x-1 \longleftarrow \textbf{Cociente} \\
3x^2\quad\quad\quad & \\
\underline{-3x^2+3x}\quad\quad & \\
-x\quad\quad & \\
\underline{+x-1} & \\
1 \longleftarrow \textbf{Residuo} &
\end{array}
$$

b.

$$
\begin{array}{rl}
x^3-5x^2+0x+2 & \big|\,\underline{x+1\quad\quad} \\
\underline{-x^3-x^2\quad\quad\quad} & x^2-6x+6 \longleftarrow \textbf{Cociente} \\
-6x^2\quad\quad\quad & \\
\underline{+6x^2+6x}\quad\quad & \\
6x\quad\quad & \\
\underline{-6x-6} & \\
-4 \longleftarrow \textbf{Residuo} &
\end{array}
$$

Racionalización

Una idea asociada a la irracionalidad de una expresión es la existencia de raíces que no reducibles, además de ello, por ejemplo, es costumbre expresar resultados de operaciones de tal manera que no existan expresiones radicales en los denominadores de una fracción, esto corresponde a la racionalización de denominadores y lo ilustramos con los siguientes ejemplos:

Ejemplos: racionalizar el denominador de las siguientes expresiones.

a) $\frac{2}{\sqrt{x}}$
b) $\frac{5}{2+\sqrt{x}}$
c) $\frac{3+\sqrt{x}}{3-\sqrt{x}}$
d) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{x}}{\sqrt{5}-\sqrt{x}}$

Solución:

a) Dado que al multiplicar el numerador y el denominador de una fracción por una misma cantidad diferente de cero, no se altera el valor de la fracción, podemos elegir a nuestra conveniencia la cantidad por la cual multiplicar, en este caso al multiplicar por $\sqrt{x}$ tenemos:

$\frac{2}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x}}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x^2}} = \frac{2\sqrt{x}}{x}$ expresión en la cual no tenemos cantidades irracionales en el denominador.

b) Para proceder a la racionalización del denominador de $\frac{5}{2+\sqrt{x}}$ es útil indicar que el conjugado de una expresión $a+b$ es la expresión $a-\ b$, igualmente, el conjugado de $a-b$ es $a+b$. Conviene también recordar que el producto de la suma por la diferencia de dos cantidades da como resultado la diferencia de sus cuadrados, con lo cual si el denominador de una fracción es un binomio que contiene raíces cuadrada, la multiplicación del binomio por su conjugado da lugar a expresiones racionales. En este caso tenemos:

$$\frac{5}{2\ +\ \sqrt{x}}=\frac{5}{2\ +\ \sqrt{x}}\cdot\frac{2-\ \sqrt{x}}{2-\ \sqrt{x}}=\frac{10-\ 5\sqrt{x}}{2^2-\ (\sqrt{x})^2}=\frac{10-\ 5\sqrt{x}}{4-\ x}$$

c) $\frac{3+\sqrt{x}}{3-\ \sqrt{x}}=\frac{(3+\sqrt{x})}{(3-\sqrt{x})}\,\frac{(3+\sqrt{x})}{(3+\sqrt{x})}=\frac{(3+\sqrt{x})^2}{(3-\ \sqrt{x})(3+\sqrt{x})}=\frac{3^2+6\sqrt{x}+(\sqrt{x})^2}{9-(\sqrt{x})^2}=\frac{9+6\sqrt{x}+x}{9-x}$

d) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{x}}{\sqrt{5}-\ \sqrt{x}}=\ \frac{(\sqrt{5}+\sqrt{x})}{(\sqrt{5}-\ \sqrt{x})}\,\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{x})}{(\sqrt{5}+\ \sqrt{x})}=\frac{5+2\sqrt{5x}+x}{5-x}$

Unidad 1

Factorización de expresiones algebraicas y solución de ecuaciones

Fundamentos de matemáticas

Autor: Danilo de Jesús Ariza

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina
MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Introducción

Continuando con procedimientos aplicables a expresiones algebraicas, es muy frecuente encontrarse con situaciones particulares de estudio, modelable dentro del ámbito matemático, que requieren la descomposición de una expresión en los factores que la forman. El desarrollo de esta unidad se enfoca en la aplicación de diferentes principios, relacionados con las operaciones algebraicas, de tal manera que podamos escribir una expresión algebraica como el producto indicado de sus factores.

Recomendaciones metodológicas

El estudiante tiene la libertad de desarrollar el estudio de las temáticas de esta semana en el orden que considere conveniente, sin embargo creemos que el acercamiento a los temas de factorización y ecuaciones ofrecidos en este curso, se debe buscar inicialmente a través de la lectura de esta cartilla, donde se presenta los conceptos y principios básicos, lo que se puede complementar mediante la visualización de video capsulas y la revisión de los ejercicios resueltos que se presentan en las lecturas complementarias, teniendo siempre como referencia la cartilla misma. Luego de abordar los recursos antes señalados resulta conveniente afrontar los ejercicios de repaso a través de los cuales usted puede validar sus avances en la incorporación de los contenidos a su cúmulo de conocimientos y presentar la evaluación de esta semana que evalúa los contenidos de las semanas 1 y 2.

Desarrollo temático

Factorización de expresiones algebraicas y solución de ecuaciones

Factorización de expresiones algebraicas

Se entiende por factorización el proceso que nos lleva a escribir una expresión como el producto de dos o más factores, en al campo aritmético tenemos por ejemplo que 36 = (3) (6) (2), por tanto se puede decir que (3) (6) (2) es una factorización de 36, otra factorización de 36 es (6) (6).

En el ámbito algebraico se busaca escribir una expresión como el producto de dos o más expresiones irreducibles, es decir en factores que no pueden descomponerse en otros más simples, a esto se le llama la factorización completa o simplemente la factorización.

Es importante resaltar que el objetivo de la multiplicación es hallar el producto a partir de los factores, mientras que la factorización busca hallar los factores correspondientes a una expresión dada.

Ejemplo: dado que $x^2 + 3x - 10 = (x+5)(x-2)$ decimos que $(x+5)(x-2)$es la factorización de $x^2 + 3x - 10$.

Procedimientos de factorización

En el ejemplo anterior planteamos un polinomio y su expresión en forma de producto indicado de dos factores, sin embargo no hemos hecho mención del procedimiento para hallar tales factores. Este apartado lo dedicamos a tratar los procedimientos que nos llevan a encontrar la forma factorizada de una expresión algebraica, veremos que no todos los procedimientos son aplicables a todas las expresiones, por lo que se hace necesario analizar detalladamente cada situación particular para poder decidir que procedimiento aplicar.

Factorización de polinomios cuando sus términos tienen un factor común

Dado que para tres números reales cualesquiera $a, b\ y\ c$, la propiedad distributiva expresa que:

$$a(b + c) = ab + ac.$$

Se tiene que; entonces $a(b+\ c)$ es una factorización de $ab+ac$, notamos que en la expresión $ab+ac$ el número a es un factor tanto de ab como de ac, es decir, a es un factor común de los términos del polinomio; vemos también que la factorización corresponde al producto indicado del factor común identificado, por el polinomio que resulta al dividir cada término del polinomio original por el factor común. Lo anterior representa el procedimiento general para factorizar un polinomio cuando todos sus términos tienen un factor común. Los siguientes ejemplos ilustran la aplicación de este procedimiento.

Ejemplo: hallar la factorización completa de las siguientes expresiones:

a) $6ax-12xy$

b) $x^2+\ 3xy$

c) $x^2y^4z^2-x^3y^2z^3+\ x^2y^3z$

d) $18x^2y^4-24x^3y^2+\ 30x^2y^3$

Solución:

a) $6ax-12xy=6.a.x-6.2.x.y$, el factor común es $6x$, al dividir los términos del polinomio por el factor común $6.a.x$ se obtiene $(a-2y)$, por tanto la factorización está dada por:

$$6ax-12xy=6x(a-2y)$$

b) Argumentos similares a los del ejemplo a) nos llevan a:

$$x^2+\ 3xy = x.x+\ 3xy=x(x+3y)$$

c) $x^2y^4z^2-x^3y^2z^3+\ x^2y^3z$ El factor común corresponde al producto de los literales comunes con su menor exponente, en este caso el factor común de los términos del polinomio es: x^2y^2z, al dividir el polinomio por el factor común se obtiene $y^2z-xz^2+\ y$, entonces, la factorización correspondiente es:

$$x^2y^4z^2-x^3y^2z^3+\ x^2y^3z=x^2y^2z(y^2z-xz^2+\ y)$$

d) $18x^2y^4 - 24x^3y^2 + 30x^2y^3 = 6.3.x^2.y^2.y^2 - 6.4.x^2.x.y^2 + 6.5.x^2y^2y$ el factor común es $6x^2y^2$ y al realizar la división del polinomio por el factor común se obtiene como resultado $(3y^2 - 4x + 5y)$, con lo anterior encontramos que la factorización completa es:

$$18x^2y^4 - 24x^3y^2 + 30x^2y^3 = 6x^2y^2(3y^2 - 4x + 5y).$$

Factorización de polinomios mediante agrupación de sus términos

En algunos casos los términos del polinomio a factorizar no tienen un factor común, pero si se realiza un agrupamiento, obtenemos grupos más pequeños cuyos términos tienen un factor común. El siguiente ejemplo ilustra esta situación:

Ejemplo: factorizar los siguientes polinomios:

a) $7xy - 7y + 5ab - 5a$.

b) $3am - 3an + 3a - m + n - 1$

Solución

a) Es claro que los términos del polinomio no tienen un factor común, pero si consideramos los dos primeros términos por separados y los dos últimos, cada pareja tiene un factor común, por lo tanto podemos escribir:

$7xy - 7y + 5ax - 5a = (7xy - 7y) + (5ax - 5a) = 7y(x-1) + 5a(x-1) = (x-1)(7y+5a)$

b) $3am - 3an + 3a - m + n - 1 = (3am - 3an + 3a) - (m - n + 1)$

$= 3a(m - n + 1) - (m - n + 1) = (m - n + 1)(3a - 1)$

Se hace notar aquí que, al agrupar los tres últimos términos en un paréntesis precedido de un signo negativo, se debe cambiar el signo de cada término.

Factorización de trinomio cuadrado perfecto

En el apartado de productos notables desarrollamos el cuadrado de un binomio obteniendo como resultado una expresión que se conoce como trinomio cuadrado perfecto, lo cual significa que **la factorización de un trinomio cuadrado perfecto corresponde al cuadrado de un binomio.**

Se debe aclarar que antes de factorizar un trinomio como el cuadrado de un binomio, debemos asegurarnos que sea cuadrado perfecto.

Características de un trinomio cuadrado perfecto

Un trinomio ordenado respecto a una variable es cuadrado perfecto si muestra las siguientes características:

- El primer y tercer término son positivos y se pueden expresar como un cuadrado.
- El segundo término corresponde al doble del producto de las raíces cuadradas de los términos primero y tercero.

El binomio asociado a la factorización es la suma de las raíces cuadradas de los términos cuadráticos si el segundo término es positivo y, en caso contrario se toma la diferencia.

Ejemplo: analizar si los siguientes trinomios son cuadrados perfecto y en tal caso factorizarlos como tal:

a) $4x^2 + \ 20x + 25$

b) $\frac{x^2}{9} + \frac{2x}{y} + \ \frac{9}{y^2}$

c) $4y^2 + \ 24y + 25$

d) $4m^2 + \ 20m - 25$

Solución:

a) el polinomio dado esta ordenado, los términos primero y tercero son positivos y pueden expresarse como cuadrados de otras expresiones, por tanto el polinomio se puede expresar como:

$$4x^2 + \ 20x + 25 = \ (2x)^2 + 20x + (5)^2$$

Vemos que el doble del producto de las raíces cuadradas de los términos uno y tres es:

$2(2x)(5) = 20x$

El cual coincide con el segundo término del trinomio, por tanto el trinomio dado es un trinomio cuadrado perfecto y su factorización está dada por:

$$4x^2 + \ 20x + 25 = \ (2x + 5)^2$$

b) el polinomio puede expresarse como:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{2x}{y} + \frac{9}{y^2} = \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \frac{2x}{y} + \left(\frac{3}{y}\right)^2$$

El doble del producto de las raíces cuadradas de los términos primero y tercero es:

$$2\left(\frac{x}{3}\right)\left(\frac{3}{y}\right) = \frac{2x}{y}$$

El resultado es igual segundo término del trinomio, por tanto el trinomio se puede factorizar como trinomio cuadrado perfecto y la factorización correspondiente es:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{2x}{y} + \frac{9}{y^2} = \left(\frac{x}{3} + \frac{3}{y}\right)^2$$

c) En este caso los términos extremos son positivos y se pueden expresar como cuadrados, pero el doble del producto de sus raíces no coincide con el valor del segundo término, por tanto el trinomio no es cuadrado perfecto y no se puede aplicar el respectivo procedimiento de factorización.

d) Puesto que el tercer término es negativo el trinomio $4m^2 + 20m - 25$ no se pueden factorizar como un trinomio cuadrado perfecto.

Factorización de una diferencia de cuadrados

En el apartado de productos notables verificamos que siempre que se multiplica la suma de dos cantidades por la diferencia de las mismas, se obtiene como resultado la diferencia de los cuadrados, lo cual significa que **la factorización de una diferencia de cuadrados corresponde al producto de la suma de las cantidades por su diferencia.**

Ejemplo: Observemos en cada caso que las expresiones dadas corresponden a diferencia de cuadrados, se muestra también su factorización.

a) $4x^2 - 25 = (2x + 5)(2x - 5)$

b) $\frac{x^2}{9} - \frac{9}{y^2} = \left(\frac{x}{3} + \frac{3}{y}\right)\left(\frac{x}{3} - \frac{3}{y}\right)$

c) $144y^2 - 225 = (12\,y + 15)(12y - 15) =$

d) $4m^2 + 625 = (2m + 25)(2m - 25)$

Factorización de trinomios de la forma $x^2 + bx + c$

En el punto de producto notable donde se multiplica binomios de la forma $(x + m)(x + n)$, notamos que resulta un trinomio en el cual el primer término es el producto de los primeros términos de los binomios, el tercero, es el producto de los segundos términos y el segundo término corresponde a un término en x cuyo coeficiente es la suma algebraica de los dos términos independientes; si deseamos realizar el proceso contrario, es decir, la factorización de un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$, el resultado es el producto de dos binomios en los cuales el primer término de cada uno es x, es decir la raíz cuadrada de x^2 y los segundos términos corresponden a dos números tales que la suma de ellos sea el coeficiente del segundo término del trinomio y su producto sea igual al termino independiente.

A manera de ejemplo presentamos los siguientes casos, en los cuales se hace necesaria una adecuada descomposición del término independiente del trinomio para hallar los dos factores que satisfagan las condiciones antes señaladas.

a) $x^2 + 5x - 15 = (x + 8)(x - 3)$

Los números +8 y -3 suman +5 y su producto es -15

b) $x^2 + 21x + 108 = (x + 12)(x + 9)$

c) $y^2 + 16y - 225 = (y + 25)(y - 9)$

d) $y^4 + 43y^2 - 432 = (y^2 + 27)(y^2 - 16)$

La consecución de los dos números puede parecer difícil, pero sistemáticamente se pueden hallar al descomponer el término independiente en sus factores primos y a partir de ellos formar los números requeridos.

Existen situaciones en las cuales la factorización no se en términos de factores racionales y es muy difícil halarla mediante los procedimientos anteriores, más aún en muchos casos la factorización no existe, este hecho nos lleva a considerar un caso general en el que debemos determinar si existe la factorización en el campo de los números reales, y si es así hallarla, esto se cubre en el siguiente punto.

Factorización de una suma o diferencia de cubos

Apoyados en el desarrollo de cocientes, se puede verificar las siguientes relaciones:

$$(a+b)^3 = (a+b)(a^2 - ab + \ b^2$$

$$(a- \ b)^3 = (a-b)(a^2 + ab + \ b^2$$

Ejemplo: factorizar las expresiones

a) $x^3 \ + \ 27$ b) $64 - \frac{x^3}{8}$

Solución:

a) $x^3 \ + \ 27 = \ x^3 \ + \ (3)^3 \ = (x+3)(x^2 \ - \ 3x + 9)$

b) $64 - \frac{x^3}{8} = (4)^3 - \left(\frac{x}{2}\right)^3 = \left(4 - \frac{x}{2}\right)\left[(4)^2 \ + (4)\left(\frac{x}{2}\right) + \left(\frac{x}{2}\right)^2\right] = \ \left(4 - \frac{x}{2}\right)\left(16 + 2x + \frac{x^2}{4}\right)$

Sobre otros casos de factorización se puede profundizar en la bibliografía sugerida.

Propiedades de la igualdad

Ecuaciones

Antes de abordar la solución de ecuaciones, es pertinente estudiar las propiedades que soportan los procedimientos empleados en la solución de ecuaciones. Para ello se debe indicar que cada una de las expresiones separadas por el signo de la igualdad recibe el nombre de miembros de la igualdad. Las propiedades fundamentales son las siguientes:

a) Al sumar o restar una misma cantidad a cada uno de los miembros de una igualdad, ésta se conserva, es decir:

$Si\ a \ = b, entonces\ para\ todo\ c, a \pm c = b \pm c$

b) Al multiplicar cada uno de los miembros de una igualdad por una misma cantidad, la igualdad se conserva, es decir:

$Si\ a \ = b, entonces\ para\ todo\ c, a * c = b * c.$

c) Al dividir cada uno de los miembros de una igualdad por una misma cantidad diferente de cero, la igualdad se conserva, es decir:

$$Si\ a\ = b, entonces\ para\ todo\ c\ \neq 0, \frac{a}{c} = \frac{b}{c}$$

Concepto de ecuación

Con el fin de tener plena claridad sobre el tema a desarrollar, es conveniente considerar que las igualdades se pueden clasificar en identidades y ecuaciones. Una identidad es una expresión de igualdad que involucra variables y que se cumple o satisface para todos los valores permitidos de las variables, mientras que una ecuación expresa una igualdad que involucra variables, pero que se satisface sólo para uno o algún conjunto restringido de valores de dichas variables. A continuación presentamos ejemplos de las ideas antes señaladas.

$4a + 3a = 2a + 5a$, es una identidad porque se cumple cualquiera que sea el valor de la variable a.

$4a + 3 = 21$ es una ecuación puesto que la igualdad se satisface sólo para un valor, $a = \frac{9}{2}$.

$x^2 + 7x = -12$ es una ecuación, se satisface sólo para $x = -4\ y\ x = -3$.

Solución de una ecuación

Corresponde a los valores que satisfacen la ecuación, en este punto anotamos que, resolver una ecuación significa hallar el conjunto de soluciones. En los ejemplos anteriores se presenta la solución de las ecuaciones, pero no se hace referencia a la forma de hallarla, en el siguiente apartado nos dedicaremos a hallar soluciones de ecuaciones de primer grado con una incógnita.

Solución de ecuaciones lineales con una incógnita

Una ecuación de primer grado con una incógnita es toda ecuación que se puede reducir a la forma $ax + b = 0$. ejemplos de este tipo de ecuaciones son:

$$a)\ 4x + 5 = 9\ b)\ 7x - 2 = 9x + 8\ c)\ \frac{3}{4}x + \frac{5}{2} = \frac{2}{5}x + \frac{1}{4}$$

Las soluciones de estas ecuaciones son:

$a)\ x = 1\ b)\ x = -5\ c)\ x = -\dfrac{45}{7}$

Frecuentemente nos encontramos frente a la necesidad de verificar si un valor dado es realmente la solución de una ecuación, esto se logra al sustituir dicho valor en la ecuación, realizar las operaciones indicadas y observar si se cumple la igualdad. A manera de ejemplo procedemos a verificar que la solución dada para el ejemplo c) es efectivamente la presentada.

Para la ecuación $\frac{3}{4}x + \frac{5}{2} = \frac{2}{5}x + \frac{1}{4}$, se afirma que su solución es: $x = -\frac{45}{7}$, el procedimiento de verificación es el siguiente:

$\left(\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{45}{7}\right) + \frac{5}{2} = \left(\frac{2}{5}\right)\left(-\frac{45}{7}\right) + \frac{1}{4}$ Sustitución de x por el valor considerado.

$\left(-\frac{135}{28}\right) + \frac{5}{2} = \left(-\frac{90}{35}\right) + \frac{1}{4}$ Desarrollo de operaciones indicadas.

$\frac{-135+70}{28} = \frac{-360+35}{140}$

$\frac{-65}{28} = \frac{-325}{140}; \frac{-65}{28} = \frac{-325}{140}$ Simplificación de resultados.

$\frac{-65}{28} = \frac{-65}{28}$

Al cumplirse la igualdad, se verifica que el valor considerado es válido.

Si lo que nos interesa es hallar la solución de una ecuación dada, nos corresponde aplicar las propiedades de la igualdad de forma que nos conduzca a la solución de la ecuación.

Ejemplo: aplicar las propiedades de la igualdad para hallar la solución de la siguiente ecuación:

$12x - 5 = 9x - 2$

Solución:

$12x - 5 = 9x - 2$

$12x - 9x - 5 = 9x - 2 - 9x$ Restamos $9x$ a cada miembro de la igualdad (propiedad a).

$3x - 5 = -2$ Simplificación de resultados.

$3x - 5 + 5 = -2 + 5$ Sumamos 5 a cada miembro de la igualdad (propiedad a).

$3x = 3$ Simplificación de resultados.

$\frac{3x}{3} = \frac{3}{3}$ Dividimos cada miembro por 3 (propiedad c).

$x = 1$ Simplificación de resultados.

Es usual que en la solución de una ecuación apliquemos un principio denominado trasposición de términos, que no es más que la aplicación inmediata de las propiedades antes señaladas y la respectiva simplificación ¿Puede el estudiante explicar este principio y relacionarlo con las propiedades empleadas en la solución del ejemplo anterior? Es altamente recomendable que al aplicar la trasposición de términos no se pierda de vista su correcta asociación con las respectivas propiedades.

Ejemplo: hallar la solución de la ecuación: $5x - (7 - 2x) = 4(-x + 5) - 2(3x - 1) + x$

Solución:

$5x - (7 - 2x) = 4(-x + 5) - 2(3x - 1) + x$

$5x - 7 + 2x = -4x + 20 - 6x + 2 + x$

$5x + 2x + 4x + 6x - x = 20 + 2 + 7$

$5x + 2x + 4x + 6x - x = 20 + 2 + 7$

$16x = 29$

$$x = \frac{29}{16}$$

Solución de ecuaciones cuadráticas

Una ecuación cuadrática, o ecuación de segundo grado, con una incógnita es toda ecuación que se puede reducir a la forma $ax^2 + bx + c = 0, con\ a\ \neq 0$, ejemplos de ecuaciones cuadráticas ya reducidas son:

a) $4x^2 + 3x - 2 = 0$

b) $x^2 - 2x - 2 = 0$

c) $3x^2 - 10 = 0$

d) $2x^2 + 5x = 0$

Los ejemplos anteriores muestran que las ecuaciones cuadráticas pueden ser completas o incompletas según los coeficientes $a\ o\ b$ sean cero. Por ejemplo las ecuaciones de los ejemplos c y d son incompletas, la ecuación del ejemplo c es de la forma $ax^2 + c = 0$ (b=0), mientras que la del ejemplo d es de la forma $ax^2 + bx = 0$.

Solución de ecuaciones de la forma $ax^2 + c = 0$

Si tenemos una ecuación cuadrática incompleta, de la forma $ax^2 + c = 0$, podemos afrontar el proceso de solución de la siguiente forma:

$ax^2 = -c$

$$x^2 = -\frac{c}{a}$$

$x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$

Si los valores de $a\ y\ c$ son tales que el resultado de $-\frac{c}{a}$ es positivo, la ecuación dada tiene solución en el conjunto de números reales, en caso contrario la solución se encuentra fuera de este conjunto.

Ejemplo: en cada uno de los siguientes casos hallar la solución de la ecuación cuadrática, si existe.

a)$3x^2 - 12 = 0$ b) $4x^2 + 12 = 0$

Solución:

a) En este ejemplo $a = 3 \; y \; c = -12$, entonces: $x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}} = \pm\sqrt{-\frac{-12}{3}} = \pm\sqrt{4} = \pm 2$.

Se puede verificar que al sustituir la variable x por 2 y por -2, se satisface la ecuación.

b) En este caso $a = 4 \; y \; c = 12$, entonces: $x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}} = \pm\sqrt{-\frac{12}{3}} = \pm\sqrt{-4}$, la ecuación no

tiene solución en el conjunto de los números reales porque no existe en este conjunto un valor de x cuyo cuadrado sea igual a -4.

Solución de ecuaciones de la forma $\boldsymbol{ax^2 + bx = 0}$

Este tipo de ecuaciones permite una rápida factorización que facilita la consecución de la solución, el proceso es el siguiente:

$ax^2 + bx = 0$

$x(ax + b) = 0$ (x es factor común del polinomio).

Notamos que la ecuación original se convierte en el producto de dos factores, este producto de factores es cero sólo si se cumple que uno de ellos o ambos son igualmente cero, es decir, se tiene:

$x = 0 \; y \; ax + b = 0$, de donde resulta finalmente que toda ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx = 0$ tiene las dos soluciones $\boldsymbol{x = 0 \; y \; x = -\frac{b}{a}}$.

Ejemplo: hallar la solución de las siguientes ecuaciones cuadráticas:

a) $4x^2 + 9x = 0$

b) $2x^2 - 7x = 0$

Solución:

a) Una de las soluciones siempre es $x = 0$ y, dado que $a = 4 \; y \; b = 9$, se tiene que la otra solución es $x = -\frac{b}{a} = x = -\frac{9}{4}$.

b) Para la ecuación $2x^2 - 7x = 0$, $a = 2$ y $b = -7$, por tanto la solución es: $x = 0$ y $x = -\frac{-7}{2} = \frac{7}{2}$.

Solución de ecuaciones de la forma $\boldsymbol{ax^2 + bx = 0}$

Para hallar la solución de una ecuación cuadrática completa, muchas veces es posible descomponer el polinomio en el producto de dos factores, a partir de lo cual se puede hallar la solución, un ejemplo de ello es el siguiente:

Ejemplo: Resolver, si es posible, la ecuación cuadrática $x^2 - 2x - 8 = 0$

Solución:

El trinomio $x^2 - 2x - 8 = 0$ se puede descomponer en dos factores, con lo cual tenemos:

$x^2 + 2x - 8 = 0$

$(x + 4)(x - 2) = 0$

De lo anterior se puede afirmar que:

$(x + 4) = 0$ o $(x - 2) = 0$, tenemos finalmente que los valores que satisfacen la ecuación son:

$x = -4$ y $x = 2$

No siempre el trinomio se puede factorizar como en el caso del ejemplo anterior, en tales casos la solución de la ecuación estaría dada por una fórmula conocida como fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas, con lo cual tenemos:

La solución de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ viene dada por: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, la existencia o no de soluciones para la ecuación en el conjunto de los números reales depende del valor del discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ según se establece a continuación:

a) Si $\Delta < 0$, la ecuación tiene solución real.

b) Si $\Delta = 0$ la ecuación tiene solución real dada $x = \frac{-b}{2a}$.

c) Si $\Delta > 0$ la ecuación tiene solución real dada la fórmula general.

Ejemplos: en cada uno de los siguientes casos, usar el valor del discriminante para determinar si la ecuación dada tiene o no solución en el conjunto de los números reales, en caso positivo hallar la solución.

a) $4x^2 - 12x + 7 = 0$ b) $3x^2 + 2x + 2 = 0$ c) $x^2 + 2x + 1 = 0$

Solución:

a) el valor del discriminante es: $\Delta = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4(4)(7) = 144 - 112 = 32 > 0$, razón por la cual la ecuación tiene solución real y está dada por:

$x = \frac{12 \pm \sqrt{32}}{8} = \frac{12 \pm 4\sqrt{2}}{8} = \frac{3 \pm \sqrt{2}}{2}$, vistas por separado las soluciones son: $x = \frac{3+\sqrt{2}}{2}$ y $x = \frac{3-\sqrt{2}}{2}$

b) Para este caso en que la ecuación es $3x^2 + 2x + 2 = 0$, se tiene que el discriminante es: $\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 24 = -20 < 0$, por tanto la ecuación no tiene solución real.

c) en este caso de la ecuación $x^2 + 2x + 1 = 0$ se tiene $\Delta = 0$, lo cual nos da como solución $x = \frac{-2}{2(1)} = -1$.

Hallar la ecuación a partir de su solución: en ciertas situaciones nos puede interesar hallar la ecuación cuadrática sabiendo cuál es su solución, ilustramos esto con el siguiente ejemplo:

Ejemplo: hallar en cada caso la ecuación correspondiente a la solución dada:

a) $x = 2 \; y \; x = -1$ b) $x = 2 + \sqrt{3} \; y \; x = 2 - \sqrt{3}$

Solución:

a) Con las soluciones $x = 2 \; y \; x = -1$ podemos plantear las ecuaciones $(x-2) = 0 \; y \; (x+1) = 0$, los elementos $(x-2) \; y \; (x+1)$ son factores de la ecuación buscada, por tanto tal ecuación viene dada por:

$(x-2)(x+1) = 0$

$x^2 - x - 2 = 0$

b) A partir de las soluciones $x = 2 + \sqrt{3}\ y\ x = 2 - \sqrt{3}$, tenemos:

$(x - 2 - \sqrt{3)} = 0\ y\ (x - 2 + \sqrt{3}) = 0$, entonces:

$$\left(x - 2 - \sqrt{3}\right)(x - 2 + \sqrt{3}) = 0$$

$$x^2 - 2x + \sqrt{3}x - 2x + 4 - 2\sqrt{3} - \sqrt{3}x + 2\sqrt{3} - 3 = 0$$

$$x^2 - 4x + 1 = 0.$$

Problemas que se resuelven mediante solución de ecuaciones

Son diversas las situaciones, en diferentes campos, en los que el planteamiento de un problema conduce a la solución de una ecuación o un conjunto de ecuaciones. En este apartado ilustraremos algunos casos que representan aplicaciones a las soluciones de ecuaciones antes tratadas.

En este tipo de problemas se debe leer cuidadosamente el enunciado, luego de lo cual se asigna una variable a alguna cantidad desconocida y se realiza el planteamiento de una ecuación con base en las condiciones establecidas en el enunciado. En algunas situaciones se requiere hallar el valor de más de una cantidad desconocida, en cuyo caso, al asignar una variable a una de ellas, se debe expresar las demás en términos de la antes elegida. Los siguientes ejemplos ilustran lo antes expresado.

Ejemplo:

En una librería, un estudiante compró un libro, una calculadora y un cuaderno, el libro costó el doble de lo que costó la calculadora, mientras que la calculadora costó cinco veces lo del cuaderno. Si el total de la compra fue de 160.000 pesos, ¿Cuánto costó cada elemento?

Solución:
Resulta conveniente designar como x el precio del elemento de menor valor, y a partir de él definir los valores de los demás, con esto tenemos:

$x = costo\ del\ cuaderno.$
$5x = costo\ de\ la\ calculadora.$
$10x = costo\ del\ libro.$

Las condiciones del problema establecen que el costo total es de 160.000 pesos, por tanto tenemos la siguiente ecuación:

$$costo\ del\ cuaderno + \ costo\ de\ la\ calculadora\ costo\ del\ libro = 160.000$$

$$x + 5x + \ 10x = 160.000$$
$$16x = 160.000$$
$$x = 10.000$$

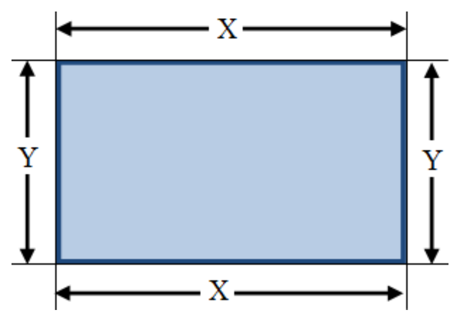
Lo anterior nos da $10.000\ pesos$ como costo del cuaderno, $50.000\ pesos$ como costo de la calculadora y $100.000\ pesos$ como costo del libro.

Ejemplo:

Un terreno rectangular tiene un perímetro de 60 m y un área de 216 m^2. Calcula sus dimensiones.

Solución:

El esquema adjunto muestra el rectángulo de dimensiones desconocidas.



$$X = largo$$
$$Y = ancho$$

Según definición de perímetro, se tiene que:

$$2X + 2Y = 60$$

$$X + Y = 30$$

Figura 1
Fuente: Propia.

Dado que el área es: $X.Y = 216$, expresar una de las dos variables en términos de la otra, en este caso hallamos Y en términos de X, con lo cual tenemos:

$$Y = \frac{216}{X}$$

Remplazando en $X + Y = 30$, se obtiene: $X + \frac{216}{X} = 30$, de donde se origina la siguiente ecuación en una incógnita:

$\frac{X^2 + 216}{X} = 30$. Entonces,

$X^2 + 216 = 30X$

$X^2 - 30X + 216 = 0.$

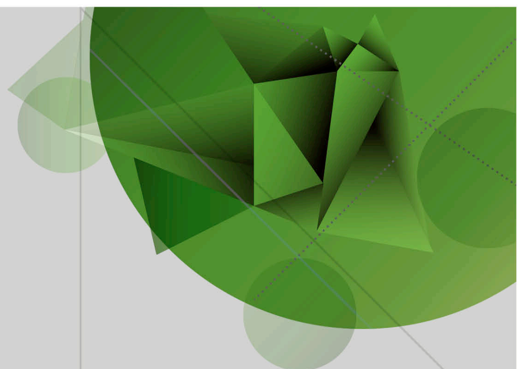
Resolviendo por factorización tenemos:

$(X - 18)(X - 12) = 0$

Las posibles soluciones de esta ecuación son $X = 18$ y $X = 12$, con $X = 18$ se obtiene $Y = 12$ mientras que con $X = 12$ se obtiene $Y = 18$. Se puede afirmar entonces que las dimensiones del rectángulo son 12 y 18 metros.

Unidad 2

Nociones básicas de funciones



Fundamentos de matemáticas

Autor: Danilo de Jesús Ariza

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina
MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Introducción

La era que vivimos se ha catalogado como la era de la información. En este sentido, los datos presentados en diversas formas: gráficos, tablas de valores, son la materia prima de la información. En esencia, los datos son numéricos y las relaciones que se establecen entre ellos caracterizan su importancia en el suministro de información sobre fenómenos naturales, sociales, económicos, etc. La noción de función permite estudiar un tipo de relaciones que se establece entre datos y, por lo tanto, generar acciones sobre la información suministrada a través de sus elementos. Acciones como prever, suponer, conjeturar, proyectar, son producto del conocimiento y utilización de los elementos y propiedades básicas de la función.

Recomendaciones metodológicas

De manera general, la recomendación inicial que se da al estudiante es asumir el rol que le corresponde en el marco de formación virtual, se recomienda hacer cuidadosa lectura de este documento, ya que el reto de aprendizaje autónomo al que decidió enfrentarse así lo demanda. Atendiendo específicamente a los temas de esta cartilla es altamente recomendable que elabore un esquema resumido de los mismos, por ejemplo, un mapa mental, un mapa conceptual, un cuadro sinóptico, entre otros en los que plasme las ideas que tienen que ver con conceptos de función, dominio y rango de funciones, representación gráfica y demás puntos tratados aquí. Es muy importante la asociación de los diferentes conceptos y formularse el reto de describir otros ejemplos diferentes a los aquí presentados. También resulta útil, en los casos en que se presentan cálculos de ejemplo, que se realice la respectiva verificación de las operaciones. Todo lo anterior, además de contribuir a afianzar el conocimiento del tema, le brinda la posibilidad de tomar mayor confianza hacia lo que sigue a cada eje temático.

Desarrollo temático

La noción de función

La recolección de datos sobre situaciones diversas se basa en la idea de relacionar elementos de dos conjuntos (casi siempre numéricos), y en su presentación, de manera que la información sea legible y sirva como punto de partida de la identificación de regularidades y, por lo tanto, de patrones de comportamiento de los datos.

Si A y B son dos conjuntos, una función de A en B es una relación entre los elementos de A y B, de tal forma que a cada elemento de A le corresponde uno y sólo un elemento de B. Esta aproximación a la noción de función requiere que:

- Todo elemento de A se relacione con un elemento de B.
- La relación de un elemento de A con un elemento de B sea única.

Ejemplos

1. Una forma usual de presentar datos que relacionan dos conjuntos es mediante el uso de una tabla de valores.

Veamos este hecho.

Un comerciante hace un registro de las ventas de cierta clase de tela y las presenta así:

Número de metros vendidos	5	9	14	22	45
Valor total de venta	95.000	171.000	266.000	418.000	855.000

La relación que se establece entre el número de metros de tela vendidos y su valor de venta es una función, pues a cada valor del número de metros de tela vendido corresponde un valor de venta y éste es único.

Un hecho interesante aquí es observar que el valor total de venta depende del número de metros de tela que se venden. En este sentido, una función también es una relación de dependencia entre dos cantidades que varían, de tal forma que a cada valor de la variable 1 independiente, corresponde un único valor de la variable[1] dependiente. Aquí la variable independiente es el número de metros vendidos y la variable dependiente es el valor de la venta.

2. Los gráficos se han convertido en una de las formas características de información y muchos de ellos nos proveen un acercamiento a la noción de función. Veamos:

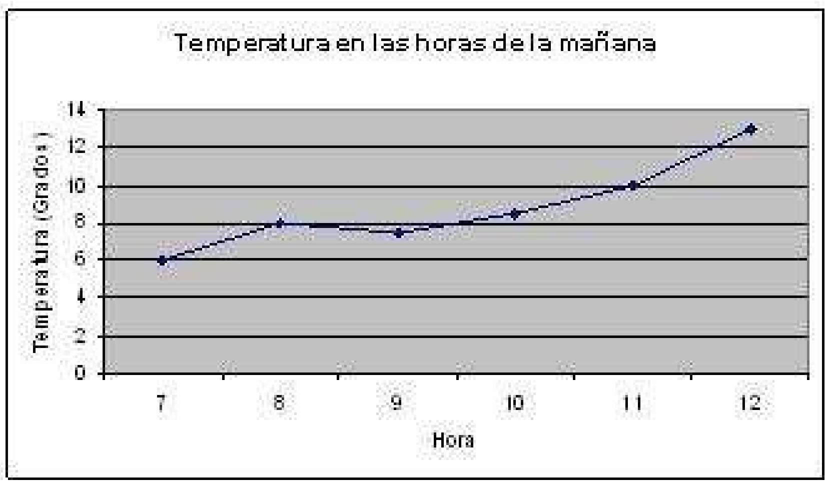


***Figura 1**. Gráfica de temperaturas*

***Fuente:** propia*

[1] En este escrito se asume que una variable es un símbolo que representa los elementos de un conjunto. El conjunto se llama el dominio de la variable, y cada elemento del conjunto se denomina un valor de la variable.

La relación entre cada hora en la mañana (representada en el eje horizontal) y la temperatura (representada en el eje vertical) establece una función, pues a cada hora en la mañana corresponde un único valor de temperatura.

Los ejemplos muestran dos de las representaciones usuales de funciones: mediante una tabla de valores y mediante un gráfico de coordenadas cartesianas. Veamos los elementos básicos de las funciones que ayudan a comprender sus representaciones. Lo hacemos a partir de una definición amplia de función.

Elementos de una función

Si A y B son dos conjuntos, entonces una función de A en B es una regla que asigna a cada elemento x de A un único elemento y de B. Se nota $f : A \to B$. El elemento *y* se denomina la imagen de x mediante f. La imagen de un elemento *x* se nota también como $f(x)$ que se lee "f de x".

Al conjunto A se le llama el dominio de la función y se nota D_f y el conjunto B se conoce como el codominio de la función, que se nota Cd_f. Al conjunto de imágenes de la función se le denomina el rango de la función y se simboliza R_f .

La regla de asignación que define una función puede describirse de forma verbal o de forma algebraica.

Ejemplos:

1. La función $f : Z \to \mathbb{Z}$ se define verbalmente mediante el enunciado "A cada entero le corresponde 1 más que su duplo". f es una función pues todo entero tiene duplo y al sumar 1 esta suma existe (es un número entero) y además es única.

   El dominio y codominio de f es el conjunto de los números enteros. Asimismo, afirmamos que la imagen de -3 es -5 o en forma equivalente que $f(-3) = -5$. Al determinar algunas imágenes de números enteros se concluye que $R_f = \{\ldots -5, -3, -1, 1, 3, \ldots\}$.

2. La función f del ejemplo 1, se define en forma algebraica, mediante la descripción de la imagen de un elemento x del dominio de f. En este caso se escribe:

$f : Z \to \mathbb{Z}$ definida por $f(x) = 2x + 1$

La descripción algebraica de la función permite abordar interrogantes como:

- ¿Cuál es la imagen de -27 mediante f?
  Se pregunta por $f(-27)$. Al usar la expresión $f(x) = 2x + 1$ que define f, se obtiene: $f(-27) = 2(-27) + 1$, es decir $f(-27) = -53$.

- ¿Existe algún elemento del dominio de f tal que su imagen mediante la función sea −32?

  Al usar de nuevo la expresión $f(x) = 2x + 1$, se tiene $-32 = 2x + 1$. La solución de esta ecuación es $x = -\frac{33}{2}$, que no es un número entero. Por lo tanto no existe un elemento del dominio de f cuya imagen sea -32.

- ¿Cómo presentar la información de imágenes de elementos del dominio de f?
  La tabla de valores de una función f se construye en dos filas o dos columnas, una de las cuales contiene elementos del dominio de la función y la otra contiene las respectivas imágenes. Para el ejemplo anterior, una tabla de valores de f es:

x	-8	-5	0	2	6
$f(x)$	-15	-9	1	5	13

Tabla 1. *Valores*

Fuente: *propia*

Funciones de valor real

Si una función f tiene como dominio y codominio a subconjuntos de números reales se afirma que f es una función de valor real. Es usual que las funciones de valor real se definan mediante una expresión algebraica sin especificar su dominio y codominio. Por lo tanto, es importante determinar el dominio de f para representar la función en diversas formas.

Ejemplos

1. Para determinar el dominio de la función f definida por $f(x) = \sqrt{2-3x}$, es preciso dar respuesta al interrogante: ¿Para qué números reales x existe la imagen $f(x)$?

   ¿Esto equivale a determinar para qué números reales x la expresión $\sqrt{2-3x}$ es un número real?

   $\sqrt{2-3x}$ es un número real si $2-3x \geq 0$. Luego, el conjunto solución de la inecuación será D_f. Como $x \leq \frac{2}{3}$, entonces $D_f = \left(-\infty, \frac{2}{3}\right]$.

2. El dominio de la función g definida por $g(x) = x^3 - 1$ es el conjunto de los números reales, pues la expresión $x^3 - 1$ que es la imagen de un número real x mediante g, representa un número real para cualquier valor x.

Gráfica de una función

Se utiliza el plano cartesiano para representar gráficamente una función. Para ello se afirma que la gráfica de una función f (notación: Gr_f) se construye así:

$Gr_f = \{(x, y) | y = f(x)\}$. Cada uno de los pares ordenados de la gráfica de f tiene como primera componente un elemento del dominio de f y como segunda componente la imagen de dicho elemento. Cada par ordenado de la gráfica de f corresponde a un punto del plano cartesiano. El dominio de f se representa en el eje horizontal y las imágenes se ubican en el eje vertical.

El hecho de determinar pares ordenados que pertenezcan a la gráfica de f y representarlos en el plano cartesiano, no garantiza que se pueda trazar la gráfica de la función de forma precisa. Se presentan elementos de la función que permiten una mejor aproximación a su gráfica.

Ejemplo

Para trazar la gráfica de la función f definida por $f(x) = -\dfrac{2}{4 - x^2}$ se sugiere identificar los siguientes elementos:

- El dominio de f. Hay que determinar números reales x para los cuales la expresión $-\dfrac{2}{4 - x^2}$ esté definida.

  Una fracción está definida si su denominador es diferente de 0. Así que se requiere que $4 - x^2 \neq 0$. O en forma equivalente determinar números reales x tales que $4 - x^2 = 0$ y excluirlos del dominio de f. Como la solución de $4 - x^2 = 0$ es $x = -2$ o $x = 2$, se afirma que $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.

- Una información útil es la determinación de los interceptos de la gráfica de f con el eje horizontal del plano cartesiano. Si estos existen, corresponden a puntos del plano cartesiano de la forma $(x,0)$ y se denominan los ceros de f. Así que la solución de la ecuación $f(x)=0$ da respuesta al interrogante planteado. En este caso $f(x)=-\dfrac{2}{4-x^2}$ entonces se tiene $0=-\dfrac{2}{4-x^2}$. Ya que $x\neq 2$ y $x\neq -2$ se obtiene $0=-2$, lo que permite concluir que $0=-\dfrac{2}{4-x^2}$ no tiene solución en los números reales. Por consiguiente, se dice que f no tiene ceros reales o que su gráfica no intercepta el eje horizontal del plano cartesiano.

- El intercepto de la gráfica de f con el eje vertical del plano (si existe) es un punto del plano cartesiano de la forma $(0.f(0))$. Por lo tanto $f(0)$ (si existe) señala dicho intercepto. Para la función f de este ejemplo se tiene $f(0)=-\frac{1}{2}$, y así se afirma que el intercepto de f con el eje vertical es $-\dfrac{1}{2}$.

- Determinar un conjunto de pares ordenados de Gr_f. En la práctica no es claro cuántos pares ordenados posibilitan visualizar la gráfica de f. Con la información obtenida, se intenta trazar un esbozo de la gráfica de f. La siguiente tabla muestra pares ordenados de la gráfica de f. La figura 2 presenta la gráfica de la función f.

x	-4	$-\frac{7}{2}$	-3	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{7}{4}$	-1	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{13}{4}$	4
$f(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{8}{33}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{9}$	$-\frac{32}{15}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{32}{63}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{8}{15}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{32}{39}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{32}{105}$	$\frac{1}{6}$

Tabla 2. Valores

Fuente: *propia*

Nota: el estudio de propiedades de las funciones proporcionará herramientas para graficar una función con precisión. Asimismo el apoyo de un programa para realizar gráficas es útil para complementar el trabajo planteado. Programas como Winplot o Graph, corresponden al denominado software de distribución gratuita. Las gráficas de este escrito se realizan con Graph y Graph está disponible en www.padovan.dk/graph.

Ejercicios

Utilice las nociones estudiadas para responder los interrogantes planteados. Detalle el procedimiento utilizado.

1. Para cada una de las siguientes funciones de valor real, determinar el dominio.

a) $f(x) = \sqrt[5]{1-x}$

b) $g(x) = 2x^2 + 5x - 3$

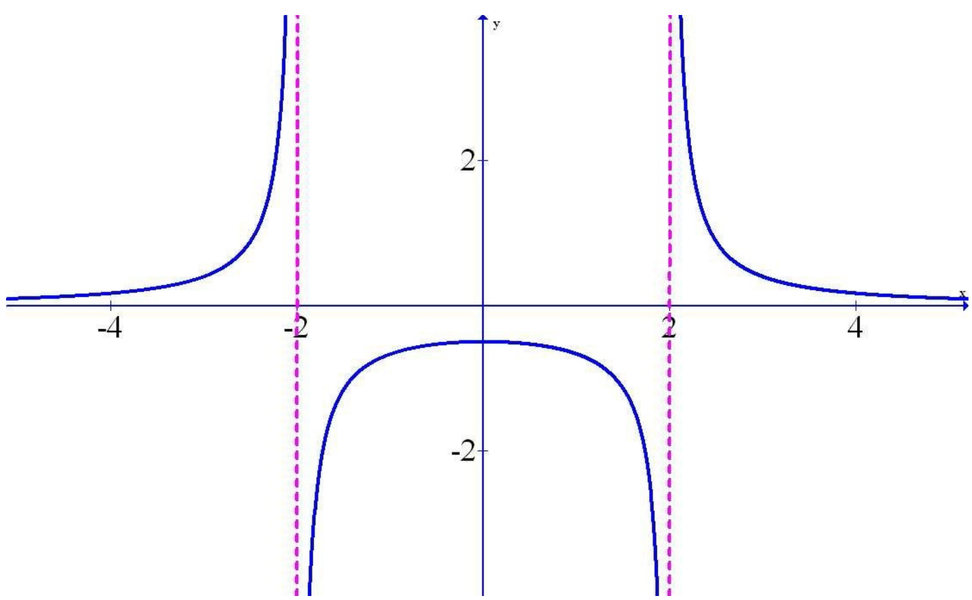


Figura 2. Gráfica de $f(x) = -\dfrac{2}{4-x^2}$

Fuente: *propia*

c) $h(x)=\sqrt[4]{\dfrac{x}{x+2}}$

d) $r(x)=\sqrt{x+1}+\dfrac{1}{x-1}$

2. Para la función f definida por $f(x)=\dfrac{2-x}{3+x}$, contestar los interrogantes:

   a) ¿Es $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ un real negativo?

   b) ¿Existe un valor del dominio de f tal que su imagen mediante f sea $-\dfrac{1}{2}$?

   c) Calcular y simplificar $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$

3. Esbocé la gráfica de funciones f y g que cumplan las siguientes condiciones:

   a) $D_f = \mathrm{R} - \{-3,4\}$. f tiene dos ceros que son reales positivos. $f(-5)<0$. Intercepto de la gráfica de f con el eje vertical es un real positivo.

   b) $D_g = \mathrm{R} - \{-1,1\}$. $R_g = \mathrm{R} - [0,2)$Rg = R – [0, 2). g no tiene ceros reales. $g(0)=2.g(2)<0$.

4. Dada la dificultad para representar gráficamente una función únicamente con base en pares ordenados, se utilizará la gráfica de algunos modelos básicos para transformarlos y lograr gráficas de mejor nivel de elaboración. El listado de funciones que a continuación se da, corresponde a algunos de estos modelos. Determine el dominio, los interceptos con los ejes coordenados (si existen) y esbocé la gráfica de cada uno de ellos.

a) $f(x) = x$.

b) $g(x) = k$ donde k es un número real.

c) $h(x) = x^2$.

d) $m(x) = x^3$.

e) $r(x) = \sqrt[3]{x}$.

f) $s(x) = \sqrt{x}$.

g) $t(x) = \dfrac{1}{x}$.

h) $j(x) = x^n$ con n número par.

i) } $m(x) = x^n$ con n número impar.

Crecimiento y decrecimiento

Los gráficos que informan sobre hechos sociales permiten hacer conjeturas sobre el comportamiento futuro. El gráfico de la figura 3 muestra los datos de personas infectadas con un virus en un lapso de 6 semanas. De acuerdo con la gráfica es factible presumir que a medida que transcurra el tiempo (en semanas), el número de infectados crecerá. La presunción se basa en una lectura del comportamiento de la gráfica de la función que representa el fenómeno descrito.

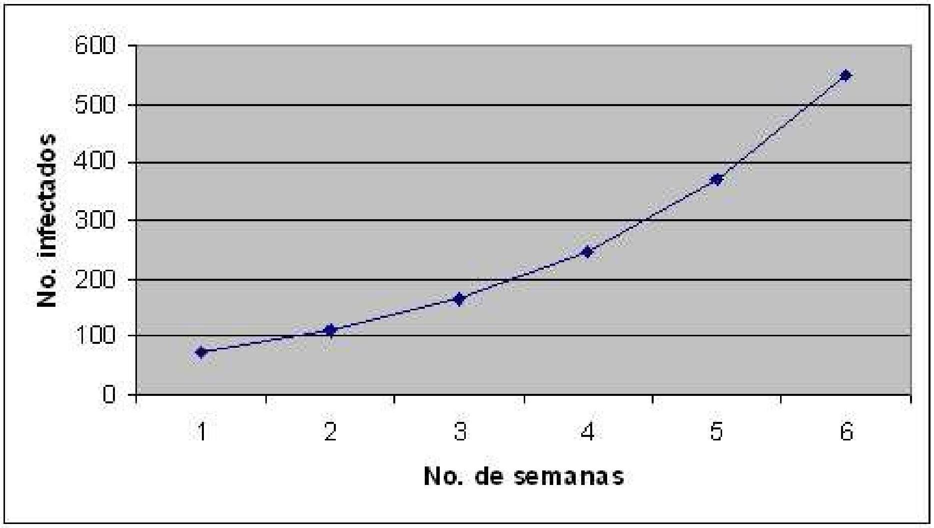


Figura 3. Propagación de un virus

Fuente: propia

Una función *f* es creciente en un intervalo abierto I, si para todo a y b elementos de I se cumple que: si $a < b$ entonces $f(a) < f(b)$.

Asimismo, una función f es decreciente en un intervalo abierto I, si para todo a y b elementos de I se cumple que: si $a < b$ entonces $f(a) > f(b)$.

Ejemplos:

1. Conocer la gráfica de una función, permite darse una idea de los intervalos del dominio donde es creciente y decreciente. En la figura 4 se tiene una función f cuyo dominio es el conjunto de los números reales. Se puede estimar que f es creciente en $(-\infty,-2)$ y en $(0,2)$. Ahora, f es decreciente en $(-2,0)$ y en $(2,\infty)$. Nótese que no hay certeza en las afirmaciones anteriores, pues la gráfica no da la información precisa de cuál es el valor o valores x del dominio hasta los que crece o decrece la función. Un estudio de otras propiedades de las funciones (máximo y mínimo) soluciona la situación planteada.

2. Si se conoce la expresión algebraica que define una función f , y un intervalo contenido en su dominio, se puede estudiar el crecimiento o decrecimiento de la función en dicho intervalo. Veamos el comportamiento de $f(x) = \sqrt{2x-1}$ en el intervalo $I = (1, \infty)$.

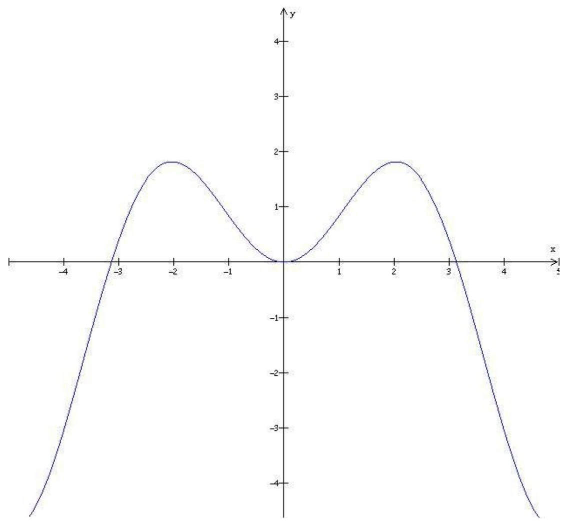


Figura 4. Crecimiento y decrecimiento de una función

Fuente: propia

Como $D_f = \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$, entonces $I \subset D_f$. Se toman dos números reales a y b en I, tales que $a < \mathrm{b}$. Se compara[2] $f(a)$ con $f(b)$ para identificar la relación que se da entre estos dos valores. Se tiene: $f(a) = \sqrt{2a-1}$ y $f(b) = \sqrt{2b-1}$.

Por lo tanto $f(b) - f(a) = \sqrt{2b-1} - \sqrt{2a-1}$. Así que se analiza esta última expresión para determinar qué tipo de número real representa: positivo, negativo o cero. Observe que la expresión es una diferencia, por lo tanto no hay certeza sobre el tipo de número real que representa. La utilización de propiedades de las operaciones y del orden de números reales permite una transformación de la expresión y su respectivo análisis, así:

---

[2] Una forma de comparar dos números reales x y y se establece así: $x < y$ si y solo sí $y - x > 0$

$$\sqrt{2b-1}-\sqrt{2a-1}=\left(\sqrt{2b-1}-\sqrt{2a-1}\right)\frac{\sqrt{2b-1}+\sqrt{2a-1}}{\sqrt{2b-1}+\sqrt{2a-1}}$$

$$=\frac{(2b-1)-(2a-1)}{\sqrt{2b-1}+\sqrt{2a-1}}$$

$$=\frac{2(b-a)}{\sqrt{2b-1}+\sqrt{2a-1}}$$

Esta última expresión presenta las siguientes características: como $a < \mathrm{b}$ entonces $\mathrm{b}-\mathrm{a}$ es un real positivo. Como $a \in (1,\infty]$ y $b \in (1,\infty]$ entonces $a > \mathrm{b}$ y $\mathrm{b} > 1$, o sea que $2a-1$ y $2b-1$ son números reales positivos.

¿Por qué? En resumen si $\mathrm{b}-\mathrm{a} > 0, 2\mathrm{a}-1 > 0$ y $2b-1 > 0$, entonces la expresión $\frac{2(b-a)}{\sqrt{2b-1}+\sqrt{2a-1}} > 0$.

Lo que quiere decir que $f(b)-f(a) > 0$. En consecuencia: Si $a < \mathrm{b}$ entonces $f(a) < f(b)$, lo que significa que f es creciente en I.

Funciones pares y funciones impares

La identificación de simetrías con respecto a un punto o una recta, caracteriza la búsqueda de regularidades en un objeto. Movimientos geométricos como la rotación alrededor de un punto y la reflexión respecto de una recta permiten la identificación de la regularidad mencionada. Para las funciones, conocer información acerca de sus simetrías es elemento valioso en su estudio.

La figura 5 muestra la gráfica de una función f que es simétrica con respecto al eje vertical, pues para cada punto (x, y) de la gráfica, se tiene que su simetría respecto a dicho eje, es decir el punto $(-x, y)$ también está en la gráfica de f . Una función con esta característica se denomina una función par.

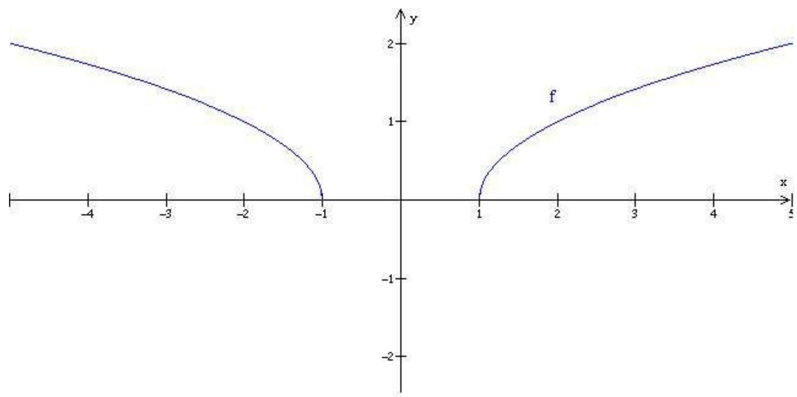


Figura 5. Función par

Fuente: propia

Ejemplos:

1. Si se conoce la expresión algebraica que define una función f se puede determinar si f es par. Para ello, nótese que la definición dada para función par es equivalente a afirmar que: una función f es par si para todo $x \in D_f$ se tiene que $f(x) = f(-x)$. Así que si f es la función definida por $f(x) = 3x^2 - 1$, se tiene que $f(-x) = 3(-x)^2 - 1$, es decir que $f(-x) = 3x^2 - 1$ y por consiguiente $f(x) = f(-x)$. Se afirma entonces que f es una función par.

2. Señalar que una función f es impar es equivalente a afirmar que para todo $x \in D_f$ se tiene que $f-(x) = -f(x)$ (muestre un ejemplo de una función que sea impar). La declaración que 'Toda función creciente en su dominio es impar', se puede refutar (es decir afirmar que no es cierto), mostrando un contraejemplo, o sea una función que es creciente en su dominio, pero que tiene algún $x \in D_f$ para el cual $f-(x) \neq -f(x)$.

   Considere la función $f(x) = x+1$ que es creciente en su dominio (compruebe este hecho). $f(2) = 3$ y $f(-2) = -1$, así que $f(-2) \neq -f(2)$ y en consecuencia f no es impar.

Función uno a uno

Las propiedades de las imágenes de una función proveen información útil que permite visualizar su gráfica. Si el rango R_f de una función f tiene la característica que cada elemento es imagen de uno y sólo un elemento del dominio D, se afirma que f es una función uno a uno. (Esbocé las gráficas de una función f que posea esta característica y de una función g que no tenga la propiedad).

Ejemplos:

1. Mostrar que una función f es uno a uno, equivale a mostrar que sí a y b son dos elementos del dominio de f y sucede que $f(a) = f(b)$, entonces $a = \mathrm{b}$. Así que para probar que $g(x) = \frac{2}{x-2}$ es una función uno a uno, se toman $a \in D_f$ y $b \in D_f$ con $f(a) = f(b)$. Es decir $\frac{2}{a-2} = \frac{2}{b-2}$. Como $a \neq 2$ y $b \neq 2$ entonces $2(b-2) = 2(a-2)$ y por lo tanto $b = \mathrm{a}$.

2. Otra forma de comprobar que una función f es uno a uno consiste en mostrar que sí a y b son dos elementos del dominio de f y sucede que $a \neq \mathrm{b}$ entonces $f(a) \neq f(b)$. La afirmación: 'Si una función es decreciente en su dominio entonces es uno a uno', es verdadera, pues si f es una función decreciente en su dominio D, significa que si a y b son dos elementos del dominio de f y sucede que $a < \mathrm{b}$, entonces $f(a) > f(b)$, o también que si a y b son dos elementos del dominio de f y sucede que a > b, entonces f (a) < f (b), hechos que se resumen en: si $a \neq \mathrm{b}$ entonces $f(a) \neq f(b)$.

3. La aseveración 'Toda función impar es uno a uno' no es verdadera. Para ello se puede mostrar un contra- ejemplo, es decir una función que sea impar pero no uno a uno. La gráfica 6 es un contraejemplo de la afirmación.

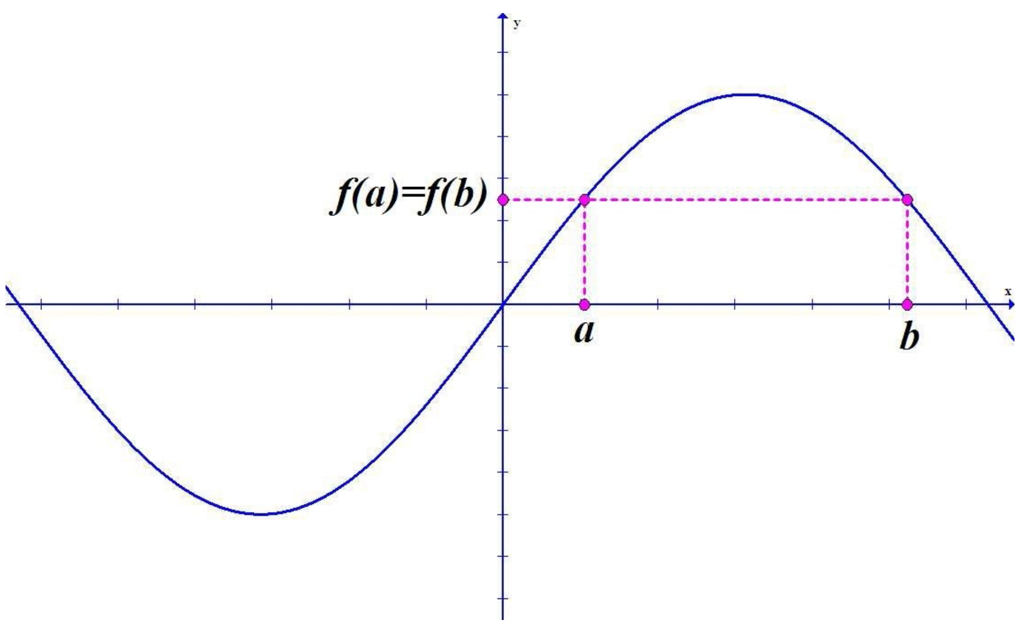


Figura 6. Función impar y no uno a uno

Fuente: propia

Unidad 2

Operaciones con funciones

Fundamentos de matemáticas

Autor: Danilo de Jesús Ariza

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina
MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Introducción

La aprehensión y representación de un fenómeno o una situación está vinculada en algunas situaciones con la combinación de dos o más hechos. La combinación de estos hechos se logra captar a través de operaciones con funciones o de nuevas funciones construidas con base en modelos funcionales sencillos. La figura 1 muestra los gráficos del cargo fijo y el cargo variable que constituyen el costo de utilización de un servicio telefónico durante un período de tiempo. Note que el costo total de utilización del servicio se puede apreciar en el gráfico constituido por la suma de los valores por cargo fijo y cargo variable.

Recomendaciones metodológicas

Se le recomienda al estudiante, como parte de la estrategia metodológica, realizar la cuidadosa lectura de esta parte del contenido, ya que el reto de aprendizaje autónomo al que se enfrenta así lo demanda. En lo que atañe específicamente a los temas de esta lectura se recomienda que elabore un esquema resumido de los mismos, particularmente los que se relacionan con operaciones con funciones, funciones definidas a trazos, composición de funciones e inversa de una función.

Todo lo anterior, además de contribuir a afianzar el conocimiento del tema, le brinda la posibilidad de tomar mayor confianza hacia lo que sigue luego de cada eje temático.

Desarrollo temático

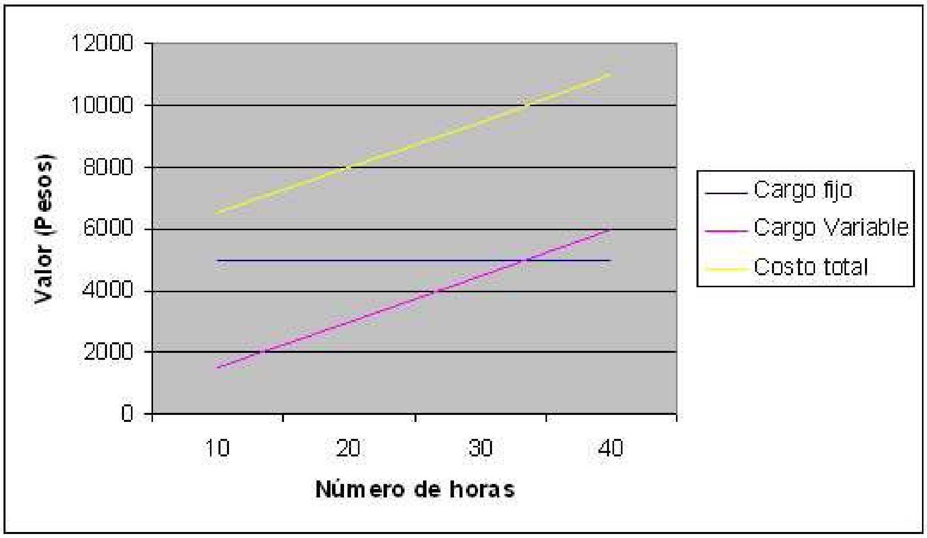


Figura 1: Costo de uso de un servicio público
Fuente: propia

Operaciones con funciones

Nuevas funciones son construibles operando dos o más funciones. Afirmar que se operan dos funciones debe entenderse como las operaciones que se realizan entre imágenes de funciones, mediante la utilización de operaciones entre números reales. Así que si f y g son funciones, se construyen funciones como $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$. Nótese que la imagen de un elemento mediante $(f+g)$ existe siempre y cuando $f(a)$ y $g(a)$ existan. Así que $D_{(f+g)}=D_f \cap D_g$.

Ejemplos:

1. Dadas las funciones f y g, entonces $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ para los reales x cuya imagen exista, es decir números reales x que estén tanto en el dominio de f como en el dominio de g, pero cuya imagen mediante g no sea cero. Así que si $f(x)=\sqrt{x^2-1}$ y $g(x)=x-2$, se tiene que:

   $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x-2}$. Además $D_f=(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$ y $D_g=R$, pero como se requiere que $g(x)\neq 0$, esto significa que $x\neq 2$. En resumen $D_{f/g}=(-\infty,-1]\cup[1,2)\cup(2,\infty)$.

2. Es interesante determinar propiedades que cumplan funciones construidas mediante operaciones con funciones. Un interrogante como: ¿El producto de dos funciones impares es una función impar? se puede abordar así: supongamos que f y g son funciones impares. Se tiene que $(fg)(x)=f(x)g(x)$.

   Además $D_{fg}=D_f\cap D_g$. Como f es función impar se cumple que $f(-x)=f(x)$ y como g es función impar sucede que $g(-x)=-g(x)$. Por lo tanto, para todo x del dominio de fg se cumple que:

   $$(fg)(-x)=f(-x)g(-x)=-f(x)(-g(x))=f(x)g(x)=(fg)(x)$$

   Como se ha mostrado que $(fg)(x)=(fg)(-x)$, esto significa que el producto de dos funciones impares es una función par.

Funciones definidas por trozos

Una forma de combinar funciones para obtener una nueva función consiste en el uso de funciones conocidas y definidas en intervalos de números reales. Estas funciones se denominan funciones definidas a trozos. Por trozo se entiende el intervalo o intervalos donde se define cada parte de la nueva función. Si f es una de estas funciones, es usual definirla así:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x \leq \text{-}1 \\ 1, & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ 3x, & \text{si } x \geq \frac{5}{2} \end{cases}$$

Ejemplos:

1. Para las funciones definidas a trozos se mantienen los elementos y propiedades descritos en lecturas anteriores o en esta lectura. A este respecto, se puede afirmar que para la función f declarada en el párrafo anterior se tiene que $D_f = (-\infty,-1] \cup (0,2] \cup \left[\frac{5}{2},\infty\right)$. También se señala que la gráfica de f no intercepta el eje vertical pues $0 \notin D_f$. Asimismo es posible realizar un esbozo de la gráfica de f , la cual luce como se muestra en la figura 2.

   Nótese la manera como se destaca gráficamente que un punto pertenece o no pertenece a la gráfica de f . El punto $(0,1) \notin Gr_f$, hecho que se destaca con un pequeño círculo “vacío”. En cambio el punto $(-1,1)$ se representa con un círculo “lleno” pues es un elemento de la gráfica de f .

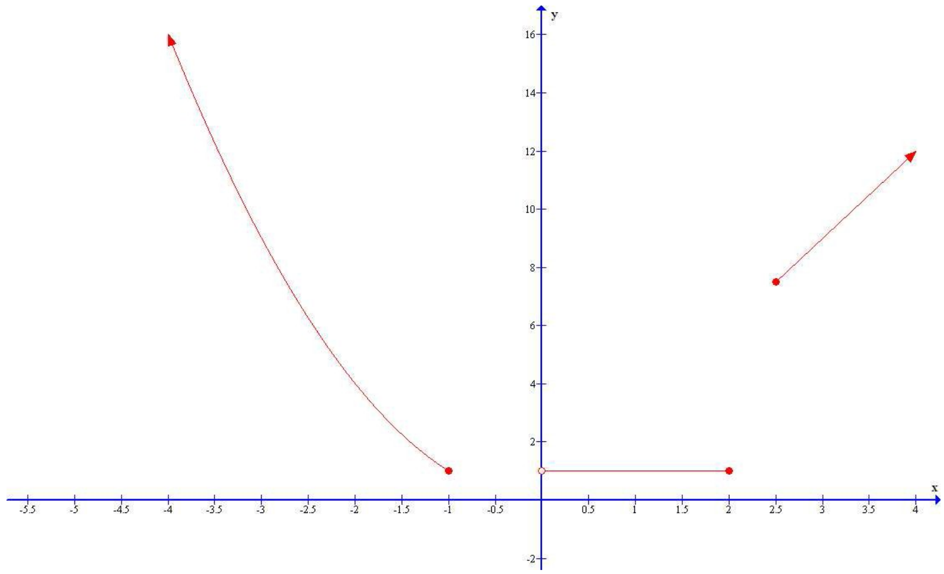


Figura 2: Gráfica de una función definida por trozos
Fuente: propia

2. Funciones de uso corriente son declaradas mediante funciones definidas por trozos. Es así, que si el valor absoluto de un número real x se define como la distancia en la recta numérica de x a 0 y se representa por $|x|$. Esto permite definir la función valor absoluto, de esta forma:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0, \\ -x. & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

3. Otra función de uso continuo es la función parte entera. Como parte entera de un número real x se toma el mayor entero que es menor o igual a x y se nota $\|x\|$. La figura 3 muestra la gráfica de esta función que se puede declarar como una función definida por trozos.

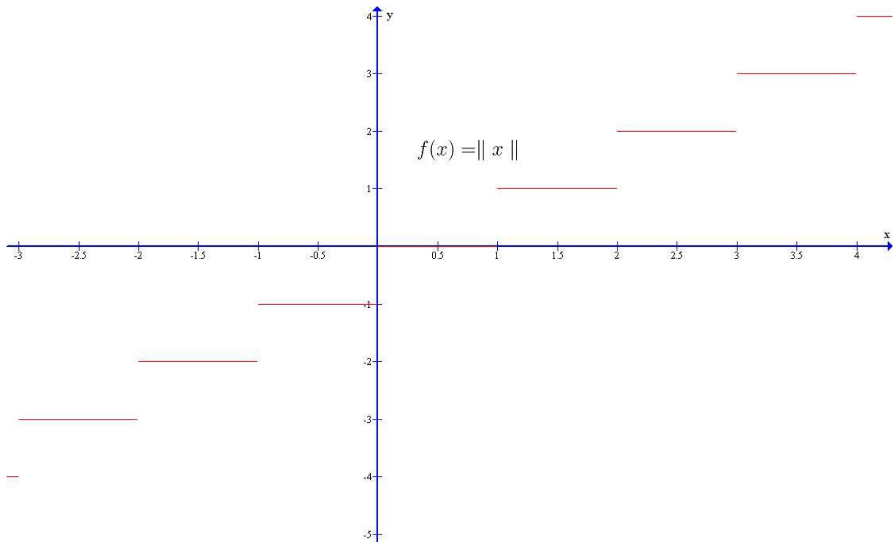


Figura 3: Gráfica de la función parte entera
Fuente: propia

Función compuesta

Un tipo particular de función se construye mediante la aplicación de una función g a un elemento x de su dominio, seguida de la aplicación de una función f al elemento $g(x)$ obtenido previamente. Estas funciones reciben el nombre de funciones compuestas.

La composición de las funciones f y g o también la compuesta de las funciones f y g, que se nota $f \circ g$, se describe como $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. Nótese que el lado derecho de la igualdad indica la secuencia de aplicación de las funciones. Asimismo para que exista la imagen de un elemento x mediante $(f \circ g)$ se requiere que x sea un elemento del dominio de g y que $g(x)$ sea un elemento del dominio de f. Por lo tanto, $D_{f \circ g} = \{x \in D_g | g(x) \in D_f\}$.

Ejemplos:

1. En general, dadas dos funciones f y g la imagen de un número real x mediante $f \circ g$ es diferente de la imagen de x mediante $g \circ f$. Así, si $f(x) = \frac{1}{x}$ y $g(x) = \sqrt{x+1}$ se tiene que $g(3) = 2$y $f(2) = \frac{1}{2}$, es decir que $f(g(3)) = \frac{1}{2}$. Pero $g \circ f(3) = g(f(3)) = g\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

2. Si se declaran las expresiones algebraicas que definen funciones f y g es posible construir la expresión que define la composición de f y g. Supongamos que $f(x) = x^2$ y $g(x) = \sqrt{x+1}$, se tiene entonces que $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\sqrt{x+1}\right) = \left(\sqrt{x+1}\right)^2$.

3. Pareciera natural escribir que $f(g(x)) = x+1$. Sin embargo esto es incorrecto, pues el dominio de esta última función es R. Pero la imagen de -3 mediante $f \circ g$ no existe, pues $g(-3)$ no existe. Así que es preciso señalar el dominio de $f \circ g$. Para ello se tiene que $D_f = R$ y $D_g = \{x \in R | x \geq -1\}$, en consecuencia afirmamos que $D_f \circ g = \{x \in R | x \geq -1$. Ahora, se describe la composición de f y g como $f(g(x)) = x+1$, con $x \geq -1$.

4. El examen de propiedades de las funciones compuestas es pertinente hacerlo con base en las propiedades dadas en lecturas anteriores ¿Será que la compuesta de dos funciones pares es una función par?

5. Supongamos que f y g son funciones pares, esto quiere decir qué $f(-x) = f(x)$ y $g(-x) = g(x)$ para elementos x en los dominios de f y g. Entonces, se tiene $(f \circ g)(-x) = f(g(-x)) = f(g(x))$ que significa que $f \circ g$ es una función par. Nótese que no fue necesario usar el hecho que f es par.

Función inversa

La idea de construir nuevas funciones a partir de funciones conocidas, hace pensar en la pregunta: ¿Si se intercambian el dominio y el rango de una función f y por consiguiente se intercambian los elementos de cada par ordenado de f, se obtiene una función? Se observa que si un elemento y del rango de f es imagen de al menos dos elementos diferentes $x1$ y $x2$ del dominio, al efectuar el intercambio propuesto se tendría un elemento y que poseería dos imágenes, lo cual contradice la definición de función. Por lo tanto, para lograr el propósito declarado es preciso que *f* sea una función uno a uno.

Así que si f es una función uno a uno, de dominio D_f y rango R_f, la función g de dominio R_f y rango D_f tal que si (x, y) es un elemento de f, entonces (y, x) es un elemento de g, se denomina la función inversa de f. Se nota como f^{-1}. Se afirma además que $f^{-1}(y) = x$ es equivalente a $f(x) = y$, para todo x en el dominio de f.

Ejemplos:

1. ¿Dadas dos funciones f y g, cómo se puede identificar si una de ellas es la inversa de la otra? De hecho, hay que mostrar que una de las funciones es uno, para asegurar la existencia de la función inversa. Ahora, supongamos que $g = f^{-1}$, entonces se tiene que $f(x) = y$ y por consiguiente $f^{-1}(y) = x$. O lo que es lo mismo, si $f(x) = y$ entonces $f(f^{-1}(y)) = y$ para todo elemento y en el rango de f. De la misma forma, si $f^{-1}(y) = x$ entonces $f^{-1}(f(x)) = x$, para todo elemento x en el dominio de f.

Así que si se quiere asegurar que la función inversa de $f(x) = \frac{1}{x-1}$ es $g(x) = 1 + \frac{1}{x}$, hay que mostrar que f es uno a uno y comprobar que si $g = f^{-1}$, entonces sucede que $f^{-1}(f(x)) = x$.

Para todo x en el rango de f y que $f^{-1}(f(x)) = x$ para todo x en el dominio de f.

Si asumimos que se ha mostrado que *f* es uno a uno, la segunda de las igualdades señaladas, se muestra así:

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}\left(\frac{1}{x-1}\right) = 1 + \frac{1}{\frac{1}{x-1}} = 1 + x - 1 = x$$

Se sugiere al lector mostrar la primera de estas igualdades.

2. Si se conoce la expresión algebraica que define una función f que es uno a uno, se puede intentar determinar la expresión que define la función f^{-1}. Para ello se hace uso de la igualdad $f\left(f^{-1}(x)\right)=x$, señalada en el ejercicio anterior. Así que si $f(x)=3x-2$, se tiene que f es uno a uno y por lo tanto existe f^{-1}.

Entonces $f\left(f^{-1}(x)\right)=3\left(f^{-1}(x)\right)-2=x$. Es decir $3\left(f^{-1}(x)\right)-2=x$, por lo que se sigue que $f^{-1}(x)=\dfrac{x+2}{3}$. Un ejercicio pertinente es mostrar que f y f^{-1} son inversas.

Ejercicios

1. Si $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ y $g(x)=\dfrac{1}{x^2-3}$, determine la expresión que define $f+g$ y especifique su dominio.

2. Dadas las funciones $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{x}}$ y $g(x)=3\sqrt{x}$ halle la expresión algebraica que define a $g-f$ y señale el dominio de esta función.

3. Utilice el procedimiento de la lectura 1, para esbozar la gráfica de $f(x)=|x|$.

4. Un procedimiento para graficar una función resultante de la suma o la diferencia de dos funciones dadas f y g, consiste en dibujar cada una de las funciones en un mismo plano cartesiano y a continuación para cada real x que sea posible, efectuar la suma o diferencia gráfica de las imágenes de x, mediante f y g.

   a) Si $f(x)=x$ y $g(x)=|x|$, trace la gráfica de $f+g$ Indique el dominio de esta nueva función.

   b) Si $f(x)=x$ y $g(x)=\|x\|$, trace la gráfica de $g-f$. Declare el dominio de la nueva función.

5. Muestre al menos un ejemplo de funciones f y g diferentes tales que $f\circ g=g\circ f$.

6. Dadas las funciones $f(x)=\frac{1}{x}, g(x)=\sqrt{x^2-1}$ y $h(x)=1+x^2$, determinar la expresión que define cada una de las funciones indicadas y señalar el dominio.

   a) $h \circ g$

   b) $f \circ g$

   c) $\frac{h \circ g}{f}$

7. Dada una función h es posible encontrar funciones f y g tales que $h = f \circ g$. Si $h(x)=\frac{1}{1-x^2}$ entonces $f(x)=\frac{1}{x}$ y $g(x)=1-x^2$ son funciones que cumplen la igualdad especificada. Muestre que la afirmación dada es verdadera. Ahora, escoja funciones f y g de tal forma que para cada una de las funciones h a continuación dadas se tenga que $h = f \circ g$.

   a) $h(x)=\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}$

   b) $h(x)=\frac{2}{1-\sqrt{x-1}}$

   c) $h(x)=\left\|1-|x|\right\|+1$

8. Determine si cada par de funciones f y g dadas son inversas entre sí.

   $f(x)=\sqrt[3]{2x+1},\ g(x)=\frac{x^3-1}{2}$

   a) $f(x)=2, g(x)=\frac{x}{2}$

   b) $f(x)=|x|,\ g(x)=x^2$

9. Muestre que cada una de las funciones dadas es uno y determine la expresión que define la función inversa.

a) $f(x) = \dfrac{x-1}{2-x}$

b) $g(x) = \sqrt[5]{\dfrac{1}{x-1}}$

Gráficas de funciones. Movimientos geométricos

Una de las formas como se intenta capturar la regularidad de un fenómeno o situación se soporta en el efecto de un movimiento sobre un objeto. Hay movimientos rígidos que mantienen la forma y el tamaño del objeto. Este es el caso de las traslaciones paralelas o las reflexiones respecto de un eje. Estos movimientos se ilustran respectivamente en las figuras 1 y 2.

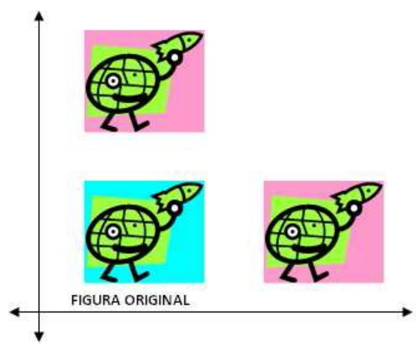


Figura 4: Traslaciones
Fuente: propia

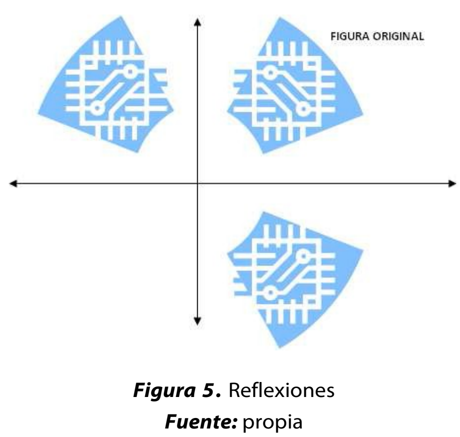


Figura 5. Reflexiones
Fuente: propia

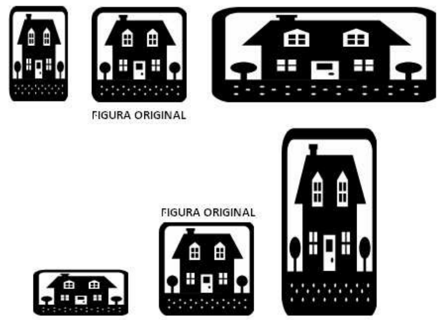


***Figura 6*.** Homotecia

Fuente: propia

Otro tipo de movimiento sobre un objeto es la homotecia, movimiento que transforma el objeto manteniendo la forma pero cambiando el tamaño, como se ilustra en la figura 3. Se utilizan los principios de los movimientos geométricos señalados, para generar procedimientos eficaces en las gráficas de funciones de valor real.

Traslación horizontal de una función

Si se conoce la gráfica de una función $y = f(x)$, se afirma que la gráfica de $f(x-h)$ con $h > 0$ se obtiene mediante la traslación de longitud h en el plano cartesiano, de la gráfica de f hacia la derecha. Dicha traslación se hace paralela al eje x. Este hecho permite afirmar que un punto (x, y) de la gráfica de f se convierte en el punto $(x+h, y)$ de la gráfica de la nueva función. Así que cada punto de la gráfica de f experimenta un cambio únicamente en su abscisa.

Análogamente la gráfica de $f(x+h)$ con $h > 0$ se obtiene mediante la traslación de longitud h en el plano cartesiano, de la gráfica de f hacia la izquierda. Esta traslación también se hace paralela al eje x. Ahora, un punto (x, y)de la gráfica de f se transforma en un punto $(x-h, y)$ de la gráfica de la nueva función.

Las transformaciones de una función son útiles para trazar las gráficas de nuevas funciones a partir de los modelos básicos, cuyas gráficas se realizaron en los ejercicios de la lectura 1.

Ejemplos:

1. Dada la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$ y su gráfica que se muestra en la figura 4, entonces las gráficas de $y = \sqrt[3]{x-3}$ y $y = \sqrt[3]{x+2}$ se pueden construir a partir de la gráfica de f, teniendo en cuenta que la gráfica de $y = \sqrt[3]{x-3}$ en realidad corresponde a la gráfica de $y = f(x-3)$ y que la gráfica de $y = \sqrt[3]{x+2}$ es la misma gráfica de $y = f(x+2)$. Las figuras 5 y 6 ilustran estas gráficas.

2. Si se conocen las gráficas de una función f y de otra función g obtenida por traslación paralela de f respecto del eje horizontal, y al menos un par ordenado de cada una de ellas (uno obtenido por la traslación del otro) es posible describir el movimiento que originó la segunda función.

3. De acuerdo con las figuras 7 y 8, se afirma que $g(x) = f\left(x - \frac{7}{2}\right)$. Explique la afirmación y luego exprese f como una traslación de g.

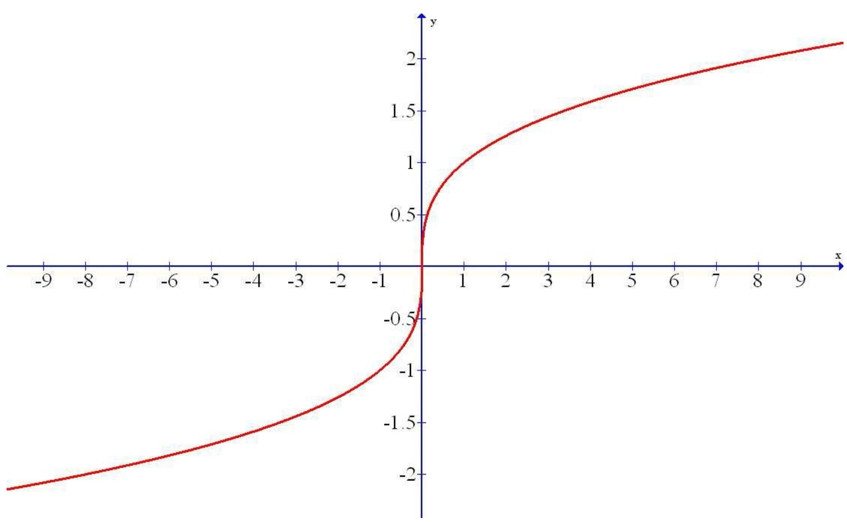


Figura 7. Gráfica de $y = \sqrt[3]{x}$

Fuente: propia

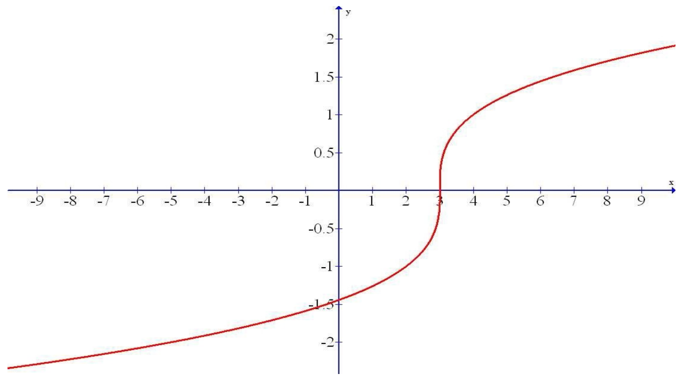


Figura 8: Gráfica de $y = \sqrt[3]{x-3}$

Fuente: propia

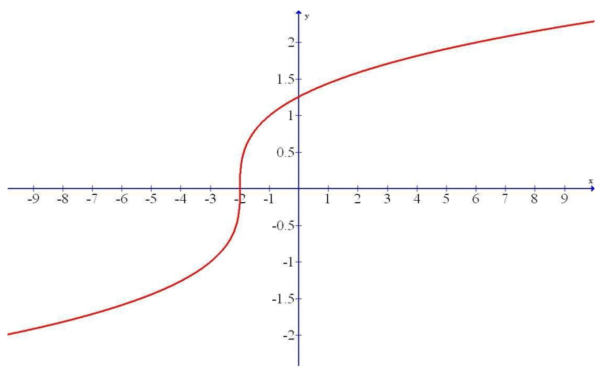


Figura 9. Gráfica de $y = \sqrt[3]{x+2}$

Fuente: propia

Traslación vertical de una función

Si se conoce la gráfica de una función $y = f(x)$, se afirma que la gráfica de $f(x)+k$ con $k > 0$ se obtiene mediante la traslación de longitud k en el plano cartesiano, de la gráfica de f hacia arriba. Dicha traslación se hace paralela al eje y. Este hecho permite afirmar que un punto (x, y) de la gráfica de f se convierte en un punto $(x, y+k)$ de la gráfica de $f(x)+k$. Así que cada punto de la gráfica de f experimenta un cambio únicamente en su ordenada.

De la misma forma la gráfica de $f(x)-k$ con $k>0$ se obtiene mediante la traslación de longitud k en el plano cartesiano, de la gráfica de f hacia abajo. Esta traslación también se hace paralela al eje y. Ahora, un punto (x,y) de la gráfica de f se transforma en un punto $(x,y-k)$ de la gráfica de $f(x)-k$.

Ejemplos:

1. Dada la función $f(x)=x^3$ y su gráfica que se muestra en la figura 9, entonces las gráficas de $y=x^3-2$ y $y=x^3+3$ se pueden construir a partir de la gráfica de f , teniendo en cuenta que la gráfica de $y=x^3-2$ en realidad corresponde a la gráfica de $y=f(x)-2$ y que la gráfica de $y=x^3+3$ es la misma gráfica de $y=f(x)+3$. Las figuras 10 y 11 ilustran estas gráficas.

2. La traslación es un movimiento geométrico que se puede describir como una función, pues a cada punto del plano cartesiano que pertenece a la figura a trasladar, se asigna uno y sólo un punto del mismo plano. Así que la obtención de una función g a partir de una función f se puede describir mediante una composición de dos traslaciones. Esta situación se muestra en las figuras 12 y 13, pues la función g se puede obtener mediante la composición de una traslación horizontal de f de longitud 2 a la derecha y la traslación vertical hacia arriba de longitud 3 de la nueva función. Nótese que se ha usado información de las gráficas (pares ordenados de las funciones f y g) para indicar los movimientos señalados. De acuerdo con esta descripción se asegura que $g=f(x-2)+3$.

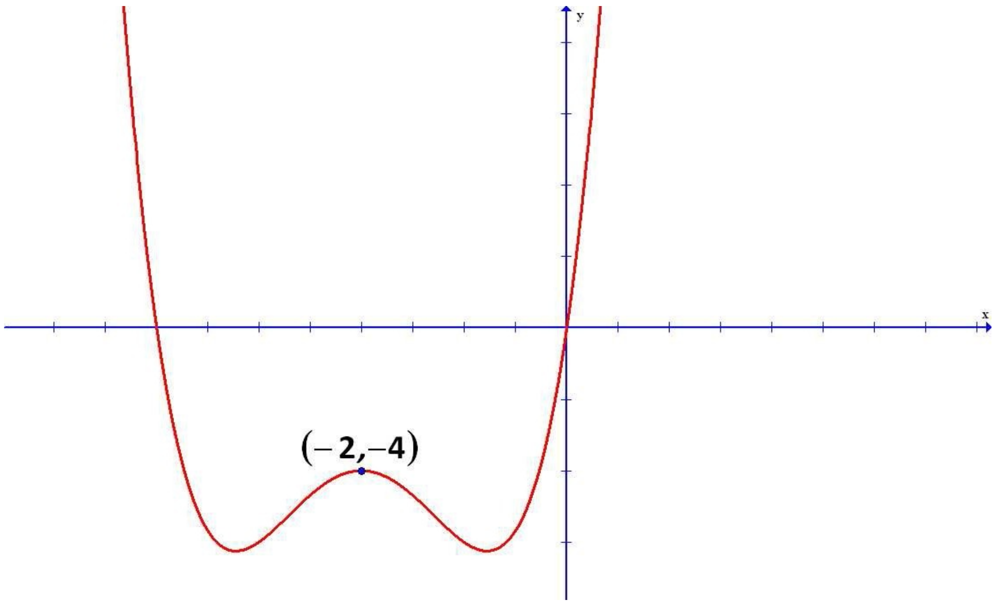


Figura 10. Gráfica de $y = f(x)$

Fuente: propia

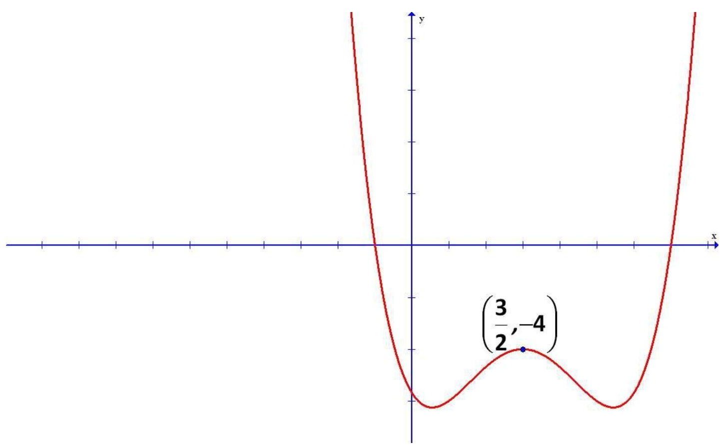


Figura 11. Gráfica de $y = g(x)$

Fuente: propia

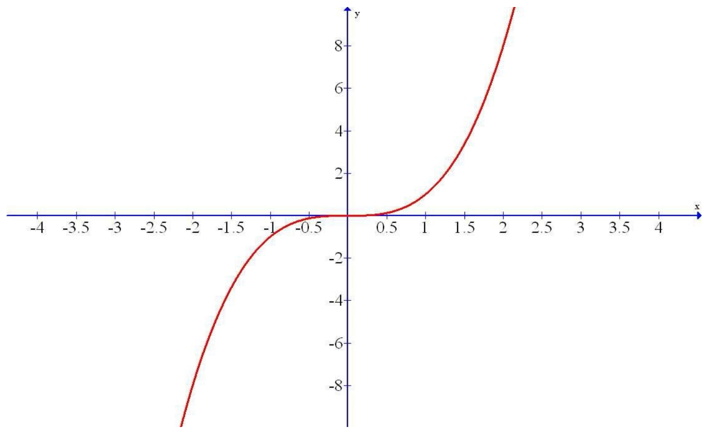


Figura 12. Gráfica de $y = x^3$
Fuente: propia

Describa la función g como una composición de dos traslaciones, la primera de ellas una traslación vertical y la segunda una traslación horizontal.

Reflexión de una función respecto de los ejes coordenados

Afirmamos que al reflejar un punto $P(x, y)$ respecto del eje horizontal del plano cartesiano se obtiene el punto $Q(x, -y)$ es decir P y Q son equidistantes de dicho eje. Similarmente, al reflejar el punto $P(x, y)$ respecto del eje vertical se consigue el punto $R(-x, y)$. Por lo tanto, P y R están a la misma distancia del eje vertical del plano cartesiano.

Así que si f es una función, se obtienen nuevas funciones g y h al reflejar cada punto de la gráfica de f respecto del eje horizontal y del eje vertical respectivamente. Nótese que para cada x elemento de los dominios de f, g y h se tiene que $g(x) = -f(x)$ x) y $h(x) = f(-x)$.

Ejemplos:

1. Si $f(x) = \sqrt{x}$ cuya gráfica se muestra en la figura 14, las gráficas que se obtienen al reflejar f con respecto a los ejes horizontal y vertical se aprecian en las figuras 15 y 16.

2. Una forma interesante de verificar que una función es par o impar, se hace mediante reflexiones de la función.

Así que si f es una función y al reflejarla respecto al eje vertical se obtiene la misma función f afirmamos que f es par. Ahora, se afirma que una función g es impar si al reflejarla con respecto de uno de los ejes coordenados y luego reflejar la función obtenida con respecto al otro eje, se obtiene la misma función g. Las figuras 17 y 18 ilustran las afirmaciones.

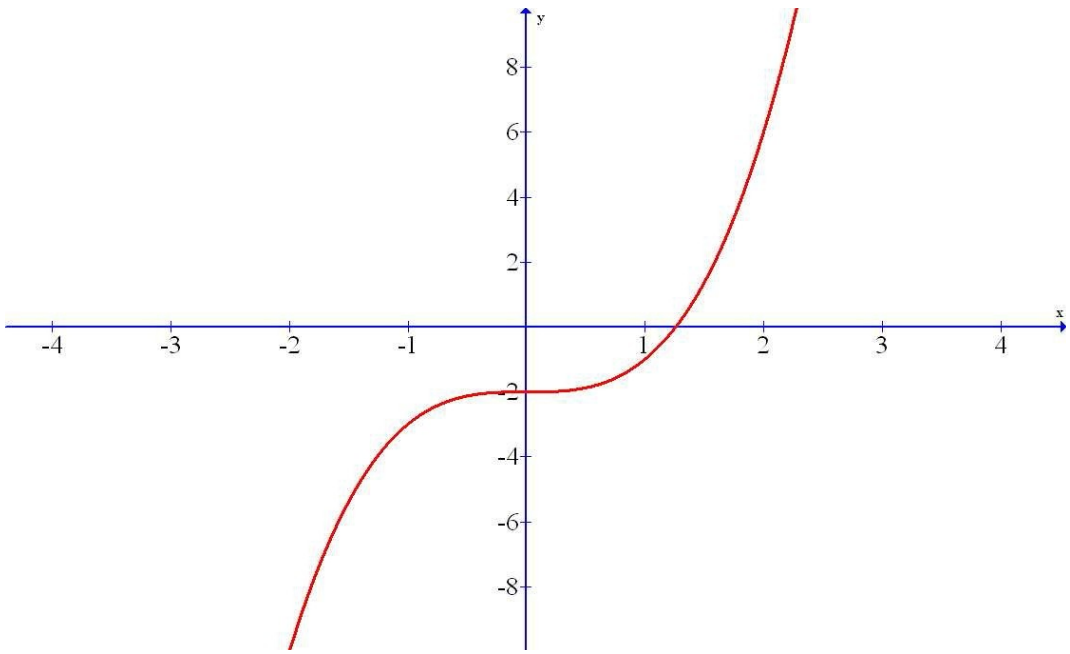


Figura 13: Gráfica de $y = x^3 - 2$

Fuente: propia

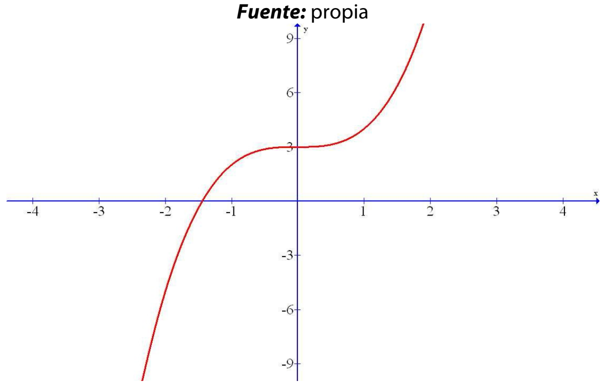


Figura 14: Gráfica de $y = x^3 + 3$

Fuente: propia

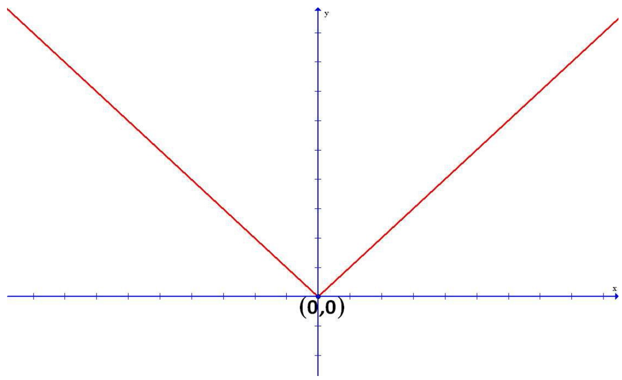


Figura 15: Gráfica de $y = f(x)$
Fuente: propia

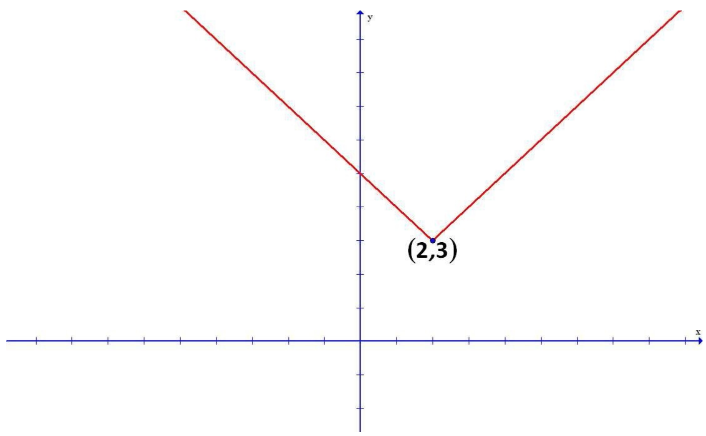


Figura 16: Gráfica de $y = g(x)$
Fuente: propia

Deformaciones horizontal y vertical de una función

Como deformación horizontal de una función se denomina al movimiento geométrico que al actuar sobre la gráfica de la función la dilata (alarga) o contrae (acorta) horizontalmente, En este sentido, un punto $P(x, y)$ de la gráfica de una función f se transforma en un punto $Q\left(\frac{1}{k}x, y\right)$ de la gráfica de una función g, donde k es un real positivo diferente de 1. Si $k > 1$ entonces se afirma que la gráfica de f se contrae horizontalmente en un factor 1 para obtener la gráfica de g. Ahora, si $k < 1$, entonces f se dilata horizontalmente en un factor 1 para hallar la gráfica de g.

Se afirma además, que si g es la función que se obtiene por deformación horizontal de la función f en un factor k, con k un real positivo diferente de 1, entonces para cada x en el dominio de g, se tiene que $g(x) = f(kx)$.

La deformación vertical de una función es un movimiento geométrico que transforma la gráfica de una función dada en la gráfica de otra función, la cual es una dilatación o una contracción vertical de la función dada. Así que un punto $P(x, y)$ de la gráfica de una función f se transforma en un punto $R(x, ay)$ de la gráfica de una función g con un número real positivo y diferente de 1. La gráfica de g es una dilatación vertical de f si $a > 1$ y es una contracción vertical de f si $a < 1$.

Análogamente, si g es la función que se obtiene por deformación vertical de la función f en un factor a, con a un real positivo diferente de 1, se tiene que $g(x) = af(x)$.

Ejemplos:

1. Dada la función f, mediante deformación horizontal se obtienen las funciones g y h cuyos gráficos se muestran en las figuras 19 y 20. Se nota que cada punto de la función g tiene la forma $(2x, y)$ con (x, y) un punto de la función f, o también que cada punto de g es una dilatación horizontal en un factor 2 de un punto de f.

   Se afirma entonces que $g(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)$

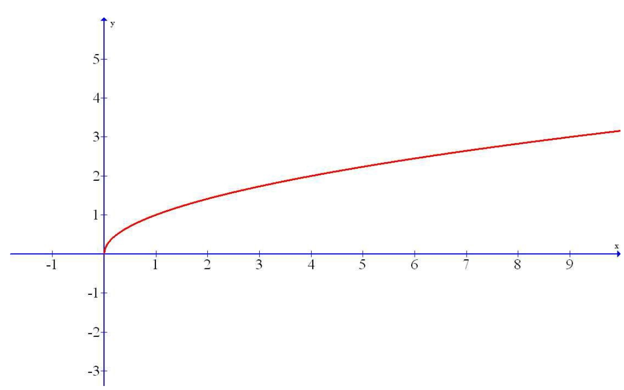


Figura 17: Gráfica de $y = \sqrt{x}$

Fuente: propia

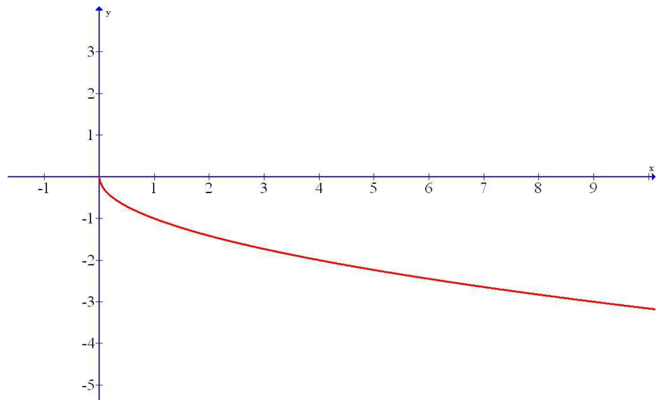


Figura 18: Gráfica de $y = -\sqrt{x}$

Fuente: propia

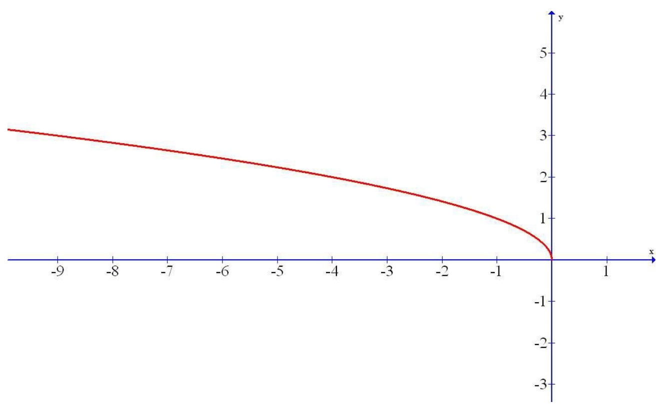


Figura 19. Gráfica de $y = \sqrt{-x}$

Fuente: propia

De la misma manera, cada punto de la función h tiene la forma $\left(\frac{x}{3}, y\right)$ con (x, y) un punto de la función f, o sea que cada punto de h se obtiene por dilatación horizontal en un factor que $h(x) = f(3x)$.

2. Si $f(x) = x^2$, las funciones $g(x) = 3x^2$ y $h(x) = \frac{x^2}{2}$ se obtienen mediante deformaciones verticales de f . Se tiene entonces que $g(x) = 3xf(x)$ es decir que g es una dilatación vertical de f en un factor 3. De la misma forma $h(x) = \frac{1}{2} f(x)$, o sea que h es una contracción vertical de f en un factor $\frac{1}{2}$. Las figuras 21 y 22 ilustran 2 estas situaciones.

3 Unidad 3

Funciones polinómicas

Fundamentos de matemáticas

Autor: Danilo de Jesús Ariza

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina
MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Introducción

Las funciones son objetos matemáticos con los cuales se representan situaciones relacionadas con fenómenos del mundo físico o con problemas de diversas disciplinas del conocimiento. Mediante funciones se modelan situaciones como el costo de un servicio público que tiene una tarifa fija y unos costos variables de acuerdo con el tiempo de utilización en un lapso de tiempo. Se modelan también los costos de producción de un artículo, o el movimiento de una partícula, o el tamaño de una población a lo largo de un período de tiempo. Estas representaciones son importantes para tomar decisiones relacionadas con el bienestar de un grupo humano. Por lo tanto, se propone un estudio detallado de modelos sencillos de funciones, pero de gran potencia para representar una amplia gama de situaciones.

La propuesta de trabajo utiliza los conocimientos explorados en las lecturas anteriores y por lo tanto se usan para identificar los aspectos generales de un modelo. Así también se plantea una aproximación a los elementos particulares del modelo y que contribuyen a tener un mejor conocimiento de su eficacia al usarlos en la solución de problemas.

Recomendaciones metodológicas

Parte de la estrategia metodológica recomendada al estudiante es realizar la cuidadosa lectura del presente documento, ya que así lo requiere el reto aprendizaje autónomo al que decidió enfrentarse. Se recomienda que realice los repasos y refuerzos requeridos antes de enfrentase a ellos. Específicamente se requiere total claridad de procedimientos algebraicos como la factorización, ya que los elementos de las mismas son el soporte para realizar cálculos posteriores.

Al igual que en las cartillas anteriores, aquí se recomienda la verificación de los cálculos numéricos presentados. Lo anterior, además de contribuir a afianzar el conocimiento del tema, le brinda la posibilidad de tomar mayor confianza hacia lo que sigue a cada eje temático.

Desarrollo temático

El modelo polinómico

Una función de la forma $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n$ reales fijos, con $a_n \neq 0$ y n entero no negativo, se denomina la función polinómica de grado n.

El dominio de una función polinómica es el conjunto de números reales, pues para cualquier x número real, la suma que define la función es también un número real. Los ceros de f (si existen), se obtienen al resolver la ecuación $0 = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$. La solución de este tipo de ecuaciones plantea interrogantes, algunos de los cuales abordaremos en el estudio.

Observe que $f(0) = a0$ luego la gráfica de cualquier función polinómica intercepta el eje vertical en $y = a0$.

Algunas funciones particulares de este modelo son:

La función $f(0) = a0$ que se denomina la función constante.

La función $f(x) = a1x + a0$ con $a1 \neq 0$ que se denomina la función polinómica de grado 1.

Los dos tipos anteriores de funciones se conocen con el nombre de función lineal, pues la gráfica de ellas es una línea recta.

La función $f(x) = a2x^2 + a1x + a0$ con $a2 \neq 0$, que se denomina la función polinómica de grado 2 o función cuadrática.

La función lineal

Se ha afirmado que la expresión $f(x) = a1x + a0$ representa una función lineal. Sin embargo es corriente escribir esta expresión en la forma $f(x) = mx + b$, con m y b reales conocidos.

Si se desea determinar los ceros de f , entonces se tiene que $0 = mx + b$, con lo cual $x = -\frac{b}{m}$ con $m \neq 0$. Por lo tanto, la gráfica de una función lineal que intercepte el eje horizontal, lo hace en $x = -\frac{b}{m}$.

Veamos la interpretación geométrica para el valor m de este modelo. Cada par de puntos de una recta en el plano cartesiano cumplen con la siguiente propiedad:

El cociente entre la variación de sus ordenadas (es decir, la variación vertical al pasar de un punto a otro) y la variación de sus abscisas (es decir la variación horizontal al pasar de un punto a otro) es constante. A este cociente se le llama la pendiente de la recta y se nota como m. La figura 1 muestra la propiedad mencionada. Note que:

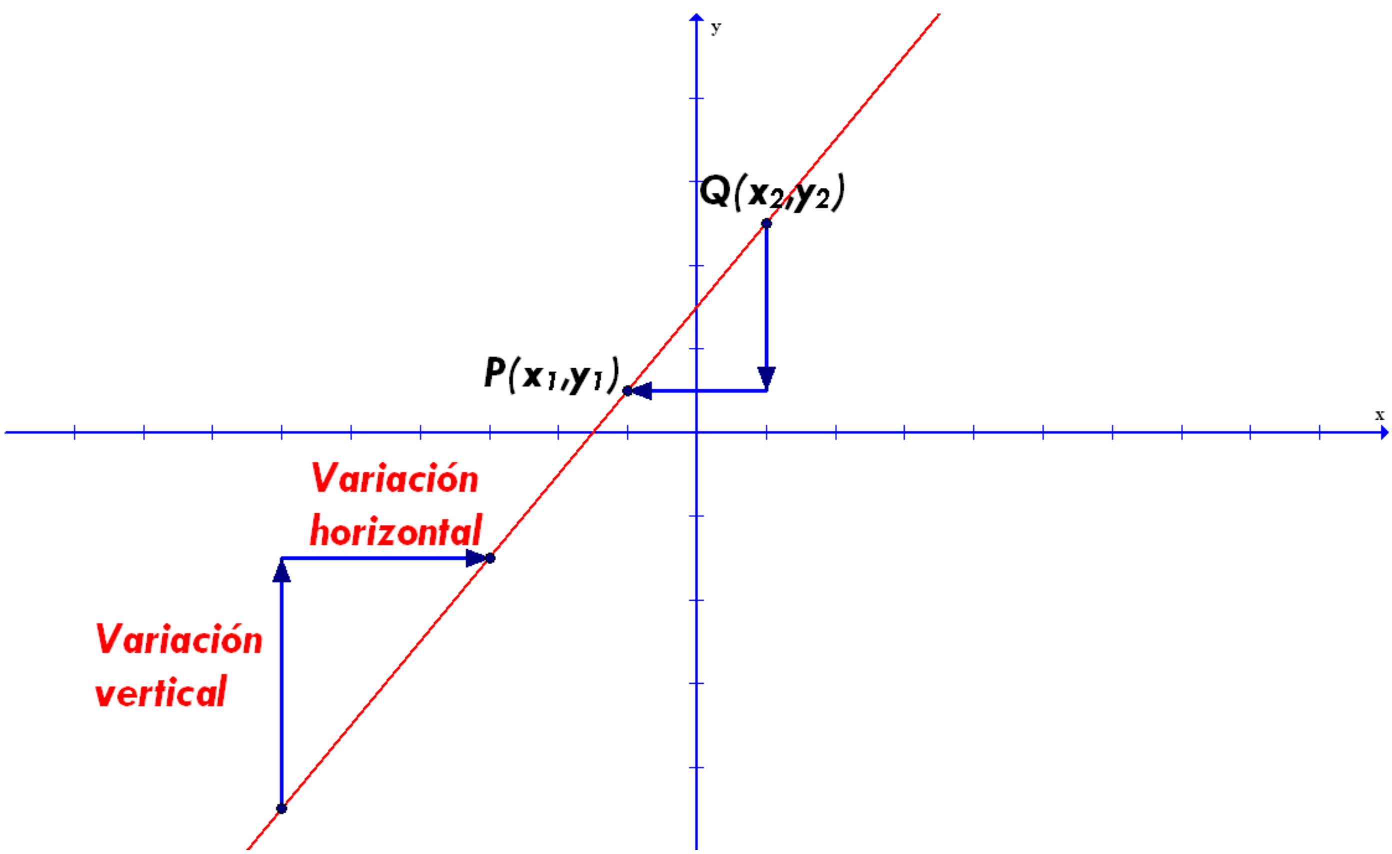


Figura 1. Interpretación de la pendiente de una recta

Fuente: propia

Si $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ son puntos de una recta, la pendiente m se puede expresar de la forma $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ con $x_2 - x_1 \neq 0$. Explique este hecho.

Ahora, como $f(0) = b$, afirmamos que la recta que tiene ecuación $f(x) = mx + b$, o $y = mx + b$ intercepta el eje vertical en $y = b$.

Ejemplos:

1. Graficar la función $f(x) = \frac{2}{3}x + 3$. Como $b = 3$, entonces el punto $P(0,3)$ pertenece a la recta. Y como $m = -\frac{2}{3}$ entonces se puede asumir que el desplazamiento vertical para pasar del punto P a un punto Q de la recta es –2 (este valor se interpreta como un desplazamiento vertical hacia abajo en el plano cartesiano) y el desplazamiento horizontal para pasar de P a Q es 3 (este valor se interpreta como un desplazamiento horizontal hacia la derecha en el plano cartesiano). Con esta información se consigue otro punto de la recta (el punto Q) y se grafica la función como se muestra en la figura 2.

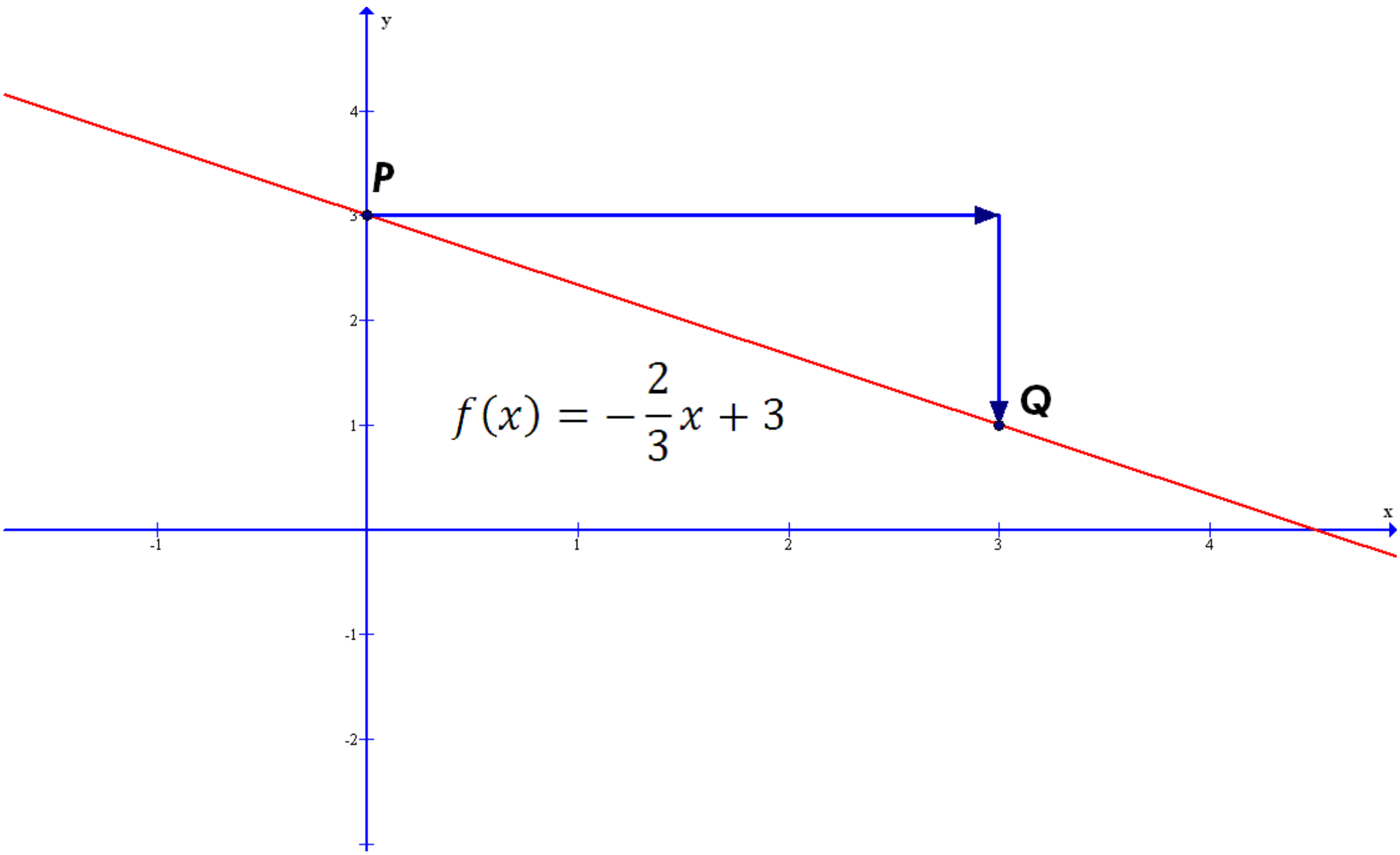


Figura 2. Gráfica de una función lineal

Fuente: propia

2. Si se compara con 0 la pendiente de una recta es factible anticipar la gráfica que se ha de trazar. Para ello basta analizar el cociente $m = \frac{\delta y}{\delta x}$ que señala la forma como hay que desplazarse de un punto P a otro punto Q de la recta en cuestión. δy indica el desplazamiento vertical entre las ordenadas de los puntos y δx indica el desplazamiento horizontal entre las abscisas de tales puntos. Por ejemplo si $m > 0$, entonces, se puede asumir que ambos desplazamientos son positivos, o ambos son negativos. Las figuras 3, 4 y 5 muestran las rectas a dibujar para los posibles valores de m.

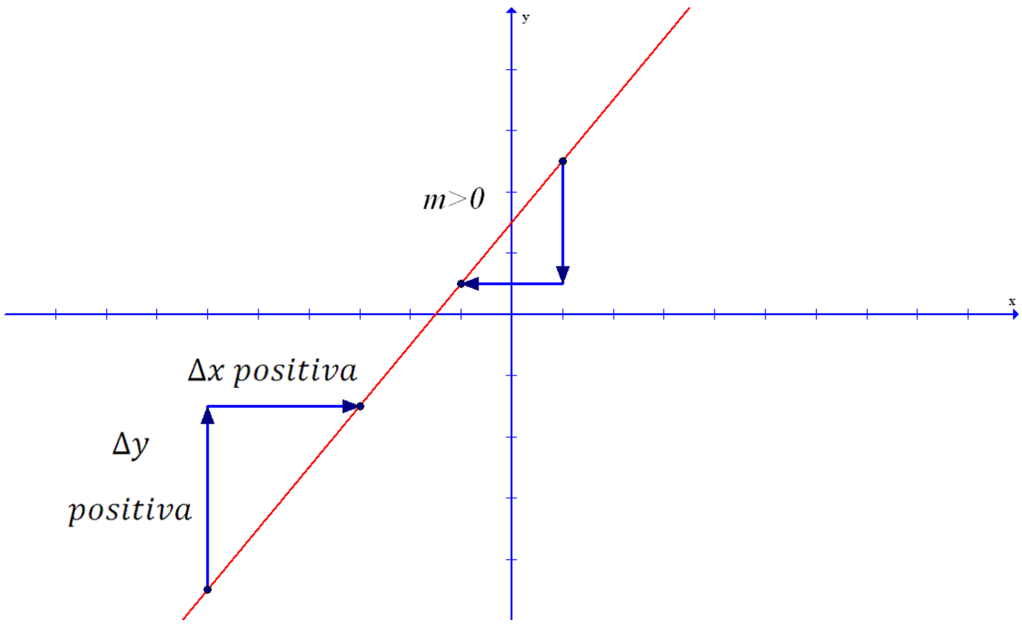


Figura 3. Recta de pendiente positiva

Fuente: propia

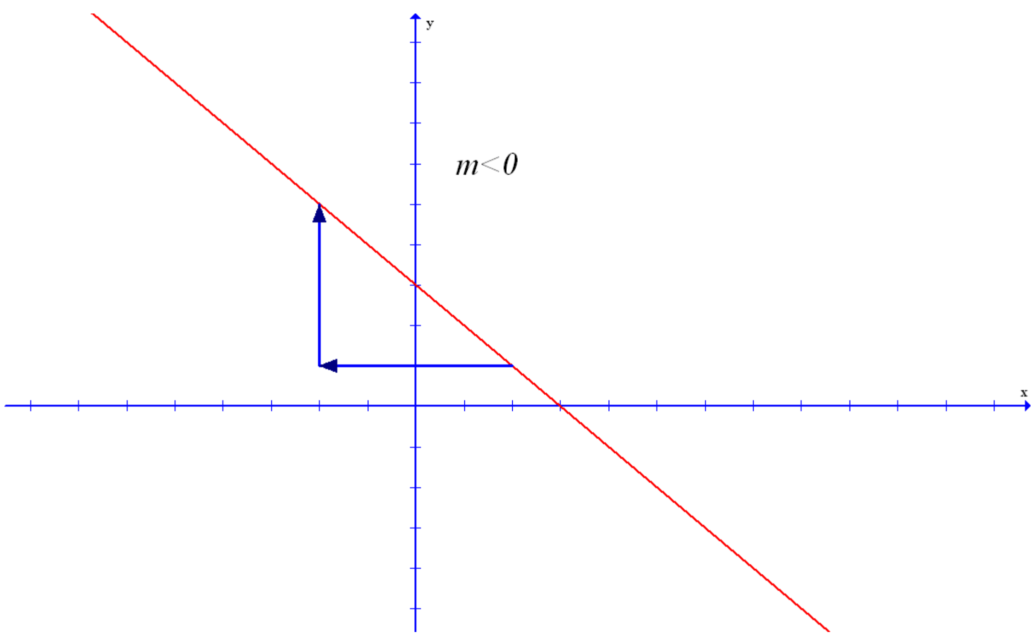


Figura 4. Recta de pendiente negativa

Fuente: propia

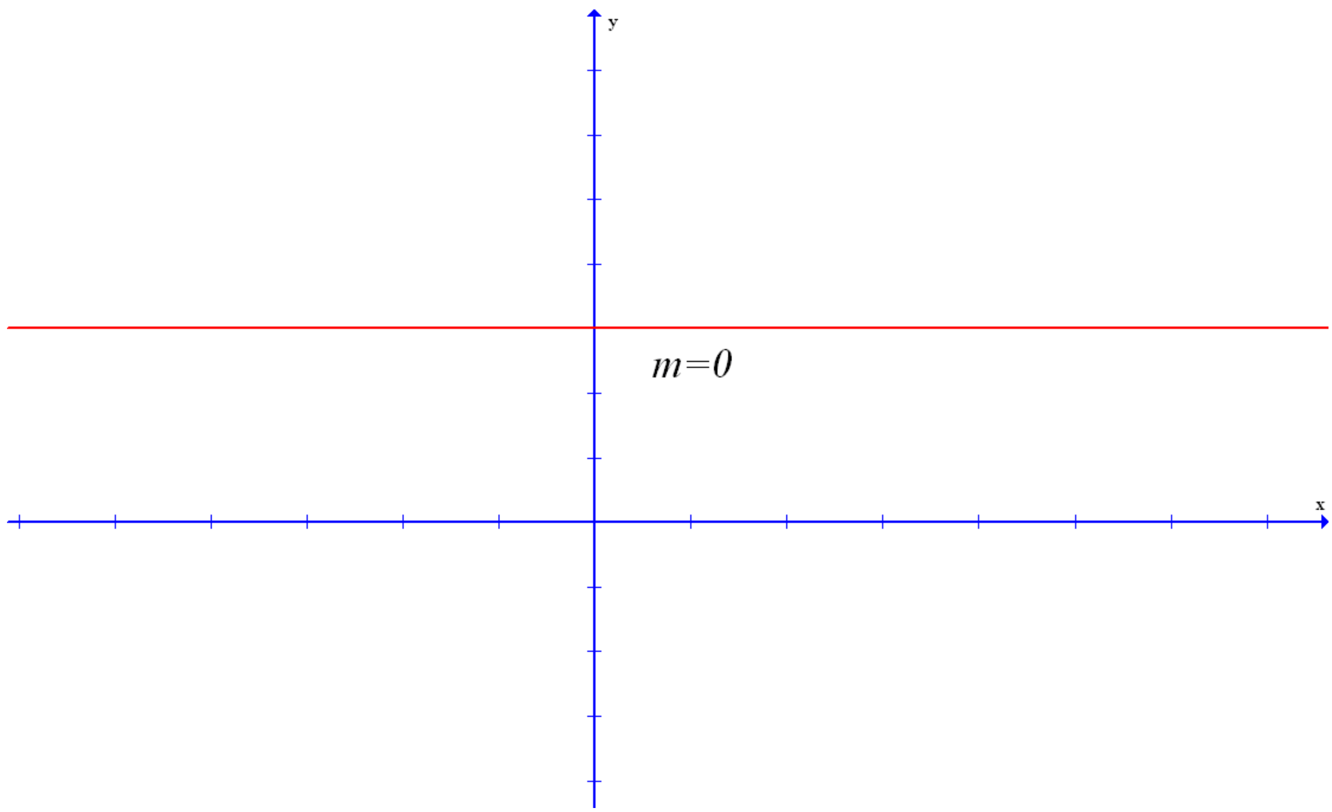


Figura 5. Recta de pendiente 0

Fuente: propia

3. Afirmaciones:

   Dos rectas no verticales son paralelas si y sólo si sus pendientes son iguales. Dos rectas son perpendiculares si y sólo si el producto de sus pendientes es -1.

   Determinar la expresión algebraica que representa la recta que pasa por $(2,-1)$ y es perpendicular a la recta de ecuación $6x+3y-2=0$.

Como las rectas son perpendiculares, basta determinar la pendiente de una de ellas para conocer el valor de la pendiente de la otra recta. La ecuación $3x + 6y - 2 = 0$ equivale a la ecuación $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$ ¿Por qué? Note que la última ecuación está escrita de la forma $y = mx + b$ por lo tanto, afirmamos que $m = -\frac{1}{2}$.

Así que si designa $m = 1$ la pendiente de la recta que se pide, tenemos que $m \cdot m1 = -1$. Por lo tanto, $m1 = 2$. (¿Por qué?).

Se tienen entonces dos datos de la recta: el punto $(2,-1)$ y la pendiente, es decir $m = 2$. Así que para conocer la ecuación que representa la recta pedida se usa el modelo $y = mx + b$ y se reemplazan los datos así:

$-1 = 2 \cdot (2) + b$, de donde $b = -5$. En consecuencia, el modelo que representa la recta solicitada es $y = 2x - 5$.

4. Una aplicación interesante de la función lineal y de los elementos de una recta se hace en un área de matemáticas, denominada geometría analítica. En esta área se demuestran afirmaciones acerca de figuras geométricas usando el plano cartesiano y algunas nociones asociadas a puntos del plano. Este trabajo es de gran utilidad, pues por ejemplo probar que un triángulo dado es rectángulo requeriría del uso de instrumentos de medición, los cuales no generan seguridad, ni son aceptados en matemáticas como una demostración objetiva, es decir desprendida del uso de los sentidos.

   Es usual formular un problema de geometría analítica en estos términos: demostrar que el triángulo de vértices $A(3,-4)$, $B(2,1)$ y $C(-3,0)$ es un triángulo rectángulo. De hecho, el triángulo se puede dibujar en un plano cartesiano, e incluso se puede señalar qué lados del triángulo forman el ángulo recto. Sin embargo, si se usa el hecho que dos rectas son perpendiculares si el producto de sus pendientes es –1, se pueden determinar las tres pendientes de las rectas que contienen los lados del triángulo y verificar qué pares de pendientes tiene como producto –1. Así se tendría:

   $mAB = -5;\ mAC = -\frac{2}{3}$ y $mBC = \frac{1}{5}$. Y se afirma que $mAB \cdot mBC = -1$. Por lo tanto, las rectas que contienen los lados AB y BC son perpendiculares, osea que estos lados forman un ángulo de 90°. En suma ΔABC es rectángulo. Verifique gráficamente el hecho que se ha probado.

El modelo cuadrático

Estudiamos a continuación aspectos relacionados con una función de la forma $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$, con $a_2 \neq 0$ y conocida usualmente con el nombre de función cuadrática. Es corriente que este modelo se exprese de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$.

Como se ha referido en otro aparte, el dominio de esta función es el conjunto de los números reales. Identificar los ceros de la función (si existen), significa dar solución a la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, denominada como ecuación cuadrática.

Se presenta a continuación la demostración de la validez de una fórmula que resuelve una ecuación cuadrática. Siga cuidadosamente cada una de los argumentos de tal manera que logre explicar el porqué de cada uno de ellos.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$ax^2 + bx = 0$$ Propiedad de igualdad.

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) = -c$$ Factorización.

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) = -c + \frac{b^2}{4a}$$ Completar un binomio cuadrado perfecto.

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$ Factorización.

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$ Propiedad de igualdad.

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm b^2 - 4ac}{2a}$$ Despejar el término que contiene la variable.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ Fórmula para resolver la ecuación cuadrática dada.

Por lo tanto, si $b^2 - 4ac = 0$, la gráfica de la función cuadrática intercepta al eje horizontal en un punto, pero si $b^2 - 4ac > 0$, la gráfica intercepta a dicho eje en dos puntos. De hecho si $b^2 - 4ac < 0$, la gráfica de la función no intercepta el eje horizontal.

Como $f(0) = c$, entonces la gráfica de f intercepta el eje vertical $y = c$. Se han descrito entonces los elementos básicos de la función cuadrática y los cuales permiten esbozar su gráfica.

Se complementan los anteriores elementos de la función cuadrática con otros hechos propios de ella.

La gráfica de una función cuadrática es una curva denominada parábola. El número real a que es coeficiente de x^2 en la expresión general de la función determina la forma de la parábola. Si $a > 0$ se afirma que la parábola abre hacia arriba, y si $a < 0$ entonces la parábola abre hacia abajo. Esta afirmación se ilustra en las figuras 6 y 7.

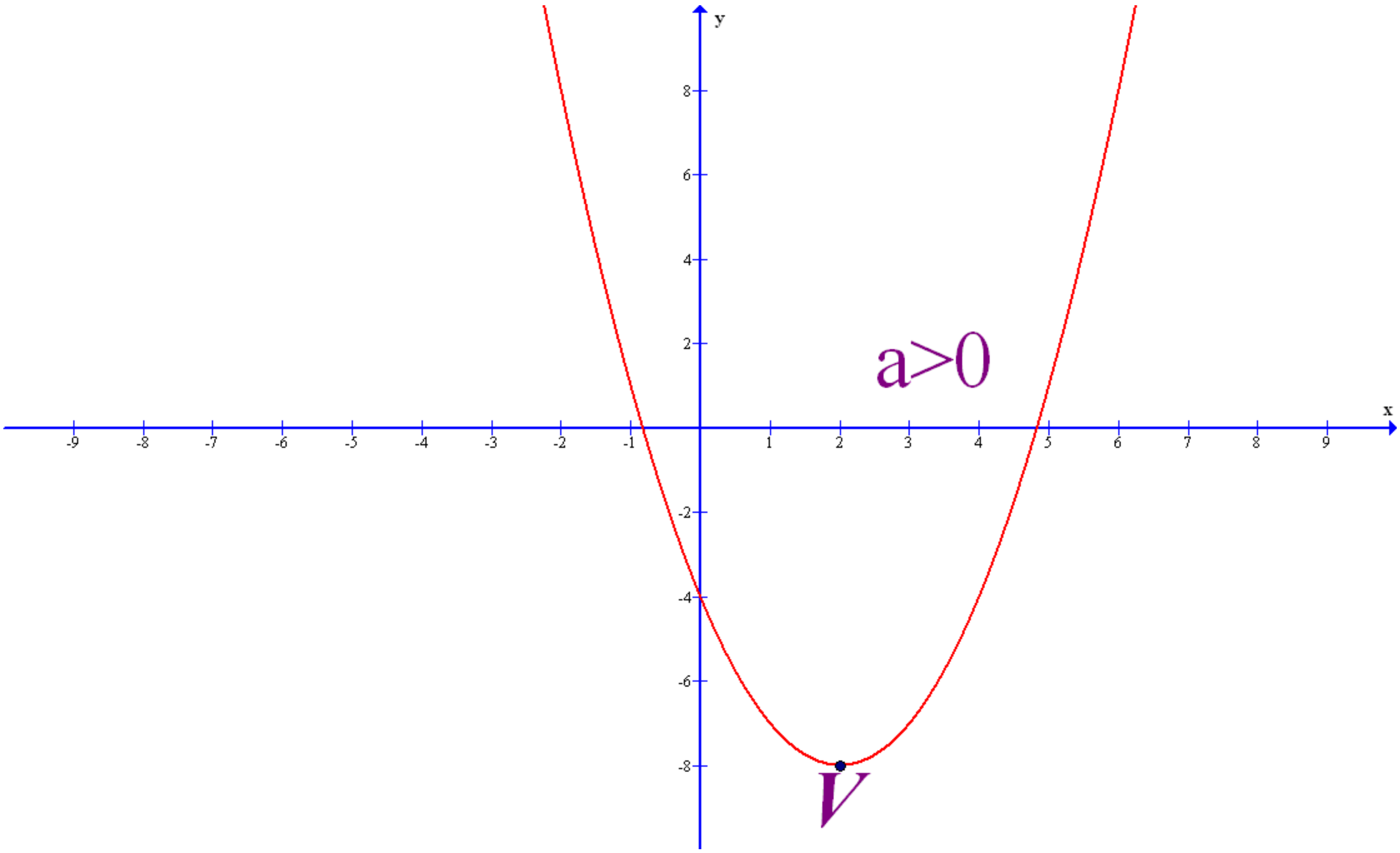


Figura 6. Parábola que abre hacia arriba

Fuente: propia

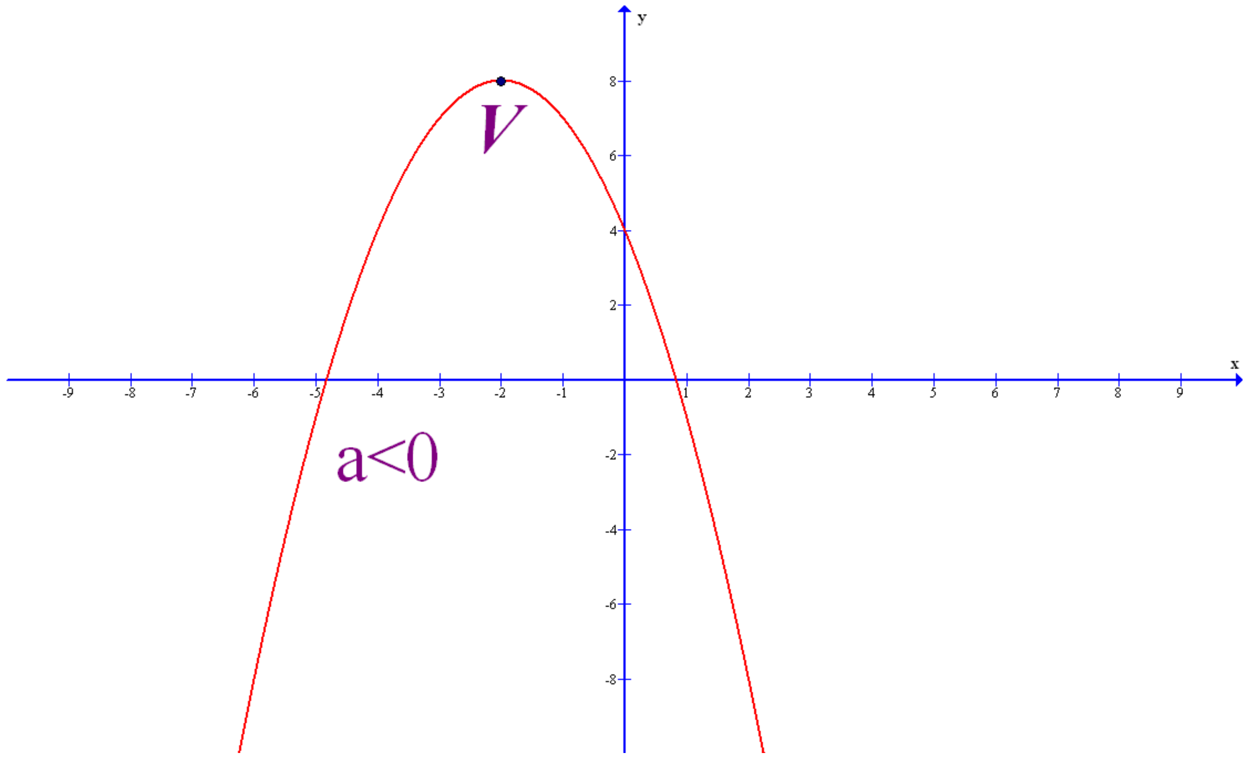


Figura 7. Parábola que abre hacia abajo

Fuente: propia

- El punto V que se ha señalado en las parábolas de las figuras 6 y 7 se denomina vértice de la parábola y es un punto esencial para graficar una función cuadrática. Nótese que $f(x) = ax^2 + bx + c$ equivale a $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{4ac - b^2}{4a}$. Esta equivalencia se obtiene siguiendo un procedimiento similar al desarrollado para hallar la fórmula que resuelve una ecuación cuadrática.

- Si $a > 0$, observe que la expresión $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ es positiva y tendrá su mínimo valor cuando $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = 0$, es decir, si $x+\frac{b}{2a} = 0$, o cuando $x = -\frac{b}{2a}$. Nótese que si $a > 0$ la función f toma su valor mínimo en el vértice, es decir cuándo $x = -\frac{b}{2a}$. En consecuencia, las coordenadas del vértice son $\left(-\frac{b}{2a}; f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$. Con un razonamiento similar se puede argumentar que sí $a < 0$, las coordenadas del vértice de la parábola son también $\left(-\frac{b}{2a}; f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$.

- Finalmente, se afirma que la gráfica de una función cuadrática es simétrica respecto a la recta vertical que pasa por el vértice de la parábola.

Ejemplos:

1. Con los elementos dados en el aparte teórico, se puede esbozar fácilmente la gráfica de una función como $f(x) = -x^2 + 4x + 5$. Afirmamos entonces que la parábola que representa a f abre hacia abajo. f tiene ceros en $x = -5$ y $x = 1$. (Verifique este hecho). Como $f(0) = 5$, la gráfica de f intercepta el eje vertical en $y = 5$.

   Y finalmente como $-\frac{b}{2a} = 2$ entonces las coordenadas del vértice de la parábola son $(2,9)$ (compruebe esta última afirmación). La figura 8 muestra la gráfica de f .

2. Propiedades de las funciones son susceptibles de examinarse también en funciones cuadráticas. Por ejemplo: ¿Es la función $g(x) = 2x^2 + 3x + 1$ uno a uno? Intuitivamente una función cuadrática no es uno a uno, pues cada elemento del rango de g , excepto la imagen del vértice es imagen de dos elementos del dominio.

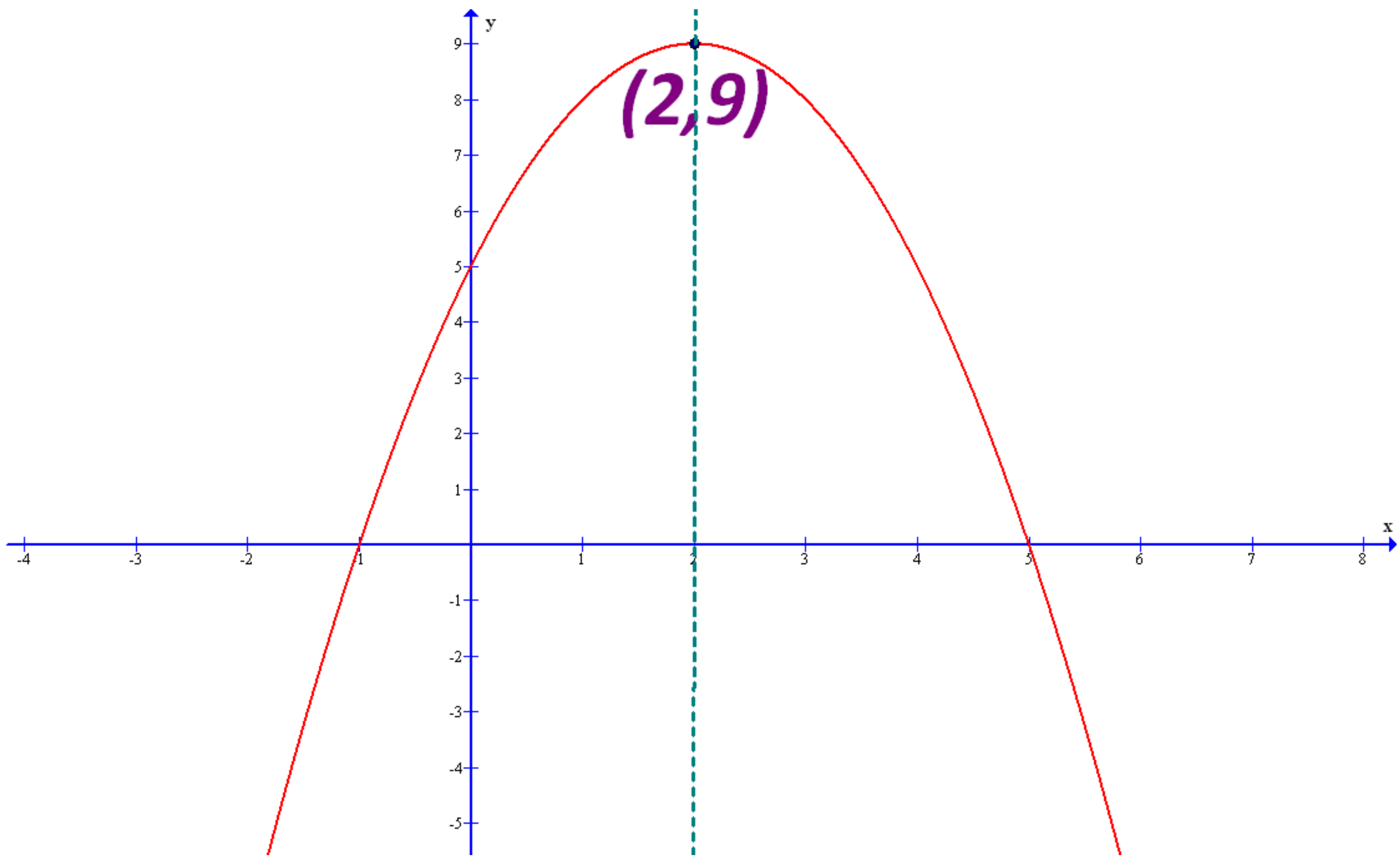


Figura 8. Gráfica de $f(x) = -x^2 + 4x + 5$

Fuente: propia

Mostramos esta afirmación con un ejemplo. Veamos si existe más de un elemento del dominio cuya imagen mediante g sea 1. Se tiene entonces que $1 = 2x^2 + 3x + 1$, ecuación que equivale a $2x^2 + 3x = 0$. Nótese que esta ecuación cuadrática que es resoluble con la fórmula descrita en la teoría, también se puede resolver por factorización así:

$$2x^2 + 3x = 0$$

$x(2x3) = 0$ ***Factorización***

$x = 0$, o, $2x - 3 = 0$ ***Propiedad de los reales***

$$x = 0,\ \text{o},\ x = \frac{3}{2}$$

Se han encontrado dos elementos del dominio de f cuya imagen es 1. Así que f no es uno a uno. Este procedimiento es usual en matemáticas para demostrar que una afirmación es falsa. Se denomina demostración por contraejemplo.

Surgen dificultades cuando se intenta determinar (si existen) los ceros de f, pues es necesario resolver una ecuación de la forma $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$, que lleva a interrogantes sobre posibles formas de solución. Es factible que se presenten ecuaciones como $3x^3 - x = 0$, o, $2x^4 + 3 = 0$, o, $2x^5 - x - 1 = 0$, etc. De hecho, las dos primeras ecuaciones son susceptibles de resolverse con métodos elementales. Por ejemplo en la primera de ellas, la factorización combinada con una propiedad de los reales, permite su solución (muestre este hecho). En la segunda de ellas, un análisis de la expresión del lado izquierdo de la igualdad lleva a afirmar que la ecuación no tiene solución real (verifique esta afirmación). Pero, ¿cómo resolver la última de las ecuaciones dadas? Este es un trabajo que se propone posteriormente.

Un hecho que se usará para adelantar el estudio propuesto, se refiere a la gráfica de una función polinómica. Asumimos que al representar en el plano cartesiano una función polinómica se obtiene una curva suave y continúa. Suave significa que no presenta picos y continua se entenderá como que no presenta interrupciones en el trazo. La figura 9 ilustra esta aseveración.

La pregunta a resolver es: ¿Mediante qué elementos de una función polinómica se logrará un trazo como el de la figura 9? Nótese por que la función de la gráfica tiene cinco ceros. Para esbozar la gráfica de una función polinómica, se usarán entonces herramientas generales que se han estudiado en lecturas anteriores, tales como la transformación de una función mediante movimientos geométricos, o la identificación de dominio e intercepto con los ejes coordenados. Pero además se recurrirá a algunas particularidades del modelo. Veamos:

Una característica de la gráfica de una función polinómica se puede apreciar en la figura 9. Obsérvese que las imágenes de la función tienen un mismo signo entre dos ceros contiguos. Por ejemplo: entre $x = -4$ y $x = 0$, la función f (es decir las imágenes) toma valores únicamente positivos. O, por ejemplo ¿qué valores toma f entre $x = 3$ y $x = 6$?

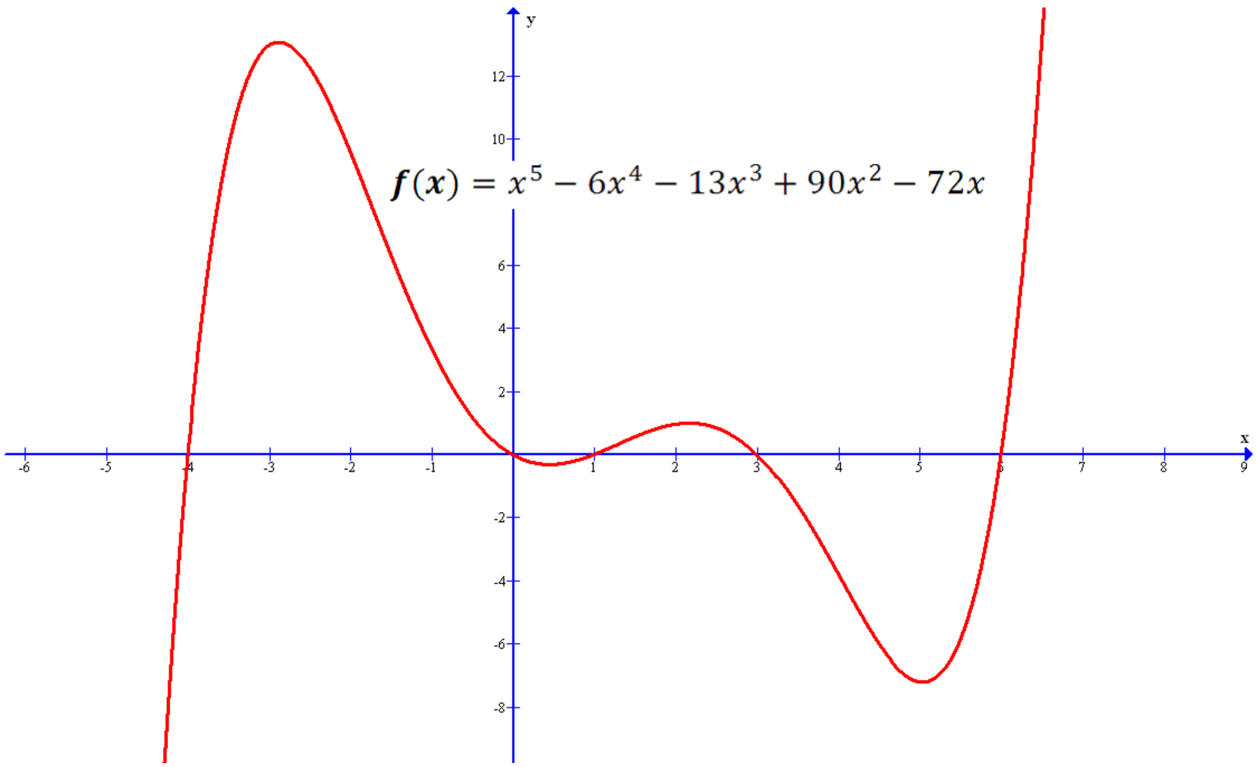


Figura 9. Gráfica de función polinómica de grado 5

Fuente: propia

- Otra característica de f se refiere al comportamiento de las imágenes de f cuando x toma valores positivos muy grandes. Se aprecia que en este caso, las imágenes de f asumen valores positivos también muy grandes. Es decir, note que en el intervalo $(6, \infty)$ la función es creciente. O también se puede caracterizar a f en el intervalo $(-\infty, -4)$, es decir, cuando los valores de x se alejan hacía $-\infty$. Describa este comportamiento para el caso de la función f que estamos considerando.

Ejemplos:

1. Para esbozar la gráfica de $f(x) = -2x^5 + 3$, recurrimos entonces a la transformación mediante movimientos geométricos, de uno de los modelos que hemos llamado "básicos" y que se estudió en la primera lectura. Dicho modelo es $g(x) = x^5$. Observe las siguientes transformaciones sucesivas de g, que permiten obtener f.

   $2g(x) = 2x^5;$ $\qquad -2g(x) = -2x^5;$ $\qquad -2g(x) + 3 = -2x^5 + 3.$

   Así los movimientos geométricos que se efectúen sobre g para obtener f son en su orden:

   - Dilatar verticalmente f por el factor 2.
   - Reflejar la función obtenida con respecto al eje x.
   - Trasladar 3 unidades hacia arriba la última función graficada.

   Las figuras 10, 11, 12 y 13 muestran cómo se obtiene f a partir de g. Revise cuidadosamente el efecto de cada movimiento geométrico sobre la función original g.

2. Si se propone esbozar la gráfica de $h(x) = x^3 - 7x^2 + 14x - 8$ y se intenta usar las herramientas utilizadas en el ejemplo anterior, se aprecia que elementos como el dominio de la función y el y-intercepto de la gráfica de h se determinan sin mayor dificultad. ¿Es cierto que $D_h = R$,y que el y-intercepto de la gráfica de f es $y = -8$? Corrobore o refute estas afirmaciones.

   Aparece un problema interesante al tratar de determinar los ceros de la función, pues es preciso resolver la ecuación $x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0$. Con los conocimientos básicos de resolución de ecuaciones, sin duda que se trata de factorizar el polinomio del lado izquierdo de la igualdad, con la expectativa que se logren encontrar factores lineales o cuadráticos, los cuales generan ecuaciones que son conocidas en su resolución.

Las formas usuales de factorización, no posibilitan el objetivo antes mencionado. Se recurre entonces a una forma particular de factorización denominada: división sintética. Se presentan a continuación los hechos que soportan esta forma de factorizar. El método en sus aspectos operativos se describe en documento aparte.

Entre los hechos que respaldan la forma de factorización especificada se tienen:

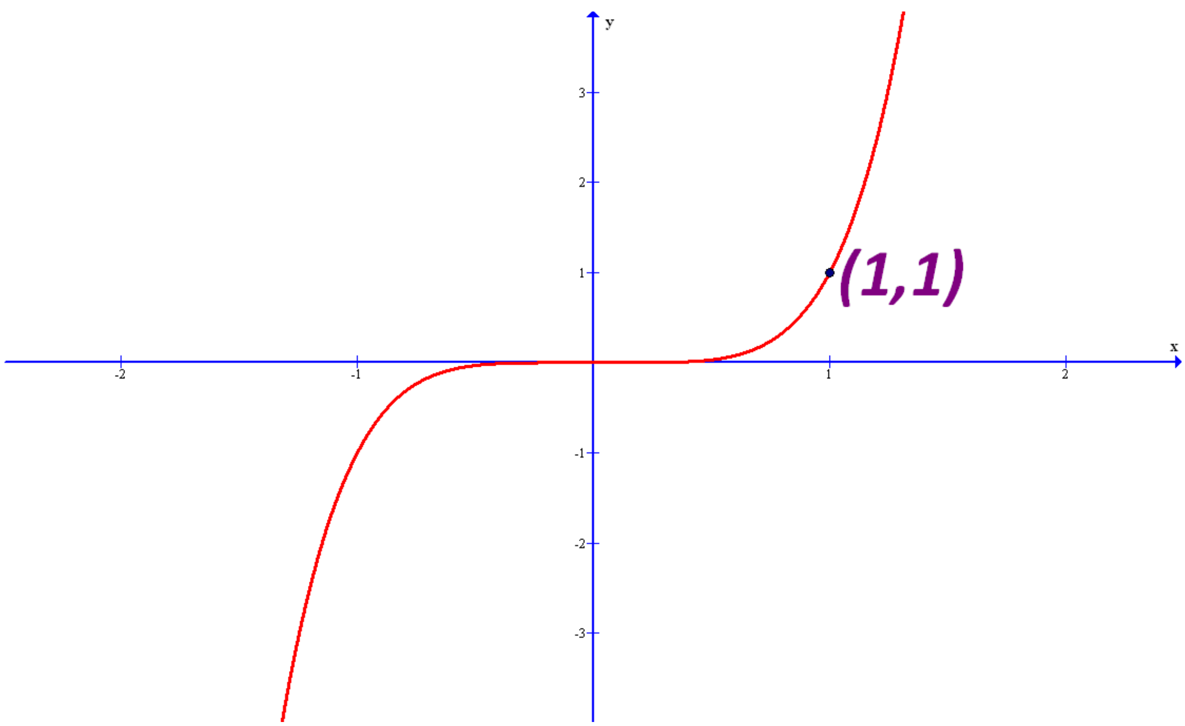


Figura 10. Gráfica de $g(x) = x^5$

Fuente: propia

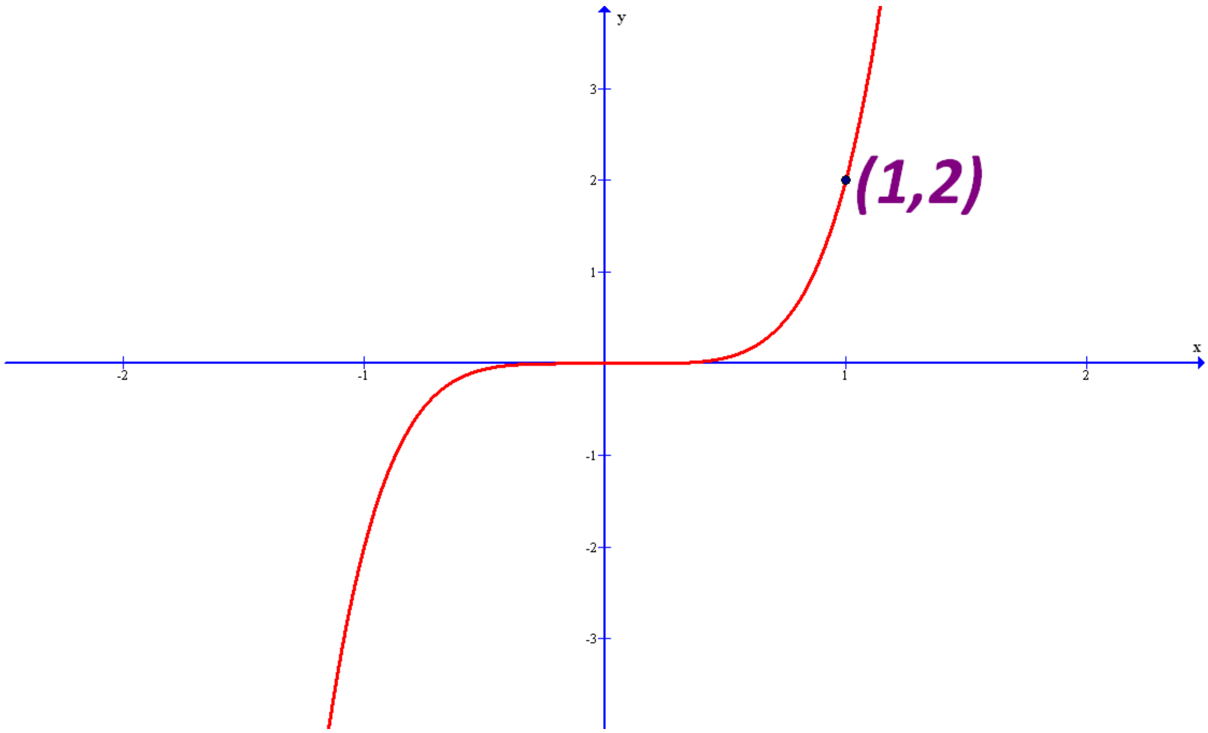


Figura 11. Gráfica de $y = 2x^5$

Fuente: propia

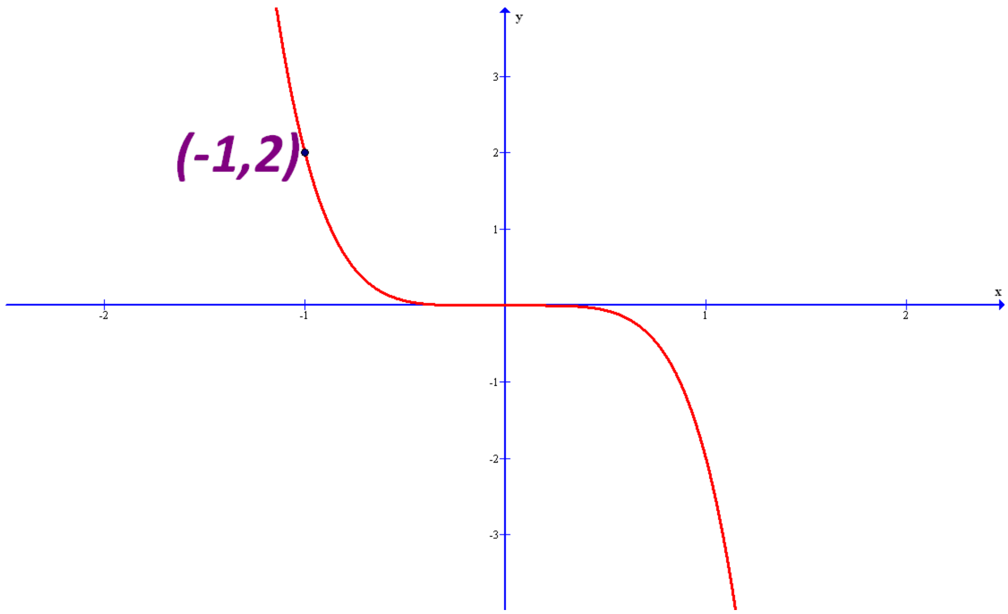


Figura 12. Gráfica de $y = -2x^5$

Fuente: propia

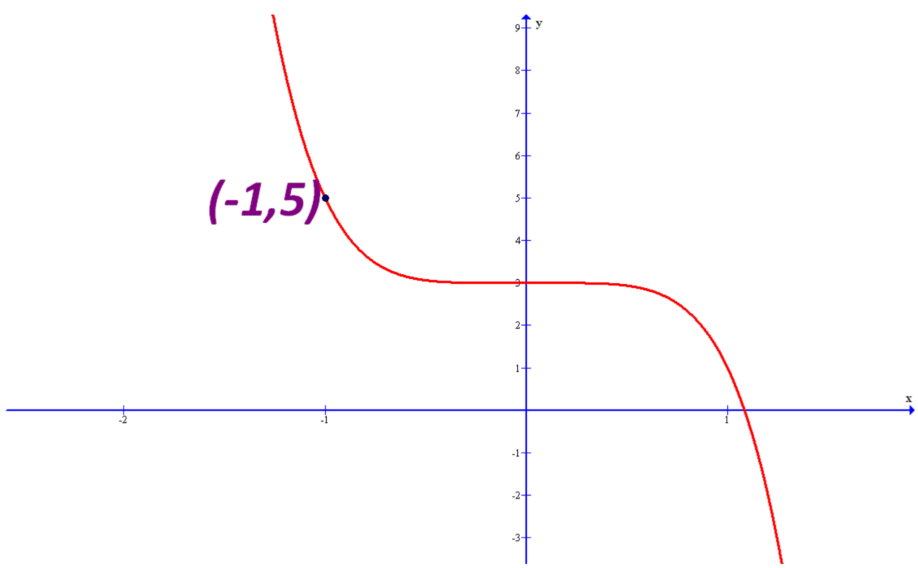


Figura 13. Gráfica de $f(x) = -2x^5 + 3$

Fuente: propia

- Si un polinomio $p(x)$ se divide entre un polinomio de la forma $x-a$ con a un número real fijo, se obtiene un cociente $c(x)$ y un residuo $r(x)$, entonces se afirma que $p(x)=(x-a)c(x)+r(x)$. Esta afirmación se sustenta en el algoritmo de la división. Se observa además que si $r(x)=0$ entonces $p(x)=(x-a)c(x)$ y por lo tanto se concluye que $x-a$ y $c(x)$ son factores de $p(x)$. Esta es una forma de justificar el proceso habitual de factorización.

  Por ejemplo si $p(x)=2x^2+x-6$ entonces $2x^2+x-6=(x+2)(2x-3)$, es decir $x+2$ y $2x-3$ son factores de $p(x)$. La factorización usual de un trinomio posibilita este resultado. Pero, también se puede obtener mediante la división de $p(x)$entre $x+2$. Ahora, la situación es cómo trasferir estos hechos al polinomio $x^3-7x^2+14x-8$, pues no se conoce forma de factorizar, ni conocemos el polinomio $x-a$ que posibilite una división exacta que conduzca a la factorización deseada.

- Si en la expresión $p(x)=(x-a)c(x)+r(x)$ se toma $x=a$ se obtiene que $p(a)=r(a)$ con lo cual se concluye que el residuo de dividir $p(x)$ entre $x-a$ se obtiene mediante $p(a)$. Este hecho se conoce como el teorema del residuo. Note que este teorema evita el procedimiento de división entre $p(x)$y $x-a$ para obtener el residuo.

- Otro hecho relacionado con la búsqueda de un factor de la forma $x-a$ para un polinomio $p(x)$, se establece a partir de aspectos como el que afirma que si *a* es un cero de la función polinómica $p(x)$ entonces $p(a)=0$. (¿Por qué es correcta esta última afirmación?). La anterior aseveración conduce al denominado teorema del factor el cual dice que $x-a$ es un factor de $p(x)$si y solo sí $p(a)=0$.

- A la pregunta: ¿Es $x-1$ un factor de $p(x)=x^3-7x^2+14x-8$?, la respuesta es afirmativa, pues $p(1)=0$. Así que ya se tendría un factor de $p(x)$. Sin embargo las preguntas naturales surgen: ¿Cómo se encontró este factor $x-1$, es decir cuáles son los ceros de $p(x)$? y ¿cuál es el factor por el cual multiplicar a $x-1$ para obtener el polinomio $p(x)$?

- La primera de las últimas dos preguntas se resuelve en parte acudiendo a la afirmación que establece que si el polinomio $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ tiene ceros racionales estos tienen la forma $\frac{m}{n}$ donde m es un factor de $a0$ y n es un factor de a_n.

Para el caso que nos ocupa, si $p(x) = x^3 - 7x^2 + 14x - 8$ tiene ceros racionales estos tienen la forma $\frac{m}{n}$ con m factor de –8 y n factor de 1. Esto quiere decir que si los factores de 8 son $\{\pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm 8\}$ y los factores de 1 son $\{\pm 1\}$ entonces los posibles ceros racionales de $p(x)$ son $\{\pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm 8\}$. Con la aplicación reiterada del teorema del residuo se logra identificar que 1 , 2 y 4 son los ceros racionales de $p(x)$. En consecuencia $x - 1$, $x - 2$, $x - 4$ son factores de $p(x)$.

Nótese que en el párrafo anterior se logran determinar los ceros racionales de $p(x)$, pero el polinomio podría tener ceros irracionales. Para ello se recurre a la afirmación que un polinomio de grado n tiene a lo más n ceros reales. Por lo tanto, en nuestro ejemplo, los únicos ceros de f son los referidos.

- Si regresamos al problema original: Trazar la gráfica de $p(x) = x^3 - 7x^2 + 14x - 8$, la siguiente tabla muestra el comportamiento de p en intervalos generados por sus ceros. Y la figura 14 muestra la gráfica de la función p.

Intervalo	$(-\infty,1)$	$(1,2)$	$(2,4)$	$(4,\infty)$
x	$x \to -\infty$	$\frac{3}{2}$	3	$x \to \infty$
$f(x)$	$f(x) \to -\infty$	$\frac{5}{8}$	-2	$f(x) \to \infty$

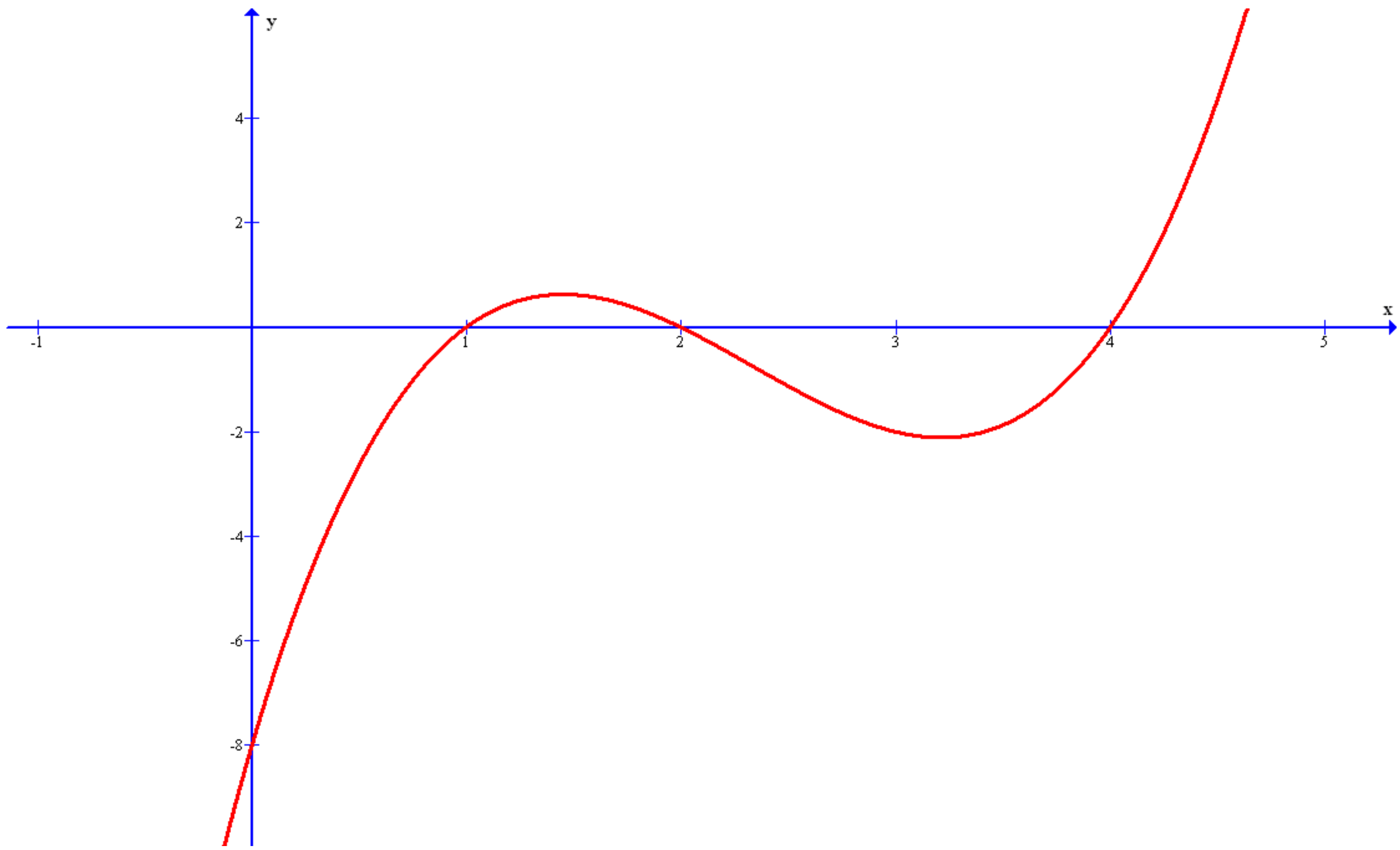


Figura 14. Gráfica de $f(x) = x^3 - 7x^2 + 14x - 8$

Fuente: porpia

- Finalmente, se propone al estudiante la solución del interrogante: ¿Si $x - 1$ es un factor de $p(x) = x^3 - 7x^2 + 14x - 8$, cómo encontrar el factor que multiplicado por x – 1 de como resultado el polinomio $p(x)$, sin buscar otros ceros de p? Para ello hay que conocer los aspectos operativos de la división sintética.

Ejercicios:

1. Determine el modelo lineal que representa cada una de las rectas que a continuación se describen. Grafique cada una de ellas.

   a. La recta que pasa por los puntos $\left(-\frac{3}{4},-1\right)$ y $\left(2,\frac{1}{2}\right)$.

   b. La recta que intercepta a los ejes horizontal y vertical en -4 y □$\frac{2}{3}$ respectivamente.

   c. La recta que es paralela al eje *x* e intercepta al eje vertical en -3.

   d. La recta que pasa por $(-3,-1)$ y es paralela a la recta de ecuación $2x-3y+5=0$.

2. Los puntos de corte (si existen) entre las gráficas de dos funciones se obtienen teniendo en cuenta que en dichos cortes las imágenes de un valor x del dominio de las dos funciones coinciden.

   Dadas las funciones $f(x)=9x^2+12x-1$ y $g(x)=3x-1$,

   A. Graficar f y g en un mismo plano cartesiano y estimar las coordenadas de los puntos de corte de las gráficas de las funciones.

   B. Muestre analíticamente (es decir elabore un procedimiento algebraico) si la estimación del punto anterior es correcta o no.

3. Si L es la recta que pasa por los puntos $(-3,-1)$ y $\left(-3,-\frac{3}{5}\right)$,

   A. Determine la pendiente de L.
   B. ¿Cómo describir la recta L mediante una ecuación?

4. El primer ejercicio que se plantea a continuación se refiere a dos nociones básicas de geometría analítica.

   Para los demás ejercicios de este ítem use nociones relacionadas con la función lineal y las nociones referidas en el numeral (a).

   A. Si $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ son puntos del plano, mostrar que la distancia de P a Q que se nota PQ, se determina mediante $PQ = \sqrt{(x_1, x_2)^2 + (y_1, y_2)^2}$. Sugerencia: haga uso del teorema de Pitágoras. Así mismo muestre que si M es el punto medio del segmento PQ, las coordenadas de M son $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$.

   B. Mostrar que los puntos $(-2,-1)$, $(2,2)$, $(5,-2)$ son los vértices de un triángulo isósceles.

   C. Una mediana de un triángulo es el segmento que tiene como extremos un vértice del triángulo y el punto medio del lado opuesto a este vértice.

   D. Los vértices de un triángulo son $A(3,8)$, $B(2,-1)$, $C(6,-1)$. D y E son los puntos medios de los lados BC y AB respectivamente. Calcular la longitud de la mediana AD. Además determinar el punto de corte de las rectas que contienen las medianas AD y CE.

   E. Un paralelogramo es un cuadrilátero que tiene sus pares de lados opuestos paralelos. Demuestre que los puntos $A(1,1)$, $B(3,5)$, $C(11,6)$, $D(9,2)$ son los vértices de un paralelogramo.

5. Determine las expresiones algebráicas que definen las funciones con las condiciones establecidas.

   A. f es una función lineal, tal que $f(1)=-\frac{5}{4}$ y $f=\frac{1}{2}=-1$.
   B. g es una función cuadrática, cuya gráfica pasa por los puntos $A(-1,-27)$, $B(2,3)$, $C\left(\frac{1}{2},-\frac{15}{2}\right)$.

6. Demuestre las siguientes afirmaciones:

   A. Si la pendiente de una recta es positiva, entonces la función que representa la recta es creciente en su dominio.
   B. Si $f(x)=\frac{x+2}{3}$ entonces $f^{-1}(x)=3x-2$.
   C. La suma de funciones lineales es una función lineal.

7. Determine si cada afirmación es verdadera o falsa. Si es verdadera elabore una demostración que respalde su respuesta. Si es falsa muestre un contraejemplo o elabore un argumento que soporte su afirmación.

   a. Toda función cuadrática es par.
   b. La diferencia (resta) de funciones cuadráticas es una función cuadrática.
   c. Toda función lineal es uno a uno.

8. Para las siguientes funciones polinómicas, determinar ceros, y-intercepto y comportamiento de f en los intervalos sobre el dominio, generados por sus ceros. No use división sintética.

   A. $f(x)=-\frac{1}{2}x^6-4$
   B. $g(x)=2(x-1)^7+\frac{1}{2}$
   C. $h(x)=x^4-2x^3-15x^2$
   D. $m(x)=x^5+x^4-x^3-3x^2+3x+3$ Sugerencia: Use factorización mediante agrupación de términos.

E. $p(x) = x^8 - 2x^4 - 3$

F. $q(x) = x^6 - x^5 - 2x^4 - 2x^2 + 2x + 4$

9. Muestre que el polinomio $r(x) = 2x^3 - x + 3$no tiene ceros racionales.

10. Para cada situación, construya un polinomio que satisfaga las condiciones dadas y muestre que su afirmación es cierta.

A. $p(x)$es de grado 3 y tiene 3 ceros racionales.

B. $p(x)$es de grado 3 y tiene un cero racional y dos ceros irracionales.

C. $p(x)$es de grado 3 y tiene un sólo cero real.

D. $p(x)$es de grado 5. Su u´nico cero real es −3 y además $p(1) = 5$.

11. Para la siguientes funciones polinómicas, esbozar su gráfica.

A. $y = 2x^3 + x^2 + 1$

B. $y = 3x^3 + x^2 + 7x - 6$

C. $y = 3x^5 + 13x^4 + 22x^3 + 42x^2 + 39x + 9$

Sección 2: El modelo racional

Una función f que presenta la forma $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ con $P(x)$ y $Q(x)$ funciones polinómicas se denomina una función racional. Como es habitual en nuestro estudio, intentamos conocer el modelo a través de elementos básicos como el dominio de f, los ceros (si existen), y el intercepto con el eje vertical (si existe). Asimismo se pretende esbozar la gráfica de f con base en estos elementos básicos, y algunos puntos de f, o con base en movimientos geométricos de un modelo básico que para el caso de la función racional es $y = \dfrac{1}{x}$.

Se propone el estudio de particularidades del modelo racional, como la identificación de rectas denominadas asíntotas y las cuales surgen del examen del comportamiento de las imágenes de la función cuando los valores del dominio se acercan por ejemplo hacia un real para el cual no existe imagen, o cuando los valores del dominio se alejan hacia un valor positivo muy grande. Una función puede tener asíntotas horizontales, verticales u oblicuas. La habilidad para determinar esta clase de rectas (si existen), posibilita acercarse a un buen esbozo de la gráfica de una función racional. Las figuras 1 y 2 muestra asíntotas de cada clase para funciones racionales g y h.

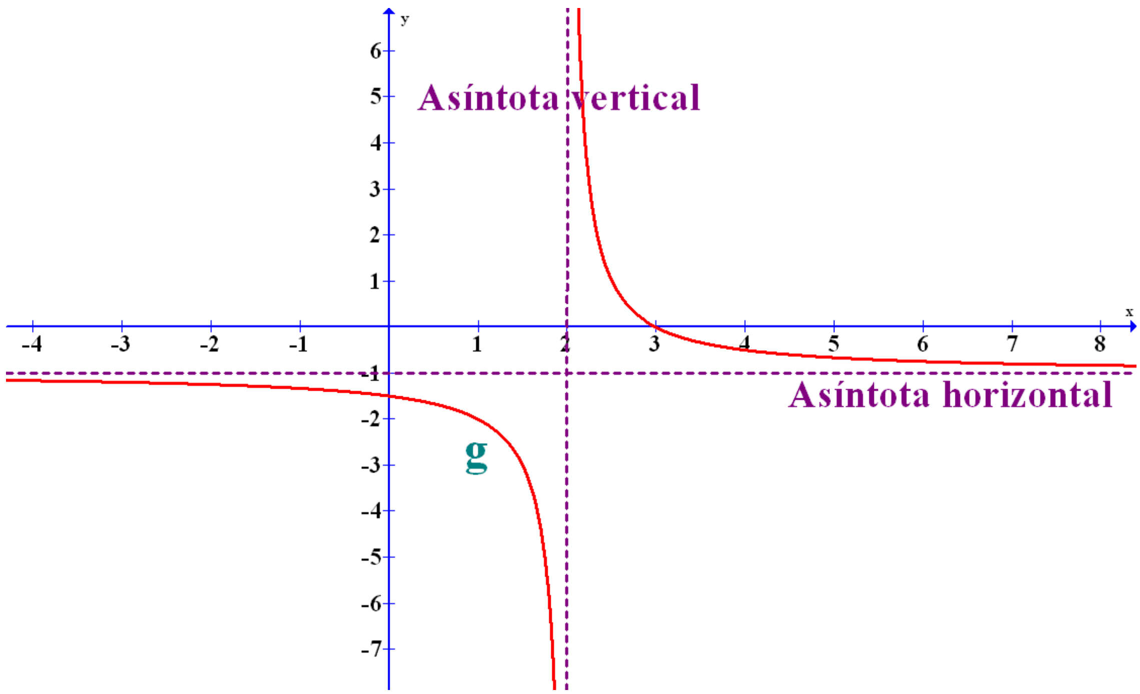


Figura 15. Asíntotas horizontales y verticales

Fuente: porpia

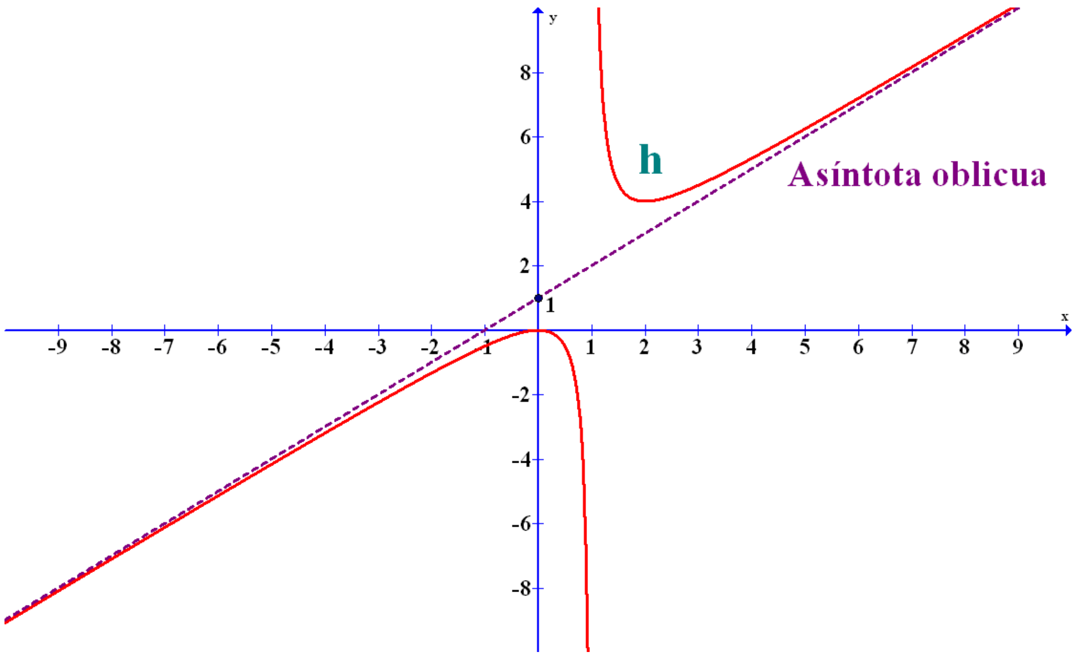


Figura 16. Asíntota oblicua

Fuente: porpia

Una mirada detenida a las asíntotas permite asumir que para cada una de ellas se observa que la tendencia de la gráfica de cada función racional es acercarse suficientemente a cada recta, o dicho de otra manera, la distancia entre la gráfica de la función y la asíntota es cercana a 0. Esta es una manera informal de caracterizar las asíntotas, que requiere de la gráfica de la función. Incluso es posible describir cada una de las asíntotas en términos de un modelo funcional. Por ejemplo, la asíntota vertical de la función g de la gráfica 1 es la recta de ecuación $x = 2$.

¿Cuál es el modelo funcional que describe la asíntota horizontal de la función g de la gráfica 1 y cuál es el modelo funcional que describe la asíntota oblícua de la función h de la gráfica 2?

Un análisis sobre tendencias conjuntas de valores del dominio y de imágenes de una función, permite describir en forma algebraica las asíntotas de una función racional. Veamos: Para la función g de la gráfica 2 se aprecia que a medida que x toma valores positivos grandes, las imágenes se acercan a –1. Este comportamiento se nota así: Si $x \to \infty$ entonces $g(x) \to -1$ y se afirma que la recta de ecuación $y = -1$ es asíntota horizontal de g. De la misma forma se puede afirmar que si $x \to \infty$ entonces $g(x) \to -1$.

- Por lo tanto, si f es una función racional para la cual sucede que: si $x \to \infty$ entonces $f(x) \to a$, con a un nu´mero real, se asegura que f tiene una asíntota horizontal en $y = a$. Similarmente si sucede que: si $x \to -\infty$ entonces $f(x) \to a$, con a un nu´mero real, se asegura también que f tiene una asíntota horizontal en $y = a$.

Ahora, analicemos el comportamiento de g (es decir de las imágenes de g) cuando x se acerca hacia 2. Nótese que g no está definida en $x = 2$. Para efectuar este análisis se hacen acercamientos por la derecha de 2 o por la izquierda de 2. Por ejemplo, cuando x se acerca a 2 por la derecha, es decir, cuando se toman valores mayores que 2 y se hace una aproximación suficiente a $x = 2$ se aprecia que las imágenes de estos valores son cada vez reales positivos muy grandes. Este análisis se sintetiza afirmando que si $x \to 2^+$, entonces $g(x) \to \infty$ En esta situación se afirma que g tiene una asíntota vertical en $x = 2$.

- Así que si f es una función racional para la cual sucede que: si $x \to a+$ entonces $f(x) \to \infty$ con a un nu´mero real, se asegura que f tiene una asíntota vertical en $x = a$. De la misma manera, si se da cualquiera de las siguientes situaciones: Si $x \to a^+$ entonces $f(x) \to -\infty$; o; si $x \to a^-$ entonces $f(x) \to \infty$; o; si $x \to a^-$ entonces f (x) → −∞ también se concluye que f tiene una asíntota vertical en $x = a$.

Finalmente, si se observa el comportamiento de la gráfica de la función h de la figura 2, se aprecia que a medida que x toma valores positivos grandes, las imágenes de estos valores se acercan suficientemente a la recta de ecuación $y = x + 1$, por lo cual se afirma que esta recta es asíntota oblícua de h. En forma general se afirma que si f es una función racional tal que existe una recta de ecuación $y = mx + b$ con $m \neq 0$, para la cual se tiene que cuando $x \to \infty$ entonces $f(x) - mx + b \to 0$, dicha recta es asíntota oblícua de f. La misma conclusión es correcta en la situación: Si $x \to -\infty$, entonces $f(x) - mx + b \to 0$.

Ejemplos

1. La gráfica de añgunas funciones racionales puede esbozarse a partir del modelo básico $f(x)=\frac{1}{x}$ si la función es expresable de la forma $\frac{k}{x-a}+b$ con k,a,b reales conocidos. Por ejemplo, se se propone graficar $g(x)=\frac{x-3}{x-2}$, se intenta expresar g de la forma indicada. Operativamente esto se verifica efectuando la división entre los polinomios $x-3$ y $x-2$ y expresando dicha división mediante el algoritmo de la operación. Para esto hay que recordar que si se divide x entre y y el cociente es c y el residuo es r se tiene que: $\frac{x}{y}=c+\frac{r}{y}$. Entonces, al aplicar este resultado se obtiene $\frac{x-3}{x-2}=1-\frac{3}{x-2}$. Verifique que esta última afirmación es correcta. Así que $g(x)=-\frac{3}{x-2}+1$ y g se ha expresado en la forma pedida. Esto conduce a describir las trasnformaciones sucesivas desde modelo básico f para obtener la gráfica de g ,así:

$$f(x-2)=\frac{1}{x-2};\ 3f(x-2)=\frac{3}{x-2};3f(x-2)=-\frac{3}{x-2};-3f(x-2)+1=-\frac{3}{x-2}+1$$

Las figuras 3 a 7 muestran la construcción de g a partir del modelo básico f .

2. Esbozar la gráfica de $f(x)=\frac{2x+1}{x^2-4}$ requiere del uso de elementos básicos de funciones y de las particularidades que se han descrito para el modelo racional. Veamos cómo proceder.

   El dominio f está constituido por el conjunto de números reales x para los cuales $x^2-4\neq 0$ es decir $D_F=R\setminus\{-2,2\}$. Para identificar los ceros de f es necesario resolver la ecuación $0=\frac{2x+1}{x^2-4}$ que equivale .

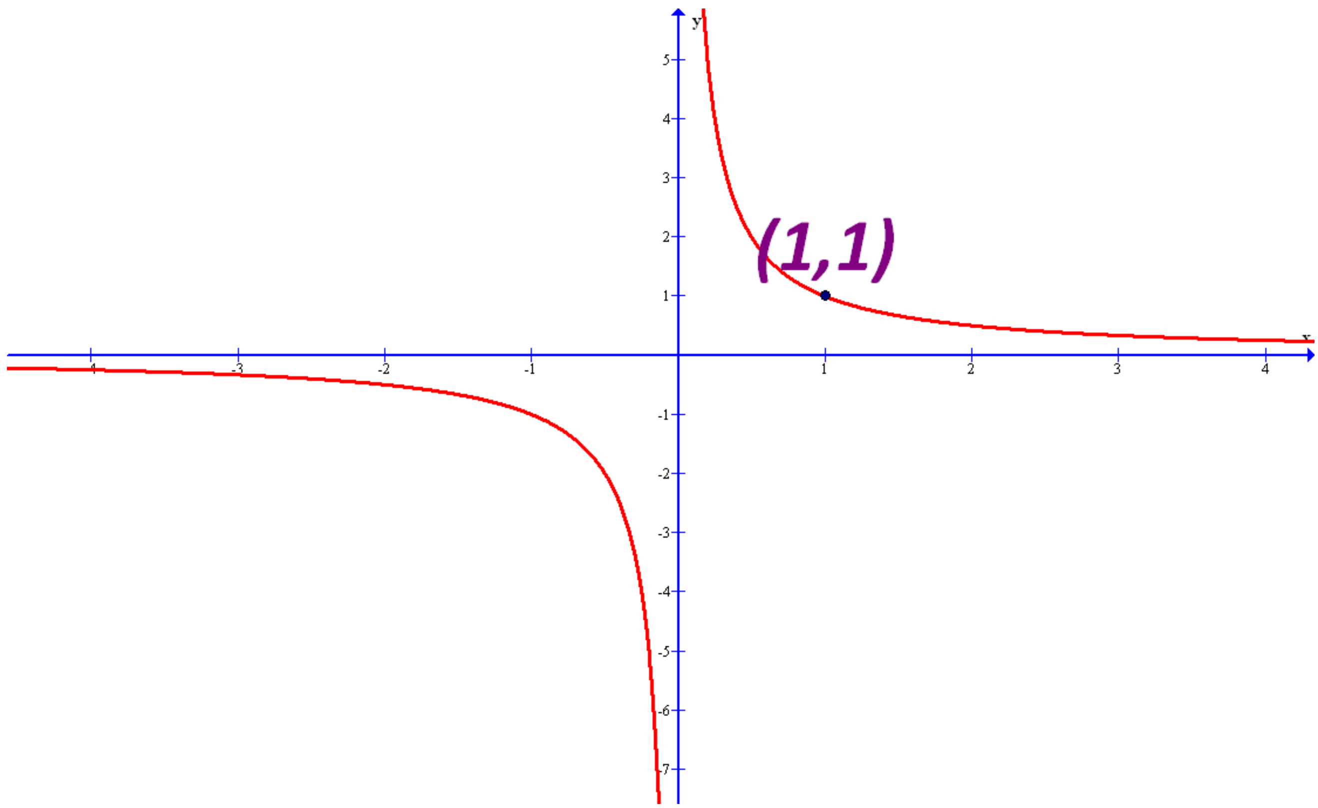


Figura 17. Gráfica de $f(x)=\dfrac{1}{x}$

Fuente: porpia

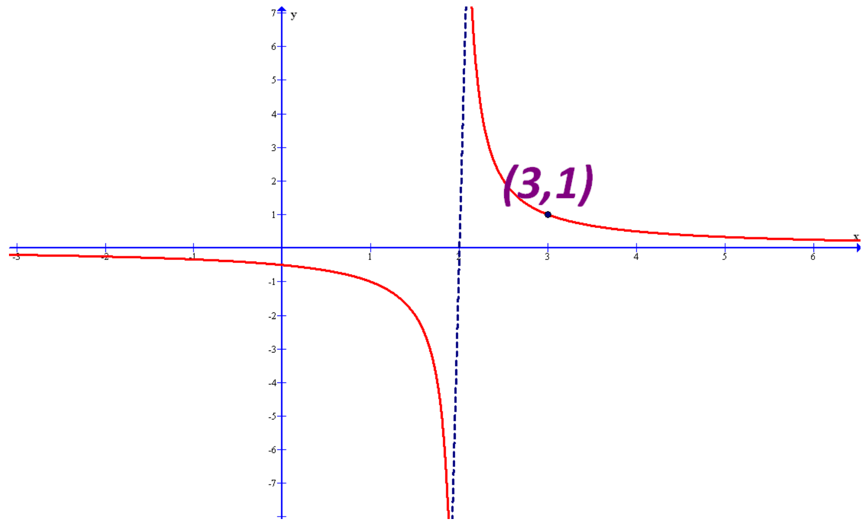


Figura 18. Gráfica de $y = \dfrac{1}{x-2}$

Fuente: porpia

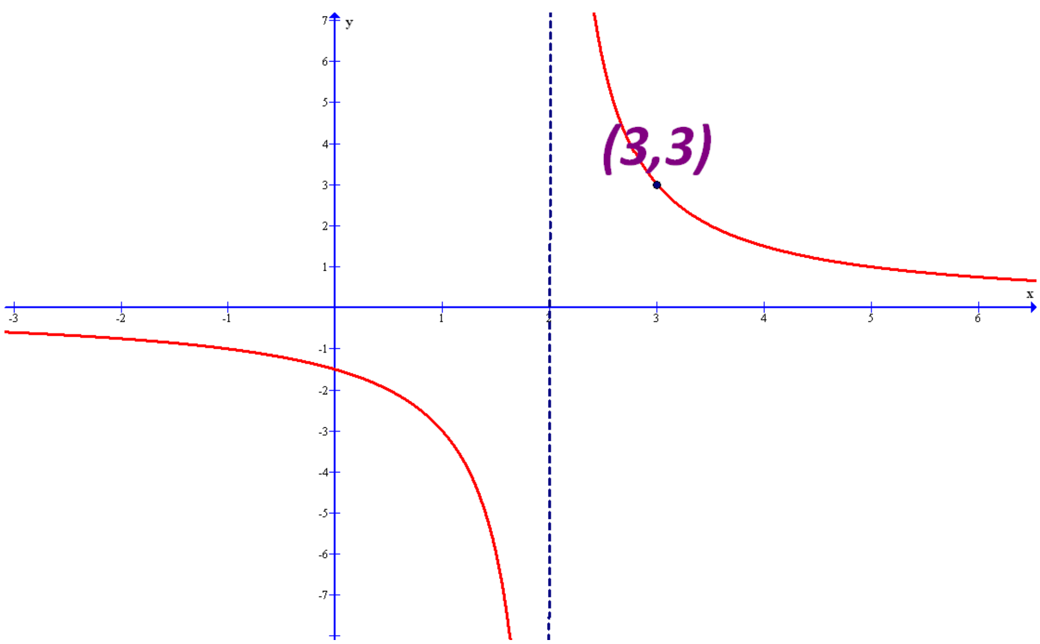


Figura 19. Gráfica de $y = \dfrac{3}{x-2}$

Fuente: porpia

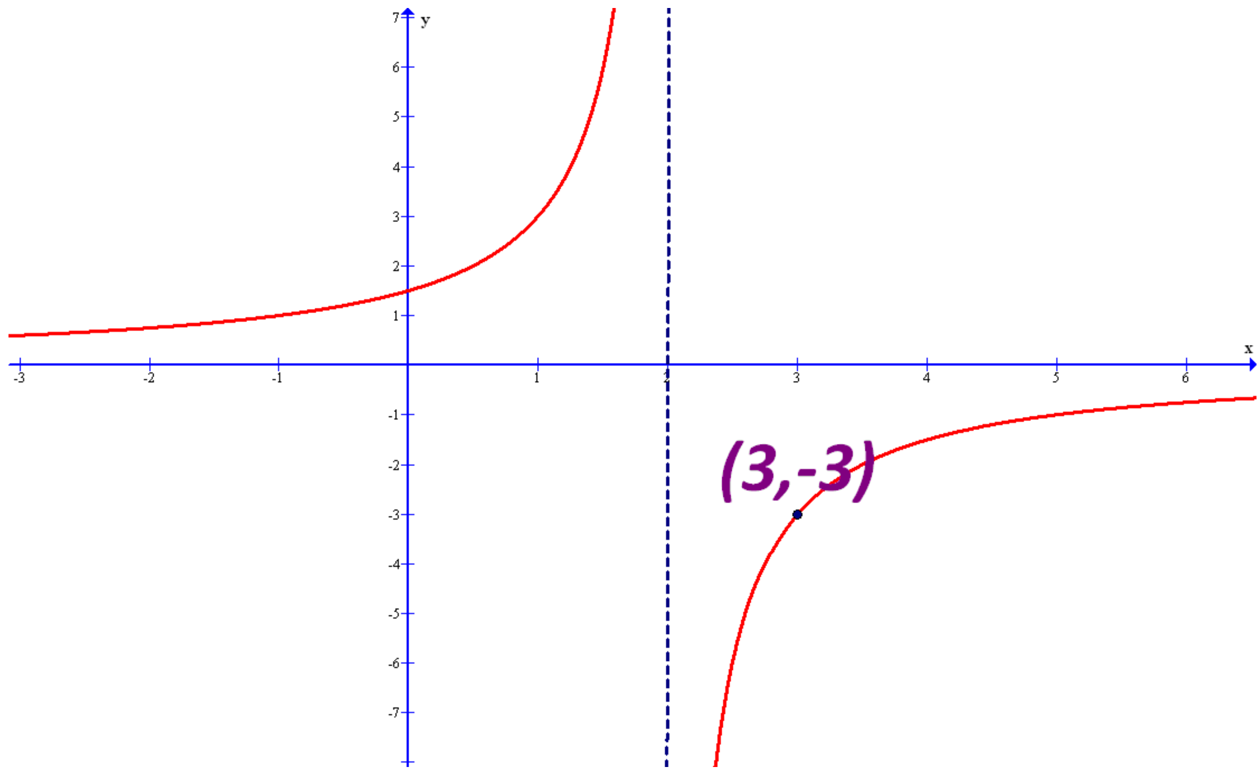


Figura 20. Gráfica de $y = -\dfrac{3}{x-2}$

Fuente: porpia

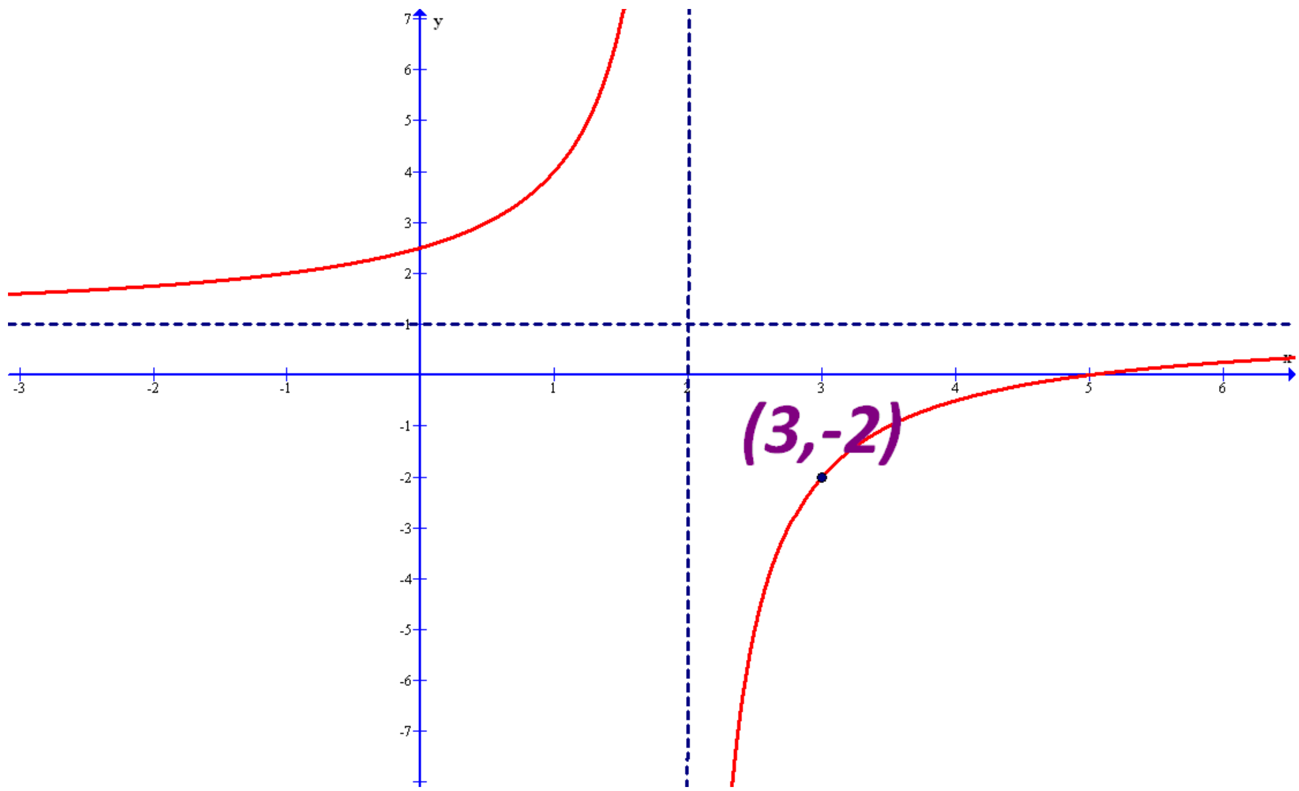


Figura 21. Gráfica de $y = -\frac{3}{x-2} + 1$

Fuente: porpia

a $0 = 2x + 1$ con lo cual se tiene que $x = -2$. Afirmamos que la gráfica de f intercepta al eje vertical en $y = -\frac{1}{4}$ pues $f(0) = -\frac{1}{4}$.

La determinación de la existencia de asíntotas de f será de gran ayuda para la gráfica. Para ello se plantea un trabajo así:

Para hallar asíntotas horizontales es necesario verificar cómo se comporta f cuando $x \to \infty$ o cuando $x \to -\infty$. Una propiedad de los reales afirma que si $x \to \infty$ entonces $\frac{k}{x^r} \to 0$ si k, r son reales conocidos y $r > 0$. Esta afirmación también es válida si $x \to -\infty$. (Ilustre esta propiedad con valores para que logre una buena comprensión de su significado). La propiedad se aplica dividiendo numerador y denominador de la expresión racional que define a f entre la mayor potencia de x en el denominador, así:

$f(x) = \dfrac{\frac{2x+1}{x^2}}{\frac{x^2-4}{x^2}}$. Al simplificar esta expresión se obtiene $f(x) = \dfrac{\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{4}{x^2}}$

Ahora, si $x \to \infty$ las expresiones $\frac{2}{x}$; $\frac{1}{x^2}$ y $\frac{4}{x^2}$ tienden a 0 así que afirmamos que $f(x) \to \dfrac{0+0}{1-0}$ es decir $f(x) \to 0$. Por lo tanto se asegura que f tiene una asíntota horizontal en $y = 0$.

La identificación de asíntotas verticales se plantea así: En los valores reales para los cuales no existe imagen mediante f , posiblemente hay asíntotas verticales. En este caso dichas asíntotas pueden ser $x = 2$ y $x = -2$. Para corroborar o rechazar la afirmación se analiza el comportamiento de f cuando x se acerca a estos valores, bien sea por la derecha o la izquierda de ellos. Veamos una de esta situaciones.

¿Cómo se comporta f cuando x se acerca suficientemente a 2 por la derecha?

Acercarse a 2 por la derecha significa tomar un valor mayor que 2 y desde allí tomar otros valores más cercanos a 2 y describir el comportamiento de las imágenes de dichos valores. Una forma de hacerlo es mediante una tabla de valores, por ejemplo, empiece el acercamiento en $x = 2{,}1$ y calcule $f(2{,}1)$. A partir de este valor tome valores más cercanos a 2, calcule las imágenes de esos valores y verifique que dichas imágenes toman cada vez valores positivos muy grandes, por lo tanto se afirma que si $x \to 2+$ entonces $f(x) \to \infty$.En otras palabras, f tiene una asíntota vertical en $x = 2$.

Otra forma de identificar una asíntota se hace mediante el análisis de la expresión que define la función racional. Veamos cómo se comporta f cuando $x \to -2^{+}$. Nótese que acercarse $a-2$ por la derecha significa tomar valores mayores que −2. Así que se afirma que si $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2-4}$ y $x \to -2^{+}$, entonces $2x+1 \to -3$ (¿Por qué? Además $x^2 \to 4$, pero nótese que los valores de x^2 son un poco menores que 4 así que $x^2-4 \to 0^{-}$, es decir x^2-4es un valor cercano a 0 pero negativo. Así que entonces se tiene una división entre el real−3 y un nu´mero real negativo cercano a 0. Esta división dará un nu´mero positivo muy grande es decir $f(x) \to \infty$.Por lo tanto, f también tiene una asíntota vertical en $x=-2$.

Mediante el uso de cualquiera de las dos formas antes referidas se puede afirmar que: Si $x \to 2^{-}$ entonces $f(x) \to -\infty$ y que si $x \to -2^{-}$entonces $f(x) \to -\infty$.Verifique estas dos afirmaciones. Con la información dada es posible esbozar la gráfica de f como se aprecia en la figura 8.

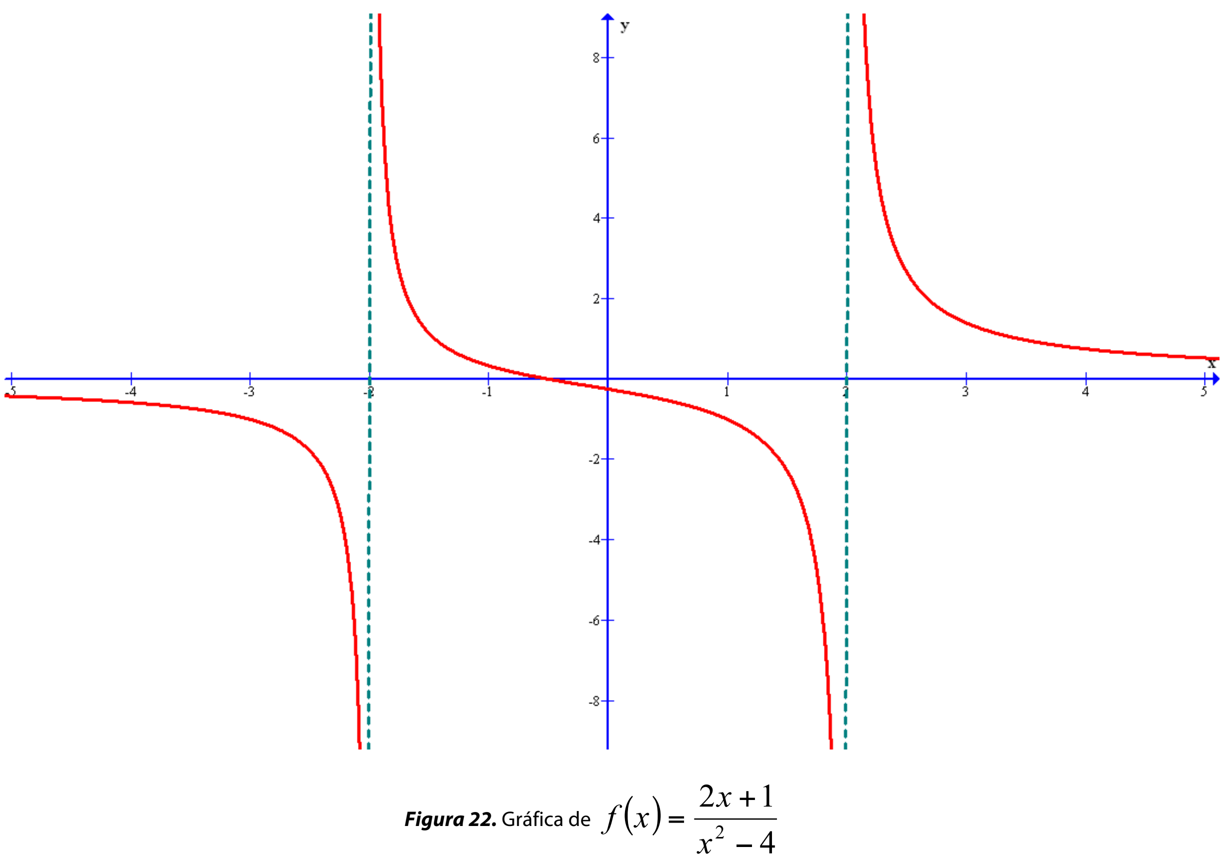


Figura 22. Gráfica de $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2-4}$

Fuente: porpia

Tratar de graficar la función $f(x)=\dfrac{2x^2-x-1}{x-2}$ plantea un reto interesante. La identificación de elementos básicos de f sigue los procedimientos habituales, lo cual permite afirmar que: $D_f = R\setminus\{2\}$; los ceros de f son $x=1$ y $x=-\dfrac{1}{2}$; la gráfica de f intersecta al eje vertical en $y=\dfrac{1}{2}$ y f tiene una asíntota vertical en $y=2$. Es importante verificar las anteriores aseveraciones.

Al intentar obtener la asíntota horizontal por los procedimientos señalados, no es posible asegurar que si $x\to\infty$, los valores de $f(x)$ tiendan a un valor real fijo. Así que se puede explorar la posibilidad que f tenga una asíntota oblícua. Para ello se hace uso del algoritmo de la división en la expresión racional que define a f. Si $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ se logra se la forma de $f(x)=mx+b+\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ y se verifica que cuando es $x\to\infty$ la expresión $f(x)-mx+b\to 0$ entonces se asegura que f tiene una asíntota oblícua en $y=mx+b$.

Para nuestro caso, se tiene que $\dfrac{2x^2-x-2}{x-2}=2x+3+\dfrac{5}{x-2}$, así que hayq ue examinar el comportamiento de $f(x)-(2x+3)$ cuando $x\to\infty$. Note que la diferencia a examinar equivale a $\dfrac{5}{x-2}$. De acuerdo con los procedimientos que se han indicado anteriormente se asegura que si $x\to\infty$ entonces $\dfrac{5}{x-2}\to 0$, así que se concluye f tiene una asíntota oblícua en $y=(2x+3)$. Si se hace el mismo análisis cuando $x\to-\infty$ se observará que $f(x)-(2x+3)$ también tiende a 0. La figura 9 muestra la gráfica de f .

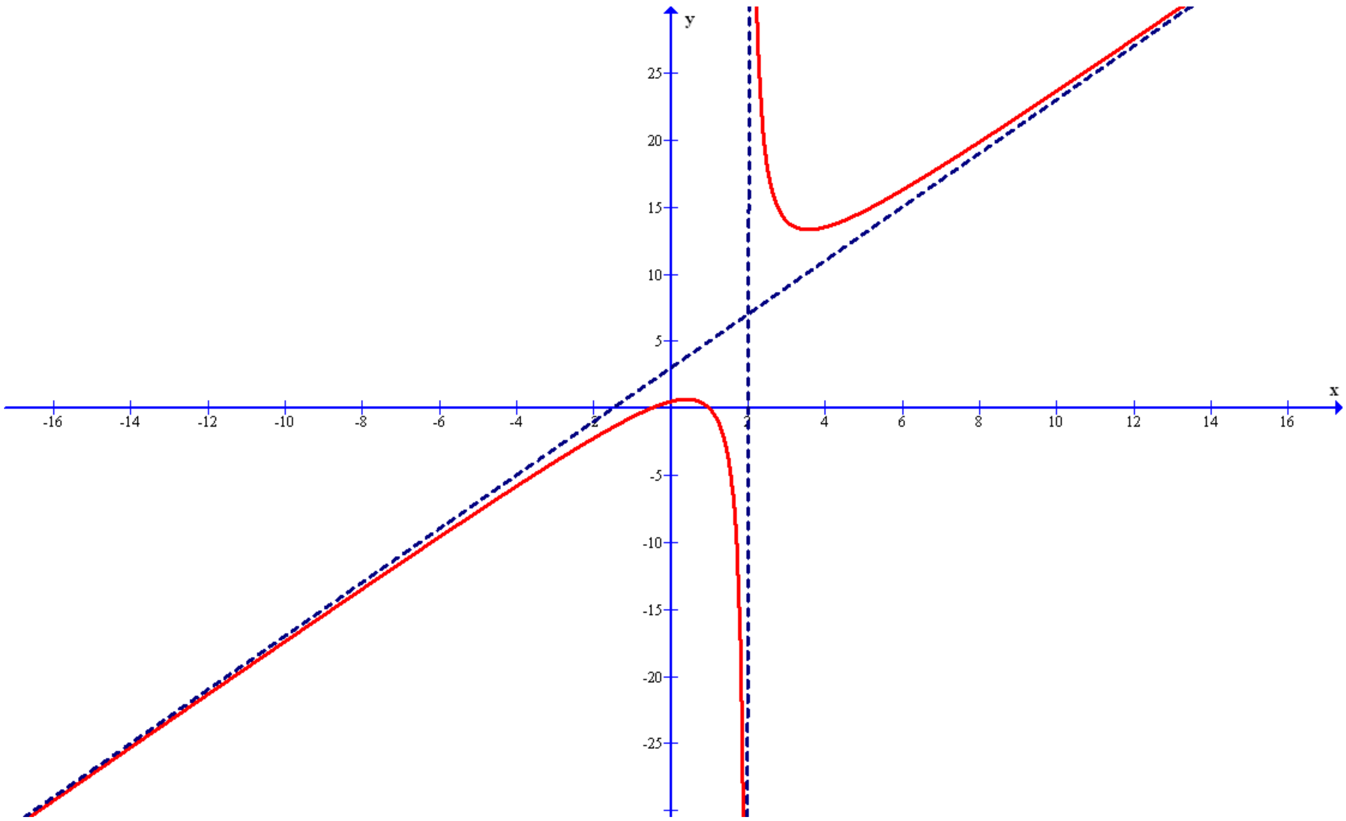


Figura 23. Gráfica de $f(x) = \dfrac{2x^2 - x - 2}{x - 2}$

Fuente: porpia

3

Unidad 3

Modelos funcionales: la función exponencial y la función logarítmica

Fundamentos de matemáticas

Autor: Danilo de Jesús Ariza

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina
MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Introducción

El crecimiento o decrecimiento de grupos poblacionales es un tema de interés en diversas áreas del conocimiento, por sus repercusiones a diferentes niveles: social, político, económico, etc. La representación de las variaciones de una población en lapsos de tiempo, es el camino que se ha señalado históricamente como necesario para estudiar fenómenos relacionados con cambios poblacionales o para prever situaciones o hechos futuros relacionados con el bienestar de un colectivo.

El modelo exponencial ha sido el modelo funcional por excelencia para aproximar el estudio de poblaciones, por lo cual se propone una mirada a sus elementos con objeto de caracterizarlo adecuadamente. Asimismo se examinan los aspectos relacionados con las funciones logarítmicas por sus estrechas conexiones con el modelo exponencial.

Recomendaciones metodológicas

Parte de la estrategia metodológica recomendada es llevar a cabo una juiciosa lectura de la presente cartilla dado que así lo demanda el reto de aprendizaje autónomo al que se está enfrentando. Es necesario realizar repasos de temáticas anteriores. Específicamente se requiere total claridad de procedimientos algebraicos, ya que los elementos de las mismas son soporte para realizar cálculos posteriores. Al igual que en las cartillas anteriores, aquí se recomienda la verificación de los cálculos y procedimientos presentados. Lo anterior, además de contribuir a afianzar el conocimiento del tema, le brinda la posibilidad de tomar mayor confianza hacia lo que sigue a cada eje temático.

Desarrollo temático

El modelo exponencial

Una función de la forma $f(x) = a^x$ con a un real positivo y diferente de 1, se denomina una función exponencial de base a. En el propósito usual de conocer los elementos que caracterizan a f, se afirma que el dominio de f es el conjunto de los números reales. Para corroborar la afirmación, es importante revisar el significado de a^x para distintos números reales x. Por ejemplo, especifique qué significado se da a expresiones como $2^3; 2^0; 2^{-2}; 2^{\frac{1}{2}}; 3^{-\frac{2}{3}}$, etc.

Se observa entonces, que para cualquier x real la expresión a^x es un número real positivo, así que la gráfica de f no interceptará al eje x pues la ecuación $a^x = 0$ no tiene solución en los reales. Note que la ecuación dada tiene la variable en el exponente de la expresión a^x. Este tipo de ecuaciones se denominan exponenciales. Ahora, cualquier gráfica de la forma especificada interceptará al eje vertical en $y = 1$ pues $f(0) = 1$ para cualquier valor de a. Algunas particularidades del modelo se estudian a continuación.

Ejemplos:

1. Graficar la funciones $f(x) = 2^x$ y $g(x) = \frac{1}{3}^x$, se puede realizar con base en los elementos esenciales de las funciones que se han estudiado previamente. De acuerdo con las notas teóricas, el dominio de las dos funciones es el conjunto de los números reales. Las gráficas de f y g no intersectan el eje horizontal, e intersectan al eje vertical en $y = 1$.

Veamos las particularidades de cada función. Respecto de la función f analicemos el comportamiento de sus imágenes cuando $x \to \infty$. De hecho, si x toma valores positivos muy grandes, la expresión 2^x asumirá también valores positivos muy grandes. Es decir, si x → ∞ entonces $f(x) \to \infty$. Ahora, si $x \to -\infty$, la imagen de cada elemento es de la forma $\frac{1}{2^k}$ con $k > 0$ (¿Por qué?). De hecho, esta expresión tiende a 0 de acuerdo a una propiedad de los reales estudiada en lectura previa. En síntesis, si $x \to -\infty$ entonces $f(x) \to 0$, por lo que se asegura que f tiene una asíntota horizontal en $y = 0$. Una tabla de valores ayuda a trazar la gráfica de f .

x	$-3/2$	-1	1	2	$5/2$
$f(x)$	$\frac{1}{\sqrt{8}}$	1	2	4	$\sqrt{8}$

Tabla 1. Valores

Fuente: propia

En cuanto a la función g, al realizar análisis similares a los que se hicieron con f se concluye que: Si $x \to -\infty$ entonces $f(x) \to 0$, con lo cual afirmamos que g tiene una asíntota horizontal en $y = 0$. Asimismo si $x \to -\infty$ entonces $f(x) \to \infty$. La tabla muestra algunas imágenes de g.

x	$-3/2$	-1	1	$3/2$	2
$g(x)$	$\sqrt{27}$	3	$1/3$	$\sqrt{1/27}$	$1/9$

Tabla 2. Valores

Fuente: propia

Las gráficas de f y g se muestran en las figuras 1 y 2. Observe que las dos funciones son uno a uno. Esta es una característica de las funciones que tengan la forma $y = a^x$. Además, note que f es una función creciente en su dominio, que es una particularidad de funciones de la forma $y = a^x$ con $a > 1$. Funciones como g es decir de la forma $y = a^x$con $0 < a < 1$ son decrecientes en su dominio.

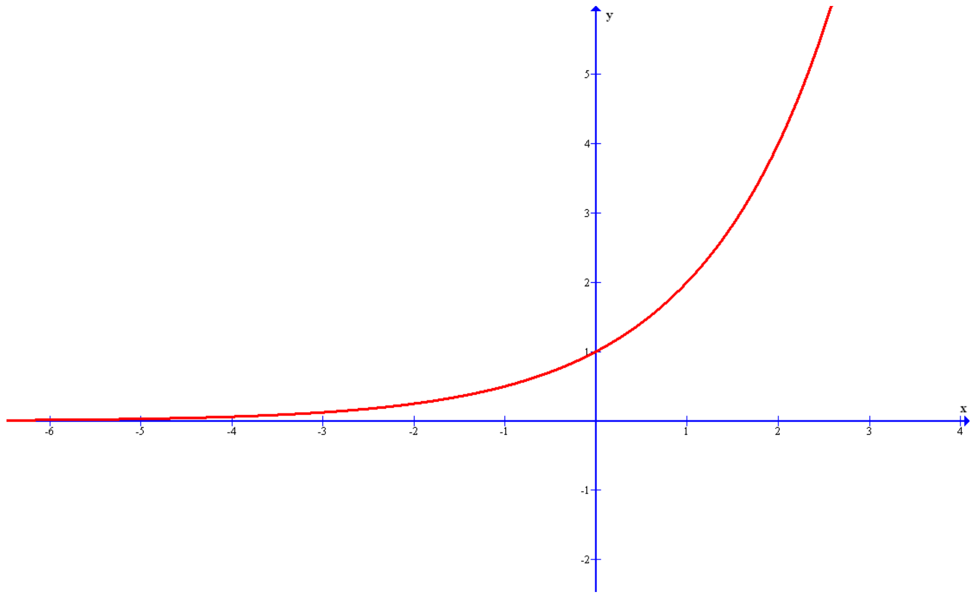


Figura 1. Gráfica de $f(x)=2^x$

Fuente: propia

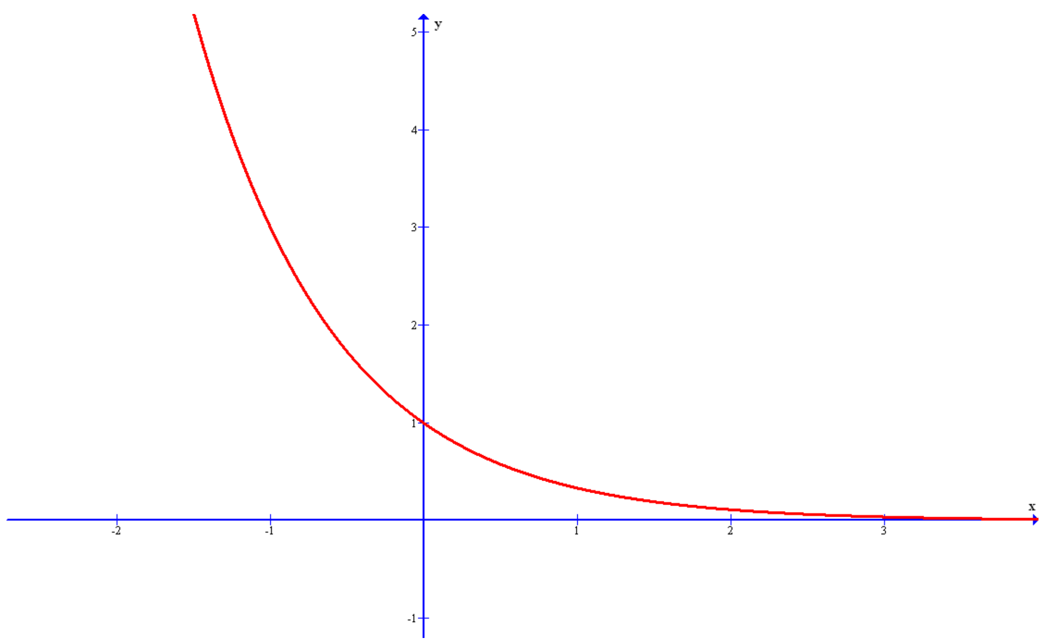


Figura 2. Gráfica de $g(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$

Fuente: propia

2. Una función de especial interés para los estudios poblacionales, es la función exponencial de base. (Recuerde que es un número irracional de valor aproximado 2,7182….). Es decir, se está describiendo la función $f(x) = e^x$. La gráfica de f es de la forma $y = a^x$ con $a > 1$. La tabla muestra algunos valores aproximados de imágenes de f y en la figura 3 se representa gráficamente esta función.

x	$-\frac{3}{2}$	-1	1	2	$\frac{3}{2}$
$g(x)$	0.22	0.36	2.71	7.38	4.48

Tabla 3. Valores

Fuente: propia

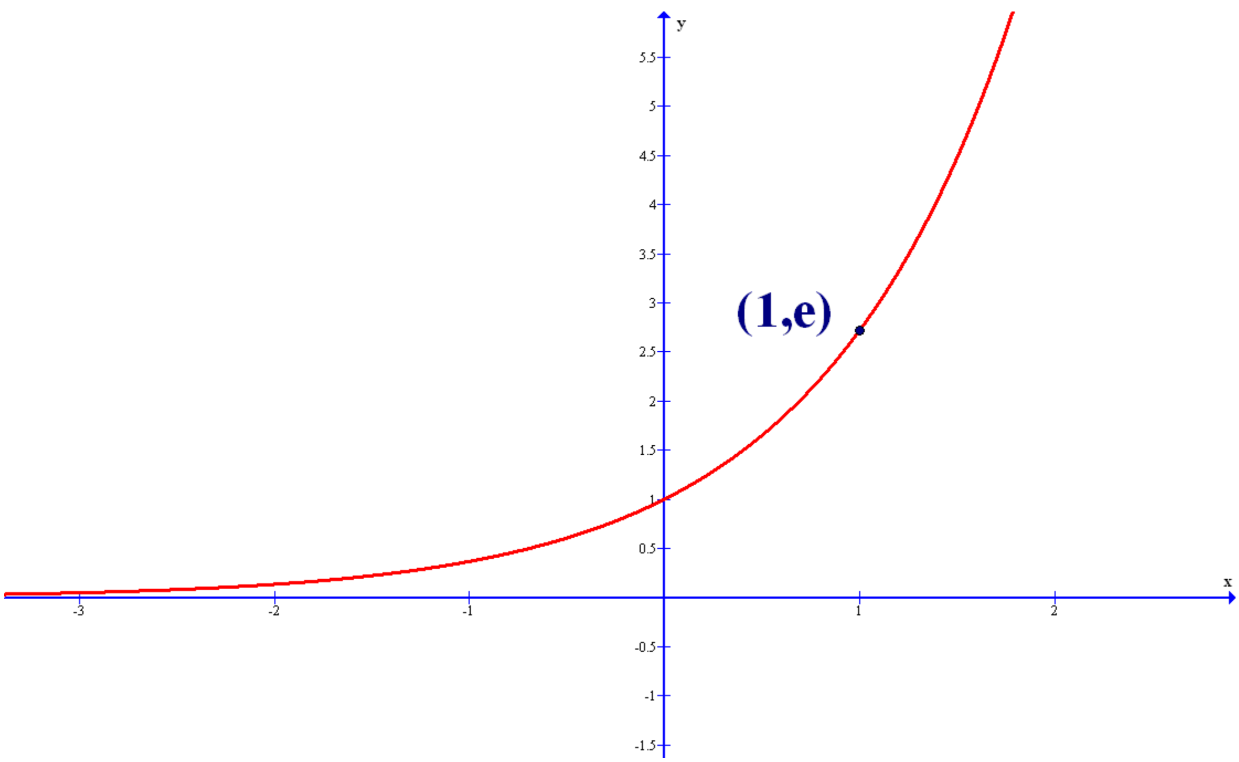


Figura 3. Gráfica de $f(x) = e^x$
Fuente: propia

3. Funciones como las estudiadas en los párrafos anteriores se consideran modelos básicos exponenciales. Así que otras funciones exponenciales se pueden graficar con base en estos modelos y mediante transformaciones que describan movimientos geométricos de ellos. Tal es el caso de la función $g(x)=2e^{x-1}-1$. Asumimos $f(x)=e^{x}$ como modelo básico para graficar a g. Las transformaciones sucesivas de f para obtener g son:

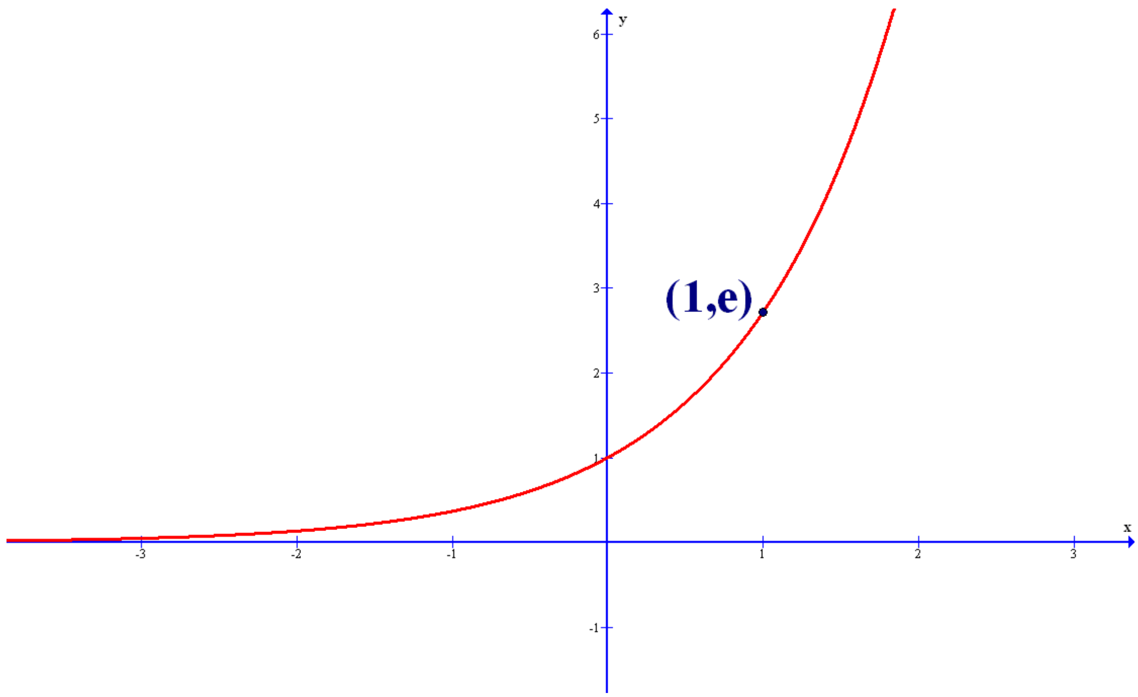


Figura 4. Gráfica de $f(x)=e^{x}$

Fuente: propia

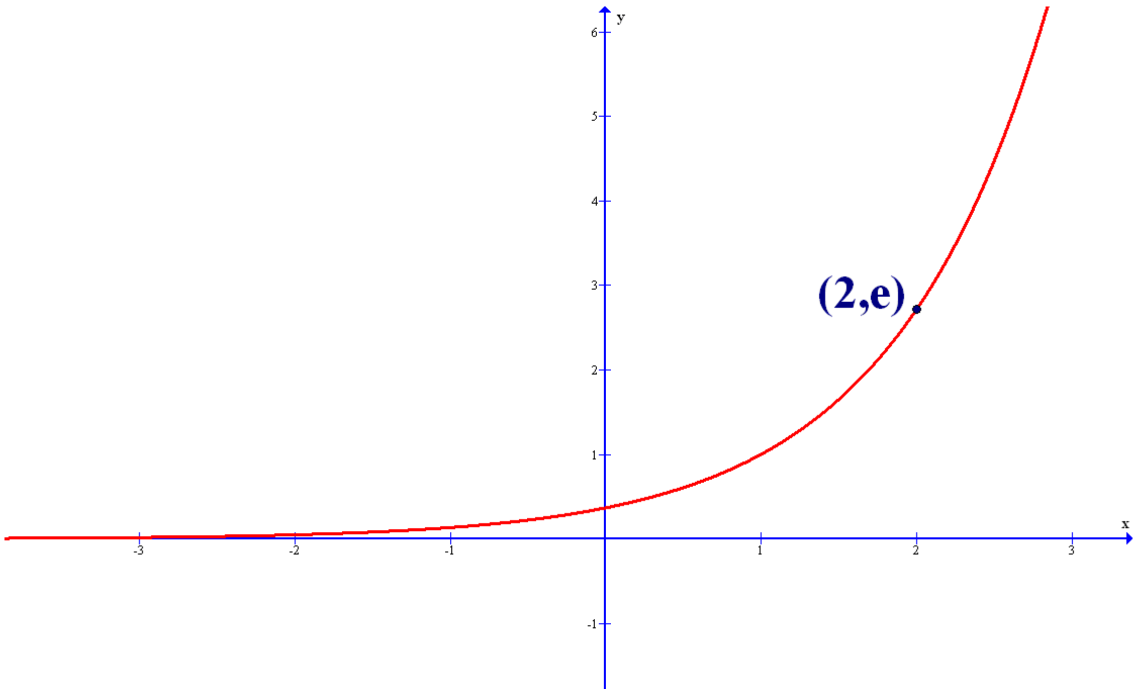


Figura 5. Gráfica de $f(x) = e^{x-1}$

Fuente: propia

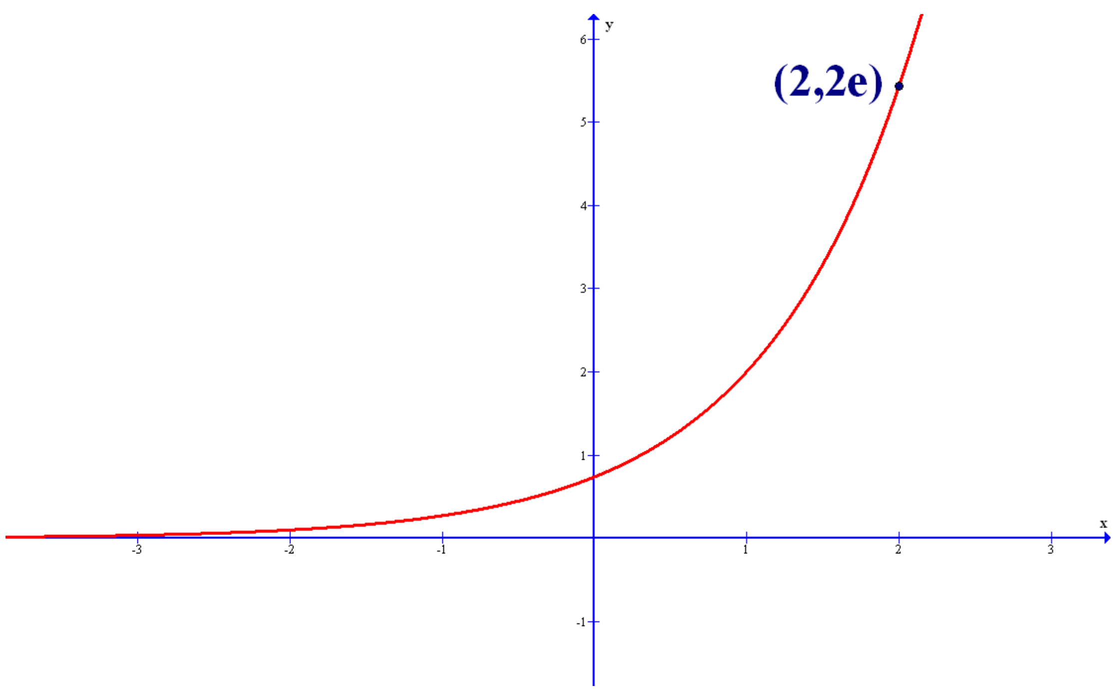


Figura 6. Gráfica de $y = 2e^{x-1}$

Fuente: propia

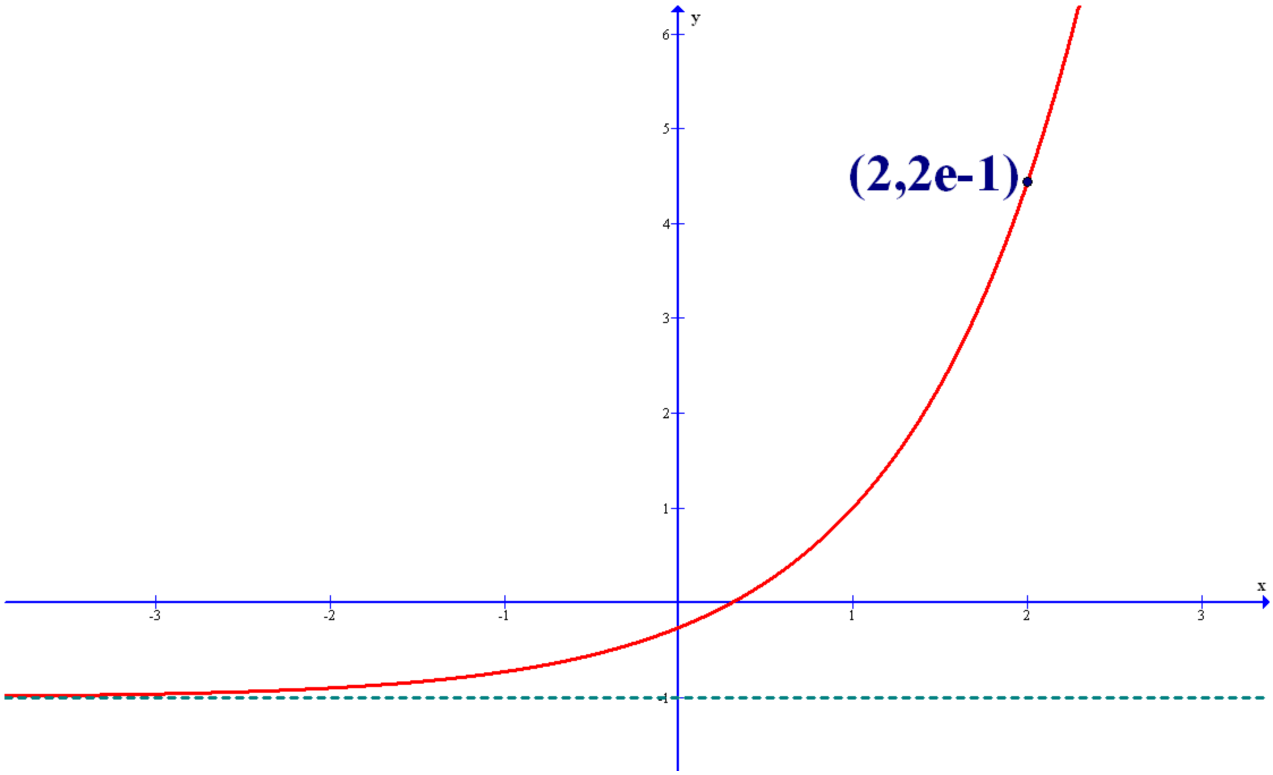


Figura 7. Gráfica de $y = 2e^{x-1} - 1$

Fuente: propia

$$f(x) = e^x \;; \quad f(x-1) = e^{x-1}; \quad 2f(x-1) = 2e^{x-1}\,, \quad 2f(x-1) - 1 = 2e^{x-1} - 1$$

Note que la asíntota horizontal del modelo básico f que es $y = 0$ se transforma en la asíntota horizontal $y = -1$ de la función g. Este es un elemento a tener en cuenta cuando se realizan transformaciones de un modelo básico, es decir, hay que chequear la forma como se desplazan las asíntotas (si existen) por efecto de los movimientos geométricos.

La función logarítmica

En el estudio de una función de la forma $f(x) = a^x$ se observó que es una función uno a uno. Así que f tiene inversa. Dicha función inversa se denomina la función logarítmica de base a y se define así:

$$\log_a x = y \text{ si y sólo sí } a^y = x$$

La expresión $\log_a x$ se lee “logaritmo en base a de x”. x se denomina argumento. De acuerdo con las características del modelo exponencial se tiene que a y x son reales positivos con $a \neq 1$
.

Con base en la definición de logaritmo, la expresión $\log_{10} 100 = 2$ es equivalente con $10^2 = 100$. Esto significa que se cuenta con un criterio para establecer la validez de una expresión logarítmica de igualdad, pues si la expresión exponencial correspondiente es verdadera, lo será la expresión logarítmica.

Nota: la expresión $\log_{10} x$ se escribe usualmente como $\log x$, por lo tanto la igualdad $\log_{10} 100 = 2$ se registra como $\log 100 = 2$. De la misma manera, la expresión $10^{-2} = 0{,}01$ es equivalente con $\log_{0,01} = -2$. Un logaritmo de base 10 se denomina un logaritmo común.

La función inversa de la función exponencial de base e es la función logarítmica de base e, y de acuerdo con la definición de logaritmo se tiene que $\log_e x = y$ equivale a $e^y = x$. Un logaritmo de base e se denomina un logaritmo natural. Así que $e^0 = 1$ equivale a $\log_e 1 = 0$.

Nota: la expresión $\log_e x$ se escribe usualmente como $\ln x$, y se lee “logaritmo natural de x ”. Por lo tanto, la igualdad $\log_e e = 1$ se registra como $\ln$ e=1.

Ejemplos:

1. Con los elementos básicos de funciones y con la definición de logaritmo, es sencillo esbozar la gráfica de una función como $f(x) = \log_2 x$. El dominio de f es el conjunto de los números reales positivos, pues esto se deduce de las condiciones para que una expresión logarítmica exista en los reales. Al buscar los ceros de f nos encontramos con la ecuación $0 = \log_2 x$. Una ecuación que contenga logaritmos, de tal manera que la variable se encuentre en el argumento o en la base, se denomina logarítmica. Una forma de resolverla es mediante la escritura de la expresión exponencial equivalente. Veamos:

$0 = \log_2 x$, equivale a $2^0 x$, por lo tanto $x = 1$

Así que la gráfica de f intercepta el eje x en $x = 1$. Como 0 no pertenece al dominio de f , entonces $f(0)$ no existe, así que la gráfica de f no intercepta al eje vertical. Una tabla de valores de imágenes de f permite completar la información previa. Note que la forma de determinar la imagen de cada real x seleccionado es a través de la equivalencia con la expresión exponencial. Por ejemplo, como se conoce que $2^{-2} = 1/4$, entonces se tiene que $\log_2 1/4 = -2$, así que $f(1/4) = -2$.

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$	2
$f(x)$	-2	-1	0.32	0.58	1

Tabla 4. Valores

Fuente: propia

El procedimiento para graficar $g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ es igualmente sencillo, en cuanto afirmamos que $D_g = R^+$ el intercepto con el eje horizontal es $x = 1$ y la gráfica de g no intercepta al eje vertical. Con una tabla de valores complementamos esta información. La construcción de la tabla se realiza de igual forma a la utilizada para construir la tabla de valores de la función del ejemplo anterior.

x	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{9}{4}$
$g(x)$	2	1	-0.36	-0.63	-0.73

Tabla 5. Valores

Fuente: propia

Las gráficas de f y g se muestran en las figuras 8 y 9. Se observa que las funciones son uno a uno. Esta es una característica de las funciones de la forma $y = \log_a x$. Nótese que f es una función creciente, hecho cierto cuando $a > 1$ en el modelo que define las funciones logarítmicas. Y si $0 < a < 1$ la función logarítmica es decreciente.

Un análisis sobre el comportamiento de las imágenes de f lleva a concluir que si $x \to \infty$ entonces $f(x) \to \infty$, pero si x → 0+ entonces $f(x) \to -\infty$ por lo cual se asegura que f tiene una asíntota vertical en $x = 0$. Al efectuar el análisis con las imágenes de g se tiene que si $x \to \infty$ entonces $g(x) \to -\infty$ y que si $x \to 0^+$ entonces $g(x) \to \infty$ y por lo tanto g tiene una asíntota vertical en $x = 0$.

2. Cualquier función de la forma $f(x) = \log_a x$ se considera un modelo básico a partir del cual se pueden construir otras funciones de tipo logarítmico, mediante transformaciones de este modelo básico. Tal es el caso de la función $h(x) = 3 - 2\ln(x+1)$ cuya gráfica se obtiene a partir de transformaciones sucesivas de la función $f(x) = \ln x$. La función f se puede trazar sin mayor dificultad, usando el procedimiento mostrado en el ejemplo anterior. Así que las transformaciones de f para obtener h son:

$$f(x) = \ln x; \quad f(x+1) = \ln(x+1); \quad 2f(x+1) = 2\ln(x+1); -2f(x+1) = -2\ln(x+1);$$
$$3 - 2f(x+1) = 3 - 2\ln(x+1).$$

Las gráficas 10 a 14 muestran los movimientos geométricos aplicados a partir de la función f y que permiten graficar la función g.

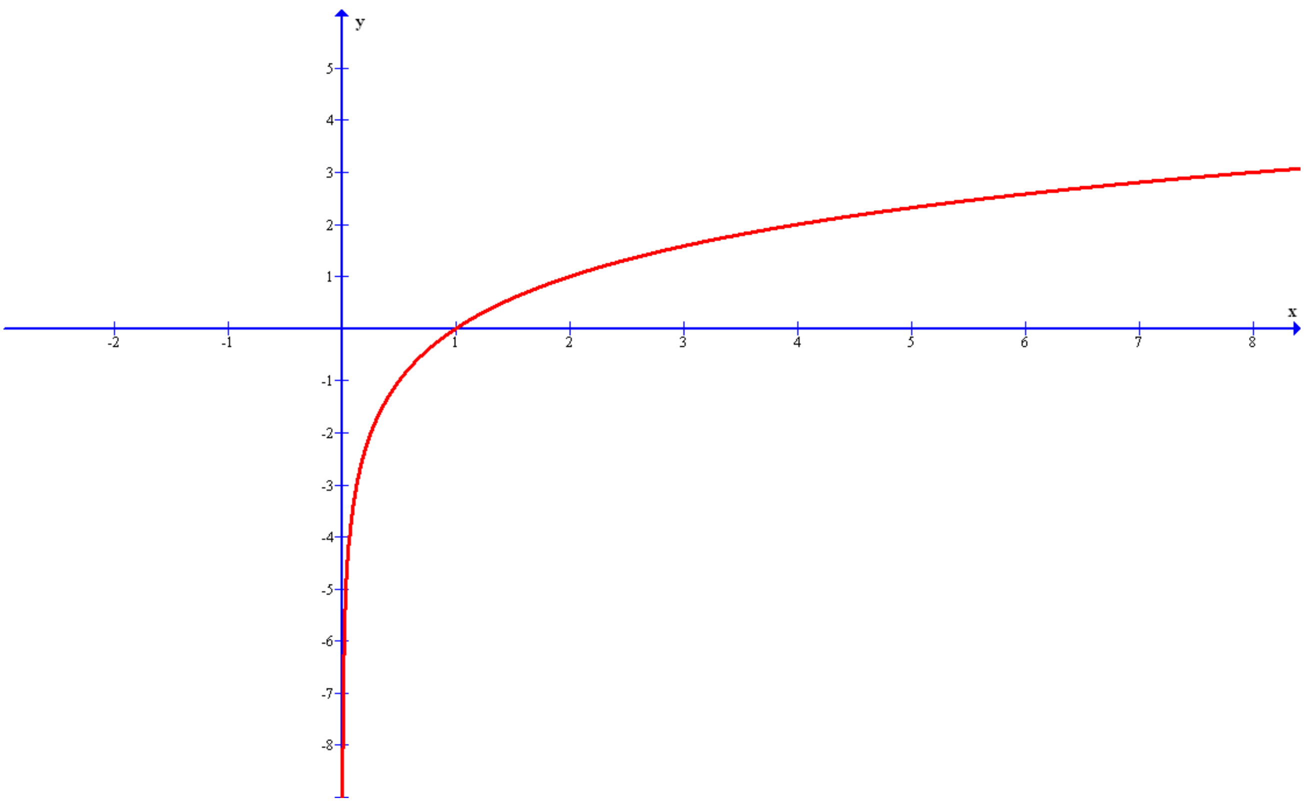


Figura 8. Gráfica de $f(x) = \log_2 x$
Fuente: propia

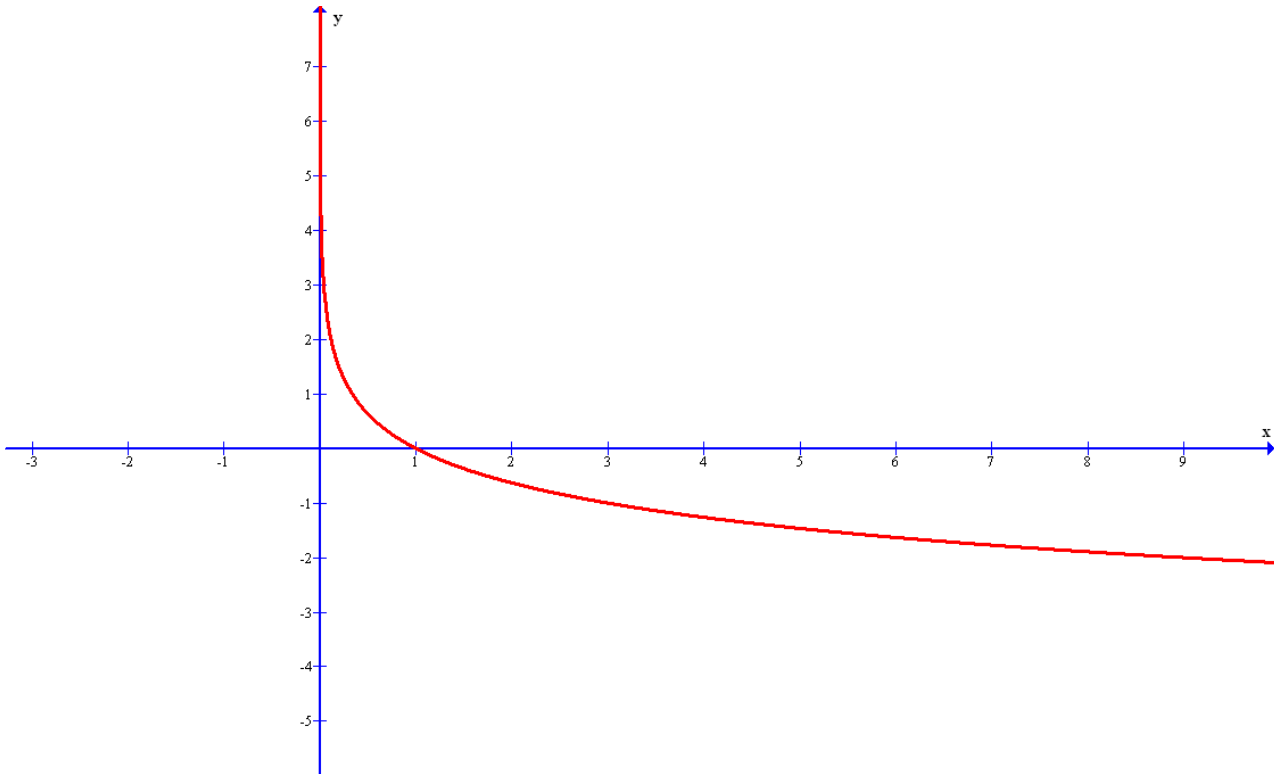


Figura 9. Gráfica de $g(x) = \log_{1/3} x$

Fuente: propia

3. Si se quieren hallar los ceros de las funciones $g(x) = 2e^{x-1} - 1$ y $h(x) = 3 - 2\ln(x+1)$, es preciso resolver las ecuaciones $0 = 2e^{x-1} - 1$ y $0 = 3 - 2\ln(x+1)$. Examinemos en detalle este par de ecuaciones que son ejemplos de ecuaciones exponenciales y ecuaciones logarítmicas respectivamente.

Para el caso de la ecuación $0 = 2e^{x-1} - 1$, se logra despejar x si la ecuación se escribe de la forma $a^x = b$ y luego se expresa en la forma logarítmica equivalente. Es decir: como $0 = 2e^{x-1} - 1$, entonces $1/2 = 2e^{x-1}$. Esta última expresión se escribe en forma logarítmica, o sea $\ln 1/2 = x - 1$. Por lo tanto, $\ln 1/2 + 1 = x$. Si se quiere dar un valor decimal aproximado de x se recurre a una calculadora, la cual permite hallar el logaritmo natural de un real positivo. Así que $x \approx 0{,}3068$.

En la ecuación $0 = 3 - 2\ln(x+1)$) el procedimiento de solución de la ecuación logarítmica es similar al sugerido para la ecuación exponencial. Es decir se expresa la ecuación en la forma $\log a_x = b$ y luego se usa su expresión exponencial equivalente para despejar x. Así se tiene $0 = 3 - 2\ln(x+1)$; $3/2 = \ln(x+1)$; $e^{3/2} = x + 1$ y por consiguiente $e^{3/2} - 1 = x$, de donde $x \approx 3{,}48$. En las ecuaciones logarítmicas es necesario verificar la validez del valor de x obtenido en el proceso de resolución, pues en muchas ocasiones aparecen “soluciones extrañas”, es decir, valores que no son solución de la ecuación dada. Verifique que en este caso el valor obtenido de x es solución de la ecuación.

4. En cursos básicos de aritmética se estudian propiedades de los exponentes. En forma equivalente se definen propiedades de los logaritmos, las cuales son de gran utilidad en la manipulación de expresiones, con objeto de resolver ecuaciones o en su aplicación en situaciones problema. Se muestran algunas de tales propiedades y se demuestran dos de ellas.

Si a, b, M, N son números reales positivos con $a \neq 1$, $b \neq 1$ y p es un real, entonces:

a) $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$

b) $\log_a M^p = p \log_a M$

c) $\log_a \dfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

d) $a^{\log_a M} = M$

e) $\log_a a^p = p$

f) Si $M = N$ entonces $\log_a M = \log_a N$

g) $\log_a M = \dfrac{\log_b M}{\log_b a}$

La validez de la propiedad (g) se muestra así:

La expresión $y = \log_a M$ es equivalente con $M = a^y$. Por la propiedad (f) se tiene que logb $\log_b M = \log_b a^y$. Y por la propiedad (c) se afirma que $\log_b M = y \log_b a$. Por lo tanto $\dfrac{\log_b M}{\log_b a}$. Esta propiedad se utiliza para determinar el logaritmo de un real positivo, en términos de logaritmos comunes y logaritmos naturales así: $\log_a M = \dfrac{\log\ M}{\log\ a}$ y $\log_a M = \dfrac{\ln\ M}{\ln\ a}$.

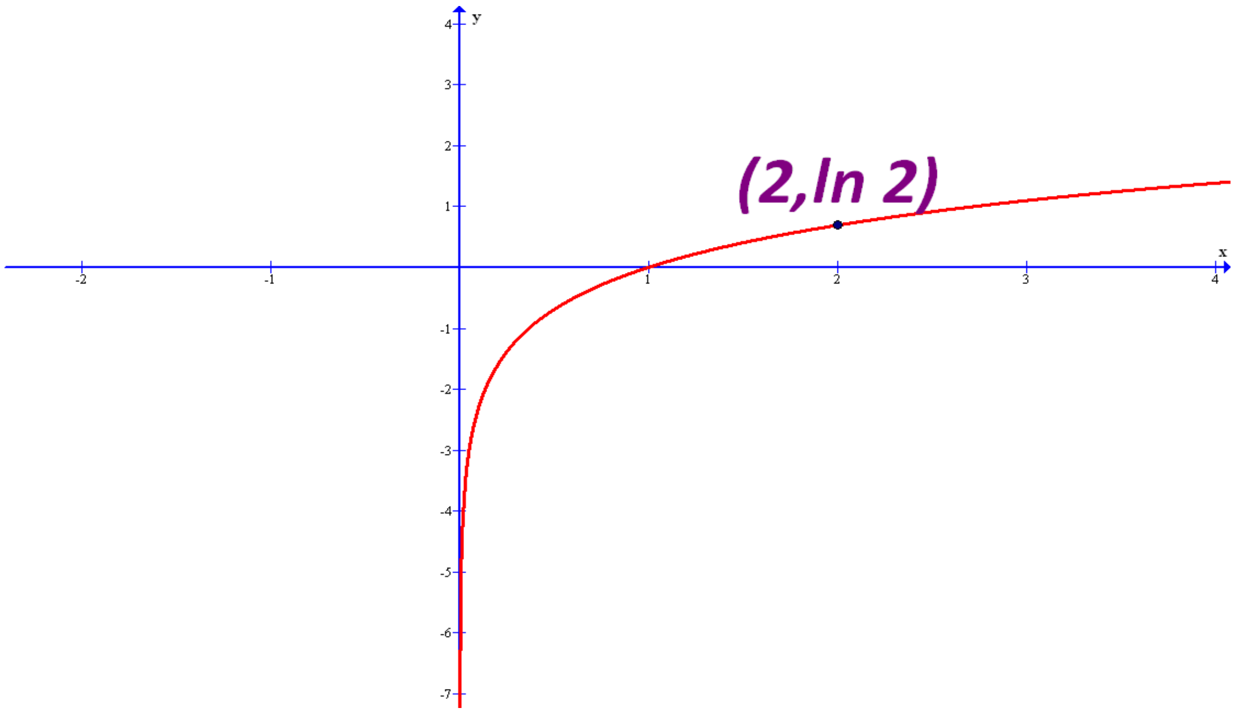


Figura 10. Gráfica de $f(x) = \ln x$

Fuente: propia

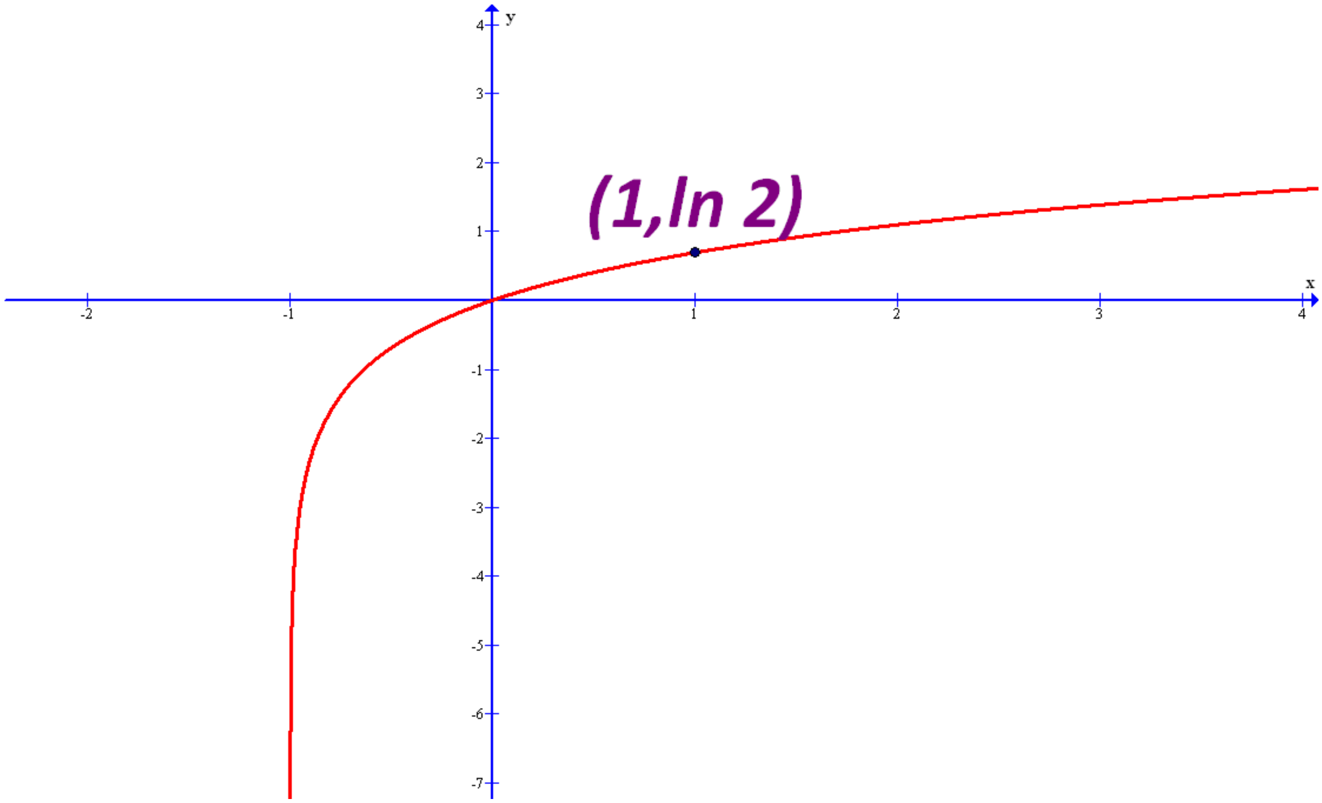


Figura 11. Gráfica de $y = \ln x + 1$

Fuente: propia

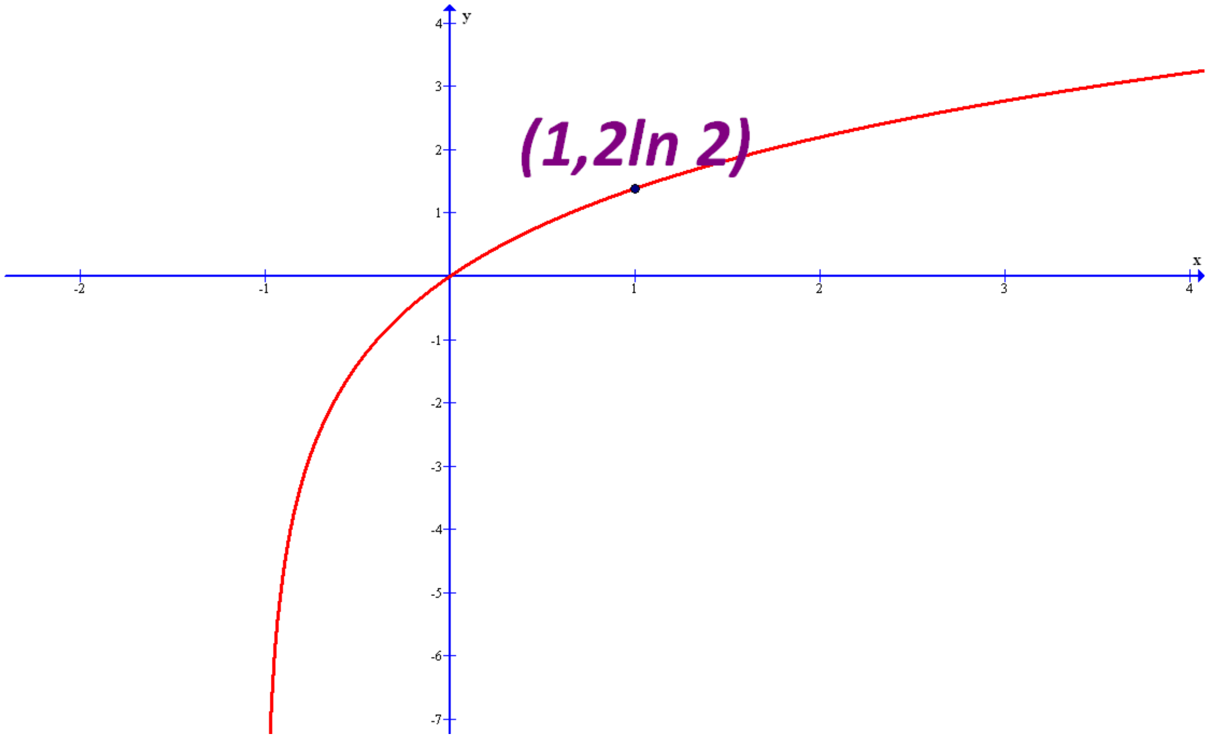


Figura 12. Gráfica de $y = 2\ln(x+1)$

Fuente: propia

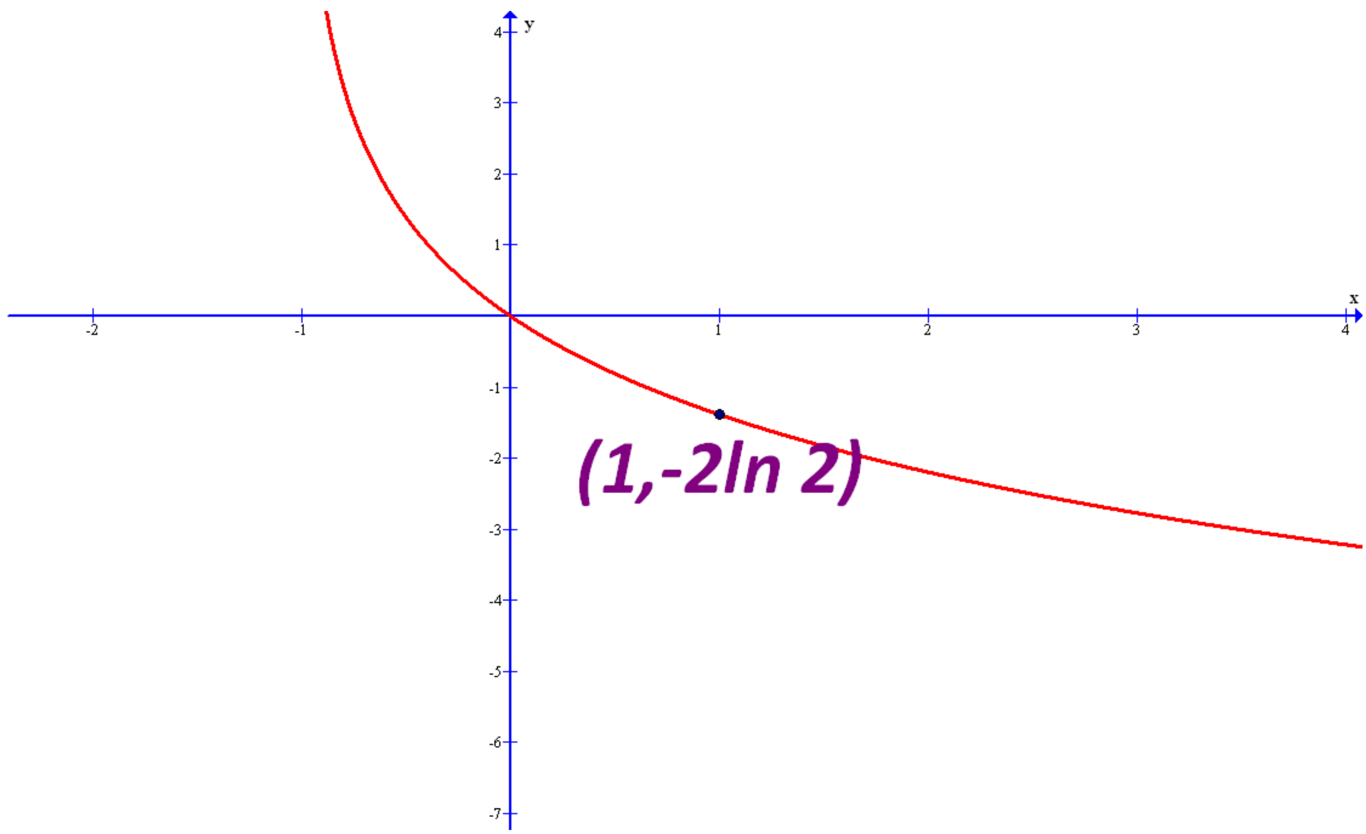


Figura 13. Gráfica de $y = -2\ln(x+1)$

Fuente: propia

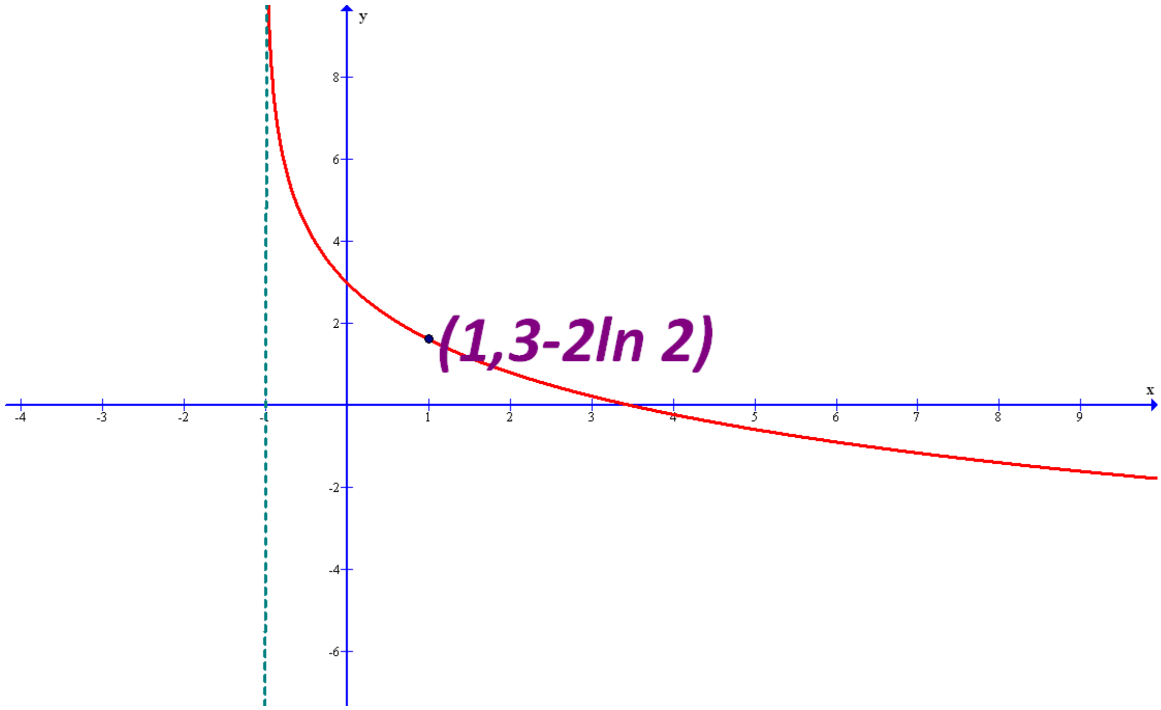


Figura 14. Gráfica de $y = 3 - 2\ln(x+1)$
Fuente: propia

Las propiedades dadas son útiles en la solución de ecuaciones. Por ejemplo, una forma de resolver la ecuación $\log_2(x-2) = 3 - \log_2 x$ es escribiendo la ecuación como $\log_2(x-2) + \log_2 x = 3$. Esta expresión equivale a $\log_2 x(x-2) = 3$, la cual se escribe como $x^2 - 2x = 8$. Las soluciones de la ecuación cuadrática son $x = 4$ o $x = -2$. Al verificar estas soluciones en la ecuación logarítmica a resolver, únicamente $x = 4$ es solución de dicha ecuación. ¿Por qué?

4

Unidad 4

Modelos funcionales: las funciones trigonométricas

Fundamentos de matemáticas

Autor: Danilo de Jesús Ariza

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina

MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Introducción

Variados problemas prácticos han originado nociones matemáticas, las cuales posteriormente han evolucionado hacia un conocimiento teórico que permite abordar problemas más amplios que los originales. Tal es el caso de situaciones derivadas de la navegación en cuanto a orientación y que posiblemente generaron la noción de ángulo, o la determinación de longitudes, mediante métodos indirectos.

Se propone a continuación el estudio del conocimiento que históricamente ha posibilitado la solución de problemas en los que intervienen conjuntamente ángulos y medidas de segmentos. Esta área de las matemáticas se conoce como trigonometría, palabra griega que significa "medición de triángulos" en alusión a la medida de ángulos y lados de un triángulo.

Recomendaciones metodológicas

Un cuidadoso análisis del contenido de esta lectura resulta de vital importancia en la comprensión de las temáticas aquí contempladas. Se exhorta al estudiante a que revise y refuerce los principios de cursos anteriores antes de enfrentase a estos contenidos. Específicamente se requiere total claridad sobre procedimientos algebraicos, ya que los elementos considerados en esta cartilla requieren de ello y son soporte para estudios posteriores. Se recomienda la verificación de los cálculos numéricos y procedimientos presentados, esto con el fin de obtener la contribución de afianzar el conocimiento del tema y ganar mayor confianza hacia lo que sigue en el estudio del curso.

Desarrollo temático

Modelos funcionales: las funciones trigonométricas

Preliminares

Para el estudio que se propone, un ángulo es la unión de dos rayos que tienen vértice común, uno de los cuales se denomina lado inicial, y el otro (que resulta de rotar el lado inicial alrededor del vértice), se denomina lado final. Si la rotación se hace en el sentido contrario a las manecillas de un reloj, se afirma que el ángulo está orientado positivamente o que es positivo, de lo contrario se asegura que el ángulo es negativo. Las figuras 1 y 2 ilustran esta definición.

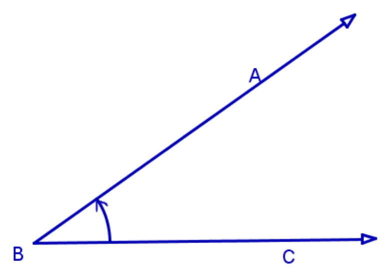


Figura 1. Ángulo positivo
Fuente: propia

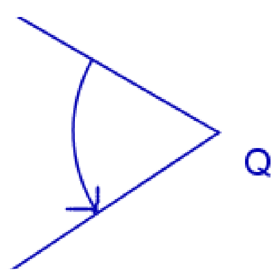


Figura 2. Ángulo positivo
Fuente: propia

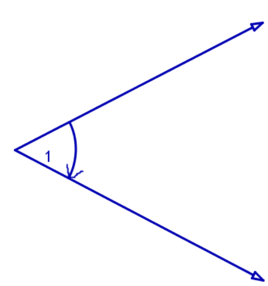


Figura 3. Ángulo negativo
Fuente: propia

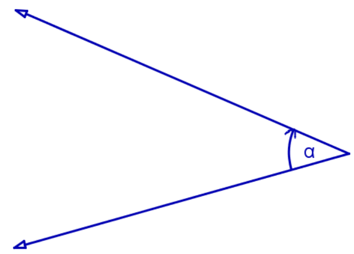


Figura 4: Ángulo negativo
Fuente: propia

Un ángulo se nombra mediante tres letras, una de ellas en el lado inicial, otra en el vértice y la tercera en el lado final. El ángulo de la figura 1, se nombra $A\hat{B}C$. Note que la letra que designa el vértice se coloca entre las otras dos letras. Si en un vértice únicamente se marca un ángulo, éste se puede nombrar con la letra que designa el vértice. Tal es el caso de la figura 2, donde el ángulo se nombra $\hat{Q}$. También es usual nombrar los ángulos mediante un número cerca de su vértice o una letra griega. El ángulo de la figura 3 se nombra $\hat{1}$ y el ángulo de la figura 4 se nombra $\hat{\alpha}$.

A cada ángulo orientado se asigna un número real denominado la medida del ángulo. Consideramos dos sistemas de medidas de ángulos, es decir, dos formas de asignar un número real a un ángulo. El primero de ellos se denomina **sexagesimal** y asume que un ángulo de un grado se obtiene cuando el lado inicial del ángulo se hace rotar 1/360 de un ángulo de una vuelta. O sea que el ángulo de una vuelta mide 360 grados. Se nota 360°. El sistema radián considera que un ángulo central en una circunferencia de radio 1, el cual intercepta un arco de longitud 1, mide 1 radián (se abrevia 1 rad.). Como un ángulo de una vuelta intercepta un arco cuya longitud es la longitud de la circunferencia, entonces un ángulo de una vuelta mide 2π radianes. Las figuras 5 y 6 muestran un ángulo de un radián y ángulos de una vuelta (en los dos sistemas de medida).

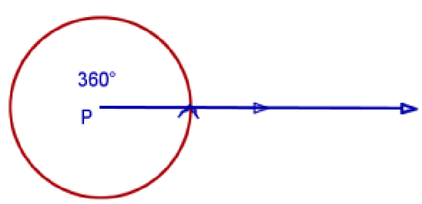


Figura 5. Ángulo de una vuelta (en grados)
Fuente: propia

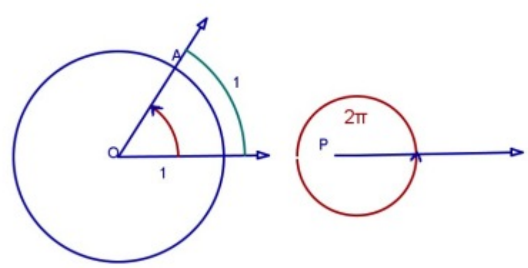


Figura 6. Ángulos en radianes
Fuente: propia

Mediante las definiciones dadas de los sistemas de medidas, se establece una equivalencia de la medida de un ángulo en los dos sistemas. Por ejemplo, un ángulo que en el sistema sexagesimal mide 180°, en el sistema radián mide π radianes.

Un triángulo es la unión de los segmentos determinados por tres puntos no colineales. Los puntos se denominan vértices del triángulo y los segmentos se llaman los lados del triángulo. Un triángulo se nota mediante los tres vértices. En la figura 7 se representa ΔABC. En un triángulo es usual designar la medida de un lado, mediante una letra minúscula, que corresponde al vértice opuesto a dicho lado.

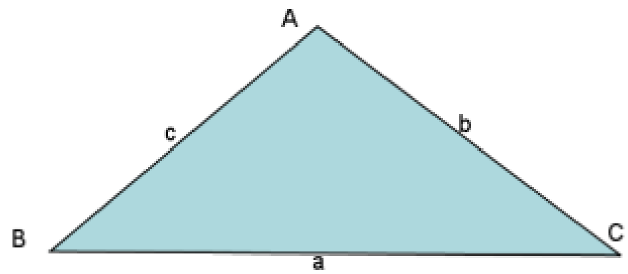


Figura 7. Triángulo
Fuente: propia

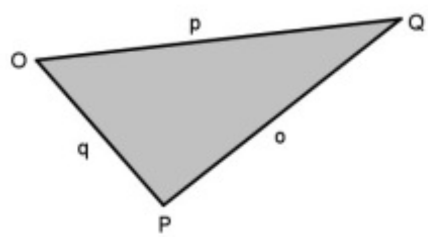


Figura 8. Triángulo rectángulo
Fuente: propia

Un triángulo rectángulo es un triángulo que tiene un ángulo recto. Los lados que determinan el ángulo recto se denominan catetos y el lado que se opone al ángulo recto se llama hipotenusa. En la figura 8 la hipotenusa es $\overline{OQ}$ cuya medida es p. Si un cateto determina uno de los ángulos agudos del triángulo, se denomina el cateto adyacente al ángulo. Si el cateto no está sobre los lados del ángulo agudo en cuestión, se denomina cateto opuesto al ángulo. En la misma figura se aprecia que el cateto adyacente al $\hat{O}$ es el lado $\overline{OP}$ de medida q y el cateto opuesto a $\hat{O}$ es el lado $\overline{PQ}$.

Razones trigonométricas

Una razón es el cociente entre dos cantidades. Una razón trigonométrica es el cociente entre las medidas de dos lados de un triángulo rectángulo. Se asignan las razones trigonométricas a los ángulos agudos de un triángulo rectángulo. Por lo tanto, se nombran los catetos de acuerdo con el ángulo agudo al cual se refiere una razón trigonométrica. Es decir, se identifican los catetos opuesto y adyacente al ángulo para definir cada razón trigonométrica. Cada razón trigonométrica tiene un nombre y una abreviatura. A continuación se definen las razones trigonométricas para el ángulo agudo $\hat{A}$ del triángulo rectángulo ΔABC de la figura 9 y se especifican sus abreviaturas. Se usan convenciones así: H para la hipotenusa, C.O. para el cateto opuesto al ángulo, y C.A. para el cateto adyacente al ángulo. Además, en adelante nos referimos al ángulo sin colocar su símbolo sobre la letra del vértice.

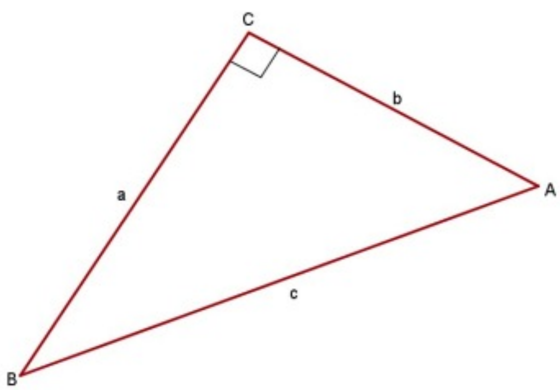


Figura 9. Razones trigonométricas
Fuente: propia

Razón trigonométrica. Definición.	Razón trigonométrica. Abreviatura.
Seno $A = \frac{C.O.}{H}$	$\sin A = \frac{a}{c}$
Coseno $A = \frac{C.A.}{H}$	$\cos A = \frac{b}{c}$
Tangente $A = \frac{C.O.}{C.A.}$	$\tan A = \frac{a}{b}$
Cotangente $A = \frac{C.A.}{C.O.}$	$\cot A = \frac{b}{a}$
Secante $A = \frac{H.}{C.A.}$	$\sec A = \frac{c}{b}$
Cosecante $A = \frac{H.}{C.O.}$	$\csc A = \frac{c}{a}$

Tabla 1. Razón trigonométrica

Ejemplos N.1:

a. Si se conocen las medidas de dos lados de un triángulo rectángulo, se pueden determinar las razones trigonométricas de cualquiera de sus ángulos agudos. Por ejemplo, si en el ΔRST , con ángulo recto en S se sabe qué $s = 4$ y $r = 3$, la determinación de los valores de tan T y sec R, se efectúa así:

Note que para hallar tan R se requiere conocer la medida de t, es decir, del cateto opuesto al ángulo T. La aplicación del teorema de Pitágoras en el ΔRST resuelve la situación, pues se tiene que $s^2 = r^2 + t^2$. Así que $16 = 9 + t^2$ de dónde $t = \sqrt{7}$. Como $\tan T = \frac{t}{r}$ entonces $\tan T = \frac{\sqrt{7}}{3}$. Y como $\sec R = \frac{4\sqrt{7}}{7}$.

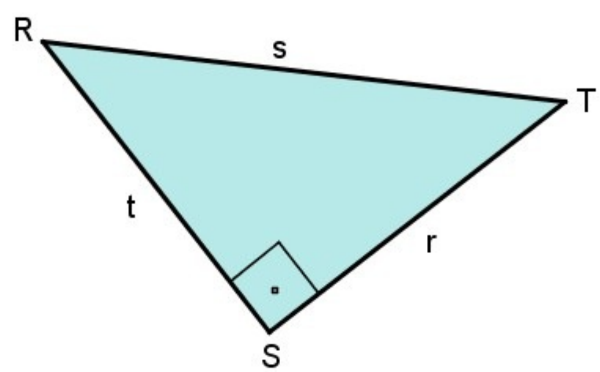


Figura 10. Razones trigonométricas en ΔRST
Fuente: propia

b. La definición de las razones trigonométricas permite establecer relaciones entre las razones trigonométricas.

Por ejemplo, como en el ΔABC con ángulo recto en C, se tiene que

$\sin A = \frac{a}{c}$ y $\cos A = \frac{b}{c}$. Luego $\frac{\sin A}{\cos A} = \frac{a/c}{b/c} = \frac{a}{b} = \tan A$. Así que $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$

Las siguientes relaciones entre razones trigonométricas se pueden demostrar utilizando las definiciones anteriormente dadas.

$$\cot A = \frac{\cos A}{\sin A} \qquad \sec A = \frac{1}{\cos A} \qquad \csc A = \frac{1}{\sin A} \qquad \cot A = \frac{1}{\tan A}$$

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1 \qquad \tan^2 A + 1 = \sec^2 A \qquad 1 + \csc^2 A = \cot^2 A$$

c. Las relaciones que se establecen entre ángulos y lados de figuras geométricas conocidas, permiten determinar las razones de ángulos de medidas particulares, tales como 30°, 45°, o 60°. A continuación se muestra una forma para encontrar las razones trigonométricas de un ángulo de 45°.

Las restantes razones trigonométricas de un ángulo de 45° se hallan o bien con la definición, o bien usando las relaciones entre razones trigonométricas.

Ejercicios:

1. Determine la equivalencia en grados de ángulos que miden $\frac{2\pi}{3} rad$, $-\frac{7\pi}{4} rad$, $\frac{3\pi}{2} rad$.

2. Determine la equivalencia en radianes de ángulos que miden 135°, –240°, 520°. Escriba las respuestas en términos de π y en forma de fracciones.

3. Para ΔXYZ rectángulo, con ángulo recto en Y, resolver los siguientes interrogantes.

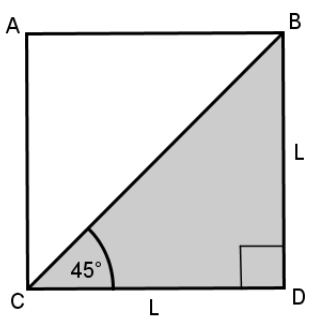


Figura 11. Razones trigonométricas de 45°

En la figura 11 se nota que ΔBCD es recto en D y por lo tanto $\overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{DC}^2$ (teorema de Pitágoras). Así que $\overline{BC}^2 = L^2 + L^2$. Es decir que $\overline{BC} = \sqrt{2}L$.

Lo anterior significa que $\sin 45^\circ = \frac{L}{\sqrt{2}L} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. De la misma forma se muestra que $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

A. Si $\cos Z = \frac{2}{3}$ determinar $\cot Z$ y $\sin X$

B. Si $\cot X = \frac{3}{4}$ determinar $\sec X$ y $\csc Z$

4. Demuestre las relaciones entre razones trigonométricas indicadas en el punto b. de los ejemplos N. 1.

5. Muestre que sí M y N son los ángulos agudos de un triángulo rectángulo ΔMNP, entonces $\sin M = \cos N$ y $\cos M = \sin N$. Explore la posibilidad que este tipo de relaciones entre razones se extienda a otras razones trigonométricas.

6. Determine las restantes razones trigonométricas para un ángulo de 45° planteadas en el punto c, de los ejemplos N.1.

7. Utilice la figura 12 para determinar las funciones trigonométricas de un ángulo de 30° y un ángulo de 60°.

Sugerencia: determine la medida de la altura $\overline{AD}$ del ΔABC (que es equilátero), en términos de la medida del lado L del dicho triángulo. Luego considere el ΔABD y use la definición de razones trigonométricas.

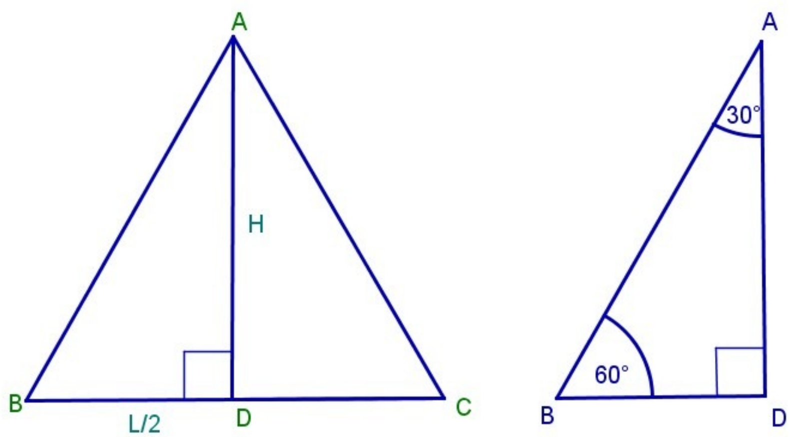


Figura 12. Razones trigonométricas de 30° y 45°
Fuente: propia

8. Demuestre que cada afirmación es verdadera.

A. Si A es un ángulo agudo de un triángulo rectángulo, entonces $\sin A < 1$ y $\cos A < 1$.

B. Si B es un ángulo agudo de un triángulo rectángulo, entonces sec B > 1 y csc B > 1.

9. Los valores de las razones trigonométricas de un ángulo agudo (de cualquiera medida) de un triángulo rectángulo, se pueden leer en una calculadora con "funciones". Chequee en una calculadora valores de las razones trigonométricas de 37° y de $\frac{5\pi}{12}$ rad.

10. Resolver un triángulo es determinar las medidas de sus ángulos y lados con base en datos conocidos y en el uso de razones trigonométricas. Resolver los triángulos cuyos datos se dan.

A. a) ΔKRW es rectángulo con ángulo recto en W. Se conoce que $K = 22^\circ$ y $w = 6$.

B. b) ΔLSZ es rectángulo con ángulo recto en Z. Se sabe qué $L = \frac{\pi}{9} rad$ y $l = 5$.

Otras consideraciones sobre ángulos

Un ángulo en posición normal o estándar es un ángulo cuyo vértice se ubica en el origen del sistema de coordenadas cartesianas, su lado inicial está sobre el semieje positivo x y el lado final pasa por cualquier punto del plano cartesiano.

Si el lado final de un ángulo en posición normal queda sobre uno de los ejes coordenados del plano cartesiano, el ángulo se denomina cuadrantal. Ángulos que midan 0°; 270°; πrad; $-\frac{5\pi}{2} rad$ son ángulos cuadrantales. Las figuras 13 a 15 muestran ángulos en posición normal.

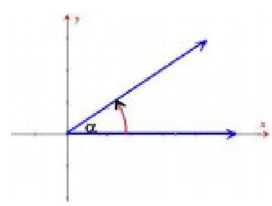


Figura 13. Ángulo positivo en posición normal
Fuente: propia

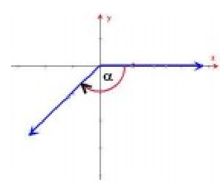


Figura 14. Ángulo negativo en posición normal
Fuente: propia

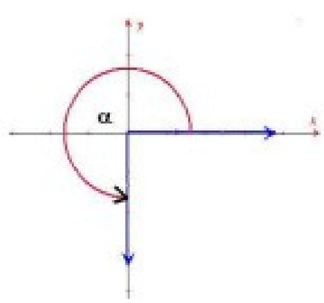


Figura 15. Ángulo cuadrantal
Fuente: propia

Si el lado final de un ángulo α en posición normal pasa por un punto del plano que tenga coordenadas positivas, se afirma que el ángulo pertenece al primer cuadrante. Se nota $\alpha \in IQ$. Las figuras 16 a 18 muestran ángulos del segundo, tercer y cuarto cuadrante. Es importante caracterizar la pertenencia de un ángulo a cada uno de estos cuadrantes.

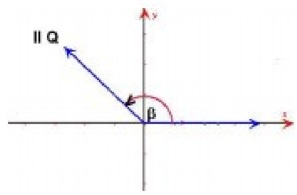


Figura 16. Ángulo del segundo cuadrante
Fuente: propia

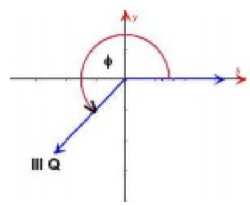


Figura 17. Ángulo del tercer cuadrante
Fuente: propia

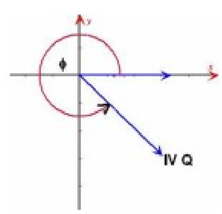


Figura 18. Ángulo del cuarto cuadrante
Fuente: propia

Dos ángulos en posición normal se denominan coterminales si sus lados finales coinciden.

Funciones trigonométricas de ángulos

La noción de razón trigonométrica de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo se extiende a través de las funciones trigonométricas, de tal forma que se puede determinar el valor de razones con el mismo nombre que las trigonométricas para cualquier ángulo. Para ello se considera un ángulo α en posición normal y un punto $P(x, y)$ en el lado final de α. La distancia de P al origen de coordenadas se llama r. (Véase la figura 19). Note que $r^2 = x^2 + y^2$ y que $r > 0$.

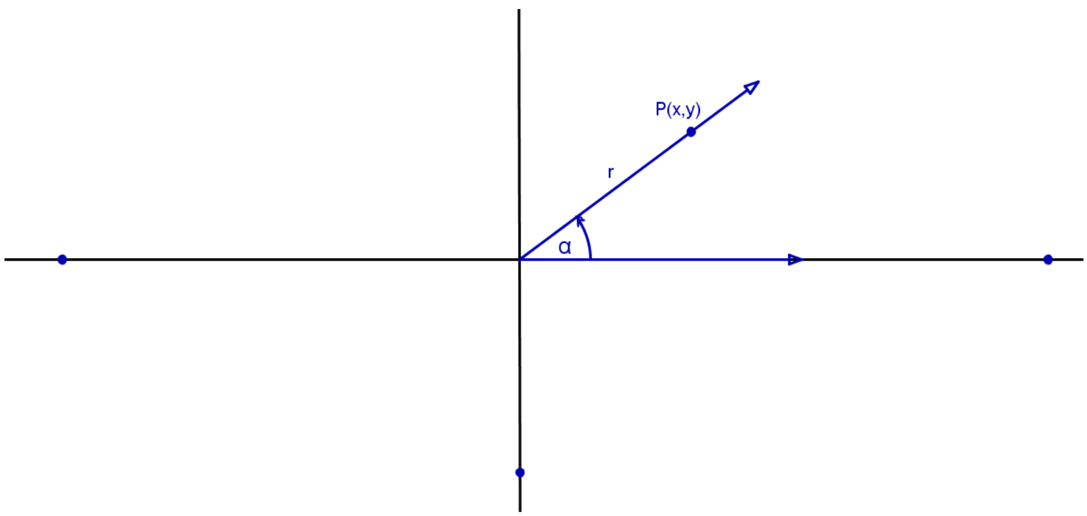


Figura 19. Angulo en posición normal
Fuente: propia

Entonces a cada ángulo α medido en radianes se asignan números reales que toman el mismo nombre de las razones trigonométricas y se definen funciones de α así:

$\sin\alpha = \frac{y}{r}$ $\cos\alpha = \frac{x}{r}$ $\tan\alpha = \frac{y}{x}$, con $x \neq 0$ $\cot\alpha = \frac{x}{y}$, con $y \neq 0$

$\sec\alpha = \frac{r}{x}$, con $x \neq 0$ $\csc\alpha = \frac{r}{y}$, con $y \neq 0$

De la definición de las funciones trigonométricas se derivan algunas afirmaciones.

Las funciones trigonométricas de un ángulo no dependen del punto que se escoja en su lado final.

Las funciones trigonométricas de ángulos coterminales son iguales.

El signo de una función trigonométrica de un ángulo depende de los signos de las coordenadas del punto sobre el lado final del ángulo.

A cada ángulo θ cuya medida esté entre 0° y 360° se asocia un ángulo del primer cuadrante llamado el ángulo de referencia (lo denominamos t), de tal manera que si se escoge un punto de coordenadas (x, y) sobre el lado final de t, existirán puntos sobre el lado final de θ de coordenadas: $(-x, y)$, si $\theta \in IIQ$, $(-x,-y)$, si $\theta \in IIIQ$ y $(x,-y)$, si $\theta \in IVQ$. Esto permite expresar las funciones trigonométricas de θ en términos de las funciones trigonométricas de t. La tabla muestra la relación que existe entre el ángulo θ y el ángulo t.

Segundo Cuadrante	Tercer Cuadrante	Cuarto Cuadrante
$t = 180 - \theta$	$t = \theta - 180$	$t = 360 - \theta$

Tabla 2. Relación entre ángulo θ y el ángulo t

Fuente: propia

Ejemplos N. 2.

A. Si $P(-1,3)$ es un punto en el lado final del ángulo β, para determinar $\tan\beta$ y $\sec\beta$, se usan las definiciones de las funciones trigonométricas. Así que $\tan\beta = \frac{y}{x}$, es decir $\tan\beta = -\frac{3}{1} = -3$. Para hallar $\sec\beta$ es necesario conocer el valor de r. Como $r^2 = x^2 + y^2$, se tiene que $r^2 = (1)^2 + 3^2$, es decir que $r = \sqrt{10}$, de donde $\sec\beta = \frac{\sqrt{10}}{-1} = -\sqrt{10}$.

B. Las funciones trigonométricas para ángulos cuadrantales, se identifican a partir de la definición. Para hallar las funciones trigonométricas de 270°, basta tomar un punto en el lado terminal del ángulo. Por ejemplo si se toma $P(0,-3)$, se sigue que $r = 3$, así que $\sin 270^\circ = -1$ y $\sin 270^\circ = 0$. Las demás funciones trigonométricas (si existen) se hallan con la definición. Nótese que *tan*270° no existe. (¿Por qué?).

C. Las relaciones que se establecieron entre razones trigonométricas de un ángulo agudo, son válidas para funciones trigonométricas de cualquier ángulo. Estas igualdades se denomina identidades, pues son ciertas para cualquier valor que admita la variable (en este caso el ángulo). Veamos cómo se demuestra que $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ para todo ángulo α:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^2} = \frac{x^2 + y^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1$$

Nótese que se ha usado la afirmación $r^2 = x^2 + y^2$

Ejercicios:

1. Si α es un ángulo en posición normal, tal que $\alpha \in IVQ$ y se conoce que $\cot\alpha = -\frac{2}{3}$, determinar los valores de $\sin\alpha$; $\tan\alpha$ y $\sec\alpha$.

2. Demuestre que las funciones trigonométricas de un ángulo α no dependen del punto que se escoja en su lado final. Sugerencia: considere los puntos $P(x, y)$ y $Q(x_1, y_1)$ en el lado final de α y utilice propiedades de semejanza de triángulos para comparar una función definida con los dos puntos dados.

3. Determine dos ángulos coterminales (uno positivo y otro negativo) con ángulos de medidas $118^\circ; -62^\circ; \frac{7\pi}{6}; -\frac{19\pi}{4}$. Describa el procedimiento utilizado.

4. Se ha afirmado que los signos de las funciones trigonométricas de un ángulo en posición normal, dependen del signo de las coordenadas del punto que se escoja sobre su lado final. Por ejemplo, las seis funciones trigonométricas de un ángulo del primer cuadrante son positivas, pues cualquier punto sobre el lado final del ángulo tiene coordenadas positivas. Determine qué funciones trigonométricas son positivas en cada uno de los demás cuadrantes. Explique su razonamiento.

Si $\theta \in IIIQ$, determine el signo de la expresión $\frac{\sin\theta\cos\theta}{-\sec\theta}$

5. Considere los ángulos cuadrantales de medidas 0°; 90°; 18°; 270° y 360°. Determine las funciones trigonométricas (si existen) de estos ángulos. Muestre su razonamiento.

6. La noción de ángulo de referencia se asoció con un ángulo entre 0 y 2π. Explore una forma de asociar un ángulo de referencia t en el primer cuadrante $(0 < t < 90)$, con un ángulo θ, tal que $\theta > 360$ o $\theta < 0$. Luego, determine el ángulo de referencia t para ángulos de $700^\circ; -1230^\circ; \frac{47\pi}{3}\, y - \frac{19\pi}{3}$.

7. Si $\tan\alpha = -\frac{5}{7}$ y $\cos\alpha < 0$, determine los valores de las demás funciones trigonométricas de α.

8. Determine si cada afirmación es posible o imposible. Escriba su razonamiento. No use calculadora.

A. $\tan\beta = 4800$

B. $\sin\beta = -\frac{1}{3}$ y $\cos\beta = 3$

C. $\cot\theta = 7$ y $\csc\theta = 5$

9. Si se determina el ángulo de referencia de un ángulo, es posible expresar sus funciones trigonométricas en función de dicho ángulo. Por ejemplo: como el ángulo de referencia de $\theta = 240^\circ$ es $t = 60^\circ$, se afirma que $\cos 240^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$. Explique el porqué de esta última afirmación. Luego, exprese los valores pedidos, en términos del ángulo de referencia de cada ángulo. (Use la calculadora únicamente para confirmar la validez de su razonamiento).

Hallar los valores de $\sin 29\pi, \sec(-39\pi), \cot(-8590\ )^\circ\ y \csc 640^\circ$.

10. $P(x, y)$ es un punto sobre el lado final del ángulo α que pertenece al tercer cuadrante. Determine los valores de $\tan\alpha$ y $\sin\alpha$, si se conoce que $x = \frac{1}{3}y$.

Gráficas de funciones trigonométicas

Función periódica

Informalmente, una función es periódica si parte de su gráfica se repite en intervalos de igual longitud. Observe que en la figura 1 la gráfica de f se repite en intervalos de longitud 4.

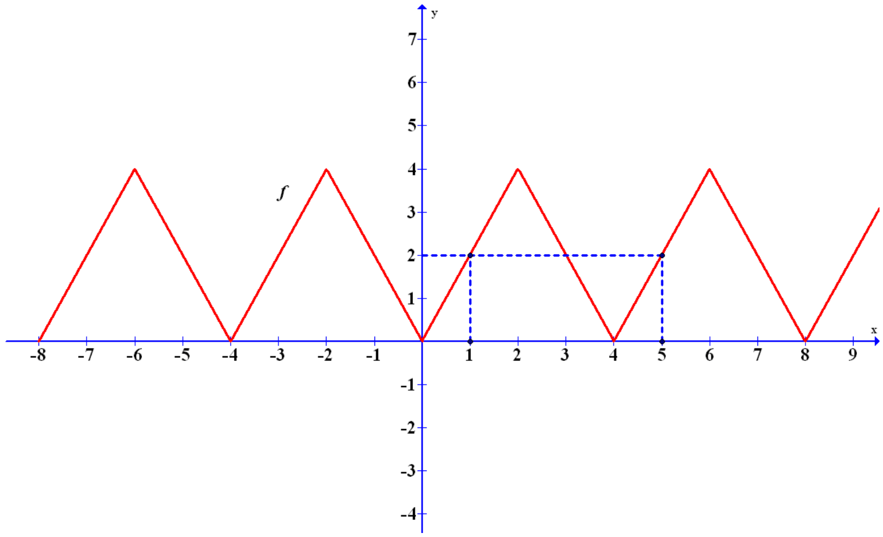


Figura 20. Gráfica de una función periódica
Fuente: propia

Note que de acuerdo con la gráfica de f se tiene que $f(5)=f(1+4)=f(1)=2$. Este hecho caracteriza las funciones periódicas. Es decir, se afirma que una función f es periódica de período p si para todo elemento x del dominio de f sucede que $f(x+p)=f(x)$. El menor valor de p para el cual la afirmación es correcta se conoce como el período fundamental de p. En el ejemplo, el período fundamental es 4.

Así que si se conoce el comportamiento de f en un intervalo cuya longitud sea la longitud del período fundamental, se puede replicar la gráfica de f (que se realiza en este intervalo) a todo el dominio de f. En el caso de la figura 1, basta con conocer la gráfica de f, por ejemplo en el intervalo $[0,4]$ para esbozar la gráfica completa de f.

Para el caso de las funciones trigonométricas, en la lectura anterior se demostraron las identidades $\sin(x+2\pi)=\sin x, \cos(x+2\pi)=\cos x, \tan(x+\pi)-\tan x$. Por lo tanto, se asegura que las funciones seno y coseno son funciones periódicas de período 2π y la función tangente es función periódica de período π.

Ejercicios:

1. Si f es una función periódica de período fundamental 7 y se conocen las imágenes de f en el intervalo $\left[0,7\right]$ cuál es el valor de $f(24)$ en términos de la imagen de un elemento en $\left[0,7\right]$.

2. Demuestre las siguientes identidades y elabore una conclusión acerca del período de las funciones cotangente, secante y cosecante.

A. $\cot(t+\pi)=\cot t$

B. $\sec(t+2\pi)=\sec t$

C. $\csc(t+2\pi)=\csc t$

3. Demuestre que sí f y g son funciones de período p, entonces $f-g$ es una función periódica de período p.

Gráfica de las funciones $f(t)=\sin t$, $f(t)=\cos t$ y $f(t)=\tan t$

Elementos básicos

En las funciones especificadas la variable t representa la medida de un ángulo en radianes. Para determinar el dominio de cada función señalada, se analizan la definiciones estudiadas en lecturas anteriores. Si t es un ángulo en posición normal y $P(x,y)$ es un punto en el lado terminal de t, se tiene que sin $t=\dfrac{y}{r}$, con r la distancia de P al origen del sistema de coordenadas cartesianas. Como $r>0$, entonces $\dfrac{y}{r}$ es un número real para cualquier ángulo t, así que el dominio de $f(t)=\sin t$ es el conjunto de los números reales. Un razonamiento similar permite afirmar que el dominio $f(t)=\cos t$ es R.

En el caso de la función tangente, se tiene que $\tan t=\dfrac{y}{x}$ con $x\neq 0$, así que si la abscisa x del punto P en el lado terminal de t es 0, no existe $\tan t$. Esta situación se da si el lado terminal de t está en el eje y, que es el caso de los ángulos cuadrantales de 90° $\dfrac{\pi}{2}rad$ y 270° $\dfrac{3\pi}{2}rad$, y todos los ángulos coterminales con estos dos ángulos. Es decir para todos los ángulos de medida un múltiplo impar de $\dfrac{\pi}{2}$ no existe la tangente.

En suma, el dominio de la función tangente está constituido por los números reales diferentes a los múltiplos impares de $\dfrac{\pi}{2}$.

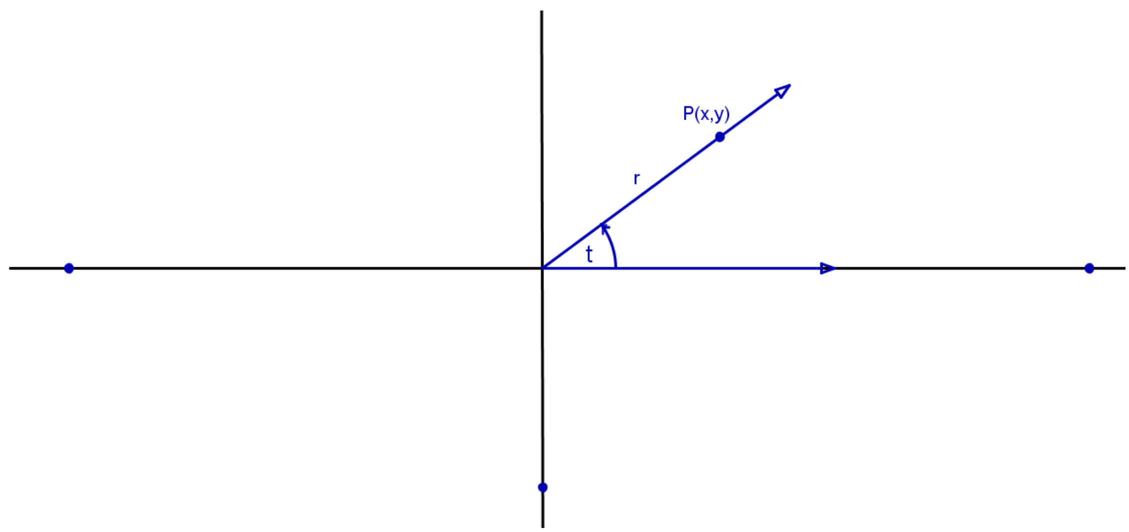


Figura 21. Angulo en posición normal
Fuente: propia

La determinación de los ceros de las funciones en consideración se hace con base en la solución de las ecuaciones $\sin t = 0$, $\cos t = 0$ y $\tan t = 0$. Estas ecuaciones se denominan trigonométricas y existen procedimientos específicos de solución. Por ahora, mediante un análisis de la expresión se determina las soluciones de cada ecuación. Así, en el caso de $\sin t = 0$, es preciso identificar los números reales (ángulos medidos en radianes), para los cuales la igualdad es verdadera. En lecturas previas hemos mostrado que $\sin 0 = 0$ y $\sin \pi = 0$. Asimismo para todos los ángulos t coterminales con estos dos ángulos se tendrá $\sin t = 0$. Esto quiere decir que para todos los múltiplos de π la ecuación se hace una igualdad verdadera. Luego, la gráfica de f intercepta al eje horizontal en los reales que sean múltiplos de π. Muestre un razonamiento similar que le permita asegurar que los ceros de $f(t) = \cos t$ son los múltiplos impares de $\frac{\pi}{2}$. Finalmente construya un argumento que le permita concluir que los ceros de $f(t) = \tan t$ son los mismos ceros de $f(t) = \sin t$.

El y-intercepto de cada una de las funciones estudiadas (si existe) será la imagen de 0 mediante cada función. Detallar por qué se declara que la función seno intercepta al eje vertical en $(0,0)$, la función coseno intercepta al eje vertical en $(0,1)$ y la función tangente intercepta dicho eje en $(0,0)$.

La siguiente tabla resume los elementos que se han identificado para las funciones seno, coseno y tangente.

Función	Dominio	Ceros	y - intercepto
Seno	R	$\{x \in R : x = n\pi, n\ \ entero\}$	$y = 0$
Coseno	R	$\left\{x \in R : x = (2n+1)\frac{\pi}{2}, n\ \ entero\right\}$	$y = 1$
Tangente	$\left\{x \in R : x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}, n\ \ entero\right\}$	$\{x \in R / x = n\pi, n\ \ entero\}$	$y = 0$

Tabla 3. Funciones

Fuente: propia

Aspectos particulares

Como previamente se ha determinado que las funciones seno y coseno tienen período 2π y la función tangente tiene período π, entonces se escogen los intervalos $[0,2\pi]$ para las dos primeras funciones y el intervalo $[0,\pi]$ para la función tangente, con objeto de conocer el comportamiento de cada función en ellos, trazar la gráfica y replicarla al dominio de cada función.

Para la función seno analizamos sus valores en cada uno de los cuadrantes del plano cartesiano. Se recurre al siguiente razonamiento: Si t es un ángulo del primer cuadrante se tiene de acuerdo con la figura 3 que $\sin t = \frac{y}{r}$, con $y > 0$, $r > 0$. A medida que t se acerque a $\frac{\pi}{2}$, el valor de y se acerca suficientemente a r, por lo tanto se puede afirmar que $\sin t$ se acerca a 1. En resumen, si $0 < t < \frac{\pi}{2}$ entonces $0 < \sin t < 1$, es decir, en el primer cuadrante la función seno crece de 0 a 1. Mediante el mismo razonamiento se caracteriza el comportamiento de la función seno en los demás cuadrantes y el comportamiento de la función coseno en los cuatro cuadrantes. La tabla que se muestra más adelante resume el comportamiento de las funciones en estudio, en cada cuadrante.

Al analizar el comportamiento de la expresión $\tan t = \frac{y}{x}$ en el primer cuadrante, se observa a medida que t se acerca a $\frac{\pi}{2}$, el valor de y se acerca a r y el valor de x se acerca a 0, luego $\frac{y}{x}$.

Crece hacia valores positivos grandes, es decir $\frac{y}{x} \to \infty$. De la misma forma se procede a realizar el análisis de la expresión que define la tangente, para determinar su comportamiento en el segundo cuadrante.

Función	IQ	IIQ	$IIIQ$	IVQ
Seno	Crece de 0 a	Decrece de 1 a	Decrece de 0 a	Crece de -1 a
Coseno	Decrece de 1 a	Decrece de 0 a	Crece de -1 a	Crece de 0 a
Tangente	Crece de 0 a	Crece de $-\infty$ a		

Tabla 4. Comportamiento de las funciones

Fuente: propia

Del comportamiento de las imágenes de cada función en los intervalos seleccionados se deriva el rango de cada función, el cual para las funciones seno y coseno es $[-1,1]$ y para la función tangente es R. Con la información obtenida y con apoyo en los valores de funciones para ángulos particulares se esbozan las gráficas en los intervalos referidos y luego se replica al dominio de cada función. Las figuras 3 a 4 muestran dicho trabajo.

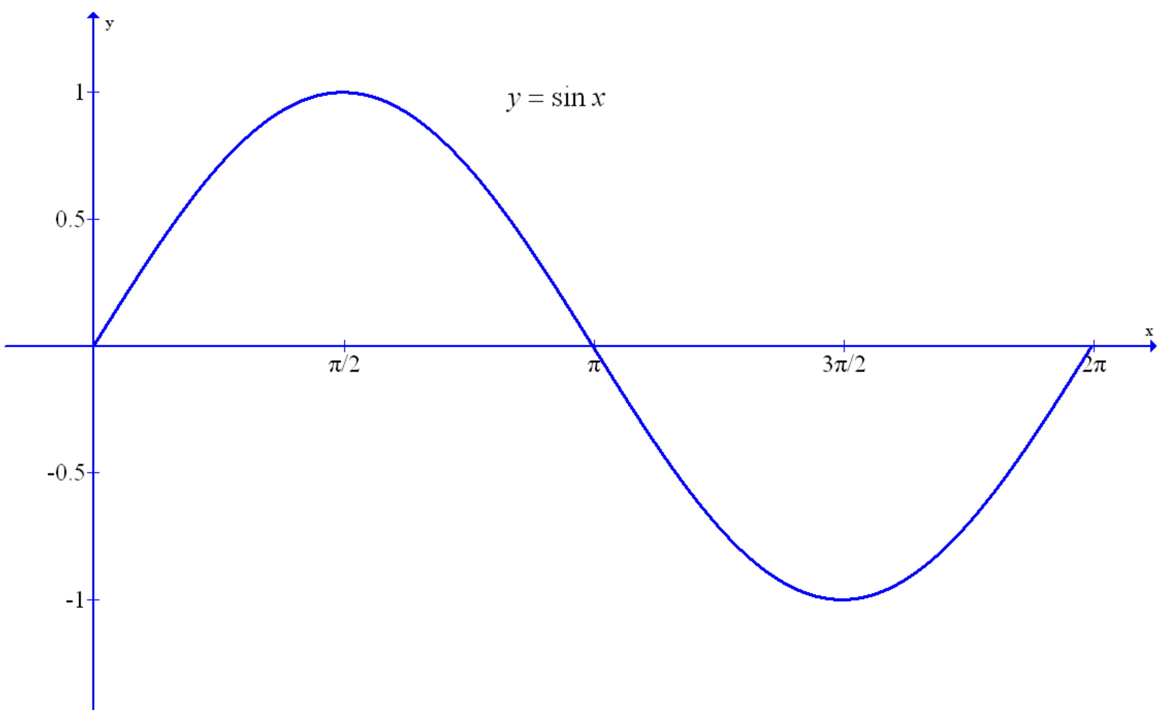


Figura 22. Gráfica de $y = \sin x$ en $[0,2\pi]$

Fuente: propia

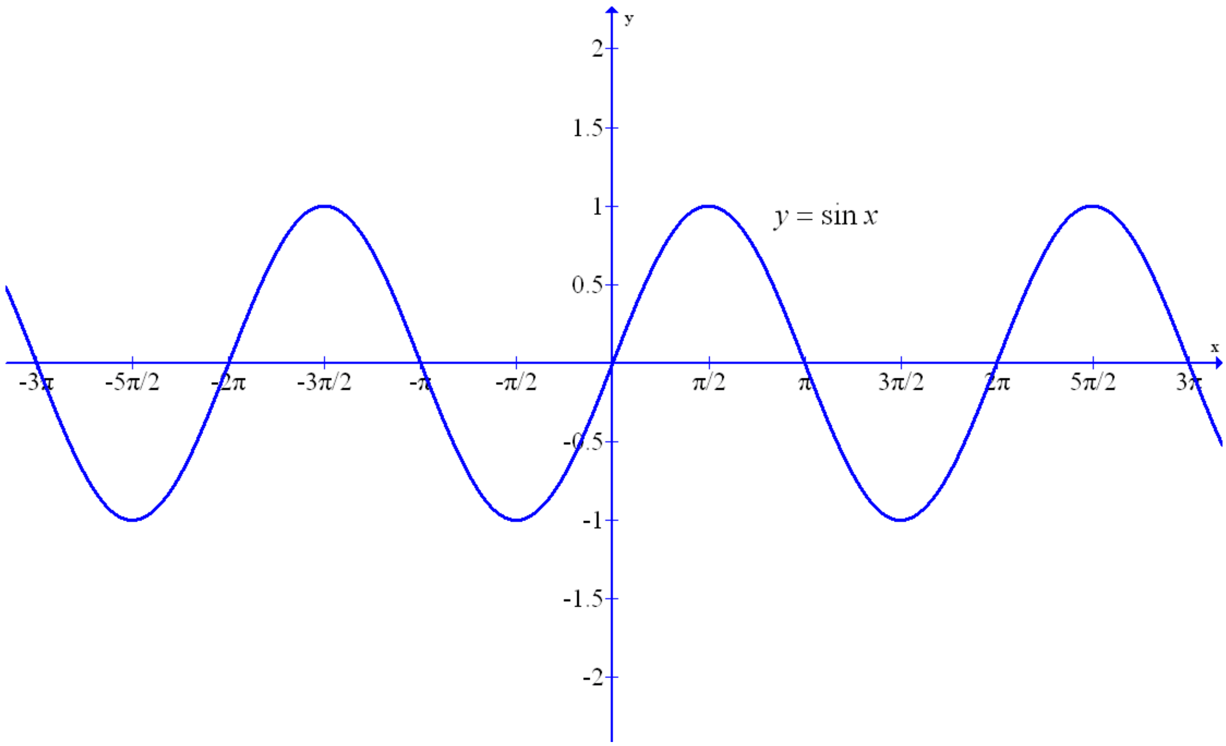


Figura 23. $y = \sin x$ en su dominio

Fuente: propia

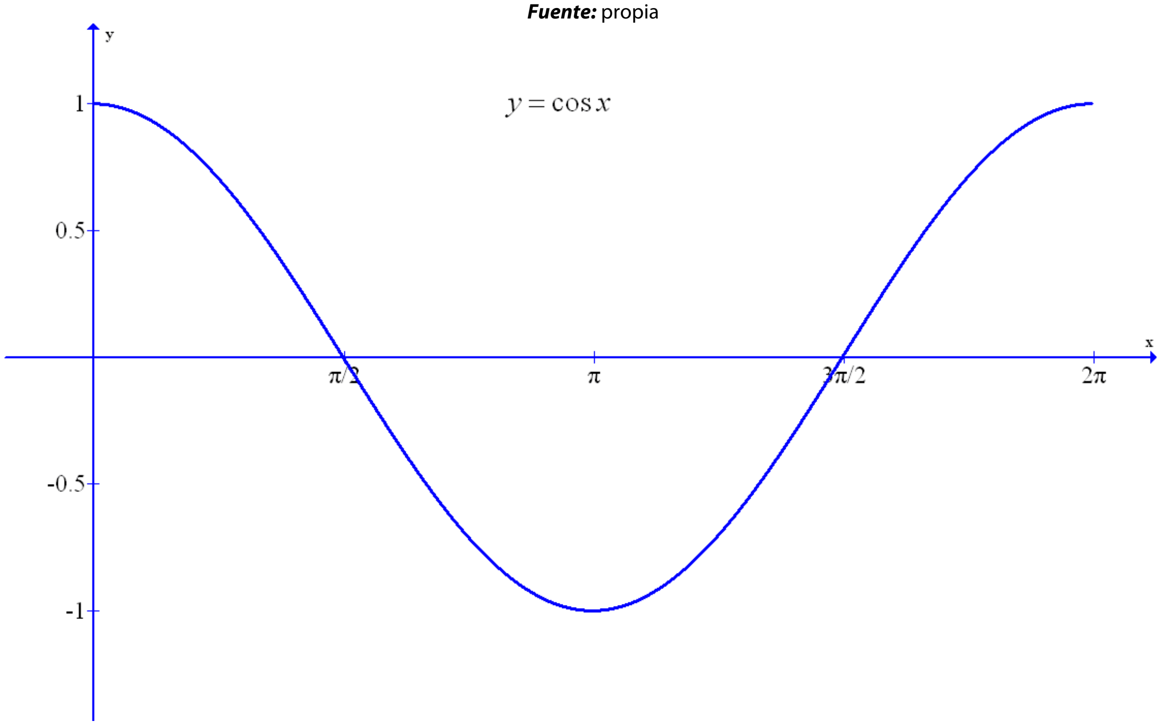


Figura 24. Gráfica de $y = \cos x$ en $[0,2\pi]$

Fuente: propia

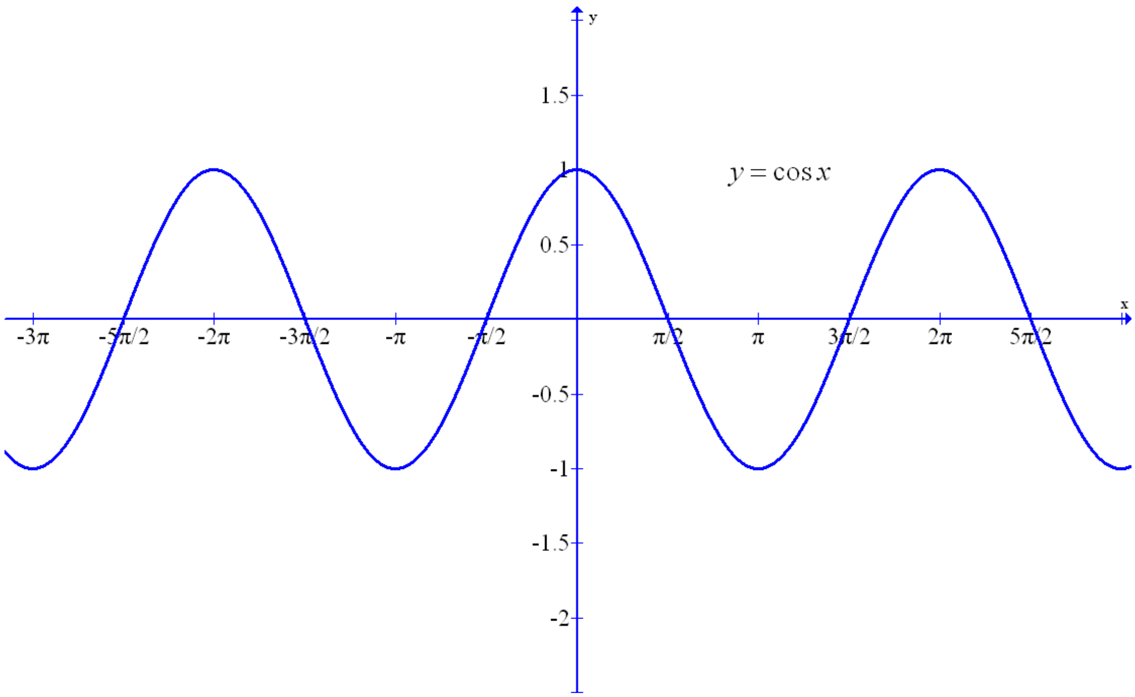


Figura 25. $y = \cos x$ en su dominio

Fuente: propia

Ejercicios:

1. Para la función $f(t) = \cot t$, determinar dominio, ceros (si existen) y y-intercepto (si existe). Como se demostró previamente que el período de esta función es π, establecer el crecimiento o decrecimiento de f en los cuadrantes comprendidos por el intervalo $[0, \pi]$. Luego, esbozar la gráfica de f en $[0, \pi]$ y finalmente replicarla a su dominio.

2. Para las funciones $f(t) = \sec t$ y $f(t) = \csc t$, determinar dominio, ceros (si existen) y y-intercepto (si existe). Como se demostró anteriormente que el período de estas funciones es 2π, establecer el crecimiento o decrecimiento de f en los cuadrantes comprendidos por el intervalo $[0, 2\pi]$. Luego, esbozar la gráfica de las funciones en $[0, 2\pi]$ y finalmente replicarlas a su dominio.

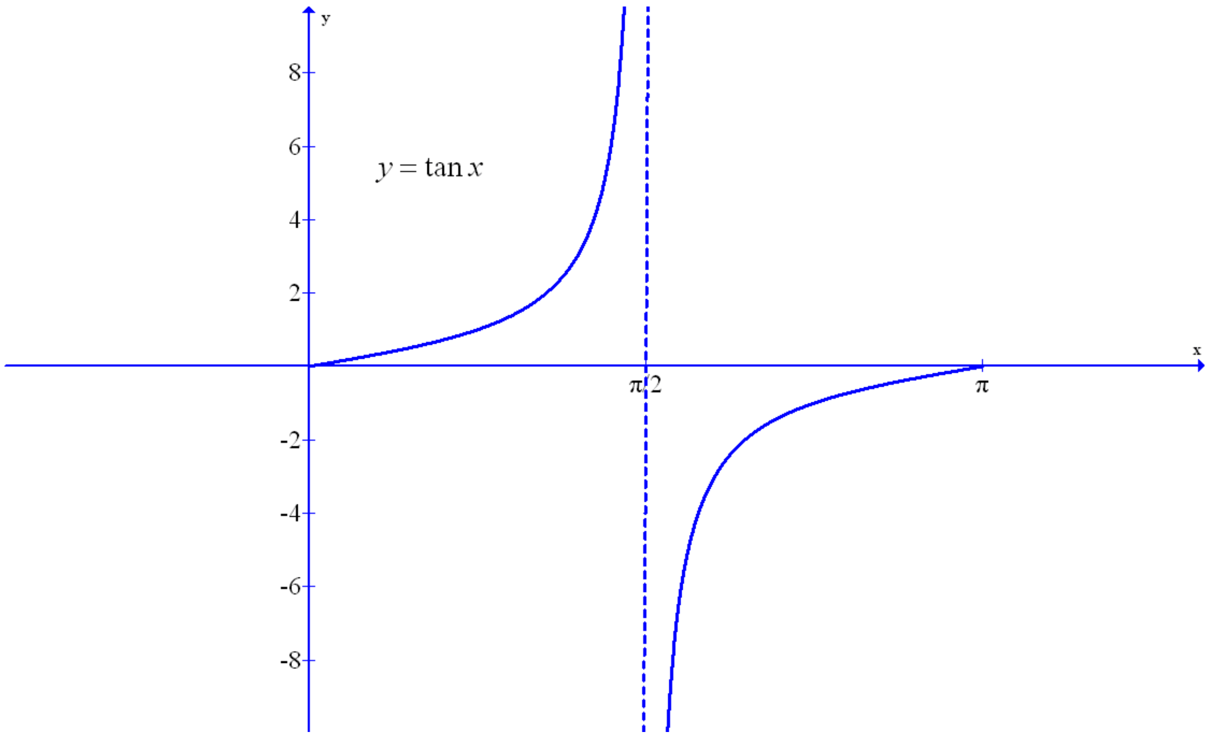


Figura 26. Gráfica de $y = \tan x$ en $[0, \pi]$

Fuente: propia

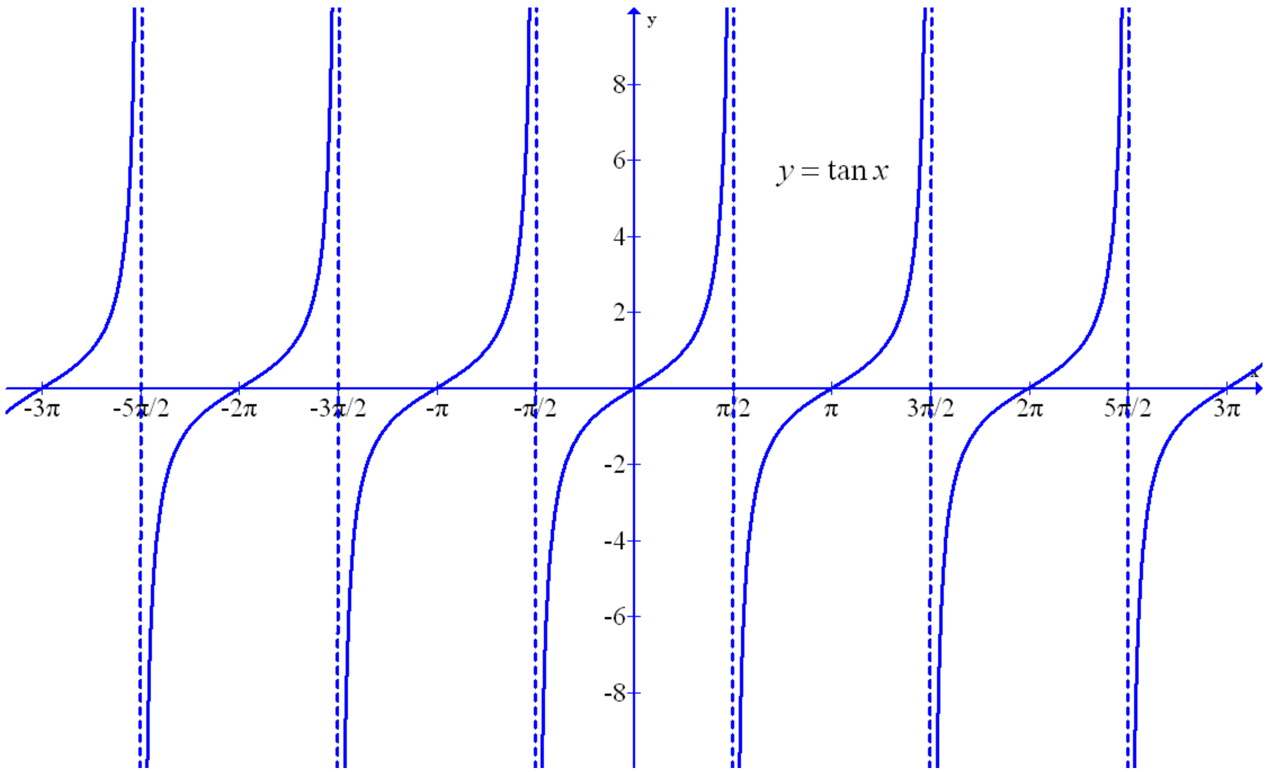


Figura 27. $y = \tan x$ en su dominio

Fuente: propia

Gráficas de funciones que contienen expresiones trigonométricas

Se asumen como modelos básicos las funciones trigonométricas cuyos elementos fundamentales, aspectos particulares y gráficas se han descrito en los párrafos anteriores. Por lo tanto, con base en estos modelos y con ayuda de los movimientos geométricos de traslación, reflexión y homotecias se pueden esbozar las gráficas de funciones que contienen expresiones trigonométricas.

Para graficar una función con base en los elementos referidos, esta debe tener la forma $y = Af\left(B(x - C)\right) + D$, donde f es una función trigonométrica y A es real y B, C, D son números reales positivos.

Así que para trazar la gráfica de $g(x) = -3\sin(2x - \pi) - 1$, hay que transformar la expresión que define la función. Al factorizar 2 en la expresión señalada, se $g(x) = -3\sin 2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 1$. Las transformaciones sucesivas de $f(x) = \sin x$ para obtener g son:

$$f(x) = \sin x \qquad f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f\left[2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right] = \sin 2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \qquad 3f\left[2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right] = 3\sin 2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$-3f\left[2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right] = -3\sin 2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \qquad 3f\left[2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right] - 1 = -3\sin 2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 1$$

Las figuras 9 a 12 muestran los movimientos geométricos que permiten bosquejar la función g. Como $f(x) = \sin x$ tiene período 2π se dibuja su gráfica en $[0,2\pi]$. En cada una de las transformaciones se muestra un ciclo de la nueva función.

Una forma alterna de trazar las gráficas de funciones que contienen expresiones trigonométricas, se refiere a la identificación de dos elementos propios de estas funciones: el período y el desfase. El período ha sido explicado anteriormente. El desfase se refiere a un valor del dominio de la función desde el cual se puede replicar un ciclo del modelo básico que se asume para graficar este tipo de funciones. Se consideran en este análisis funciones del tipo $y = f(Kx + M)$ con f una función trigonométrica y K un real positivo.

Se presenta la forma de determinar el período y el desfase de una función del tipo $f(x) = \sin(Kx + M)$ .Como el modelo básico a usar para grafica f es $y = \sin x$, se ha demostrado que su dominio es 2π y se ha escogido el intervalo [0, 2π] para dibujar un ciclo del modelo. Esto significa que para $y = \sin x$ se tiene que $0 \le x \le 2\pi$. Así que se desea conocer cómo varía x en el caso de la función f.

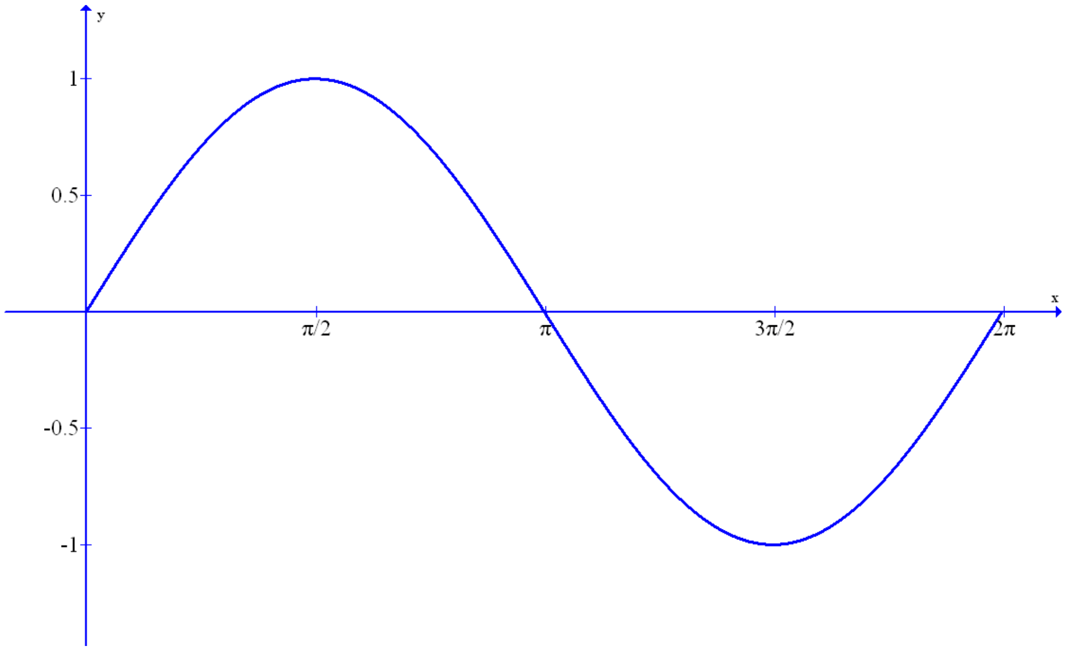


Figura 28. Gráfica de $f(x) = \sin x$

Fuente: propia

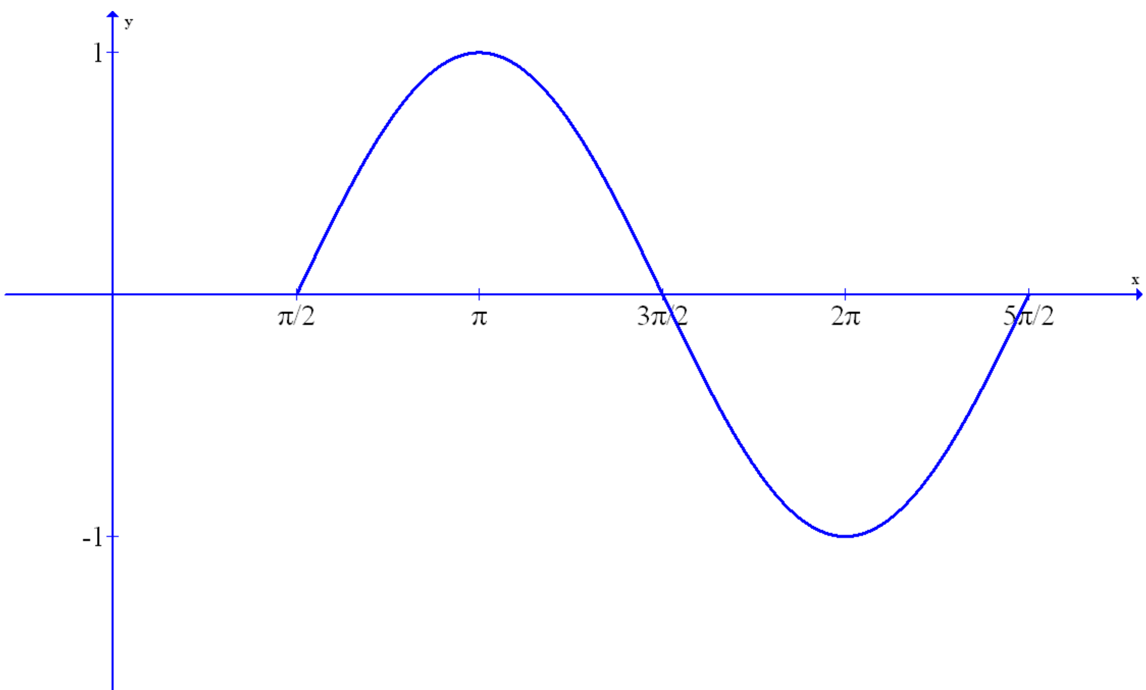


Figura 29. Gráfica de $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

Fuente: propia

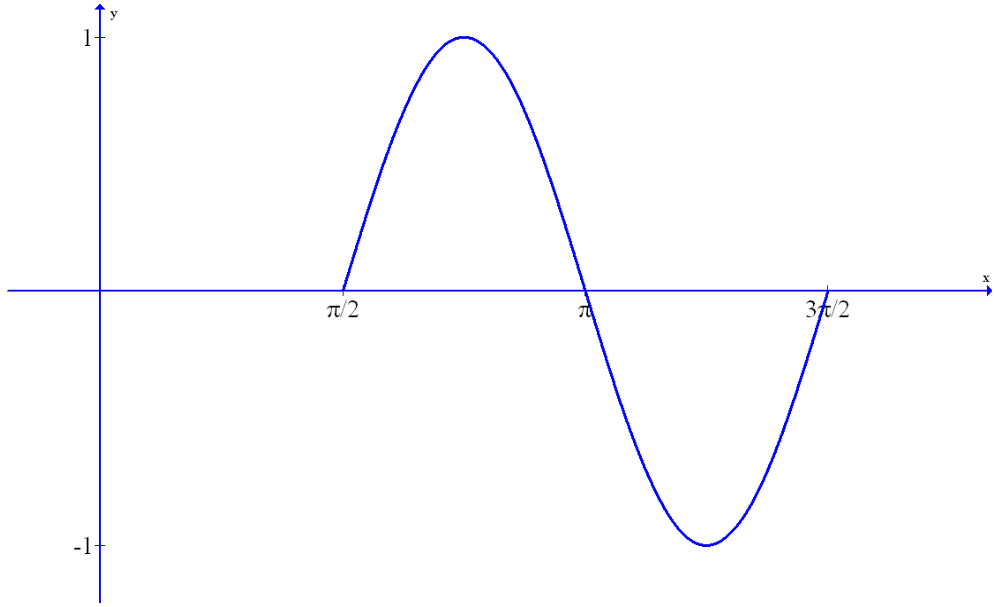


Figura 30. Gráfica de $y = \sin\left[2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right]$

Fuente: propia

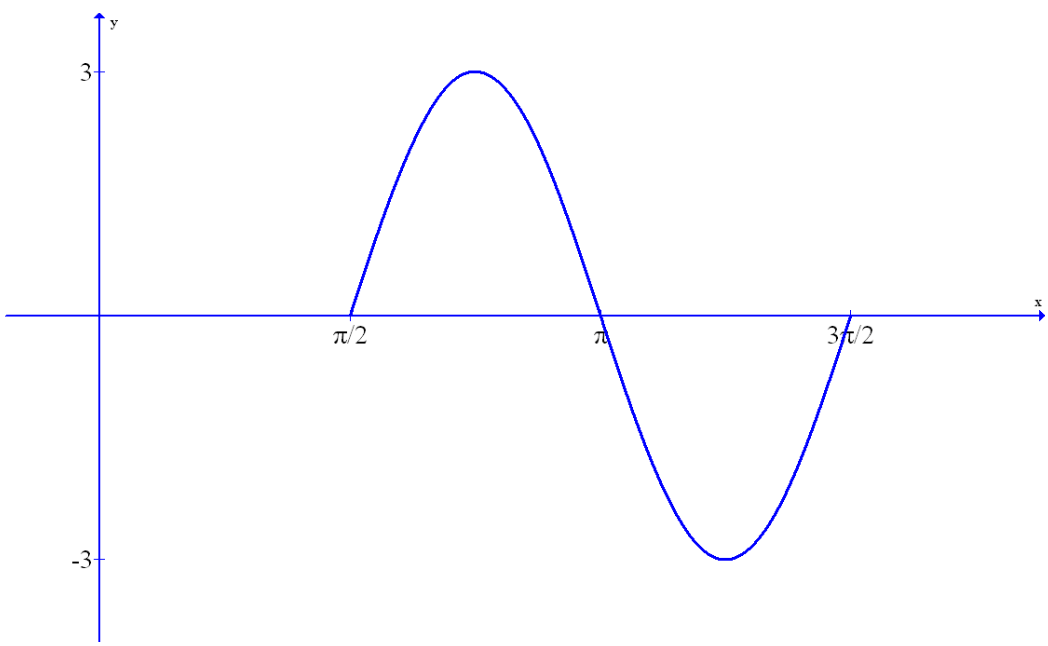


Figura 31. Gráfica de $y = 3\sin\left[2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right]$

Fuente: propia

Como la función seno tiene período 2π se afirma que $0 \le Kx + M \le 2\pi$, por lo tanto $-M \le Kx \le 2\pi - M$ y por consiguiente $-\frac{M}{K} \le x \le \frac{2\pi}{K} - \frac{M}{K}$. Así que si un ciclo de $y = \sin x$ empieza en 0, se asegura que un ciclo de $f(x) = \sin(Kx + M)$comienza en $-\frac{M}{K}$. A este valor se le denomina el desfase de f. Ahora el período de f es la distancia entre los extremos en los que se mueve x es decir $\frac{2\pi}{K} - \frac{M}{K} + \frac{M}{K}$, o sea que el período de f es $\frac{2\pi}{K}$. Note que el período y el desfase que se han determinados, son válidos para funciones f cuyo modelo base sea una función de período 2π.

Para graficar $f(x) = 3\cos\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) + 2$, se determinan el período y el desfase de $y = \cos\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$, que de acuerdo con los resultados del párrafo anterior son respectivamente $\frac{2\pi}{3}$ y $\frac{\pi}{6}$. Así que dibujamos un ciclo de la función coseno en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$. ¿Por qué razón el extremo superior de este intervalo es π ? Para completar la gráfica de f se recurre a movimientos geométricos de la función esbozada. Las figuras 9 a 12 muestran el procedimiento.

4

Unidad 4

Identidades y ecuaciones trigonométricas

Fundamentos de matemáticas

Autor: Danilo de Jesús Ariza

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina

MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Introducción

Uno de los aspectos importantes en el estudio de nociones en matemáticas es la comprensión y utilización de formas como se válida una afirmación dentro de la disciplina. Una de estas formas se refiere al proceso para mostrar que una igualdad es válida para cualquier valor de la variable o variables que contengan la expresión. Se propone entonces una mirada a las identidades trigonométricas y un examen cuidadoso de la diversidad de conocimiento matemático que se pone en juego cuando se trata de demostrarlas.

Recomendaciones metodológicas

Las identidades trigonométricas son fundamentales en la formación matemática de todo ingeniero, es por eso que se recomienda al estudiante realizar un análisis muy cuidadoso del documento aquí presentado, el adecuado análisis requiere que se refuerce los principios algebraicos estudiados aquí o que haya tratado en cursos anteriores, específicamente se requiere respecto a los procedimientos algebraicos de factorización y racionalización, los cuales son de vital importancia frente a los elementos considerados en esta cartilla. Se recomienda además la verificación de los cálculos numéricos y procedimientos presentados, de tal manera que pueda ganar mayor confianza hacia lo que sigue en el estudio del curso.

Desarrollo temático

Las identidades trigonométricas

Una identidad es una igualdad que es válida para todos los valores que admita la variable o variables que aparecen en la expresión. Por ejemplo $x = x$ es una identidad pues si se asume que x es un número real, la afirmación de igualdad es válida para todos los números reales. Note que una ecuación también es una igualdad, pero que no necesariamente es válida para todos los valores que puede tomar la variable o variables de la expresión.

En la ecuación $y - 3 = 2$, *y* representa un número real cualquiera. Sin embargo únicamente si $y = 5$ la igualada se vuelve una afirmación verdadera.

En lecturas previas han aparecido algunas identidades e incluso se ha hecho un procedimiento para demostrarlas. Tal es el caso de la demostración que $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, o que $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Las demostraciones consistieron en uso de definiciones de funciones trigonométricas y en la utilización de operaciones entre expresiones algebraicas. De forma amplia, estos son los elementos que se usan al demostrar identidades trigonométricas.

De forma precisa, el proceso consiste en elegir unos de los lados de la identidad y mediante el uso de identidades trigonométricas ya conocidas, en combinación con las operaciones de reales, o utilización de propiedades de operaciones, lograr obtener el otro lado de la identidad. Se asume que se conocen y usan con propiedad una serie de identidades conocidas como básicas. Las identidades que se demostraron en la presente lectura se consideran identidades de este tipo.

Ejemplos N.1:

Se muestran a continuación diferentes procedimientos que se utilizan en la demostración de identidades trigonométricas. No se intenta agotar dichos procedimientos, si no, por el contrario generar ideas acerca de posibles acciones a realizar cuando se quiere demostrar una identidad. Únicamente el trabajo amplio en demostración de identidades, brinda la experiencia para abordar en cualquier momento que se requiera el recurrir a identidades trigonométricas como medio para simplificar expresiones o para transformarlas.

A. Demostrar que $\left(1 + \cot^2\alpha\right)\cos^2\alpha = \cot^2\alpha$. Uno de los procedimientos sugeridos en la demostración de identidades es expresar las funciones trigonométricas en términos de seno y coseno. En este caso se escoge el lado izquierdo para empezar el proceso de demostración. Es usual mantener el otro lado de la igualdad sin expresión alguna, debido a que no se efectúa trabajo alguno con ella.

- $\left(1+\cot^2\alpha\right)\cos^2\alpha = \cot^2\alpha$
- $\left(1+\dfrac{\cot^2\alpha}{\sin^2\alpha}\right)\cos^2\alpha =$ *Uso de identidad básica:* $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$
- $\left(\dfrac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}\right)\cos^2\alpha =$ *Suma de fracciones algebraicas*
- $\left(\dfrac{1}{\sin^2\alpha}\right)\cos^2\alpha =$ *Identidad fundamental:* $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha = 1$
- $\left(\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}\right) =$ *Multiplicación de fracciones algebraicas*
- $\cot^2\alpha = \cot^2\alpha$ *Uso de identidad básica* $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

B. Demostrar la identidad $\left(\dfrac{\sin^3 x+\cos^3 x}{\sin x+\cos x}\right) = 1-\sin x\cos x$. Esta identidad permite ver el uso de la factorización en la demostración de identidades.

$$\frac{\sin^3 x+\cos^3 x}{\sin x+\cos x} = 1-\sin x\cos x$$

Al factorizar la suma de cubos del numerador se obtiene:

$$\frac{(\sin x+\cos x)(\sin^2 x-\sin x\cos x+\cos^2 x)}{\sin x+\cos x}=$$

Ahora, al utilizar la identidad fundamental $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, se tiene:

$$\frac{(\sin x+\cos x)(1-\sin x\cos x)}{\sin x+\cos x}=$$

Finalmente, se simplifica el factor $\sin x+\cos x$

$$1-\sin x\cos x=1-\sin x\cos x$$

C. La demostración de identidades trigonométricas requiere en muchas circunstancias el uso de propiedades de operaciones de los números reales. Al efecto, veamos la demostración de la identidad $\frac{1-\sin A}{\cos A}=\frac{\cos A}{1+\sin A}$.

Note que no hay posibilidad de factorizar cualquiera de las expresiones de la identidad. Una forma de proceder se muestra a continuación.

$$\frac{1-\sin A}{\cos A}=\frac{\cos A}{1+\sin A}$$

Se expresa 1 de la forma $\frac{1+\sin A}{1+\sin A}$ y se multiplica así:

$$\left(\frac{1-\sin A}{\cos A}\right)\left(\frac{1+\sin A}{1+\sin A}\right)=$$

Al efectuar la multiplicación de fracciones, se obtiene:

$$\frac{1-\sin^2 A}{\cos A(1+\sin A)} =$$

Y mediante el uso de la identidad fundamental $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, se tiene:

$$\frac{\cos^2 A}{\cos A(1+\sin A)} =$$

Al simplificar el factor $\cos A$ se llega a:

$$\frac{\cos A}{1+\sin A} = \frac{\cos A}{1+\sin A}$$

Ejercicios:

Demostrar las siguientes identidades, mediante el uso de identidades trigonométricas básicas, y propiedades de las operaciones de números reales.

1) 1. $\dfrac{\csc x - 1}{1-\sin x} = \csc A$

2) 2. $\tan\alpha + \cot\alpha = \csc\alpha \sec\alpha$

3) 3. $\tan^4 A + 2\tan^2 A = \sec^4 A - 1$

4) 4. $\sin(-A) = -\sin A$

5) 5. $\cos(-A) = \cos A$

6) 6. $\dfrac{\sec x}{1+\cos x} = \dfrac{\tan z - \sin x}{\sin^3 x}$

7) 7. $(1-\cos\theta)(1+\sec\theta)\cot\theta = \sin\theta$

8) 8. $\dfrac{1+\cos A}{1-\cos A} - \dfrac{1-\cos A}{1+\cos A} = 4\cos A$

9) $\dfrac{3\sin x + 8\csc x}{4\sin x} = \dfrac{3}{4} + 2\csc^2 x$

10) $\tan B - \cot B = (\sin B - \cos B)(\sec B + \csc B)$

11) $\dfrac{\tan z - 1}{\tan z + 8} = \dfrac{\sec^2 z - 2}{\tan^2 z + 9\tan z + 8}$

12) $\cot \beta \dfrac{{}'\sin \beta}{1 + \cos \beta} = \csc \beta$

13) $\dfrac{1}{1 + \sin A} + \dfrac{1}{1 - \sin A} = 2$

14) Si $\alpha \in IQ$ demostrar

15) $\sqrt{\dfrac{\csc \alpha - \cot \alpha}{\csc \alpha + \cot \alpha}} = \dfrac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$

Identidades trigonométricas de dos ángulos

Se propone a continuación el estudio de identidades trigonométricas para dos ángulos, las cuales generan fórmulas de gran utilidad para el estudio de las mismas funciones trigonométricas y en aplicaciones en el cálculo diferencial e integral.

La demostración de la identidad $\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$, se hace con base en el gráfico de la figura 11. Elementos a tener en cuenta de la figura son: los ángulos A, $A + B$ y $(-B)$ están en posición normal.

Los segmentos $\overline{OP}, \overline{OQ}, \overline{OR}, \overline{OS}$ se asumen de medida 1. Nótese que de acuerdo a estas condiciones se tiene que si $Q(x, y)$ es un punto en el lado terminal de A entonces $\cos A = \dfrac{x}{\overline{OQ}}$ es decir $\cos A = x$. De la misma forma, se tiene que $\sin A = y$. Así que las coordenadas de Q se pueden escribir de la forma $(\cos A, \sin A)$.

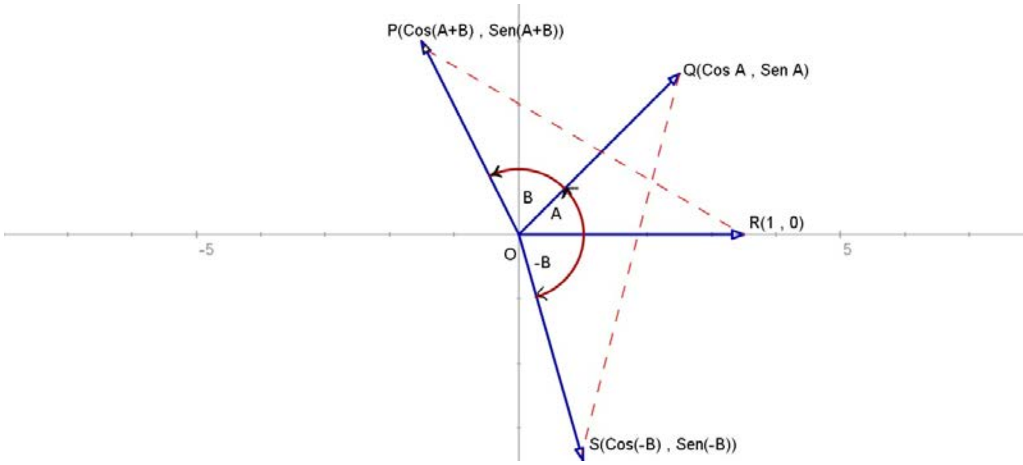


Figura 1. Coseno de la suma de dos ángulos
Fuente: propia

Mediante un razonamiento similar se afirma que las coordenadas de P son $(\cos(A+B), \sin(A+B))$ y las coordenadas de S son $(\cos(-B), \sin(-B))$.

Ahora, al comparar ΔOPR y ΔOQS se concluye que son congruentes, porque tienen dos pares de lados congruentes ($\overline{OP}, \overline{OQ}, \ \overline{OR}, \overline{OS}$) y el ángulo comprendido entre ellos también es congruente. Así que $PR = QS$. Estas distancias son calculables mediante la fórmula de distancia entre dos puntos, así:

$$PR = QS$$

$$\sqrt{[\cos(A+B)-1]^2 + \sin^2(A+B)} = \sqrt{[\cos A - \cos(-B)]^2 + [\sin A + \sin(-B)]^2}$$

Al elevar al cuadrado y hacer uso de identidades conocidas, se tiene:

$$[\cos(A+B)-1]^2 + \sin^2(A+B) = [\cos A - \cos B]^2 + [\sin A + \sin B]^2$$

El desarrollo de las operaciones en cada lado de la igualdad permite simplificar así:

$$\cos^2(A+B) - 2\cos(A+B) + 1 + \sin^2(A+B) =$$

$$\cos^2 A - 2\cos A \cos B + \cos^2 B + \sin^2 A + 2\sin A \sin B + \sin^2 B$$

La utilización de la identidad $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ simplifica la expresión a:

$$2 - 2\cos(A + B) = 2 - 2\cos A \cos B + 2\sin A \sin B$$

$$-2\cos(A + B) = -2\cos A \cos B + 2\sin A \sin B$$

Al dividir los dos lados de la ecuación entre –2 se obtiene:

$$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

Ejemplos N. 2:

a. La demostración de la validez de $\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$ se plantea a partir de resultados conocidos y demostrados como el de $\cos(A + B)$, de la siguiente forma:

$$\cos(A - B) = \cos(A + (-B)) = \cos A \cos(-B) - \sin A \sin(-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

b. Asimismo la demostración de la validez de $\cos(90^\circ - A) = \sin A$ es sencilla, pues $\cos(90^\circ - A) = \cos 90^\circ \cos A + \sin 90^\circ \sin A = \sin A$. Note que en el último paso se han usado los valores de $\cos 90^\circ = 0$ y $\sin 90^\circ = 1$.

c. La demostración de la identidad $\sin(90^\circ - A) = \cos A$ presenta una forma interesante de aplicar identidades conocidas. Note que $\cos A = \cos(90^\circ - 90^\circ + A) = \cos(90^\circ - (90^\circ - A))$. Observe que la intención de la transformación es usar la identidad conocida para $\cos(90^\circ - A)$. Así que $\cos(90^\circ - (90^\circ - A)) = \cos 90^\circ \cos(90^\circ - A) + \sin 90^\circ \sin(90^\circ - A) = \sin(90^\circ - A)$.

d. Una transformación semejante a la realizada en el ejemplo anterior permite demostrar que $\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$. De acuerdo con el ejemplo b se afirma que $\sin(A + B) = \cos(90^\circ - (A + B)) = \cos((90^\circ - A) - B)$.(¿Cómo explicar este último paso?). La utilización de identidades conocidas permite la demostración así: $\cos((90^\circ - A) - B) = \cos(90^\circ - A)\cos B + \sin(90^\circ - A)\sin B = \sin A \cos B + \cos A \sin B$.

Ejercicios:

Demostrar cada una de las identidades enunciadas.

1. $\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$
2. $\cos(t + 2\pi) = \cos t$
3. $\sin(t + 2\pi) = \sin t$
4. $\tan(t + \pi) = \tan t$
5. $\tan(A + B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$
6. $\cos\left(-\dfrac{\pi}{2} + 5A\right) = \sin 5A$
7. Si A y B son ángulos complementarios, entonces $\cos(3A + 8B) = -\cos 5B$
8. $\dfrac{\sin 6x}{\csc 4x} + \dfrac{\cos 6x}{\sec 4x} = \cos 2x$
9. $\sin(\alpha - \beta)\sin(\alpha + \beta) = \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha$
10. $\cos(\alpha + n\pi) = (-1)^n \cos \alpha$
11. $\sin(\pi - M - N) = \sin(M + N)$

Identidades trigonométricas de ángulos dobles y ángulos mitad

Las identidades para sumas o diferencias de ángulos se usan para demostrar identidades para un ángulo que es el doble de un ángulo dado, o para un ángulo que es la mitad de un ángulo especificado. Estas identidades son de uso corriente en técnicas de integración y se espera que su estudio genere una adecuada simplificación o transformación de expresiones donde aparezcan.

Ejemplos N. 3:

A. Demostrar que $\sin 2A = 2\sin A\cos A$, requiere simplemente expresar $2A$ como $A + A$ de tal manera que se tiene que $\sin 2A = \sin(A + A) = \sin A\cos A + \cos A\sin A = 2\sin A\cos A$. Planteamiento similares permiten demostrar que $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$ y que $\tan 2A = \dfrac{2\tan A}{1 - \tan^2 A}$.

B. Si asumimos que se ha comprobado que $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$, se puede demostrar una identidad importante en el cálculo integral, $\cos 2A = 2\cos^2 A - 1$. Note que es preciso expresar $\sin^2 A$ en términos de $\cos^2 A$, lo cual se logra haciendo uso de la identidad fundamental es decir $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, de la siguiente manera:

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = \cos^2 A - (1 - \cos^2 A) = \cos^2 A - 1 + \cos^2 A = 2\cos^2 A - 1$$

A partir de la identidad que define $\cos 2A$ también es sencillo demostrar que $\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A$.

C. Las dos identidades que expresan $\cos 2A$ en términos de $\sin A$ y $\cos A$ permiten hallar expresiones para $\sin\frac{x}{2}$ y $\cos\frac{x}{2}$. Para la primera de ellas, en la expresión $\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A$ se toma $x = 2A$ con lo cual se obtiene $\cos x = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2}$.

Luego se procede a despejar $\sin\frac{x}{2}$. Así que se concluye que $\sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos x}{2}}$.

D. Un tipo de identidades permite expresar suma y diferencia de funciones trigonométricas en términos de productos de funciones trigonométricas. Una de estas situaciones se muestra a continuación.

$$\sin(A+B)-\sin(A-B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B-(\sin A\cos B-\cos A\sin B)=$$

$$\sin A\cos B+\cos A\sin B-\sin A\cos B+\cos A\sin B=2\cos A\sin B$$

Por lo tanto se asegura que $\sin(A+B)-\sin(A-B)=2\cos A\sin B$. De donde es correcto afirmar que $\cos A\sin B=\frac{1}{2}\sin(A+B)-\sin(A-B)$.

Funciones trigonométricas inversas

Restricción de funciones

En lecturas previas se ha afirmado que una función tiene inversa o es invertible si es uno a uno. Para el caso de las funciones trigonométricas, debido al hecho que son periódicas, es correcto afirmar que ninguna de ellas es uno a uno, por lo tanto no se podría hablar de la existencia de la inversa.

Sin embargo, mediante una restricción del dominio de cada una de las funciones trigonométricas es posible considerar la existencia de la función inversa. Restringir el dominio de una función consiste en seleccionar un subconjunto del dominio de la función, en el cual la función sea uno a uno y que contenga (en este caso), la información de los posibles valores de imágenes de la función estudiada.

Usualmente el dominio de $f(x)=\sin x$ se restringe al intervalo $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, pues en dicho intervalo la función seno asume todos los valores posibles, es decir los números reales entre –1 y 1 y además la función es uno a uno.

Así que la función seno restringida a dicho intervalo se escribe $f(x)=\sin x$, con $-\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{2}$. En este escrito para referirnos a la función restringida, se hará mediante la notación: $f(x)=$ **sinx**. (La diferencia está en el tipo de letra usado y en la negrilla de los caracteres). Note que el dominio de $f(x)=$ **sinx** es $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ y su rango es $[-1,1]$.

Las figuras 1 y 2 muestran las gráficas de $f(x)=\sin x$ y $f(x)=$**sinx**.

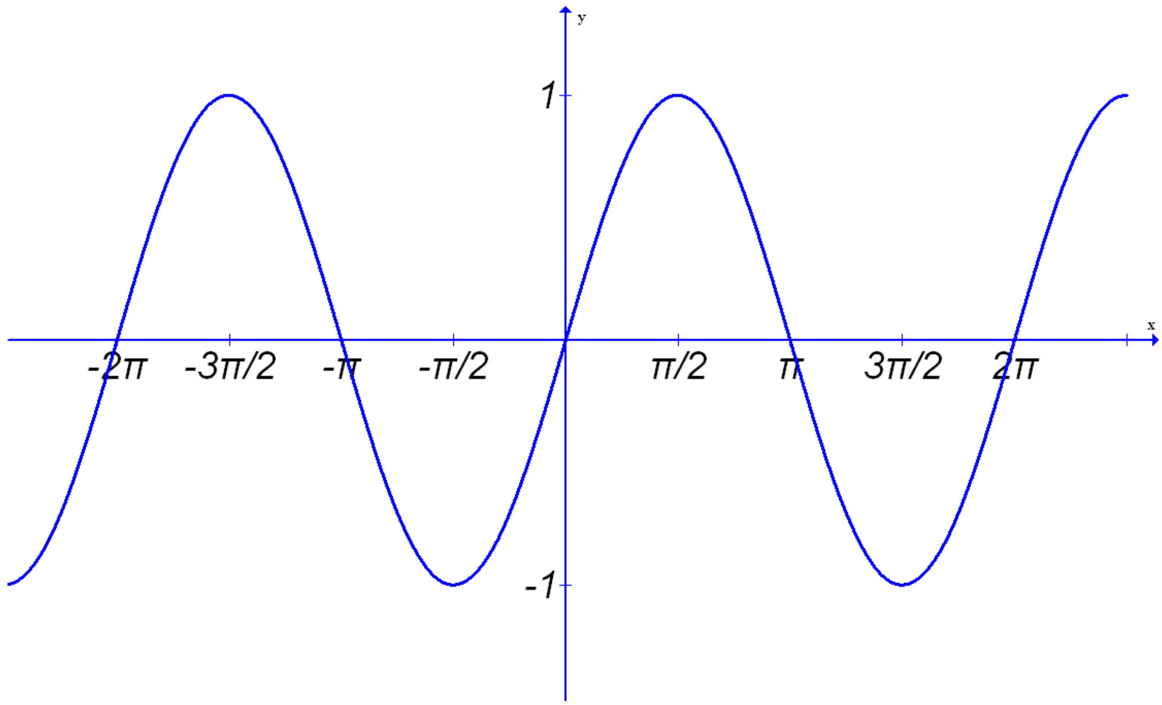


Figura 2. Gráfica de $y = \sin x$

Fuente: propia

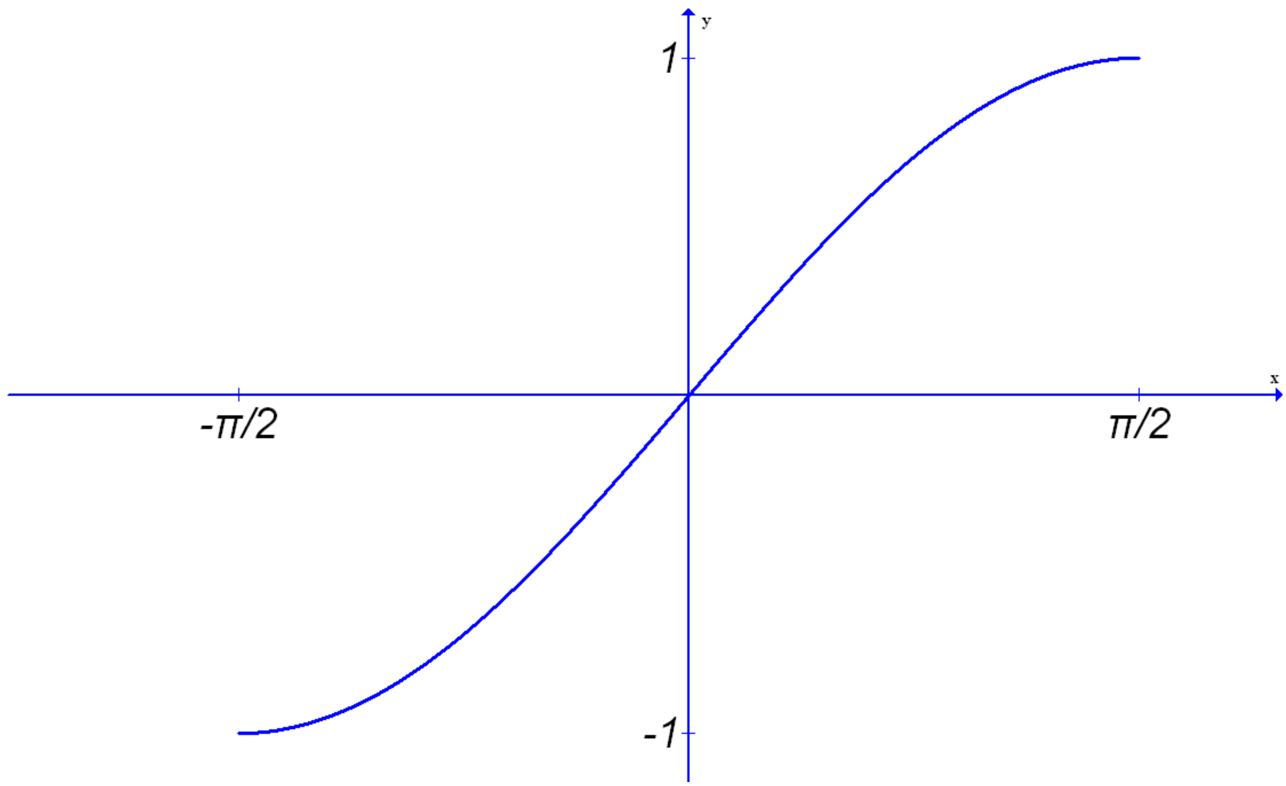


Figura 3. Gráfica de $f(x) = $ **sinx**

Fuente: propia

Mediante razonamientos similares se construyen las demás funciones trigonométricas restringidas. En el caso de $f(x) = \cos x$ su dominio se restringe a $[0, \pi]$ y para $f(x) = \tan x$ se considera como dominio el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Las figuras 3 a 6 muestran las funciones trigonométricas coseno y tangente en su dominio y las funciones $f(x) =$ **cosx** y $f(x) =$ **tanx**.

Se invita al lector para que esboce las gráficas de las funciones cotangente, secante y cosecante restringidas de tal forma, que se conviertan en funciones uno a uno.

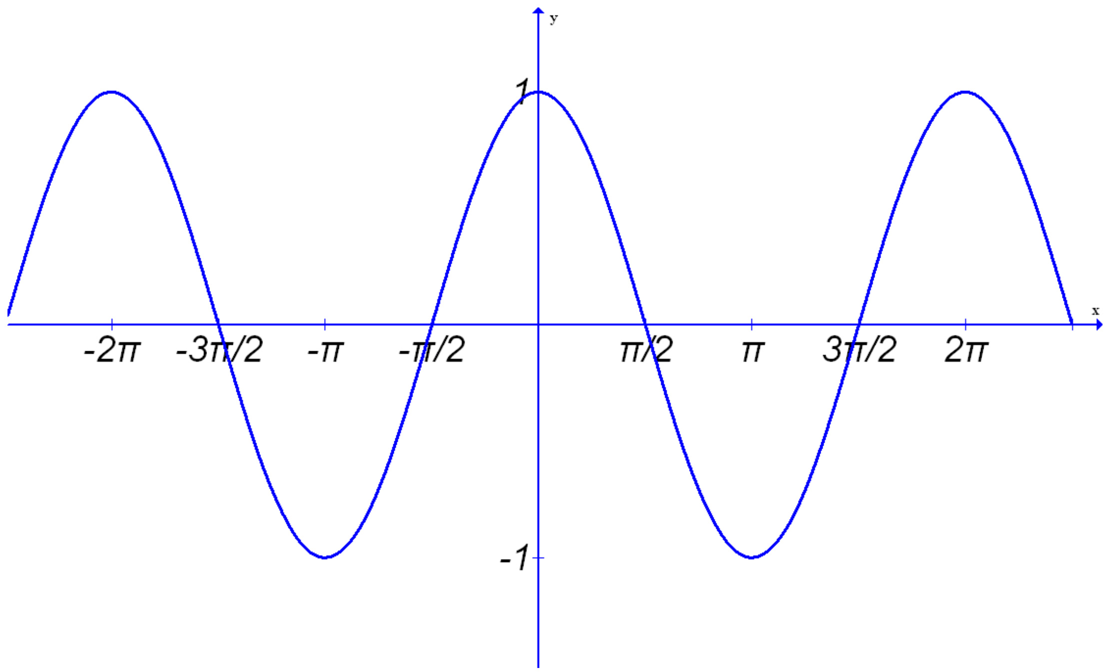


Figura 4: Gráfica de $y = \cos x$

Fuente: propia

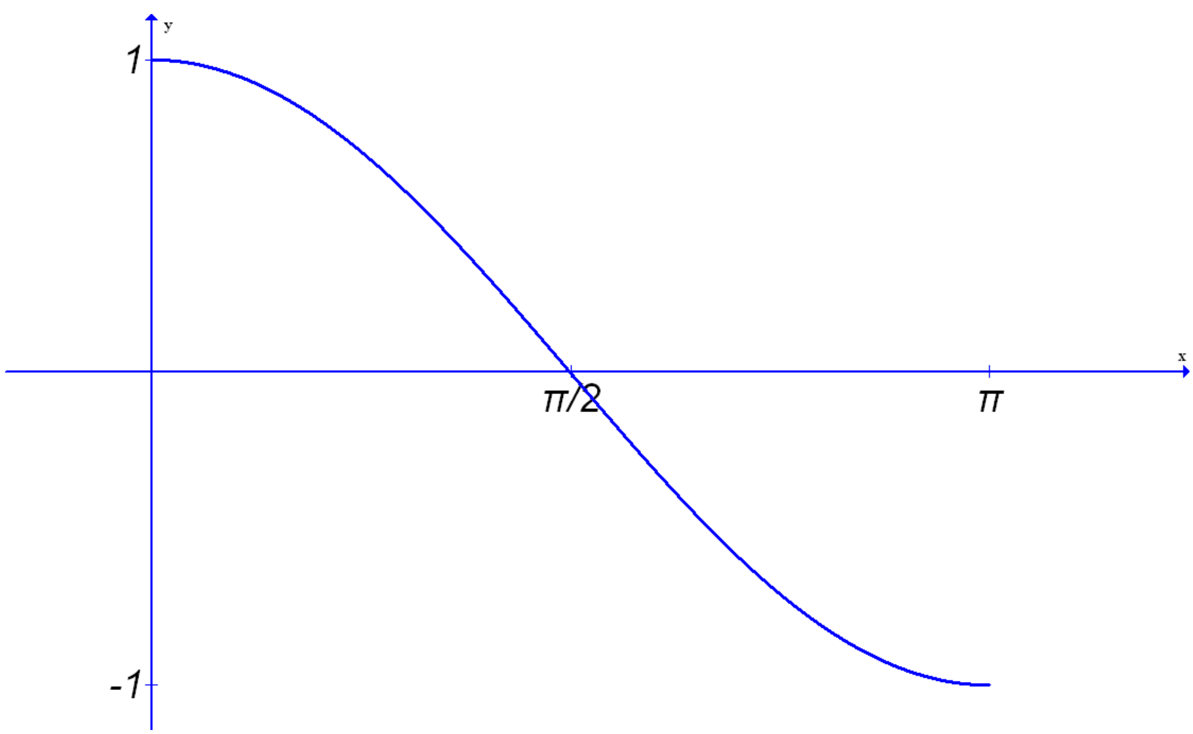


Figura 5. Gráfica de $f(x) =$ **cosx**

Fuente: propia

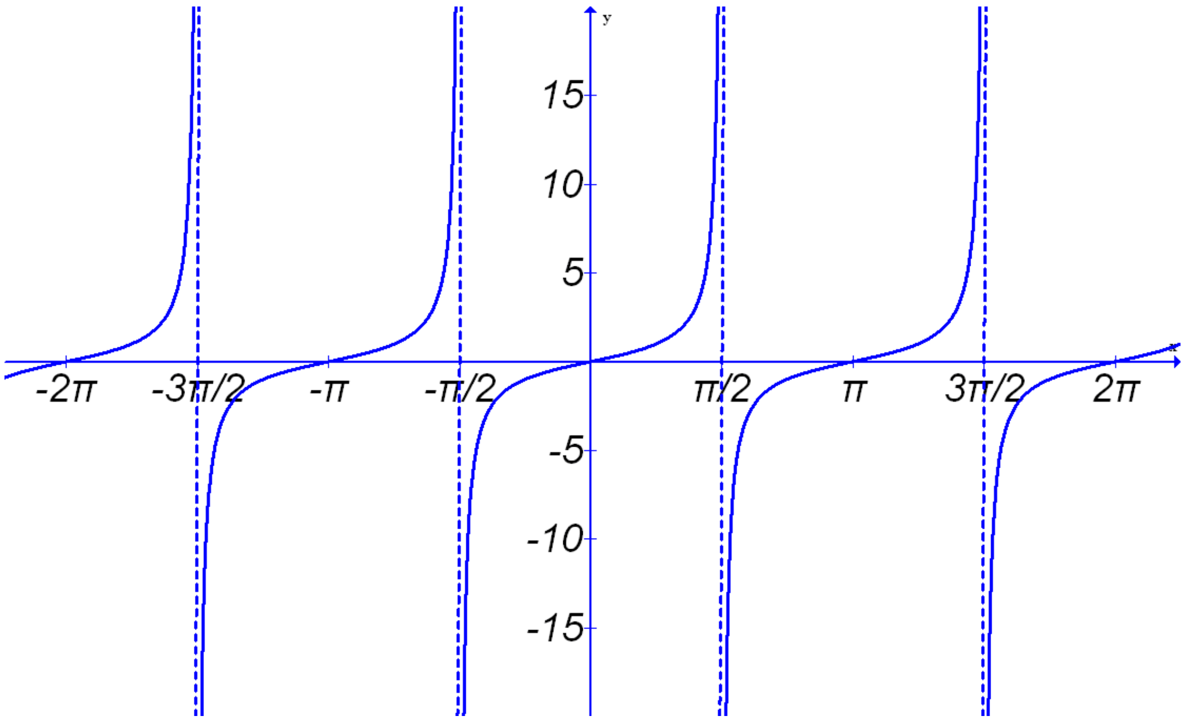


Figura 6. Gráfica de $y = \tan x$

Fuente: propia

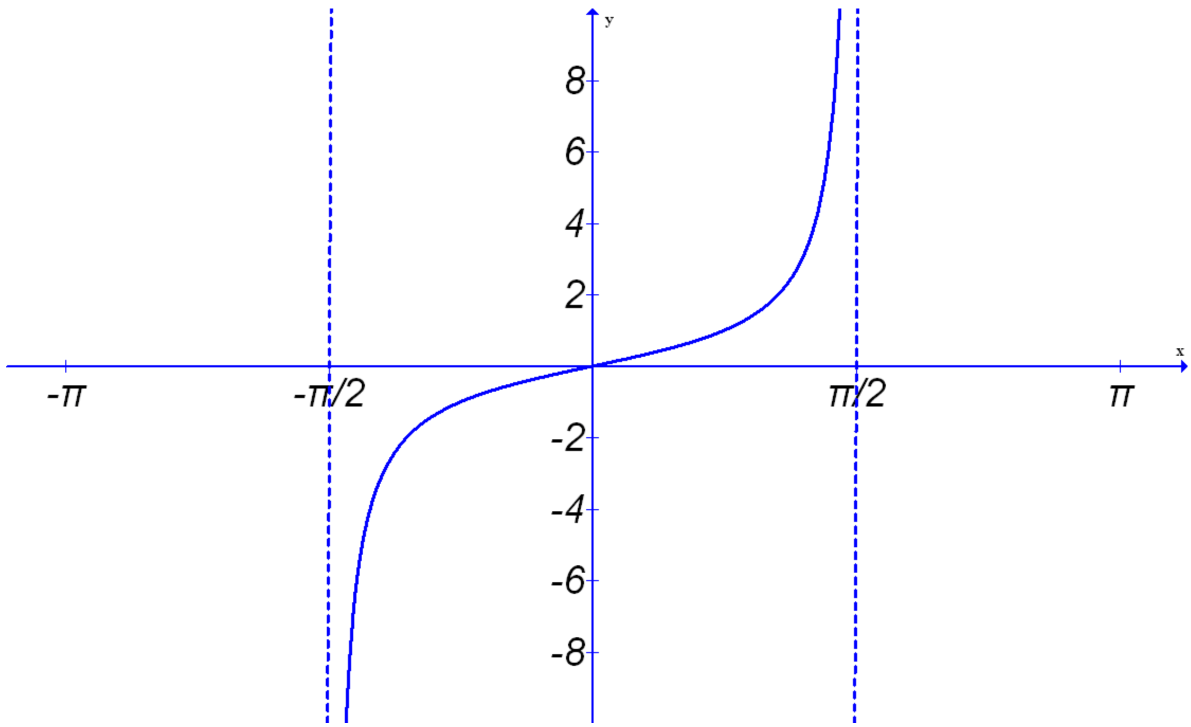


Figura 7: Gráfica de $f(x) =$ **tanx**

Fuente: propia

Las funciones trigonométricas inversas

Una vez definidas las funciones trigonométricas restringidas en su dominio, de tal forma que sean funciones uno a uno, es posible determinar y estudiar la función inversa de cada una de ellas.

Si $f(x) =$ **sinx**, entonces la función $y = \sin^{-1} x$ se denomina la función inversa de x. La expresión $y = \sin^{-1} x$.

Equivale a afirmar que $x = \sin y$. La función inversa de $f(x) =$ **sinx** también se escribe como y = arcsin x.

Como se tiene que $D_f = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ y que $R_f = [-1,1]$, note que el dominio de $y = \sin^{-1} x$ es $[-1,1]$ y su rango es $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Los ceros de la función inversa se tienen para valores x tales que $0 = \sin^{-1} x$. Esto quiere decir que $\sin 0 = x$, o sea que $x = 0$. El intercepto de la gráfica de $y = \sin^{-1} x$ con el eje vertical se encuentra mediante la imagen de 0, es decir $y = \sin^{-1} 0$, lo que significa que $\sin y = 0$ con $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$, es decir, $y = 0$ es el único ángulo que en este intervalo cumple la condición. Con esta información y algunos puntos de la función obtenidos con la equivalencia entre $y = \sin^{-1} x$ y $x = \sin y$ (como se muestra en las tablas) se esboza la gráfica correspondiente, ¿qué se muestra en la figura?

Valores para $x = \sin y$

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
y	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1

Valores para $y = \sin^{-1} x$

x	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
y	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$

Ejemplos N. 1:

A. Como $f(x) = \mathbf{sinx}$ y $y = \sin^{-1}(x)$ son funciones inversas, entonces se cumple que $\sin(\sin^{-1}(x)) = x$ o también que $\sin(\arcsin x) = x$ con la condición que $-1 \leq x \leq 1$. Asimismo se tiene que $\sin^{-1}(\sin y) = y$ o en forma equivalente $\arcsin(\sin y) = y$ siempre que $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$. Es importante construir con las demás funciones trigonométricas restringidas y sus inversas, igualdades similares a las indicadas, con las condiciones necesarias para cada una de ellas.

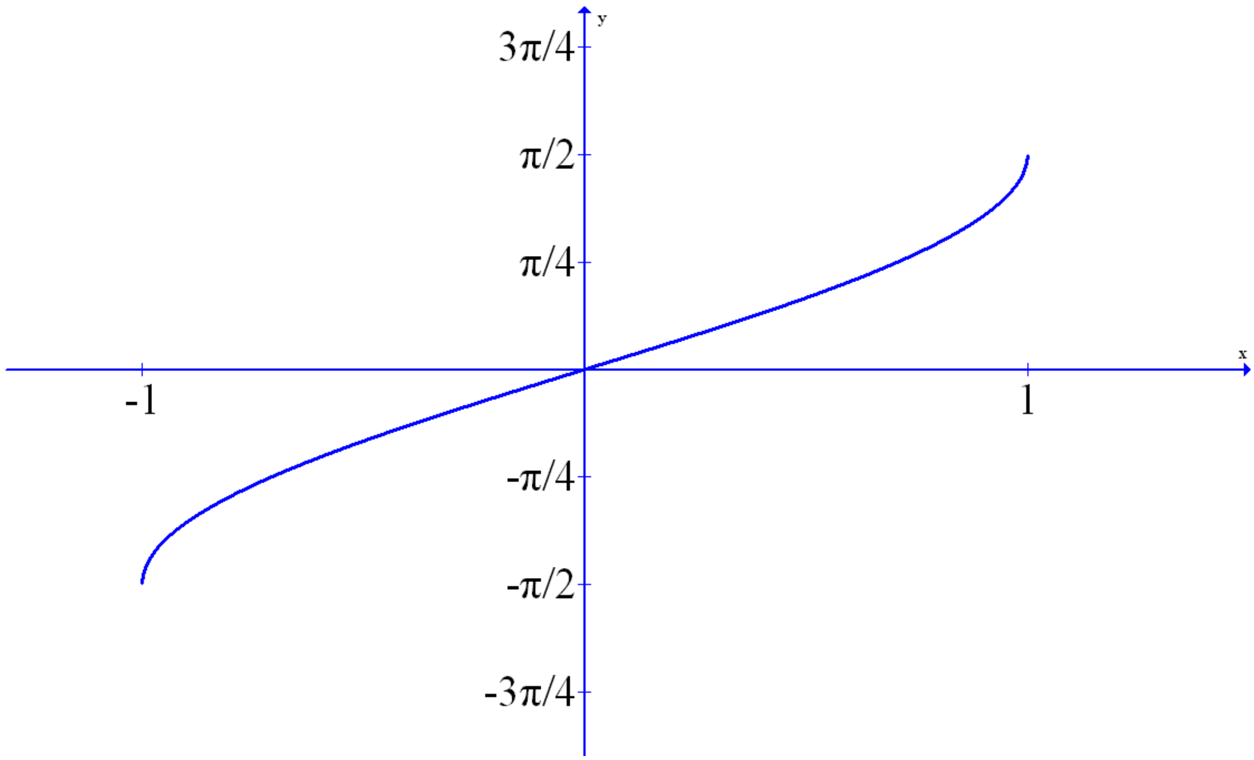


Figura 8. Gráfica de $f(x) = \arcsin x$
Fuente: propia

Es correcto afirmar que $\sin\left(\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ pues se tiene que $-1 \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \leq 1$. Sin embargo al evaluar la expresión $\sin^{-1}\left(\sin\frac{5\pi}{6}\right)$ es incorrecto afirmar que se obtiene $\frac{5\pi}{6}$ pues este valor no pertenece al intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. En este caso se evalúa en primer lugar la expresión $\sin\frac{5\pi}{6}$ y luego se evalúa la expresión que contiene la función inversa. Se procede así: $\sin^{-1}\left(\sin\frac{5\pi}{6}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$. Note que $\frac{\pi}{6}$ pertenece al intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

B. Para determinar el valor de la expresión $\cos^{-1}\left(\tan\frac{3\pi}{4}\right)$, es usual proceder de la siguiente forma. Se nombra la expresión, por ejemplo como $A=\cos^{-1}\left(\tan\frac{3\pi}{4}\right)$ y se evalúa la función trigonométrica, obteniéndose la expresión $A=\cos^{-1}(-1)$. Esta igualdad equivale a $\cos A=-1$ con $0\le A\le\pi$. Así que $A=\pi$. En este tipo de evaluaciones se recurre a valores de funciones trigonométricas de ángulos particulares y conocidos (cuando se quiere expresar en forma exacta el valor de la expresión) o a una calculadora para hallar valores aproximados.

C. La determinación del valor preciso de la expresión $\sin\left(\cos^{-1}\frac{3}{4}\right)$ se hace con base en la definición de razones trigonométricas de ángulos agudos de un triángulo rectángulo, o con base en la definición de las funciones trigonométricas de un ángulo en posición normal. Una forma de proceder consiste en nombrar la expresión que contiene la función trigonométrica inversa, por ejemplo $B=\left(\cos^{-1}\frac{3}{4}\right)$ en este caso. Esto significa que $\cos B=\frac{3}{4}$ por lo cual el cálculo pedido se reduce a determinar el valor de $\sin B$ con $0\le B\le\pi$. Es decir que en este caso B es un ángulo agudo. (¿Por qué?).

D. Es habitual simplificar expresiones que contienen funciones trigonométricas inversas y escribirlas en términos algebraicos de las variables que aparecen en la expresión. Para simplificar la expresión $\tan(\arcsin x)$ en términos de x se procede en forma similar a la realizada en el ejemplo anterior. Si se asume $x>0$, se nombra la expresión que contiene la función trigonométrica inversa y se representa la situación en un triángulo rectángulo.

Ejercicios:

1. En la discusión teórica se ha mostrado una forma de esbozar la gráfica de la función $y = \sin^{-1}(x)$. Seguir este procedimiento para graficar las demás funciones trigonométricas inversas.

2. Calcular cada una de las expresiones dadas. Use calculadora si es necesario.

a) $\cot^{-1}\left(\tan\frac{\pi}{4}\right)$

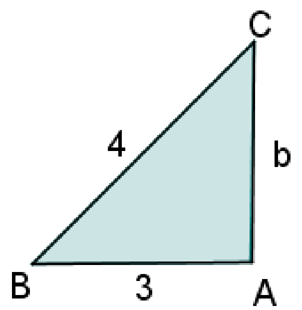


Figura 8. Triángulo Rectángulo
Fuente: propia

Uno de los ángulos agudo se nombra como $\hat{B}$. Por lo tanto el cateto adyacente a $\hat{B}$ mide 3 y la hipotenusa mide 4.

Para determinar el valor de $\sin B$ se determina la medida del cateto opuesto a $\hat{B}$.

Se tiene que $4^2 = b^2 + 3^2$. Así que $7 = b^2$ y por lo tanto

$b = \sqrt{7}$. Esto significa que

$\sin B = \frac{\sqrt{7}}{4}$

b) $\cot^{-1}\left(\tan\frac{11\pi}{6}\right)$

c) $\sin^{-1}(\sec 0)$

3. Calcular cada una de las expresiones dadas. Use triángulos rectángulos o ángulos en posición estándar para ilustrar las situaciones.

A. $\sin\left[\cos^{-1} 0\right]$

B. $\sec\left[\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$

C. $\cot\left[\tan^{-1}(1)\right]$

D. $\tan\left[\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$

E. $\sin\left[\sin^{-1}\frac{12}{13}-\cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)\right]$. Sugerencia: Nombre $A=\sin^{-1}\left(\frac{12}{13}\right)$ y $B=\cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$

F. $\sin\left[2\sin^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)\right]$

4. Si $x>0$, escriba en términos de x cada una de las expresiones dadas.

A. $\cos\left(\tan^{-1}x\right)$

B. b) $\csc\left(\cos^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\right)\right)$

C. c) $\sin\left(2\tan^{-1}x\right)$

D. d) $\cos\left(\frac{1}{2}\cos^{-1}x\right)$

5. Trazar la gráfica de cada función. Utilizar movimientos geométricos sobre funciones trigonométricas básicas.

a) $y = \cos^{-1}(x-1)+2$

b) $y = -3\sin^{-1} 2x$

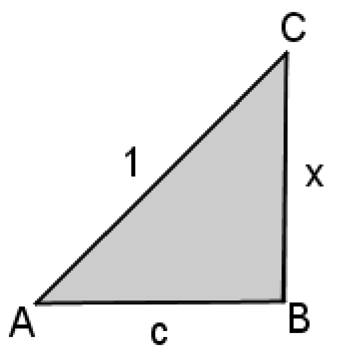


Figura 9. Triángulo Rectángulo
Fuente: propia

Sea $\arcsin x = A$. Esto significa que $\sin x = A$. Por lo tanto para simplificar $\tan(\arcsin x)$, basta determinar el valor de $\tan A$. De acuerdo con el gráfico se tiene que el cateto opuesto a $\hat{A}$ mide x y la hipotenusa mide 1.

Así que $1^2 = x^2 + c^2$. Por lo tanto, $c = \sqrt{1-x^2}$. Se sigue que $\tan A = \sqrt{\dfrac{x}{1+x^2}}$.

Ecuaciones trigonométricas

Expresiones de igualdad que contienen funciones trigonométricas cuyos ángulos están expresados en términos de variables y que son verdaderas para algunos valores de la variable, se denominan ecuaciones trigonométricas. Se propone el estudio de formas de determinar soluciones de ecuaciones trigonométricas. Se hará uso del conocimiento sobre solución de ecuaciones como las lineales, cuadráticas, racionales, etc. Así como también se recurre al uso de identidades trigonométricas.

Es común plantear dos escenarios para la solución de una ecuación trigonométrica. Uno de ellos es aquel donde se asume que la variable admite cualquier valor real condicionado a la función trigonométrica en consideración y otro donde se especifica un intervalo en el cual se quieren hallar las soluciones de la ecuación. En general, el intervalo para la segunda situación es $[0,2\pi]$.

Así que la solución de $\cos x = \frac{1}{2}$ en $[0,2\pi]$ se obtiene teniendo en cuenta que $\cos x = \frac{1}{2}$ equivale a $x = \cos^{-1}\frac{1}{2}$, lo que significa que es necesario hallar x ángulo en radianes cuyo coseno sea 1. Note que x es un ángulo del primer cuadrante o del cuarto cuadrante. De acuerdo con el estudio en lecturas anteriores se ha mostrado que $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

Este ángulo es del primer cuadrante y a la vez es el ángulo t de referencia para hallar el ángulo x del cuarto cuadrante que también es solución de la ecuación. Se tiene que $t = 2\pi - x$, así que $x = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$. Por lo tanto, el conjunto solución de la ecuación es $\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$.

Ahora, si se asume que la ecuación se soluciona en R basta usar la periodicidad de la función coseno (que es 2π) y expresar el conjunto solución como $\left\{x : x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ o\ x = \frac{5\pi}{3} + 2\pi k, con\ k \in Z\right\}$.

Ejemplos N. 2:

a. El procedimiento para solucionar la ecuación $2\sin x + 4\sin^2 x = 0$ en $[0,2\pi]$ se apoya en el uso de propiedades de los reales, de la siguiente forma:

$2\sin x + 4\sin^2 x = 0$	Factorización del binomio.
$2\sin(1 + 2\sin x) = 0$	Propiedad de los números reales.
$2\sin x = 0$, o, $1 + 2\sin x = 0$	Despeje de $\sin x$ en cada ecuación.
$\sin x = 0$, o, $\sin x = -\frac{1}{2}$	
$x = \sin^{-1}(0)$, o, $x = \sin^{-1} = \left(-\frac{1}{2}\right)$	Despeje de x.

Las soluciones de $x = \sin^{-1} 0$ en $[0,2\pi]$ son $x = 0, \pi, 2\pi$. ¿Por qué?

Para obtener la solución de $x = \sin^{-1}(-1)$ en $[0,2\pi]$, hay que tener en cuenta que de acuerdo con la definición de la función inversa del seno, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Así que utilizando valores de ángulos particulares estudiados antes o una calculadora se obtiene que $x = -\frac{\pi}{6}$.

Para hallar la solución en el intervalo especificado, se asume que el ángulo de referencia es $t = \frac{\pi}{6}$ y cómo x debe ser un ángulo del tercer cuadrante o del cuarto cuadrante entonces se tiene que $t = x - \pi$, o $t = 2\pi - x$, por lo tanto $\frac{\pi}{6} = x - \pi$, $\frac{\pi}{6} = 2\pi - x$ y así $x = \frac{7\pi}{6}$, o $x = -\frac{\pi}{6}$.

Así que el conjunto solución de la ecuación es $\left\{0, \pi, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, 2\pi\right\}$.

b. Para solucionar la ecuación $\sin^2 x = 2\cos x - 2$ en $[0,2\pi]$, se tiene en cuenta que al usar la identidad $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ se logra escribir la ecuación en términos de $\cos x$ y se obtiene una ecuación cuadrática. Se procede entonces de la siguiente forma:

$\sin^2 x = 2\cos x - 2$	$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$
$1 - \cos^2 x = 2\cos x - 2$	Igualar la ecuación a 0.
$\cos^2 x + 2\cos x - 3 = 0$	Factorización del trinomio.
$(\cos x + 3)(\cos x - 1) = 0$	Propiedad de los reales.
$\cos x = -3$, o, $\cos x = 1$	Despeje de $\cos x$.
$x = \cos^{-1}(-3)$, o, $x = \cos^{-1}(1)$	Despeje del ángulo.

Observe que la ecuación $x=\cos^{-1}(-3)$ no tiene solución, pues la función inversa del coseno tiene como dominio el intervalo $[-1,1]$. La ecuación $x=\cos^{-1}(1)$ tiene solución en $x=0$, 0 $x=\pi$. Luego, la solución de la ecuación dada es $\{0,\pi\}$.

c. Un procedimiento para resolver la ecuación $\sin 2x=\tan x\sin 2x$ en $[0,2\pi]$requiere un manejo particular en cuanto se consideran diferentes tipos de ángulos. Una forma de determinar el conjunto solución de la ecuación es:

$\sin 2x=\tan x\sin 2x$

$\sin 2x-\tan x\sin 2x=0$

$\sin 2x(1-\tan x)=0$

$\sin 2x=0$,o, $1-\tan x=0$

$\sin 2x=0$, o, $\tan x=1$

$2x=\sin^{-1}(0)$, o, $x=\tan^{-1}(1)$

Igualar la ecuación a 0. Factorización del binomio. Propiedad de los reales.

Note que el ángulo en la ecuación $\sin 2x=0$ es $2x$, así que se realiza la siguiente consideración para determinar los valores x que hacen verdadera la ecuación: Como se tiene que $0\le x\le 2\pi$, entonces $0\le 2x\le 4\pi$ π. (¿Cuál es la razón de esta afirmación?). Así que se determinan ángulos entre 0 y 4π para los cuales el valor de la función seno sea 0. Entonces se tiene que $2x=0,\pi,2\pi,3\pi,4\pi$ y por lo tanto $x=0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2},2\pi$.

Las soluciones de $\tan x=1$ son ángulos del primer cuadrante y del tercer cuadrante. En el primer cuadrante se tiene que $x=\pi$, que a la vez es el ángulo de referencia t para determinar el ángulo x solución del tercer cuadrante. Como se tiene que $t=\pi-x$ para x en el tercer cuadrante, entonces $x=5\pi$. En suma el conjunto solución de la ecuación es $\left\{0,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2},\pi,\frac{5\pi}{4},\frac{3\pi}{2},2\pi\right\}$

Bibliografia

- Swokowski, Earl William. y Cole Jeffery (2006). Álgebra y trigonometría con geometría analítica. 11a. ed. México: Thomson, 1045p.
- Stewart, James; Redlin, Lotar. y Watson, Saleem.(2006). Precálculo. 5a. ed. México: Thomson, 1048 p.
- Faires, J. Douglas y DeFranza James. (2001). Precálculo. 2a. ed. México: Thomson,432p.
- Purcell, Edwin y Varberg, Dale. (2007). Cálculo. 9a. ed. México: Pearson educación, 857 p.
- Larson, Ron; Hostetler, Robert y Edwards, Bruce.(2006). Cálculo. Vol 1. 8a. ed. México: McGraw Hill, 138 p.
- Leithold, Louis (1994). Matemáticas previas al cálculo. 3a. ed. México: Oxford University Press, 907p.
- Barnett, Raymond; Ziegler, Michael y Byleen, Karl (2000). Precálculo: funciones y gráficas. 4a. ed. México: McGraw Hill. 837p.
- THOMAS, George. (2005). Cálculo en una variable. 11a. ed. México: Pearson Educación,1228 p.
- Stewart, James (2008). Cálculo: trascendentes tempranas. 6a. ed. México: Cengage Learning, 1138 p.

Esta obra se terminó de editar en el mes de noviembre
Tipografá Myriad Pro 12 puntos
Bogotá D.C,-Colombia.

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina

MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO