MATEMÁTICAS

Autor: Alberto Montalvo Castro

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina

MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Matemáticas / Alberto Montalvo Castro / Bogotá D.C.,
Fundación Universitaria del Área Andina. 2017

978-958-5459-54-0

Catalogación en la fuente Fundación Universitaria del Área Andina (Bogotá).

Edición:
Fondo editorial Areandino
Fundación Universitaria del Área Andina
Calle 71 11-14, Bogotá D.C., Colombia
Tel.: (57-1) 7 42 19 64 ext. 1228
E-mail: publicaciones@areandina.edu.co
http://www.areandina.edu.co

Primera edición: noviembre de 2017

Corrección de estilo, diagramación y edición: Dirección Nacional de Operaciones virtuales
Diseño y compilación electrónica: Dirección Nacional de Investigación

Hecho en Colombia
Made in Colombia

MATEMÁTICAS

Autor: Alberto Montalvo Castro

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina
MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Índice

Índice

1

UNIDAD

MATEMÁTICAS - SEMANA 1

FUNDACIÓN UNIVERSITARIA DEL ÁREA ANDINA

Personería Jurídica Res. 22215 Mineducación Dic. 9-83

Introducción

En esta cartilla se aborda la construcción del conjunto de los números reales, con los diferentes subconjuntos que lo componen, las características y las propiedades operativas.

Es importante leer cuidadosamente el contenido de la cartilla. Al interpretar cada una de las expresiones, le permite comprender los elementos expuestos para así aplicar los contenidos y asimilarlos.

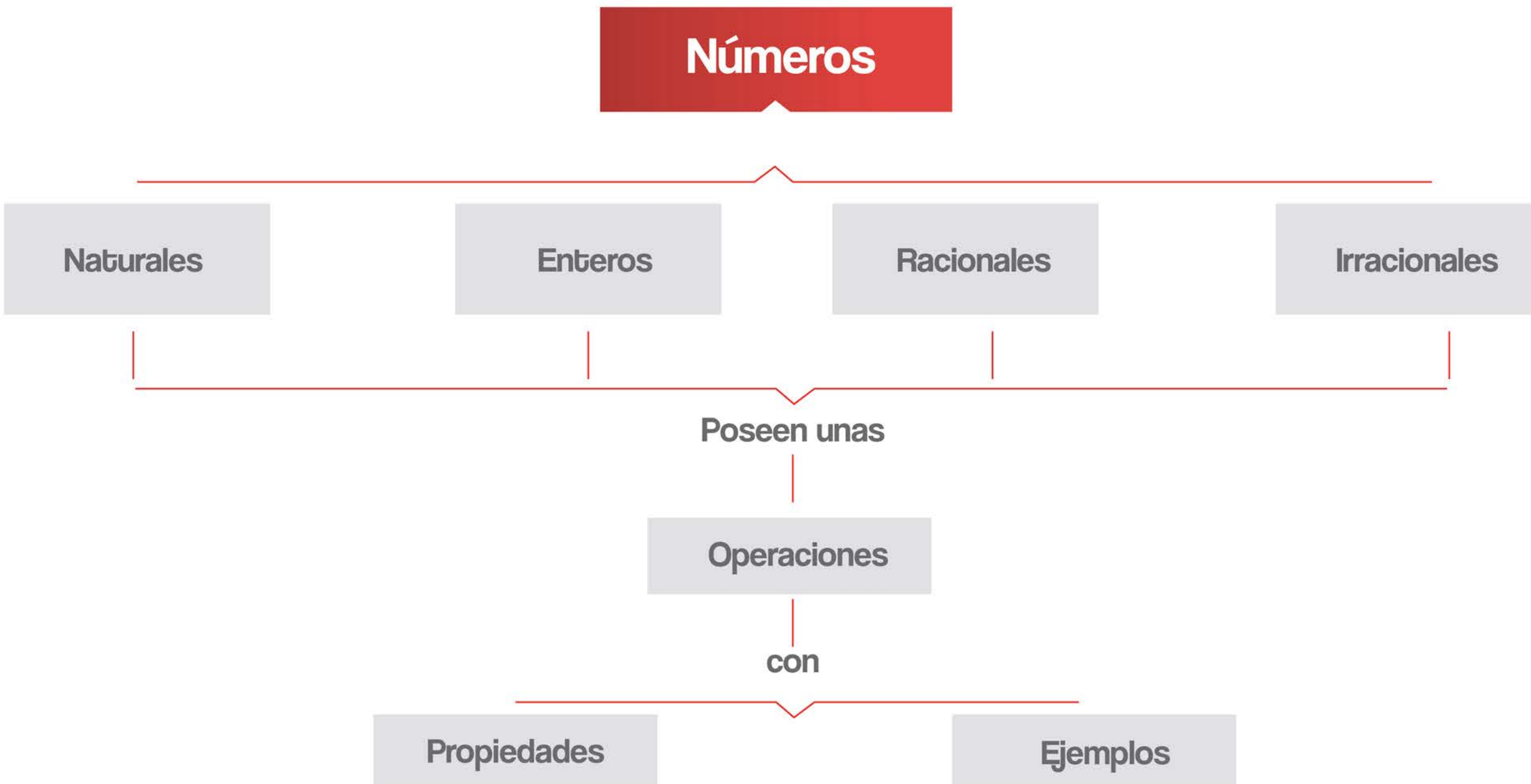
Frecuentemente, para solucionar situaciones cotidianas, se requiere diferenciar los conjuntos numéricos sobre los cuales se está trabajando y con ellos sus propiedades.

METODOLOGÍA

El proceso de aprendizaje académico por medio de la cartilla se desarrolla en tres etapas. La primera hace referencia a la lectura completa del módulo, realizando la respectiva interpretación, análisis y comprensión del contenido. La segunda etapa es el análisis del video y el contenido del mismo. La tercera etapa es la aplicación de los contenidos expuestos a situaciones generales, particulares y específicas.

La segunda etapa puede ser retomada cuantas veces quiera, pero tiene un tiempo limitado para adquirir los conocimientos. Recuerde que debe avanzar con las restantes cartillas y con ello los módulos.

MAPA CONCEPTUAL DEL MÓDULO



OBJETIVOS Y COMPETENCIAS

Objetivos

Comprender el conjunto de los números reales, sus subconjuntos, operaciones y propiedades

5.1 Identificar los subconjuntos que conforman los números reales

- Identificar las características de los elementos que conforman los subconjuntos de los números reales.
- Relacionar las características de los números de cada uno de los subconjuntos que conforman cada uno de los conjuntos de los números reales.
- Entender que los conjuntos numéricos se diferencian entre sí.
- Aplicar los subconjuntos que conforman el conjunto de los números reales a la solución de situaciones sencillas

Competencias

5.2.1 Diferencia los elementos que conforman los subconjuntos de los números reales.

5.2.2 Entiende las características de cada uno subconjuntos que conforman el conjunto de los números reales.

5.2.3 Aplica los subconjuntos que conforman el conjunto de los números reales a la solución de situaciones dela cotidianidad.

DESARROLLO TEMÁTICO

6.1 Componente Motivacional

En la cotidianidad este tema sirve para solucionar situaciones reales o ideales de manera eficiente, aporta herramientas teóricas para identificar apropiadamente los conjuntos numéricos con los cuales se ha construido y se soluciona la situación, su estructura y sus propiedades.

Por ejemplo, identificar la diferencia entre las fracciones y los enteros, permite comprender los mecanismos procedimentales para la aplicación de las operaciones básicas y con ellos la solución de situaciones cotidianas.

6.2 Recomendaciones académicas

La presente cartilla contiene la fundamentación teórica de los números reales, su estructura, los subconjuntos que lo conforman y las propiedades de este conjunto numérico. Encuentra, además de la fundamentación teórica, ejemplos a situaciones como orden de los números, localización de los números en la recta real, construcción de fracciones, expresión de fracciones como decimales, concepto y organización de intervalos, diferenciación de racionales e irracionales y la identificación de las propiedades de los reales.

La matemática es más sencilla de lo que nos parece. Es la utilización y aplicación de normas o leyes denominadas propiedades. Cuando se aprende apropiadamente estas propiedades, puedo afrontar de manera correcta cada una de las situaciones o ejercicios que nos solicita, por esto la matemática no es difícil, lo que resulta complicado es comprender y aplicar las propiedades que orientan el desarrollo de la misma asignatura.

Cada uno de nosotros puede llegar a manejar la matemática cada día de mejor.

Todos, de una manera u otra podemos llegar a manejar, cada día mejor la matemática, situación que por experiencia les puedo mostrar que es verdad.

6.3 Desarrollo de cada una de las unidades temáticas

COMPETENCIA GENERAL	COMPETENCIA ESPECIFICA
El estudiante aprende las características de los subconjuntos de los números reales.	El estudiante diferencia las características de cada subconjunto de los números reales.
El estudiante relaciona las características de los números de cada uno de los subconjuntos que forman los números reales.	El estudiante escribe números de acuerdo a características de los mismos.
El estudiante entiende que los subconjuntos numéricos tienen características particulares.	El estudiante entiende las características de los subconjuntos numéricos.

NÚMEROS REALES

Para iniciar el trabajo propuesto para esta cartilla, es importante establecer un concepto de número. Se considera número a la expresión de la cantidad con relación a una unidad específica, los cuales se organizan en conjuntos numéricos o en sistemas numéricos, para el caso se trabaja sobre el sistema de los números reales. Es un sistema porque, al operar los números con las operaciones básicas, se comportan los resultados de una manera particular.

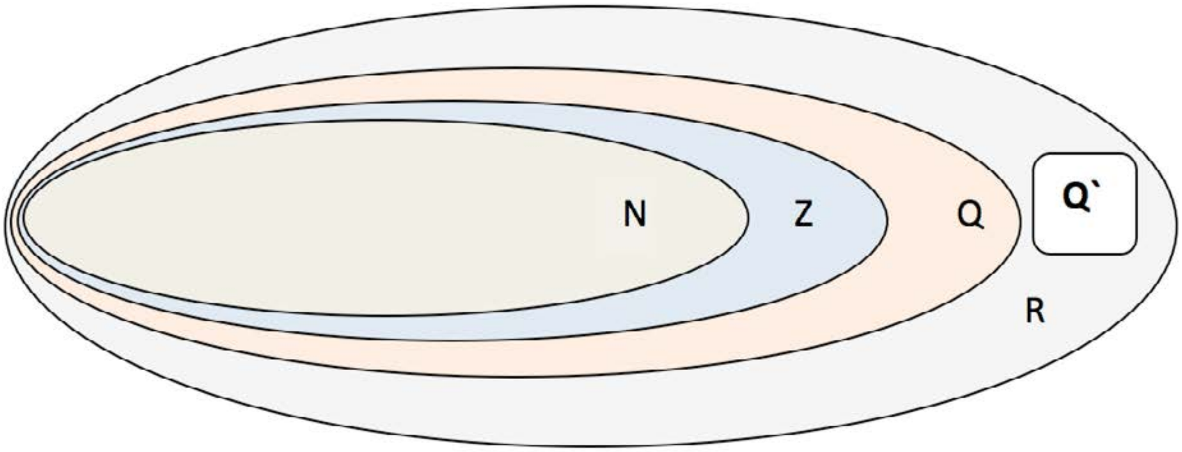
El sistema de los números reales es una creación de la mente de la humanidad que se ha desarrollo durante un periodo de miles de años, se representa con ***R*** y está conformado por el conjunto de los números naturales {0,1,2,3…} que, con sus inversos aditivos {…-3, -2, -1} conforman el conjunto de los números enteros.

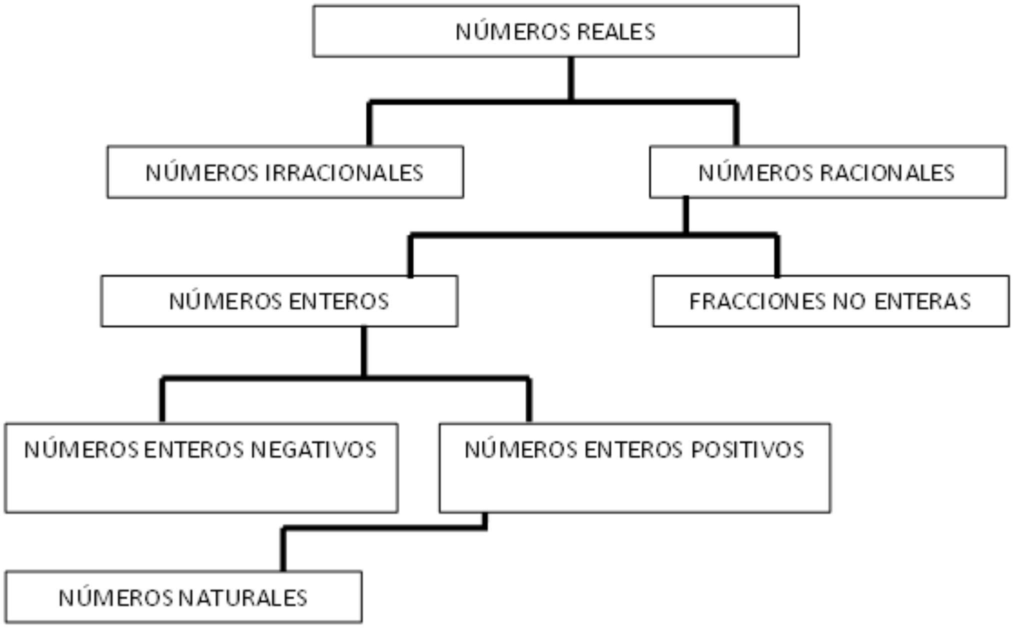
Todos y cada uno de los elementos del conjunto de los números enteros que se puede expresar como una razón conforman el conjunto de los números racionales. Al unir el conjunto de los racionales con los irracionales se construye el conjunto de los números reales.

Subconjuntos de los números reales

Dos forma de representar los subconjuntos y las relaciones de contenencia entre los subconjuntos que conforman los números reales son.[1]

1- GUSTAFSON, D. (2006).Algebra intermedia. México, D.F. México. Thomson editores.


N
Z
Q
Q`
R


NÚMEROS REALES
NÚMEROS IRRACIONALES
NÚMEROS RACIONALES
NÚMEROS ENTEROS
FRACCIONES NO ENTERAS
NÚMEROS ENTEROS NEGATIVOS
NÚMEROS ENTEROS POSITIVOS
NÚMEROS NATURALES

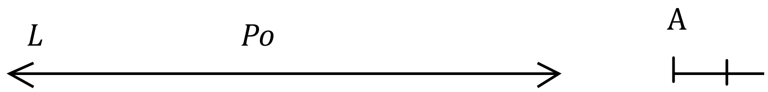
Números naturales N

El conjunto de los números naturales sirven para designar la cantidad de elementos contenidos en un cierto conjunto. Este conjunto de números representado con N, es un conjunto de infinita cantidad de números o conjunto infinito que se puede escribir como: $\boldsymbol{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$

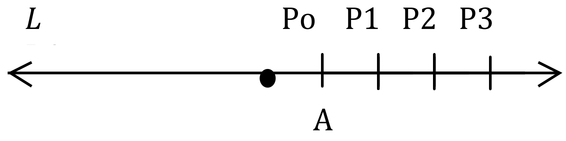
Definición de números reales R[2]

Se define el conjunto de los números reales como el conjunto de los números P que están situados sobre una recta L, de tal manera que cada elemento de R está a una distancia P de un punto fijo O.

Consideremos la recta L, localicemos un punto en L el cual se denomina Po y seleccionado un segmento arbitrario AB cuya medida se llamará la unidad y se representa como $m(\overline{AB}) = 1$



Iniciando en el punto Po, se coloca de manera consecutiva, a lo largo de la recta, el segmento AB.



2- APONTE, G. (1998). Fundamentos de Matemáticas Básica. México. D.F. México. Addison Wesley Longman.

De esta manera queda determinado un conjunto de puntos $\{Po,\ P1, P2, \ldots\ Pn\}$ de modo que la distancia entre cualquier par de puntos consecutivos es la unidad. Esto es $m(\overline{PoP1}) = m(\overline{P1P2}) = m(\overline{P2P3}) = m(\overline{P3P4}) = \cdots = 1$ Se establece una correspondencia entre los puntos Po, P1, P2, P3,….. y el conjunto $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ en la siguiente forma:

$$a\ Po\ le\ asignamos\ el\ numero\ 0.$$

$$a\ P1\ le\ asignamos\ el\ numero\ 1.$$

$$a\ P2\ le\ asignamos\ el\ numero\ 2.$$

$$a\ P3\ le\ asignamos\ el\ numero\ 3.$$

.

.

.

$$a\ Pn\ le\ asignamos\ el\ numero\ n.$$

.

.

.

Ésta es una correspondencia uno a uno, es decir, cada elemento del conjunto determina un *Pn* en la recta y cada punto *Pn* en la recta determina un elemento del conjunto. El número *n* asociado al punto *Pn* se llama coordenadas del punto *Pn*.

Si el punto P está a la derecha de ***O,*** P es positivo y si P está a la izquierda de O es negativo. Si P coincide con ***O*** es cero, el cual es un número que no es positivo ni negativo.

Lo planteado anteriormente construye el conjunto de **números enteros** que está formado por el conjunto de los números naturales y por el resultado de restar un natural con otro mayor, o los que se denominan inverso aditivo.

Orden de los tles

La definición le asigna a los números reales una propiedad de dirección, lo que significa que un cambio en los signos de un número real invierte la dirección de la distancia representada por tal número (con respecto del 0), Esto es, -(-a)=a, además se plantea la relación mayor que (>) o menor que (<) que son el mismo signo interpretado de dos maneras y de acuerdo a la posición de los valores. Es el caso de a mayor que b (a>b) que si leo de derecha a izquierda es b menor que a (b<a) Siempre lo que está en la parte ancha del signo es mayor que los que lo que está en la punta.

Por ejemplo, menos uno menor que tres se representa -1 < 3 y leído en dirección opuesta tres mayor que menos uno se representa 3>-1. Según el punto que representa b, está a la izquierda de a o a está a la derecha de b.

Intervalos en los reales [3]

Lo establecido permite desarrollar el concepto de intervalo que corresponde con los puntos de un segmento o de una semirrecta en la recta real. Todo intervalo se puede expresar como una desigualdad, lo cual pueden ser:

Abierto: $(a,b) = \{x \in R \ / \ a < x < b\}$

Los extremos no pertenecen al conjunto

Cerrados: $[a,b] = \{x \in R \ / \ a \leq x \leq b\}$

Los extremos pertenecen al conjunto

3- APOSTOL, M. (2006). Matemática. Barcelona, España. Editorial Reverte.

Abierto por la derecha: $[a, b) = \{x \in R \ / \ a \leq x < b\}$

El extremo izquierdo pertenece el derecho no

Abierto por la izquierda: $(a, b] = \{x \in R \ / \ a < x \leq b\}$

El extremo izquierdo no pertenece, el derecho si

Es importante anotar que de acuerdo a la escritura de la desigualdad se escribe el intervalo abierto: mayor que > o menor que <, con paréntesis y cerrado, mayor o igual que ≥ o menor o igual que ≤ con corchete.

Propiedades de los intervalos

Sea F la familia de todos los intervalos de la recta real, se incluye en F el conjunto vacío Ø y los puntos a = [a,a] tiene los intervalos las siguientes propiedades:

La intersección de dos intervalos es un intervalo, por tanto:

Si $A \in F$, $B \in F$ entonces $A \cap B \in F$

La unión de dos intervalos no disjuntos es un intervalo, por tanto:

Si $A \in F$, $B \in F$ entonces $A \cup B \in F$

La diferencia entre dos intervalos es un intervalo, por tanto:

Si A ∈ F, B ∈ F, A $\not\subset$ B, B $\not\subset$ A entonces A - B ∈ F

Ejemplo

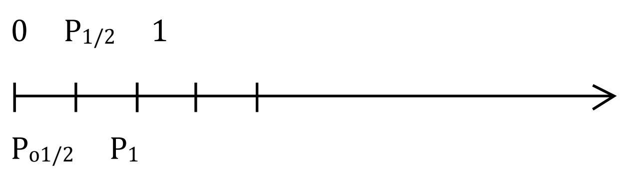
Sean A = [2, 4), B = (3, 8). Entones A ∩ B = (3, 4), A ∪ B= [2, 8),A – B = [2, 3], B - A = [4, 8)

Números Racionales Q

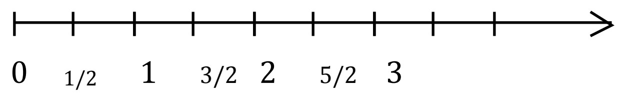
Observe que entre cada dos puntos que corresponden a dos números naturales consecutivos, hay un número infinito de puntos a los cuales no hemos asignado número natural alguno. Además, hay otros números que no son naturales a los cuales no les hemos asignado ningún punto de la recta. Esto sugiere que se amplía el proceso, de modo que a cada punto entre los números naturales se les asigna un número fraccionario en Q+.

Se define como números racional a todos los números que se pueden expresar como el cociente de dos números enteros, siempre que el divisor sea un número diferente de cero. Como todos los números enteros n se puede expresar como n ÷ 1 expresado como n/1, los números enteros forman parte del conjunto de los números racionales.

Podemos asignar a ½ si dividimos el segmento $(\overline{PoP1})$ en dos partes iguales (bisecamos el segmento), podemos asignar a ½ el punto medio del segmento $(\overline{PoP1})$.



Si tomamos a $(\overline{PoP_{1/2}})$ como la unidad, quedan determinados los puntos que corresponde a ½, 2/2, 3/2, 4/2, 5/2, 6/2…, según se ilustra a continuación



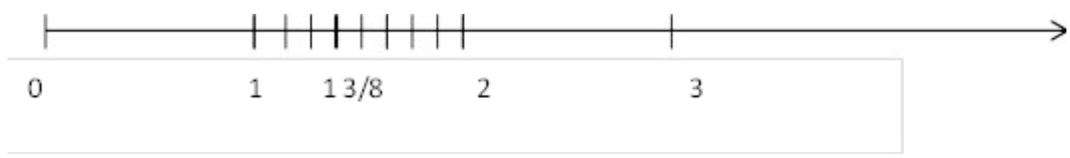
El punto ¼ es la mitad del segmento $(\overline{PoP_{1/2}})$ y al tomar el segmento $(\overline{PoP_{1/4}})$ como unidad se pueden determinar los puntos ¼, 2/4, ¾, 4/4, 5/4, 6/4, 7/4…. Al hacer uso de la geometría, se puede determinar el punto en la recta numérica a cualquier número de la forma a/b

Ejemplos

Localizar en la recta numérica el punto $P_{11/8}$ que corresponde a 11/8.

Se puede expresar 11/8 como el número mixto $1\ \frac{3}{8}$ (Se calcula al realizar la división de 11 en 8 quedando un entero y un residuo de 3 que se escribe $1\ \frac{3}{8}$)
Esto significa que el punto que corresponde al 11/8 se encuentra entre P1 y P2, los puntos asociados con los enteros uno y dos, esto es $1 < 1\ \frac{3}{8} < 2$
Se localiza el punto en el segmento $(\overline{P1P2})$ al dividir el segmento en ocho partes iguales, donde cada una representa 1/8. Se cuenta a partir de P1, para la derecha, tres de las ocho partes. El valor que se asocia es 3/8 de unidades de P1 y corresponde a $1\ \frac{3}{8}$

Se localiza el punto $P_{11/8}$ que corresponde a 11/8



Así como se localiza de manera consecutiva el punto medio entre dos segmentos, se puede dividir el segmento en tres partes localizando el $P_{1/3}$ a la derecha de 0. Cualquier otra fracción se localiza en la recta numérica de la misma manera que la localización de $1\ \frac{3}{8}$.

De acuerdo con las reglas de la aritmética la suma, la diferencia, el producto y el cociente (siempre que el divisor no sea cero) de dos números racionales son también números racionales.

Los números racionales se pueden expresar en forma de numero decimal, los cuales pueden ser finitos ($\frac{7}{2} = 3{,}5$) o infinitos$\left(\frac{7}{3} = 2{,}333333.. = 2,\bar{3}\right)$ y estos últimos son periódico (que tiene números que se repiten de manera infinita). Para calcular el decimal equivalente al racional a/b se calcula el resultado de dividir a en b.

El procedimiento para determinar la fracción equivalente a un decimal es un poco más complejo por tanto se presentan varios ejercicios posteriormente.

Números Irracionales *Q`*.

Existen lugares o puntos de la recta numérica que no se pueden definir como la partición del segmento o expresado como una fracción, a estos números se le identifica como números irracionales **Q`**. Se le llamo irracional por no poderse escribir como una razón o fracción.

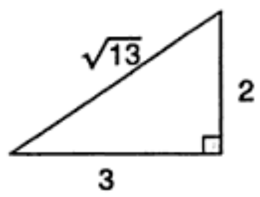
Se definen los números irracionales como números que poseen infinitas cifras decimales no periódicas, razón por la cual no se pueden expresar como una fracción. Estos números son descubiertos al tratar de resolver el longitud de la diagonal de un cuadrado de lado uno según el teorema de Pitágoras siendo el resultado $\sqrt{2}$, siendo este el ejemplo más claro.

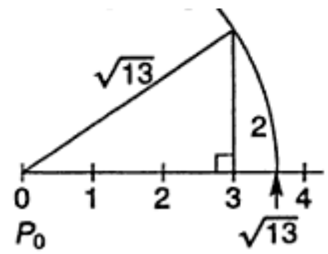
Los números irracionales corresponden a las raíces no exactas como $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}\ , \sqrt[8]{9}, \sqrt[5]{4}$ .... Otro número representante del conjunto de los racionales es el número Pi representado por la letra π es aproximadamente 3,1415926535…, donde su valor es el cociente entre la longitud o perímetro de la circunferencia y la longitud de su diámetro, del cual se han calculado millones de cifras decimales y aún sigue sin ofrecer un patrón de periodicidad.

Al tener la raíz cuadrada no exacta de un número, como $\sqrt{13}$ se puede localizar sobre la recta numérica de la siguiente manera.

Usando el teorema de Pitágoras se organizan el valor $\sqrt{13}$ unidades como hipotenusa, que corresponde a un triángulo de catetos 2 y 3 unidades, tal como aparece en el siguiente gráfico.

Al realizar la construcción del triángulo sobre la recta numérica y con un compás, con una apertura del tamaño de la hipotenusa, se traza un arco que corte a la recta numérica lo que localiza un segmento a partir de cero igual a $\sqrt{13}$. Por tanto se localiza el número $\sqrt{13}$, así:





Un número que comparte características similares al número anterior, es llamado número de Euler, que representado por la e se le han calculado varios millones de números decimales y no se ha encontrado repetición periódica alguna. Sus primeros decimales son 2,718281828459…

Y otro número irracional es el áureo o razón de oro representado por la letra Φ o phi también es muy utilizado por artistas, en especial es conocido por las proporciones corporales usadas por Leonardo da Vinci, que tiene un valor aproximado de 1.618033988…

Orden de los números

Los números sobre la recta numérica están organizados en orden dependiendo de la posición en la cual se encuentra, a esto se le ha denominado orden de los números reales. Para encontrar la relación de orden, se pueden localizar los números sobre la recta numérica y con esta información asignar una comparación entre ellos de mayor o menor que. Por ejemplo, ordenar los siguiente números reales, -3, 2/3, $-\sqrt{25}$, 3.45, $\sqrt{16}$

Examinemos cada número, el menos tres es tres unidades a la izquierda del cero por estar negativo, el segundo número 2/3 es positivo, por tanto está a la derecha de cero, pero para localizar el punto P2/3 que es donde está localizado el número 2/3 tomo la unidad que está a la derecha de cero la divido en tres partes iguales y tomo el segundo segmento a la derecha del cero.

El lugar de $-\sqrt{25}$ es a la izquierda de cero por ser negativo. Es importante aclarar que no estoy calculando la raíz cuadrada de un numero negativo, es negativo el resultado de la raíz cuadrada de un número positivo que es 25, por ello si se puede calcular. RECUERDE QUE EN LOS REALES NO HAY UN NÚMERO QUE MULTIPLICADO POR SI MISMO DE UN NÚMERO NEGATIVO, EN OTRAS PALABRAS, LOS NÚMEROS NEGATIVOS NO TIENE RAIZ CUADRADA EN LOS NÚMEROS REALES.

Retomando la localización del $-\sqrt{25}$ recordemos que la $\sqrt{25}$ es 5 y como esta multiplicado por -1 o sea $-\sqrt{25}$ es negativo, queda a 5 unidades a la izquierda de cero.

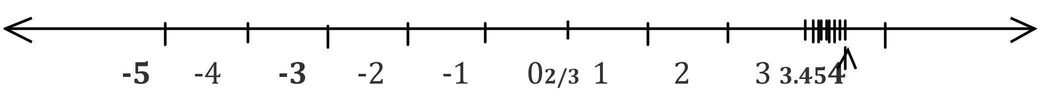
Para localizar 3,45 en la recta numérica se realiza hace la conversión del decimal a fracción de la siguiente manera: como es un numero decimal finito se cuenta en número de dígitos decimales, que en este caso es 2, se multiplica y divide por la potencia de 10 a la 2 (102 = 10 * 10 = 100), así: $3{,}45 * \frac{100}{100} = \frac{345}{100}$ al simplificar queda,

$\frac{345}{100} = \frac{69}{20}$. Esta fracción tiene una característica especial, el numerador es mayor que el denominador, a lo que se le denomina fracción impropia. (Cuando el numerador es menor que el denominador se le denomina fracción propia.)

Por ser fracción impropia se puede expresar como un número mixto, de la forma $a\,\frac{b}{c}$ que significa $a + \frac{b}{c}$ donde a esta a un número de unidades de 0 y $\frac{b}{c}$ es una porción de la siguiente unidad.

Para el caso de $\frac{69}{20}$ se calcula la división de 69 en 20 quedando 3 enteros y un residuo de 9 que se escribe $3\,\frac{9}{20}$. Por tanto, por ser positivo, $\frac{69}{20}$ queda a 3 unidades a la derecha de cero y la siguiente unidad se divide en 20 partes y se toman los nueve primeros segmentos a partir de la unidad tres.

Al localizar los números sobre la recta real se tiene:



Valor absoluto

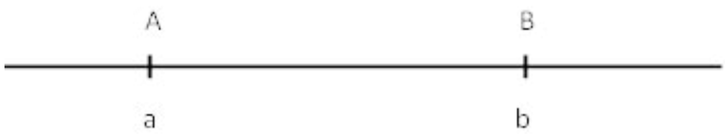
Otra definición o identificar, es el de valor absoluto. Se denomina valor absoluto de un número a la magnitud o número de unidades que hay entre la posición del número y el punto cero.

$$|a| = \begin{cases} a & si\ a \geq 0 \\ -a & si\ a < 0 \end{cases}$$

Esta interpretación es explicada de manera que el valor absoluto de un número real positivo es el número mismo, en tanto el valor absoluto de un número real negativo es el número mismo multiplicado por menos uno, el cual se representa por $|P|$. Es el caso de $|-5| = 5$, $|3| = 3$.

Se puede identificar también como la longitud de un segmento $\overline{AB}$ de tal forma que si se tiene la gráfica

Propiedades de los números reales[4]



Se denominan propiedades de los números reales a postulados que no requieren demostraciones y forman parte de reglas fundamentales. Si p, q y r son tres números reales cualesquiera se pueden plantear las siguientes propiedades:

Clausurativa de la suma: la suma de dos números reales es otro número real $p + q = r$

El elemento idéntico o neutro: el número 0 es el único elemento que conserva la identidad de la operación de la suma. Se menciona que todo numero sumado con cero o al sumar cero con cualquier numero el resultado es el numero $p+0=0+p=p$

Asociativa de la suma: al realizar la suma de tres números, se agrupan de cualquier manera sin afectar el resultado. $p+(q+r) = (p+q) + r$

Conmutativa de la suma: el orden en que se realiza la suma no se afectan los resultados $p+q =q+p$

En la operación multiplicación se consideran las siguientes propiedades:

Clausurativa de la multiplicación: la multiplicación de dos números reales es otro número real $p * q = r$

El elemento idéntico o neutro: el número 1 es el único elemento que conserva la identidad de la operación de la multiplicación. Se menciona que todo numero multiplicado con uno o al multiplicar uno con cualquier numero el resultado es el numero $p * 1=1 * p=p$

Asociativa de la multiplicación: al realizar la multiplicación de tres números, se agrupan

4- JIMENEZ, J. (2005). Matemáticas 1. Jalisco México. Editorial Umbral.

de cualquier manera sin afectar el resultado. $p * (q*r) = (p*q) * r$

Conmutativa de la suma: el orden en que se realiza la suma no se afectan los resultados $p*q = q*p$

De la misma manera que los números reales poseen propiedades relacionadas con las operaciones de la suma, la resta y la multiplicación, están las propiedades de la igualdad que están relacionadas con expresiones que se construyen con operaciones, variables y valores reales llamadas ecuaciones.

Las propiedades a las que se hace referencia son:

Propiedad reflexiva: se establece que toda cantidad o expresión es igual a sí misma. Si X es una expresión o cantidad, se puede asegurar que $X = X$, $2m = 2m$, $6 + 5 = 6 + 5$.

Propiedad simétrica: consiste en variar el orden de los miembros sin que la igualdad se altere, si $39 + 11 = 50$, entonces $50 = 39 + 11$, si $a + b = c$, entonces $c = a + b$.

Propiedad transitiva: consiste en que si dos igualdades tienen un miembro en común los otros dos miembros también son iguales, es el caso de:

Si $a = b$ y $a = c$ entonces $b = c$

6.3.1 Ejemplos, ejercicios o casos de aplicación práctica.

EJEMPLOS Y EJERCICIOS

Los números se pueden clasificar de acuerdo a los elementos que lo caracterizan en naturales, enteros, racionales o irracionales.

Ejemplo.

En el siguiente cuadro indicar con una x a que conjunto pertenece el numero

Número	Natural	Entero	Racional	Irracional
$\sqrt{7}$				X
5	X	X	x	
$-\sqrt{9}$		X	x	
1,245			X	
0,1616			X	

1. Completar la siguiente tabla, marcando con x el conjunto al que pertenece ya sea naturales, enteros, racionales o irracionales.

Número	Natural	Entero	Racional	Irracional
-3				
2,7				
3/7				
$\sqrt{16}$				
$\sqrt{2}$				
2,33333…..				
$\sqrt[3]{8}$				
4/7				
5				
3.3555				
0.12				

Para clasificar un número en cada uno de los subconjuntos de los reales, requiere identificar las características de los mismos, por ejemplo -7 es un número entero por ser el inverso aditivo de un natural, es racional porque se puede expresar de la forma a/b por ejemplo -21/3

2. A cada número indicar porque se identifica como elementos de un determinado subconjunto

a. $\sqrt{36}$
b. 3,21212121...
c. 5/3
d. ½
e. Π
f. 9,6
g. $-\sqrt{16}$
h. 17

3. Escriba dos números que cumplan las condiciones planteadas.

a. Racionales que no sean naturales. ________, __________

b. Entero que no sean naturales. _________, __________

c. Real que no sean enteros. ________, _________

d. Decimal finitos. ________, ________

e. Decimales infinitos. ________, ________

f. Real que no sea irracionales. _______, ________

g. Real que no sea racionales. _______, _______

h. Decimales finitos. _____, ______

4. Localizar sobre la recta numérica real los siguientes valores y escribirlos en forma ascendente:

a. $\sqrt[3]{8}, -\frac{4}{5}, 2.35, 5.4, -\sqrt[3]{27}, 0.16$

b. $\sqrt[4]{16}, -\frac{2}{3}, 1.25, 3.5, -\sqrt[5]{234}, 0.26$

c. $\sqrt[3]{27}, \frac{3}{4}, 1.25, 6.4, \sqrt[3]{81}, 0.15, \frac{5}{4}, \frac{3}{5}$

d. $\sqrt[4]{81}, \frac{2}{7}, 11.15, -5.4, \sqrt[5]{32}, 0.218, \frac{1}{4}, \frac{4}{5}$

e. $-\sqrt{9}, \frac{5}{4}, -10.35, -6.4, -\sqrt[4]{81}, 2.115, \frac{3}{4}, \frac{3}{5}$

5. Utilizando la notación apropiada, escribir las siguientes afirmaciones:

a. a es menor que b

b. a no es menor que b

c. a no es mayor o igual que b.

d. a es mayor o igual que b

e. 3 es menor o igual que 2+1

f. 1 no es mayor que 3.

g. 5 es menor que 7

h. 11 no es menor que 11

i. 5 no es mayor o igual que 12.

j. p es mayor o igual que q

k. m es menor o igual que n

l. r no es mayor que t.

6. Colocar entre los siguientes pares de números el signo adecuado a la relación entre los mismos:

a. 3....-9

b. 3^2....7

c. 3^2....9

d. - 4....- 8

e. -5….3

f. - π….π/2

g. 5....7

h. -4^2....-11

i. -3^2....-9

j. - 14....8

k. -15/3….-5

l. - 3e….π/2

7. Calcular

a. $|3 - 5|$

b. $|-8| + |3 - 1|$

c. $|-3 + 5|$

d. $|2 - 5| - |4 - 7|$

e. $|-3 - 6|$

f. $13 + |-1 - 4| - 3 - |-8|$

g. $|-2| - |-6|$ (9) $||-2| - |-6||$

h. $|3 - 7| - |-5|$

i. $|-|-5||$

8. Indicar la propiedad que se aplica en cada enunciado:

a. $7 + 5 = 5 + 7$ ______________________________

b. $3 + (5 + 2) = 3 + (2 + 5)$ ___________________________

c. $(6 . 3).1 = 6.(3 . 1)$___________________________

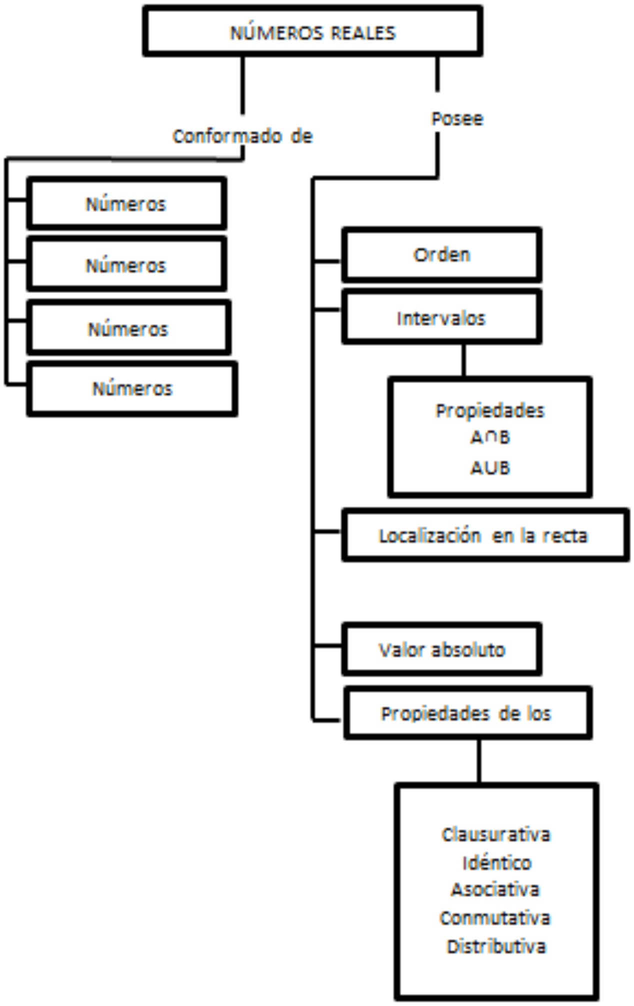
d. $5.(3 + 4)= 5 . 3 + 5 . 4$ _____________________________

e. $7 . 1 = 7$ ______________________________

f. $12 + 0 = 12$ ______________________________

g. $½ = 1$ ______________________________

6.3.2 Síntesis de cierre del tema.



6.3.3 Actividades auto-evaluativas propuestas al estudiante.

1. Completar la siguiente tabla, marcando con x el conjunto al que pertenece ya sea naturales, enteros, racionales o irracionales.

Número	Natural	Entero	Racional	Irracional
4				
-3,5				
5/3				
$-\sqrt{25}$				
3e				

2. A cada número indicar porque se identifica como elementos de un determinado subconjunto

a. $-\sqrt{9}$

b. -4,161616161…

c. 4/3

d. 2/7

e. 3∏

3. Escriba dos números que cumplan las condiciones planteadas.

a. Un número racional que no sea natural. _______, _________

b. Un número entero que no sea natural. ________, _________

c. Un número real que no sea entero. _______, ________

d. Un número decimal finito. _______, _______

e. Un decimal infinito periódico puro. _______, _______

4. Localizar sobre la recta numérica real los siguientes valores y escribirlos en forma ascendente:

a. $\sqrt[3]{27}, \frac{5}{3}, -3.15, 6.8, -\sqrt[3]{64}, 1.16$

b. $\sqrt[4]{81}, -\frac{12}{3}, -1.5, 11.5, -\sqrt[3]{125}, 10.26666\ldots$

c. $\sqrt[5]{243}, -\frac{2}{5}, -1.17, -634, \sqrt[4]{625}, 1.3, \frac{4}{5}, \frac{7}{5}$

5. Utilizando la notación apropiada, escribir las siguientes afirmaciones:

a. p es menor que q

b. m no es menor que c

c. k no es mayor o igual que l.

d. r es mayor o igual que t

e. 9 es menor o igual que 5 + 4

6. Indicar entre los siguientes pares de números el signo adecuado a la relación entre los mismos (<, >, =):

a. 2....-7

b. 4^2....12

c. 5^2....25

d. - 10....- 4*5

e. -5….13

f. - e…. 3/2

7. Calcular

a. $|-3 - 11|$

b. $|-7| + |4 - 5|$

c. $|-6 + (-5)|$

d. $|12 - 5| - |14 - 7|$

8. Indicar la propiedad que se aplica en cada enunciado:

a. $5 + 3 = 3 + 5$ ______________________________

b. $2 + (7 + 4) = 2 + (7 + 4)$ ___________________________

c. $(3 \,.\, 2)5 = 3\,(2 \,.\, 5)$___________________________

d. $4(2 + 3) = 4 \,.\, 2 + 4 \,.\, 3$ _____________________________

REMISIÓN A FUENTES COMPLEMENTARIAS

- *https://www.youtube.com/watch?v=x2EEmTWVhq8*
- *https://www.youtube.com/watch?v=TC8d0KHjDpw*
- *https://www.youtube.com/watch?v=Of2wQohpbZo*
- *https://www.youtube.com/watch?v=MOM_Kv-8p-g*

1

UNIDAD

MATEMÁTICAS - SEMANA 2

FUNDACIÓN UNIVERSITARIA
DEL ÁREA ANDINA
Personería Jurídica Res. 22215 Mineducación Dic. 9-83

INTRODUCCIÓN

En esta cartilla se abordan las operaciones fundamentales entre los números reales, la suma, el producto, la potenciación y logaritmo con las diferentes propiedades relacionadas a cada operación.

Las propiedades, a las que se hace referencia, son los fundamentales para la posterior interpretación y construcción de la generalización, información que conocemos como álgebra.

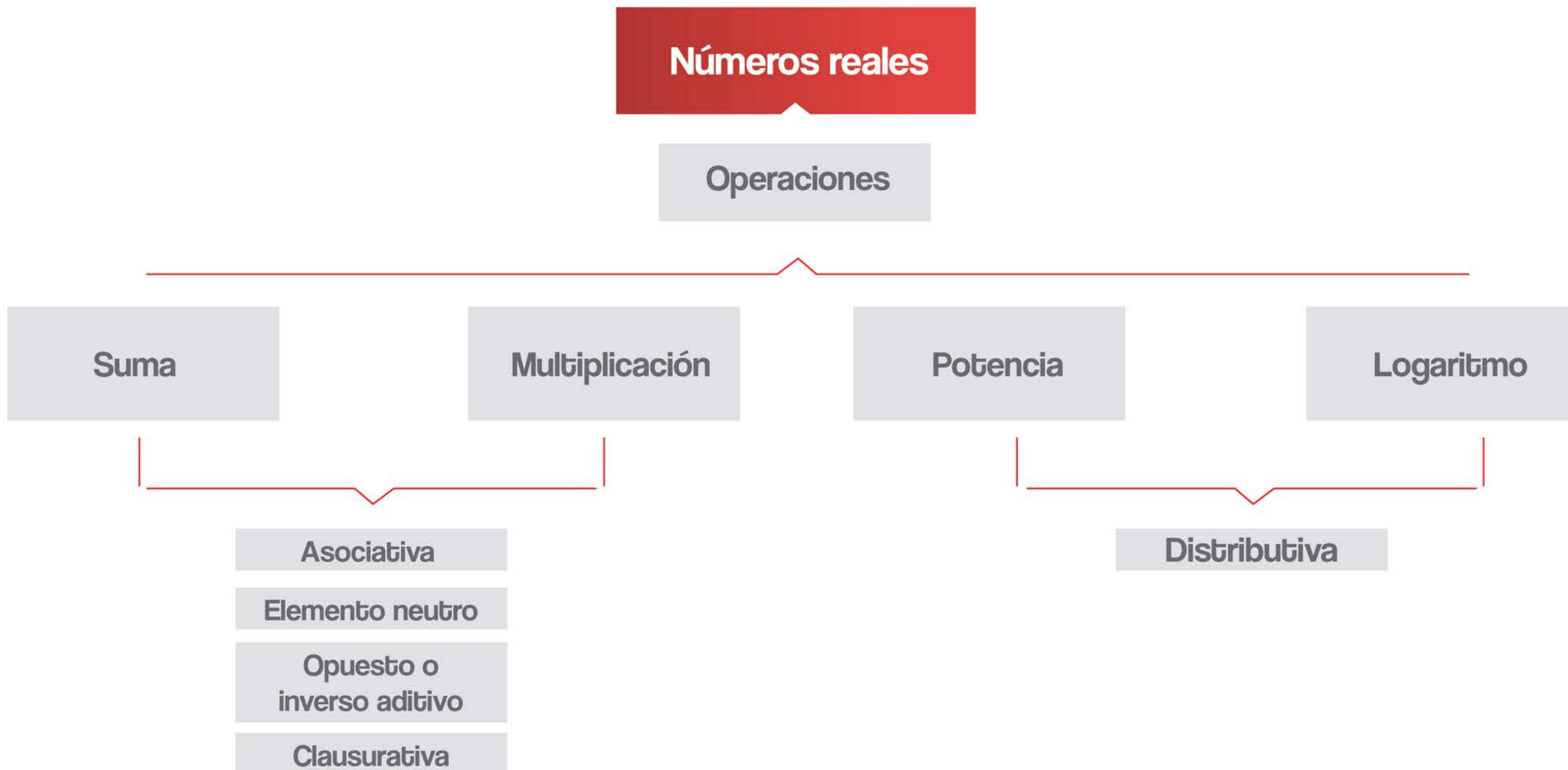
Además de la generalización, las propiedades juegan un papel importante en la comprensión de situaciones operativas complejas, como despejar términos en formulas, hacer apropiadamente cálculos y resolver ecuaciones de orden superior.

METODOLOGÍA

El proceso de aprendizaje académico por medio de la cartilla se desarrolla en tres etapas. La primera hace referencia a la lectura completa del módulo, realizando la respectiva interpretación, análisis y comprensión del contenido. La segunda etapa es el análisis del video y el contenido del mismo. Y la tercera etapa es la aplicación de los contenidos expuestos a situaciones generales, particulares y específicas.

La segunda etapa puede ser retomada cuantas veces quiera, pero tiene un tiempo limitado para adquirir los conocimientos. Recuerde que debe avanzar con las restantes cartillas y con ello los módulos.

MAPA CONCEPTUAL DEL MÓDULO



OBJETIVOS Y COMPETENCIAS

Objetivos

- Aplicar las propiedades de las operaciones con los números reales.
- Aprender las propiedades de las operaciones de los números reales.
- Relacionar las propiedades de las operaciones de los números reales.
- Entender las características de las propiedades de las operaciones con números reales y su aplicación en la solución de situaciones cotidianas.

Competencias

Cada unidad temática debe describir claramente mínimo tres objetivos de aprendizaje / competencias correspondientes a la unidad, tema y subtema.

5.1 Diferencia las características de cada una de las propiedades de las operaciones de los números reales.

5.2 Aplica las propiedades de las operaciones de los números reales.

5.3 Entiende las características de las propiedades de las operaciones de los reales.

DESARROLLO TEMÁTICO

6.1 Componente Motivacional.

Un conocimiento necesario en la construcción de la matemática, para avanzar en el despeje de términos, solución de ecuaciones y manejo apropiado de los números son las operaciones suma, producto, potencia y logaritmo de los números reales y con ellas las propiedades que en estas se aplican.

Este conocimiento es fundamental para estructurar la denominada factorización, temas, que en muchos momentos, ha sido considerado de elevado grado de complejidad. Considero que trabajar muy bien las propiedades de las operaciones suma y producto, permiten comprender los elementos básicos de la factorización por ser esta una generalización de actividades particulares como el uso de propiedades

6.2 Recomendaciones académicas.

La presente cartilla contiene las propiedades de las operaciones suma, multiplicación, potencia, radicación y algoritmo de los números reales, las propiedades clausurativa, asociativa, conmutativa, del módulo y la distributiva de la multiplicación respecto a la suma, además de ejemplos relacionados con el tema, que permiten orientar el desarrollo de ejercicios para promover un aprendizaje apropiado del tema.

Durante esta semana, se pretende que aprenda, además de las propiedades, la aplicación de estas, su apropiación y su interpretación en el orden operativo.

6.3 Desarrollo de cada una de las unidades temáticas

COMPETENCIA GENERAL	COMPETENCIA ESPECIFICA
El estudiante aprende las propiedades de las operaciones de los números reales.	El estudiante diferencia las características de cada una de las propiedades de las operaciones de los números reales
El estudiante relaciona las propiedades de las operaciones de los números reales.	El estudiante aplica las propiedades de las operaciones de los números reales.
El estudiante entiende las características de las propiedades de las operaciones con números reales y su aplicación en la solución de situaciones cotidianas.	El estudiante entiende las características de las propiedades de las operaciones de los reales.

OPERACIONES DE LOS REALES[1]

En el conjunto de los números reales se identifican varias operaciones: suma, multiplicación, división, potenciación y radicación.

La suma de los números reales, es una operación que se efectúa entre dos números, pero se puede considerar la suma de más de dos números.

El conjunto de los números reales en la suma cumple las siguientes propiedades:

$a + (b + c) = (a + b) + c$	ASOCIATIVA
$a + b = b + a$	CONMUTATIVA
$a + 0 = a$	NEUTRO O NULO
$a + (-a) = 0$	INVERSO

1- BELLO, I. (2005).Algebra. México, México, D.F. Cegange Learning Editores.

En tanto la multiplicación de los números reales, también es una operación que se efectúa entre dos números, se puede considerar el producto en más de dos factores. Al efectuar la multiplicación se debe tener en cuenta la regla de los signos:

El producto de dos números del mismo signo siempre da un valor positivo.

El producto de dos números de diferente signo siempre da un valor negativo.

Si $a > 0$, $b > 0$, $a*b = c$, con $c > 0$

Si $a > 0$ y $b < 0$ o $a < 0$ y $b > 0$ $a*b = c$ con $c < 0$

Por ejemplo $3*(-2) = -6$ $(-4)*7 = -28$ $5*4 = 20$ $(-4)*(-9) = 36$

En la multiplicación de los números reales se cumplen las siguientes propiedades:[2]

$a*(b*c) = (a*b)*c$	ASOCIATIVA
$a*b = b*a$	CONMUTATIVA
$a*1 = a$	NEUTRO O NULO
$a*(1/a) = 1$	INVERSO MULTIPLICATIVO.

Propiedad distributiva

$a(b + c) = a*b + a*c = ab + ac$

Con el fin de estudiar las operaciones con los reales, es necesario examinar la forma de operar en algunos subconjuntos, como es el caso de los números racionales

Números racionales. Caracterización.

Recuerda que un número r es racional cuando se puede escribir de la forma a/b, en forma de fracción, donde a y b son números enteros y **b** no puede ser cero, **a** corresponde al numerador y **b** corresponde al denominador.

Cada número racional puede representarse por un único número decimal (*exacto, con un número finito de decimales o con infinitas cifras decimales periódicas*) o por infinitas fracciones.

Por ejemplo 0,333333…. = 1/3 = 3/9

Convertir una fracción en expresión decimal

2- CONSEJO NACIONAL DE EDUCACIÓN PARA LA VIDA Y EL TRABAJO. Propiedades de las operaciones con números reales. México. D.F. México. Consultado en http://www.conevyt.org.mx/colaboracion/colabora/objetivos/libros_pdf/sma3_u1lecc7.pdf el 15 de agosto de 2013.

Si la fracción es r =a/b, para transformarlo a decimal se debe efectuar la división decimal de a en b.

Por ejemplo 23/9 = 2,7777777….= $2,\overline{7}$

Todo número racional al calcular su equivalencia en número decimal da un número finito o un número decimal infinito periódico. Si el numero decimal es infinito y no es periódico este corresponde a un número no racional, es un número irracional

En otras palabras, se puede asegurar que cualquier número decimal periódico (incluidos los números o con un número decimal finito) se puede expresar en forma de fracciones

De la expresión decimal a la expresión fraccionaria.

Cualquier número decimal periódico (incluyendo números exactos o con un número decimal limitado) se puede expresar en forma de fracción a/b.

Si F es un numero racional escrito en forma decimal, es decir de la forma F=a,bccc.., con a, b, c números naturales entonces:

Si c = 0, se dice que f es un número decimal con un número finito de decimales. Por tanto $F = \frac{a}{b} = \frac{F\,10^m}{10^m}$ siendo m el número de dígito decimales de F.

Por ejemplo $31{,}456 = \frac{31{,}456\ \ x\,10^3}{10^3} = \frac{31456}{1000} = \frac{15728}{500} = \frac{7864}{250} = \frac{3932}{125}$ que se simplifica hasta llegar a la mínima expresión.

Si c ≠ 0 y b = c, se dice que F es periódico puro de periodo c. Entonces

$F = \frac{a}{b} = \frac{F\,10^m - F}{10^m - 1}$, siendo m el número de dígitos de c.

Por ejemplo$71{,}25462546\overline{2546}\ldots. = \frac{71{,}25462546\overline{2546} * 10^4 - 71{,}25462546\overline{2546}}{10^4 - 1} = \frac{712475}{9999}$

Si c ≠ 0 y b ≠c decimos que F es periódico mixto de periodo c. donde

$F = \frac{a}{b} = \frac{F\,10^{m+n} - F\,10^m}{10^{m+n} - 10^m}$, donde m es el número de dígitos de b y n el número de dígitos de c.

Por ejemplo $32{,}25136\overline{136} = \frac{32{,}25136\overline{136} * 10^{2+3} - 32{,}25136\overline{136} * 10^2}{10^{2+3} - 10^2} = \frac{3221911}{99900}$

OPERACIONES CON RACIONALES[3]

Cuando efectuamos operaciones con números racionales, es conveniente utilizar las fracciones para conseguir resultados exactos, para ello examinemos:

La suma de racionales

Para sumar dos racionales del mismo signo (llamado comúnmente suma), o sumar dos números de diferente signo (llamado resta), existen dos casos diferentes. El primero es cuando los denominadores son iguales (fracciones homogéneas) y el otro cuando las fracciones tiene diferente denominador (heterogéneas)

En el primer caso se suman los numeradores y al resultado se le asigna el mismo denominador.

Por ejemplo $\frac{3}{5} + \frac{4}{5} - \frac{2}{5} = \frac{3+4-2}{5} = \frac{5}{5} = 1$

En tanto cuando los denominadores son heterogéneos se busca el mínimo común múltiplo (el múltiplo más pequeño de varios números) para construir fracciones equivalentes con el mismo denominador.

Por ejemplo para sumar $\frac{1}{4} + \frac{5}{6} - \frac{7}{12}$ se calcula el m.c.m. (mínimo común múltiplo) así:

Por tanto el m.c.m. es 2 * 2 * 3 = 12 es el menor número que se deja dividir de manera exacta por 4, 6 y 12.

4	6	12	2
2	3	6	2
1	3	3	3
1	1	1	

Por tanto se calculan fracciones equivalentes a cada uno de los sumandos de tal forma que el denominador sea el m.c.m que para este caso es 1. Se busca un número que multiplicado con el denominador dé el m.c.m y se multiplica numerador y denominador por esta cantidad así: $\frac{1}{4} = \frac{1*3}{4*3} = \frac{3}{12}, \quad \frac{5}{6} = \frac{5*2}{6*2} = \frac{10}{12}, \quad \frac{7}{12} = \frac{7}{12}$

Se sustituyen las fracciones por las equivalentes, se suman como fracciones homogéneas y si el resultado se puede simplificar se hace. De la siguiente manera:

3- SCHAAF, W y PETERS, M. (2007).Algebra Y TRIGONOMETRIA. Barcelona, España. Editorial reverte.

$$\frac{3}{12}+\frac{10}{12}-\frac{7}{12}=\frac{3+10-7}{12}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$$

Como se observa la sustracción de fracciones no es más que la suma entre una fracción positiva y una negativa.

Multiplicación de racionales

La multiplicación de racionales es muy sencilla. Se identifican los numeradores y los denominadores, se multiplican los numeradores formándose el numerador del resultado de la multiplicación y la multiplicación de los denominadores forman el denominador del resultado. Siempre busca simplificar, dejar la fracción en la mínima expresión.

$$\frac{a}{b}*\frac{c}{d}=\frac{a*c}{b*d}$$

Por ejemplo $\frac{4}{3}*\frac{5}{6}=\frac{4}{3}\frac{5}{6}=\frac{4*5}{3*6}=\frac{20}{18}=\frac{10}{9}$

División de racionales

En tanto la división de racionales no es más que el cociente entre dos racionales, cuando se tiene $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}$se puede identificar su procedimiento de las siguientes maneras:

$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ $\textit{realizando producto de medios producto de extremos}$ $\frac{a*d}{b*c}$

$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}$ se sustituye el divisor $\frac{c}{d}$ por en inverso multiplicativo $\frac{d}{c}$ y se sustituye la división por la multiplicación quedando $\frac{a}{b}*\frac{d}{c}=\frac{a*d}{b*c}$

Por ejemplo $\frac{5}{4}\div\frac{2}{3}=\frac{5}{4}*\frac{3}{2}=\frac{5*3}{4*2}=\frac{15}{8}$

Potencia de enteros y racionales

Antes de presentar las propiedades de las potencias de los racionales es necesario recordar las propiedades de las potencias de los números enteros.

3- APOSTOL, M. (2006). Matemática. Barcelona, España. Editorial Reverte.

Al elevar un número a una determinada cantidad, significa que la base se multiplica por si misma tantas veces me indica el exponente, así: $a^n = \underbrace{a * a * a * a * a * a * a}_{n\ veces}$

Por ejemplo $2^5 = 2 * 2 * 2 * 2 * 2 = 32$ $\quad (-3)^2 = (-3) * (-3) = 9$

Es importante considerar que todo número elevado a un número par siempre da un valor positivo. Cuando la base es negativa y se eleva a un número impar el resultado da negativo. Por ejemplo $(-3)^3 = (-3) * (-3) * (-3) = -27$

Las siguientes propiedades son aplicadas posteriormente en otras propiedades y otros conjuntos números.

Todo número elevado a la cero da uno$a^0 = 1;\ 5^0 = 1;\ (-3)^0 = 1;\ -(4)^0 - 1$

El producto de dos términos iguales de diferente exponente da por resultado la base elevada a la suma de los exponentes. $a^m * a^n = a^{m+n}$Ejemplo $3^2 * 3^5 = 3^7 = 2187$

La potencia de una potencia implica la base elevada al producto de las potencias, por ejemplo $(2^3)^4 = 2^{3*4} = 2^{12}((-3)^3)^2 = (-3)^6 = 729$

El producto de potencias del mismo exponente es otra potencia con el mismo exponente y cuya base es el producto de las bases $a^m * b^m = (a * b)^m$ Por ejemplo $3^5 * 2^5 = (2 * 3)^5 = 6^5 = 7776$

Propiedades de los exponentes de racionales[4]

Si un número racional posee distintos exponentes para distinto numerador y denominador solo se procede a potenciar cada término y se simplifica si se puede. Por tanto: $\frac{a^n}{b^m}$ Por ejemplo $\frac{3^2}{2^3} = \frac{3*3}{2*2*2} = \frac{9}{8}$

Cuando el término de una fracción se cambia de numerador a denominador o de denominador a numerador la potencia cambia de signo $\frac{1}{a^n} = \frac{a^{-n}}{1}; \frac{1}{a^{-n}} = \frac{a^n}{1}$. Por ejemplo: $3^{-2} = \frac{1}{3^2}\ ;\ \frac{2}{5^3} = 2 * 5^{-3}$

Cuando es la misma base la que está en el denominador y en el numerador, con distintos exponentes, se traslada la base con menor exponente a multiplicar la base con mayor exponente aplicando la propiedad anterior. Para este desarrollo se procede así:$\frac{2^3}{2^5} = \frac{1}{2^5 * 2^{-3}} = \frac{1}{2^{5-3}} = \frac{1}{2^2}$

Al elevar un racional a una potencia, se eleva cada término de la fracción a dicha potencia. Así:

4- GUSTAFSON, D. (2006).Algebra intermedia. México, D.F. México. Thomson editores.

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ por ejemplo $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$

En caso de que la potencia corresponda a un valor negativo, se movilizan los términos y da la impresión de generar la inversión de los términos abajo y el de abajo para arriba. Así: $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$ por ejemplo $\left(\frac{5}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3^2}{5^2} = \frac{9}{25}$

Operaciones con números decimales mencionó anteriormente, los racionales se pueden expresar como números decimales, los cuales se operan de particular manera. Por ejemplo para sumar se deben organizar acorde a la posición de la coma, término bajo término. Así por ejemplo para sumar 324,3578con 2,3457 y con 0,32456676 se organizan teniendo en cuenta la coma de la siguiente manera

```
3 2 4, 3 5 7 8
    2, 3 4 5 7
    0, 3 2 4 5 6 6 7 6
```

Los últimos dígitos no tienen aparentemente números, recuerde que son ceros quedando la suma así:

```
  3 2 4, 3 5 7 8 0 0 0 0
      2, 3 4 5 7 0 0 0 0
+     0, 3 2 4 5 6 6 7 6
------------------------
  3 2 7, 0 2 8 0 6 6 7 6
```

La coma sigue en la misma posición que traía los números anteriores.

La multiplicación que se desarrolla entre dos números se realiza la multiplicación de las expresiones y se desplaza la coma de derecha a izquierda un número de posiciones igual que el número de decimales tiene los multiplicandos. Por ejemplo multiplicar 3,25 con 8,3. Como son tres decimales se correr la coma tres posiciones, quedando 26,975

```
        3, 2 5
X          8, 3
---------------
        9  7 5
  2 6   0  0
---------------
  2 6,  9  7 5
```

Ya para la división de dos números decimales se examina la cantidad de números decimales que hay en cada término y se multiplican los dos términos para que queden del mismo número de decimales y se procede a realizar una división normal. Por ejemplo a dividir 34,25 en 2,1578. Comparemos el número de decimales en cada termino, el primero tiene dos el segundo cuatro por tal razón los organizo dividendo sobre divisor y multiplico por 10^4 para desplazar la coma hasta hacer de los dos números enteros. As:

$$\frac{34{,}25 \times 10^4}{2{,}5178 \times 10^4}$$

Quedan las expresiones

$$\frac{342500}{25178}$$

Que al dividir da 13,603145603…

Propiedades de los radicales[5]

Si r ∈ℝ es un número real, se cumple que $\sqrt[n]{r} = y \iff r = y^n$ Este conjunto numérico cumple las siguientes propiedades. Es importante recordar que las raíces pares de los números negativos no se pueden calcular en los números reales por no existir un número que multiplicado por sí mismo de un numero negativo, Para ser la multiplicación de dos números negativa se requiere que un número sea negativo y el otro positivo por tanto son dos números diferentes no el mismo número.

El producto de raíces iguales de términos distintos, es la raíz del producto de los dos términos $\sqrt[n]{a} * \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a * b}$, por ejemplo

En un cociente de términos diferentes con raíces iguales se puede expresar como un cociente de una misma raíz, $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ por ejemplo $\frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{8}} = \sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{3}{2}$

Existe una relación entre el radical y el exponente $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$ por ejemplo $\sqrt[3]{5^2} = 5^{\frac{2}{3}}$

5- APONTE, G. (1998). Fundamentos de Matemáticas Básica.. México. D.F. México. Addison Wesley Longman. p. 343.

La raíz de la raíz de un término es la raíz del producto de la raíces del término $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n*m]{a}$
Por ejemplo $\sqrt[3]{\sqrt[2]{5}} = \sqrt[3*2]{5} = \sqrt[6]{5}$

Racionalización[6]

Se denomina racionalización a reducir las raíces de los denominadores de una expresión, por ejemplo para racionalizar $\frac{1}{\sqrt{2}}$ se debe tener en cuenta que $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$, como se pretende amplificar la fracción de tal manera que el denominador quede un número sin raíz, se recuerda que $a^n * a^m = a^{m+n}$ y como $2^{\frac{1}{2}} * 2^{\frac{1}{2}} = 2$, entonces se multiplica numerador y denominador por la misma cantidad $2^{\frac{1}{2}}$

Por tanto $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{2},}} * \frac{2^{\frac{1}{2},}}{2^{\frac{1}{2},}} = \frac{2^{\frac{1}{2},}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Si se quiere racionalizar $\frac{1}{\sqrt[3]{5}}$ se recuerda que $\sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}}$y como $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{3}{3} = 1$en otras palabras lo que le falta a 1/ para ser 1 es 2/3 se multiplica $5^{\frac{1}{3}}$ con $5^{\frac{2}{3}}$ en el denominador y numerador, así:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{5}} = \frac{1}{5^{\frac{1}{3}}} = \frac{1 * 5^{\frac{2}{3}}}{5^{\frac{1}{3}} * 5^{\frac{2}{3}}} = \frac{5^{\frac{2}{3}}}{5} = \frac{\sqrt[3]{5^2}}{5}$$

Cuando se quiere racionalizar una expresión de la forma $\frac{1}{3-\sqrt{2}}$ se debe recordar que $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ lo que permite reducir las raíces cuadradas en un término y si es con raíz cúbica $(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$ y $(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$ para reducir expresiones que tiene raíces cúbicas en los términos del polinomio. Estas expresiones son las conocidas como conjugadas.

Por ejemplo, racionalizar $\frac{1}{3-\sqrt{2}}$ se determina que su conjugada es $3 + \sqrt{2}$ expresión que multiplicamos numerador y denominador, así: $\frac{1}{3-\sqrt{2}} * \frac{3+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}} = \frac{3+\sqrt{2}}{9-2} \frac{3+\sqrt{2}}{7} = \frac{3}{7} + \frac{\sqrt{2}}{7}$ quedando la expresión racionalizada.

6 APONTE, G. (1998). Fundamentos de Matemáticas Básica.. México. D.F. México. Addison Wesley Longman p 351.

Logaritmos y sus propiedades [7]

Para inicial los logaritmos vamos a examinar el siguiente cuadro de información:

PROPIEDAD	EXPONENTE	RADICAL	LOGARITMO
COMO SE ESCRIBE	$a^n = b$	$\sqrt[n]{b} = a$	$\log_a b = n$
COMO SE LEE	A elevado a la n da b	A es el resultad de calcular la raíz n de b	El logaritmo base a de b es iguala n
COMO SE INTERPRETA	a multiplicado por sí mismo n veces da b o cual es el resultado de multiplicar a por sí mismo n veces	El número que multiplicado por sí mismo n veces da b	Cuantas veces se multiplica a por sí mismo para que dé b o que exponente debe tener a para que al desarrollarlo de b
EJEMPLO	$2^3 = 8$	$\sqrt[3]{8} = 2$	$\log_2 8 = 3$

Es importante anotar que potenciación, radicación y logaritmación guardan una estrecha relación en los términos que lo componen.

Los logaritmos cumplen las siguientes propiedades

El logaritmo del producto de términos es la suma de los logaritmos de cada termino, $\log_n(a * b) = \log_n a + \log_n b$

Ejemplo $\log_3 9\sqrt{3} = \log_3 9 + \log_3 \sqrt{3} = 2 + \frac{1}{2} = 2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

El logaritmo del cociente de términos es la resta de los logaritmos de cada término

$\log_n(a/b) = \log_n a - \log_n b$

7- REES, P. y SPARKS, F. (1998). Algebra. México. D.F. México. Editorial Reverté.

$$\log_2 8/\sqrt{2} = \log_2 8 - \log_2 \sqrt{2} = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

El coeficiente de un logaritmo se puede expresar como el logaritmo elevado a este coeficiente $n \log_a x = \log_a x^n$

Los logaritmos se pueden obtener en cualquier base a, a partir de los logaritmos

decimales o neperianos de las calculadoras, ya que de la fórmula del cambio de

base de lo logaritmos, para cualquier bases a y b se cumple $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ con dos valores en particular para b = o b = e por tanto$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$ $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$

COMBINACION DE OPERACIONES

Es común que en una misma expresión aparezcan varias operaciones para realizarlas, razón por la cual se deben tener en cuenta las siguientes condiciones:

Prioridad de operaciones u orden operativo: cuando en una expresión aparecen varias operaciones no necesariamente se efectúan en el orden que están escritas, se debe tener en cuenta el orden de relación entre ella, por ejemplo:

PRIMERO, las operaciones con raíces o exponentes

SEGUNDO, las multiplicaciones y divisiones

TERCERO, las sumas y las restas

Otros plantean:

PRIMERO as expresiones que están entre paréntesis

SEGUNDO, se multiplica y se divide

TERCER, se suma o se resta

Realmente el orden lo da la misma expresión en la manera que está escrita, examinemos estos ejemplos para tener una guía

a. 2 + 3 x 4 = 2 + 12 = 14

b. (2 + 3) x 4 = 5 x 4 = 20

c. 5.26 – 2.12 = 5.26 – 4.41 = 0.85

e. (5.26 – 2.1)2 = 3.162 = 9.9856

f. –5.36 – [2.04 x 1.172 ÷ (8.16 + 3.12)] =

–5.36 –[2.04 x 1.172 ÷ 11.28] =

-5.36 – [2.04 x 1.3689 ÷ 11.28] =

–5.36 – [2.792556 ÷ 11.28]

-5.36 - 0.247567 =

–5.607567

Una segunda situación es la aplicación de la distribución o propiedad distributiva, donde la multiplicación se distribuye respecto a la suma o la resta. Esto quiere decir que si un número multiplica a una suma (o resta), el resultado es el mismo que si se multiplica el número por cada uno de los sumandos y luego se suman ambos productos. Es decir, si **a**, **b** y **c** son tres números reales, la distributividad de la multiplicación con respecto de la suma y a la resta dice que:

$$\mathbf{a} * (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} * \mathbf{b}) + (\mathbf{a} * \mathbf{c})$$

$$\mathbf{a} * (\mathbf{b} - \mathbf{c}) = (\mathbf{a} * \mathbf{b}) - (\mathbf{a} * \mathbf{c})$$

Por ejemplo

5.01 * (3.18 + 2.21)

5.01 * 5.39

27.0039

Se puede resolver de la forma

(5.01 * 3.18) + (5.01 * 2.21)

15.9318 + 11.0721

27.0039

−1.1 * [−6.3 − (−2.4)]

−1.1 *[−6.3 + 2.4]

−1.1 * (−3.9)

4.29

y también

[−1.1 * (−6.3)] − [−1.1 * (−2.4)]

6.93 − 2.64

4.29

1/2 * (4/5 − 2/3)= ½* ($\frac{12-10}{15}$) = ½*2/15 =$\frac{1*2}{2*15}$ =1 /15, y también

$$\left(\frac{1}{2}*\frac{4}{5}\right)-\left(\frac{1}{2}*\frac{2}{3}\right)=\frac{1*4}{2*5}-\frac{1*2}{2*\ 3}$$

$$\frac{4}{10}-\frac{2}{6}=\frac{12-10}{30}=\frac{2}{30}=1/15$$

La distributividad es una propiedad que utilizamos algunas veces para facilitar algunos cálculos. Por ejemplo, multiplicar por 90 puede ser engorroso, pero no lo es así multiplicar por 100 y multiplicar por 10, y como 90 = 100 – 10, podemos transformar una multiplicación por 90 en una multiplicación por 100 meno su multiplicación por 10. Así, por ejemplo:

126.15 x 90 = 126.15 x (100 – 10) =

= 126.15 x 100 – 126.15 x 10 =

= 12615 – 1261.5 =

= 11353.5

6.3.1 Ejemplos, ejercicios o casos de aplicación práctica.

EJEMPLOS Y EJERCICIOS

Escriba la expresión aplicando la propiedad de los números reales

a. Propiedad conmutativa $x + 3; x + 3 = 3 + x$

b. Propiedad asociativa de la multiplicación $7 (3x); 7(3x) = (7*3)x$

c. Propiedad distributiva $4(a + b); 4(a + b) = 4a + 4b$

d. Propiedad distributiva $5x + 5y; 5x + 5y = 5(x + y)$

Aplique las propiedades de los números reales para escribir las expresiones sin paréntesis

a. $3(x + y); 3(x + y)= 3x + 3y$

b. $4(2m); 4(2m)=(4*2)m$

c. $– 3/2 (2x – 4y); – 3/2 (2x – 4y) = -3*2x/2+ 3*4y/2$

d. $(a - b)8 ; (a - b)8 = 8a – 8b$

e. $4/3 (-6y) ; 4/3 (-6y)= -4*6y/3$

f. $(3a)(b + c – 2d); (3a)(b + c – 2d)= 3ab +3ac -6ad$

Efectuar las operaciones indicadas

a. $\frac{3}{10}+\frac{4}{15};\quad \frac{3}{10}+\frac{4}{15}=\frac{3*3}{10*3}+\frac{4*2}{15*2}=\frac{9}{30}+\frac{8}{30}=\frac{9+8}{30}=\frac{17}{30}$

b. $\frac{1}{4}+\frac{1}{5};\quad \frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{1*5}{4*5}+\frac{1*4}{5*4}=\frac{5}{20}+\frac{4}{20}=\frac{5+4}{20}=\frac{9}{20}$

c. $\frac{2}{3}-\frac{3}{5};\quad \frac{2}{3}-\frac{3}{5}=\frac{2*5}{3*5}-\frac{3*3}{5*3}=\frac{10}{15}-\frac{9}{15}=\frac{10-9}{15}=\frac{1}{15}$

d. $\frac{2}{3}\left(6-\frac{3}{2}\right);\quad \frac{2}{3}\left(6-\frac{3}{2}\right)=\frac{2*6}{3}-\frac{2}{3}*\frac{3}{2}=4-1=3$

e. $1+\frac{5}{8}-\frac{1}{6};\quad 1+\frac{5}{8}-\frac{1}{6}=\frac{1*24}{1*24}+\frac{5*3}{8*3}-\frac{1*4}{6*4}=\frac{24}{24}+\frac{15}{24}-\frac{4}{26}=\frac{24+15-4}{24}=\frac{35}{24}$

f. $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{4}{5}\right);\quad \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{4}{5}\right)=\left(\frac{1*3}{2*3}-\frac{1*2}{3*2}\right)\left(\frac{1*5}{1*5}+\frac{4}{5}\right)=\left(\frac{3}{6}-\frac{2}{6}\right)\left(\frac{5}{5}+\frac{4}{5}\right)=\frac{1}{6}*\frac{9}{5}=\frac{9}{30}$

Realizar los siguientes ejercicios

a. $5.3-2^2+4/2;\quad 5.3-2^2+4/2=15-4+2=13$

b. 3(4-2) + 2(5-8); 3(4-2) + 2(5-8) = 3*2 + 2 * (-3) = 6 – 6 = 0

c. 10- (-4)+ 12/(3-2); 10- (-4)+ 12/(3-2) = 10 + 4 + 12 = 26

d. 3+2(4-5)+2.3; 3+2(4-5)+2.3 = 3 + 2(-1)+6 = 3-2+6 = 7

e. 2+3(4(-1)- (3-7)); 2+3(4(-1)- (3-7)) = 2+3(-4+4)= 2+3*0 =2

f. (5 – 3,43)(6,38 - 4); (5 – 3,43)(6,38 - 4)= 1,57 * 2,38 = 3,3766

g. 8 – 2(2+3)-2.2 +3; 8 – 2(2+3)-2.2 +3 = 8- 2*5-4 -3 = 8 -10 -7 = -9

h. $\frac{4}{3}*\frac{1}{3}-2/\frac{6}{5};\quad \frac{4}{3}*\frac{1}{3}-2\frac{5}{6}=\frac{4}{9}-2*\frac{5}{6}=\frac{4}{9}-\frac{5}{3}=\frac{4}{9}-\frac{5*3}{3*3}=\frac{4-15}{9}=-\frac{11}{9}$

i. $(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{2}+\sqrt{3});\quad (\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{2}+\sqrt{3})=\sqrt{6}+3-2-\sqrt{6}=1$

Calcular las siguientes operaciones

a. -30+10-5+7-15; -30+10-5+7-15 = 17 – 50 = -35

b. 60 – (5 – 9 + 2 – (-3)); 60 – (5 – 9 + 2 – (-3))= -(5-9+2+3) = - (-9) = 9

c. (5 – (-5))+(-5) ; (5 – (-5))+(-5) = (5 + 5)-5 = 10 – 5 = 5

d. -11 + ((10)-(-8)); -11 + ((10)-(-8)) = -11 + (10 + 8) = -11 + 18 = 7

e. 4-3(2 + 4(1 - 7)) + 6 – (-5); 4-3(2 + 4(1 - 7)) + 6 – (-5)= 4 – 3 (2 +4(-5))+6+5

4-3(2-20)+11 = 4 – 3 (-18)+11 = 4 + 54 + 11 = 69

f. 2^2 (3^2 – (4 + 8))+ 4/2 ; 2^2 (3^2 – (4 + 8))+ 4/2= 4 (9 - 12)+ 2 = 4 (-3)+2 = -12 +2 = -10

g. 2(3)4(-5)/6 + 2^2 ; 2(3)4(-5)/6 + 2^2 = -20 +4 = -16

h. $\frac{4}{10} \div \frac{2}{3} - \frac{4}{5} * \frac{2}{3} + \frac{5}{3} - \frac{1}{4} \div \frac{3}{5}$;

$$\frac{4}{10} \div \frac{2}{3} - \frac{4}{5} * \frac{2}{3} + \frac{5}{3} - \frac{1}{4} \div \frac{3}{5} = \frac{4}{10} * \frac{3}{2} - \frac{4}{5} * \frac{3}{2} + \frac{5}{3} - \frac{1}{4} * \frac{5}{3} = \frac{3}{5} - \frac{6}{5} + \frac{5}{3} - \frac{5}{12}$$

$$\frac{36}{60} - \frac{72}{60} + \frac{100}{60} - \frac{25}{60} = \frac{36 - 72 + 100 - 25}{60} = \frac{39}{60} = \frac{13}{20}$$

i. $\frac{4}{10} \div \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{5}\right) - \frac{2}{3} + \frac{5}{3} - \frac{1}{4} \div \frac{3}{5}$; $\frac{4}{10} \div \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{5}\right) - \frac{2}{3} + \frac{5}{3} - \frac{1}{4} \div \frac{3}{5}$

$$\frac{2}{5} \div \left(\frac{10}{15} - \frac{3}{15}\right) - \frac{2}{3} + \frac{5}{3} - \frac{1}{4} * \frac{5}{3} = \frac{2}{5} * \frac{7}{15} - \frac{2}{3} + \frac{5}{3} - \frac{5}{12} = \frac{14}{75} + 1 - \frac{5}{12}$$

$$= \frac{56}{300} + \frac{300}{300} - \frac{125}{300} = \frac{213}{300} = \frac{71}{100}$$

Calcular la fracción equivalente al siguiente número decimal

a. $9{,}27777\ldots = \frac{927-92}{90} = \frac{835}{90} = \frac{167}{18}$

b. $14{,}371717\ldots \frac{14371-143}{9900} = \frac{14228}{9900} = \frac{7114}{4950} = \frac{3557}{2475}$

c. $3{,}24 = \frac{324}{100} = \frac{162}{50} = \frac{81}{25}$

Expresar como radical

a. $\left(3^{\frac{5}{6}}\right)^{\frac{1}{4}} = 3^{\frac{5*1}{6*4}} = 3^{\frac{5}{24}} = \sqrt[24]{3^5}$

b. $\left(3^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1*1}{3*4}} = 3^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{3}$

c. $\left(7^{\frac{5}{2}}\right)^{\frac{4}{3}} = 7^{\frac{5*4}{2*3}} = 7^{\frac{20}{12}} = 7^{\frac{5}{3}} = 7 * 7^{\frac{2}{3}} = 7\sqrt[3]{7^2}$

d. $\left(10^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{7}{2}} = 10^{\frac{21}{8}} = 10^{\frac{16}{8}} * 10^{\frac{5}{8}} = 10^2 * \sqrt[8]{10^5}$

e. $\left(13^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{6}{4}} = 13^{\frac{6}{20}} = 13^{\frac{3}{10}} = \sqrt[10]{13^3}$

Expresar como un exponente fraccionario y simplificar

a. $\sqrt[12]{8^{16}} = 8^{\frac{12}{16}} = (2^3)^{\frac{3}{4}} = 2^{\frac{9}{4}} = 2^{\frac{8}{4}} * 2^{\frac{1}{4}} = 2^2 * \sqrt[4]{2}$

b. $\sqrt[5]{3^{15}} = 3^{\frac{15}{5}} = 3^3$

c. $\sqrt[11]{4^{33}} = 4^{\frac{33}{11}} = 4^3$

Realizar las siguientes operaciones, simplificar y racionalizar.

a. $6^{\frac{1}{9}} \div 6^{\frac{3}{7}} = 6^{\frac{1}{9}-\frac{3}{7}} = 6^{\frac{7-27}{63}} = 6^{-\frac{20}{63}} = \frac{1}{6^{\frac{20}{63}}} = \frac{6^{\frac{43}{63}}}{6} = \frac{\sqrt[63]{6^{43}}}{6}$

b. $5^{\frac{4}{7}} \div 5^{\frac{2}{3}} = 5^{\frac{4}{7}-\frac{2}{3}} = 5^{\frac{12-14}{21}} = 5^{-\frac{2}{21}} = \frac{1}{5^{\frac{2}{21}}} * \frac{5^{\frac{19}{21}}}{5^{\frac{19}{21}}} = \frac{5^{\frac{19}{21}}}{5} = \frac{\sqrt[21]{5^{19}}}{5}$

c. $\sqrt[7]{\sqrt[3]{10}} = \left(10^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{7}} = 10^{\frac{1}{21}} = \sqrt[21]{10}$

d. $\sqrt[4]{\sqrt[5]{7}} = \sqrt[20]{7}$

Racionalizar

a. $\frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{3}{7^{\frac{1}{2}}} * \frac{7^{\frac{1}{2}}}{7^{\frac{1}{2}}} = \frac{3*7^{\frac{1}{2}}}{7} = \frac{3\sqrt{7}}{7}$

b. $\frac{4}{\sqrt[7]{5}} = \frac{4}{5^{\frac{2}{7}}} * \frac{5^{\frac{5}{7}}}{5^{\frac{5}{7}}} = \frac{4\sqrt[7]{5^5}}{5}$

c. $\frac{6}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} * \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{6(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{3-2} = 6\sqrt{3} + 6\sqrt{2}$

d. $\frac{2}{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{2}} = \frac{2}{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{2}} * \frac{\left(\sqrt[3]{5}\right)^2 - \sqrt[3]{5}\sqrt[3]{2} + \left(\sqrt[3]{2}\right)^3}{\left(\sqrt[3]{5}\right)^2 - \sqrt[3]{5}\sqrt[3]{2} + \left(\sqrt[3]{2}\right)^3} = \frac{2\left(\left(\sqrt[3]{5}\right)^2 - \sqrt[3]{10} + \left(\sqrt[3]{2}\right)^3\right)}{5+2}$

e. $\frac{5+3\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{5+3\sqrt{2}}{\sqrt{3}} * \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}+3\sqrt{6}}{3}$

f. $\frac{\sqrt{2}+3}{\sqrt{7}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}+3}{\sqrt{7}+\sqrt{3}} * \frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{14}-\sqrt{6}+3\sqrt{7}-3\sqrt{3}}{7-3} = \frac{\sqrt{14}-\sqrt{6}+3\sqrt{7}-3\sqrt{3}}{4}$

Resolver la siguiente expresión aplicando las propiedades de logaritmos

a. $3^{\frac{1}{x}} = 9\,;\ \frac{1}{x} = \log_3 9\ ;\ \ \frac{1}{x} = \log_3 3^2\ ;\ \frac{1}{x} = 2\ \log_3 3;\ \frac{1}{x} = 2;\ \ \frac{1}{2} = x$

b. $2^x = 16; x = \log_2 16;\ \ x = \ \log_2 2^4\ ;\ x = \ 4\log_2 2\ ; x = 4$

c. $\log_{101} 10201 = x;\ \log_{101} 101^2 = x; 2\log_{101} 101 = x; 2 = x$

d. $\log_a 4 = 2;\ \ a = \sqrt{4}\ ;\ \ a = 2$

e. $\log_a 243 = 5\,; a = \sqrt[5]{243}\ ; a = 3$

f. $\log_a 1 = 0\,;\ \ a^0 = 1$ Como todo número elevado a la cero da uno, a puede ser cualquier numero diferente de cero

Si $\log x = \frac{1}{2}\log a + 3\log b - \frac{1}{3}(\log c + 2\log d)$ expresa x en función de a, b, c y d

$$\log x = \frac{1}{2}\log a + 3\log b - \frac{1}{3}(\log c + 2\log d)$$

$$\log x = \log a^{\frac{1}{2}} + \log b^3 - \frac{1}{3}(\log c + \log d^2)$$

$$\log x = \log\left(a^{\frac{1}{2}} * b^3\right) - \frac{1}{3}\log(c * d^2)$$

$$\log x = \log\left(a^{\frac{1}{2}} * b^3\right) - \log(c * d^2)^{\frac{1}{3}}$$

$$\log x = \frac{\log\left(a^{\frac{1}{2}} * b^3\right)}{\log(c * d^2)^{\frac{1}{3}}}$$

Calcular

a. $\log_5 625 - \log_3 243 + \log_4 256$;

$$\log_5 5^4 - \log_3 3^5 + \log_4 4^4 = 4\log_5 5 - 5\log_3 3 + 4\log_4 4 = 4 - 5 + 4 = 3$$

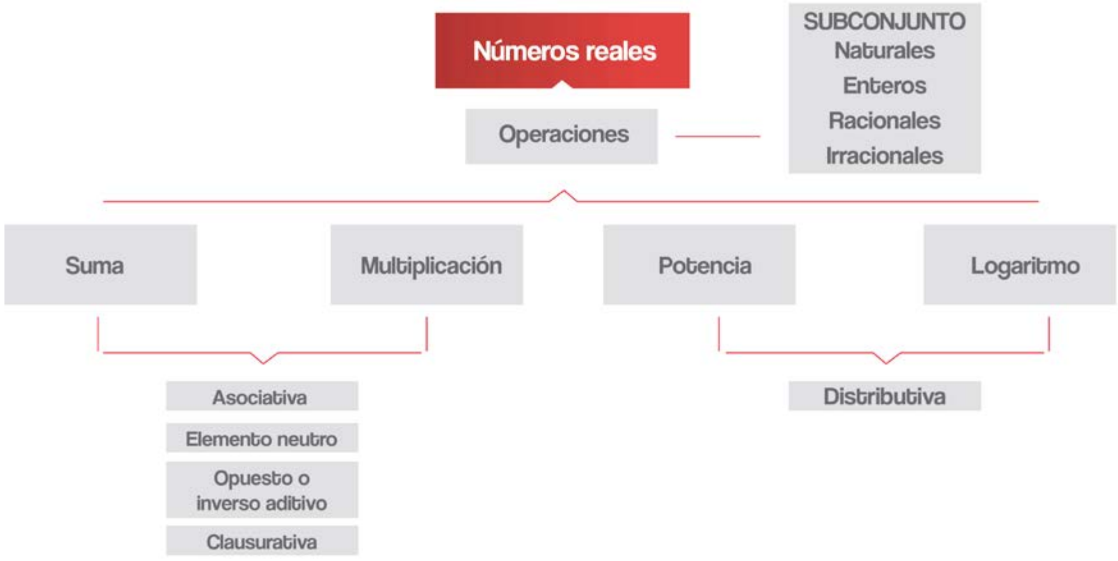
b. $\log_3 1 + \log_2 64 + \log_3 9 + \log_7 49$

$$0 + \log_2 2^6 + \log_3 3^2 + \log_7 7^2 = 6 + 2 + 2 = 10$$

c. $\log_3 \frac{1}{9} - \log_5 0{,}2 + \log_6 \frac{1}{6} - \log_2 0{,}5$

$$\log_3 1 - \log_3 9 - \log_5 1 + \log_5 5 + \log_6 1 - \log_6 6 - \log_2 1 + \log_2 2$$
$$= 0 - 2 - 0 + 1 + 0 - 1 - 0 + 1 = -1$$

6.3.2 Síntesis de cierre del tema



.3.3 Actividades auto-evaluativas propuestas al estudiante.

Escriba la expresión aplicando la propiedad de los números reales

a. Propiedad conmutativa x -5

b. Propiedad asociativa de la multiplicación 4 (6x)

c. Propiedad distributiva 7(p – q)

d. Propiedad distributiva 5x + 5y; 5x + 5y = 5(x + y)

Aplique las propiedades de los números reales para escribir las expresiones sin paréntesis

a. 5(t - k)

b. 6(4m)

c. – 3/2 (2x – 4y); – 3/2 (2x – 4y) = -3*2x/2+ 3*4y/2

d. (a - b)8 ; (a - b)8 = 8a – 8b

e. 4/3 (-6y) ; 4/3 (-6y)= -4*6y/3

f. (3a)(b + c – 2d); (3a)(b + c – 2d)= 3ab +3ac -6ad

Efectuar las operaciones indicadas

g. $\frac{3}{10}+\frac{4}{15}$; $\frac{3}{10}+\frac{4}{15}=\frac{3*3}{10*3}+\frac{4*2}{15*2}=\frac{9}{30}+\frac{8}{30}=\frac{9+8}{30}=\frac{17}{30}$

h. $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$; $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{1*5}{4*5}+\frac{1*4}{5*4}=\frac{5}{20}+\frac{4}{20}=\frac{5+4}{20}=\frac{9}{20}$

i. $\frac{2}{3}-\frac{3}{5}$; $\frac{2}{3}-\frac{3}{5}=\frac{2*5}{3*5}-\frac{3*3}{5*3}=\frac{10}{15}-\frac{9}{15}=\frac{10-9}{15}=\frac{1}{15}$

k. $\frac{2}{3}\left(6-\frac{3}{2}\right)$; $\frac{2}{3}\left(6-\frac{3}{2}\right)=\frac{2*6}{3}-\frac{2}{3}*\frac{3}{2}=4-1=3$

k. $1+\frac{5}{8}-\frac{1}{6}$; $1+\frac{5}{8}-\frac{1}{6}=\frac{1*24}{1*24}+\frac{5*3}{8*3}-\frac{1*4}{6*4}=\frac{24}{24}+\frac{15}{24}-\frac{4}{26}=\frac{24+15-4}{24}=\frac{35}{24}$

l. $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{4}{5}\right)$; $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{4}{5}\right)=\left(\frac{1*3}{2*3}-\frac{1*2}{3*2}\right)\left(\frac{1*5}{1*5}+\frac{4}{5}\right)=\left(\frac{3}{6}-\frac{2}{6}\right)\left(\frac{5}{5}+\frac{4}{5}\right)=\frac{1}{6}*\frac{9}{5}=\frac{9}{30}$

Realizar los siguientes ejercicios

a. $5.3 - 2^2 + 4/2$; $5.3 - 2^2 + 4/2 = 15 - 4 + 2 = 13$

b. 3(4-2) + 2(5-8); 3(4-2) + 2(5-8) = 3*2 + 2 * (-3) = 6 – 6 = 0

c. 10- (-4)+ 12/(3-2); 10- (-4)+ 12/(3-2) = 10 + 4 + 12 = 26

d. 3+2(4-5)+2.3; 3+2(4-5)+2.3 = 3 + 2(-1)+6 = 3-2+6 = 7

e. 2+3(4(-1)- (3-7)); 2+3(4(-1)- (3-7)) = 2+3(-4+4)= 2+3*0 =2

f. (5 – 3,43)(6,38 - 4); (5 – 3,43)(6,38 - 4)= 1,57 * 2,38 = 3,3766

g. 8 – 2(2+3)-2.2 +3; 8 – 2(2+3)-2.2 +3 = 8- 2*5-4 -3 = 8 -10 -7 = -9

h. $\frac{4}{3}*\frac{1}{3}-2/\frac{6}{5}$; $\frac{4}{3}*\frac{1}{3}\text{-}2\frac{5}{6}=\frac{4}{9}\text{-}2*\frac{5}{6}=\frac{4}{9}\text{-}\frac{5}{3}=\frac{4}{9}\text{-}\frac{5*3}{3*3}=\frac{4\text{-}15}{9}=\text{-}\frac{11}{9}$

i $(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{2}+\sqrt{3})$; $(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{2}+\sqrt{3})=\sqrt{6}+3-2-\sqrt{6}=1$

Calcular las siguientes operaciones

a. -30+10-5+7-15; -30+10-5+7-15 = 17 – 50 = -35

b. 60 – (5 – 9 + 2 – (-3)); 60 – (5 – 9 + 2 – (-3))= -(5-9+2+3) = - (-9) = 9

c. (5 – (-5))+(-5) ; (5 – (-5))+(-5) = (5 + 5)-5 = 10 – 5 = 5

d. -11 + ((10)-(-8)); -11 + ((10)-(-8)) = -11 + (10 + 8) = -11 + 18 = 7

e. 4-3(2 + 4(1 - 7)) + 6 – (-5); 4-3(2 + 4(1 - 7)) + 6 – (-5)= 4 – 3 (2 +4(-5))+6+5

4-3(2-20)+11 = 4 – 3 (-18)+11 = 4 + 54 + 11 = 69

f. $2^2\,(3^2 - (4+8)) + 4/2$; $2^2\,(3^2 - (4+8)) + 4/2 = 4\,(9-12) + 2 = 4\,(-3)+2 = -12 + 2 = -10$

g. $2(3)4(-5)/6 + 2^2$; $2(3)4(-5)/6 + 2^2 = -20 + 4 = -16$

h. $\frac{4}{10} \div \frac{2}{3} - \frac{4}{5} * \frac{2}{3} + \frac{5}{3} - \frac{1}{4} \div \frac{3}{5}$;

$$\frac{4}{10} \div \frac{2}{3} - \frac{4}{5} * \frac{2}{3} + \frac{5}{3} - \frac{1}{4} \div \frac{3}{5} = \frac{4}{10} * \frac{3}{2} - \frac{4}{5} * \frac{3}{2} + \frac{5}{3} - \frac{1}{4} * \frac{5}{3} = \frac{3}{5} - \frac{6}{5} + \frac{5}{3} - \frac{5}{12}$$

$$\frac{36}{60} - \frac{72}{60} + \frac{100}{60} - \frac{25}{60} = \frac{36 - 72 + 100 - 25}{60} = \frac{39}{60} = \frac{13}{20}$$

i. $\frac{4}{10} \div \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{5}\right) - \frac{2}{3} + \frac{5}{3} - \frac{1}{4} \div \frac{3}{5}$; $\frac{4}{10} \div \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{5}\right) - \frac{2}{3} + \frac{5}{3} - \frac{1}{4} \div \frac{3}{5}$

$$\frac{2}{5} \div \left(\frac{10}{15} - \frac{3}{15}\right) - \frac{2}{3} + \frac{5}{3} - \frac{1}{4} * \frac{5}{3} = \frac{2}{5} * \frac{7}{15} - \frac{2}{3} + \frac{5}{3} - \frac{5}{12} = \frac{14}{75} + 1 - \frac{5}{12}$$
$$= \frac{56}{300} + \frac{300}{300} - \frac{125}{300} = \frac{213}{300} = \frac{71}{100}$$

Calcular la fracción equivalente al siguiente número decimal

a. 9,27777…. $= \frac{927-92}{90} = \frac{835}{90} = \frac{167}{18}$

b. 14,371717…. $\frac{14371-143}{9900} = \frac{14228}{9900} = \frac{7114}{4950} = \frac{3557}{2475}$

c. 3,24 $= \frac{324}{100} = \frac{162}{50} = \frac{81}{25}$

Expresar como radical

a. $\left(3^{\frac{5}{6}}\right)^{\frac{1}{4}} = 3^{\frac{5*1}{6*4}} = 3^{\frac{5}{24}} = \sqrt[24]{3^5}$

b. $\left(3^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1*1}{3*4}} = 3^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{3}$

c. $\left(7^{\frac{5}{2}}\right)^{\frac{4}{3}} = 7^{\frac{5*4}{2*3}} = 7^{\frac{20}{12}} = 7^{\frac{5}{3}} = 7 * 7^{\frac{2}{3}} = 7\sqrt[3]{7^2}$

d. $\left(10^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{7}{2}} = 10^{\frac{21}{8}} = 10^{\frac{16}{8}} * 10^{\frac{5}{8}} = 10^2 * \sqrt[8]{10^5}$

e. $\left(13^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{6}{4}} = 13^{\frac{6}{20}} = 13^{\frac{3}{10}} = \sqrt[10]{13^3}$

Expresar como un exponente fraccionario y simplificar

a. $\sqrt[12]{8^{16}} = 8^{\frac{12}{16}} = (2^3)^{\frac{3}{4}} = 2^{\frac{9}{4}} = 2^{\frac{8}{4}} * 2^{\frac{1}{4}} = 2^2 * \sqrt[4]{2}$

b. $\sqrt[5]{3^{15}} = 3^{\frac{15}{5}} = 3^3$

c. $\sqrt[11]{4^{33}} = 4^{\frac{33}{11}} = 4^3$

Realizar las siguientes operaciones, simplificar y racionalizar.

a. $6^{\frac{1}{9}} \div 6^{\frac{3}{7}} = 6^{\frac{1}{9}-\frac{3}{7}} = 6^{\frac{7-27}{63}} = 6^{-\frac{20}{63}} = \frac{1}{6^{\frac{20}{63}}} = \frac{6^{\frac{43}{63}}}{6} = \frac{\sqrt[63]{6^{43}}}{6}$

b. $5^{\frac{4}{7}} \div 5^{\frac{2}{3}} = 5^{\frac{4}{7}-\frac{2}{3}} = 5^{\frac{12-14}{21}} = 5^{-\frac{2}{21}} = \frac{1}{5^{\frac{2}{21}}} * \frac{5^{\frac{19}{21}}}{5^{\frac{19}{21}}} = \frac{5^{\frac{19}{21}}}{5} = \frac{\sqrt[21]{5^{19}}}{5}$

c. $\sqrt[7]{\sqrt[3]{10}} = \left(10^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{7}} = 10^{\frac{1}{21}} = \sqrt[21]{10}$

d. $\sqrt[4]{\sqrt[5]{7}} = \sqrt[20]{7}$

Racionalizar

a. $\frac{3}{\sqrt{7}}=\frac{3}{7^{\frac{1}{2}}}*\frac{7^{\frac{1}{2}}}{7^{\frac{1}{2}}}=\frac{3*7^{\frac{1}{2}}}{7}=\frac{3\sqrt{7}}{7}$

b. $\frac{4}{\sqrt[7]{5}}=\frac{4}{5^{\frac{2}{7}}}*\frac{5^{\frac{5}{7}}}{5^{\frac{5}{7}}}=\frac{4\sqrt[7]{5^5}}{5}$

c. $\frac{6}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{6}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}*\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{6(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{3-2}=6\sqrt{3}+6\sqrt{2}$

d. $\frac{2}{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{2}}=\frac{2}{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{2}}*\frac{\left(\sqrt[3]{5}\right)^2-\sqrt[3]{5}\sqrt[3]{2}+\left(\sqrt[3]{2}\right)^3}{\left(\sqrt[3]{5}\right)^2-\sqrt[3]{5}\sqrt[3]{2}+\left(\sqrt[3]{2}\right)^3}=\frac{2\left(\left(\sqrt[3]{5}\right)^2-\sqrt[3]{10}+\left(\sqrt[3]{2}\right)^3\right)}{5+2}$

e. $\frac{5+3\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{5+3\sqrt{2}}{\sqrt{3}}*\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}+3\sqrt{6}}{3}$

f. $\frac{\sqrt{2}+3}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}+3}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}*\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{14}-\sqrt{6}+3\sqrt{7}-3\sqrt{3}}{7-3}=\frac{\sqrt{14}-\sqrt{6}+3\sqrt{7}-3\sqrt{3}}{4}$

Resolver la siguiente expresión aplicando las propiedades de logaritmos

a. $3^{\frac{1}{x}}=9\,;\ \frac{1}{x}=\log_3 9\,;\ \frac{1}{x}=\log_3 3^2\,;\ \frac{1}{x}=2\log_3 3;\ \frac{1}{x}=2;\ \frac{1}{2}=x$

b. $2^x=16; x=\log_2 16;\ x=\log_2 2^4\ ;\ x=4\log_2 2\ ; x=4$

c. $\log_{101} 10201=x;\ \log_{101} 101^2=x; 2\log_{101} 101=x; 2=x$

d. $\log_a 4=2;\ a=\sqrt{4}\ ;\ a=2$

e. $\log_a 243=5; a=\sqrt[5]{243}\ ; a=3$

f. $\log_a 1=0;\ a^0=1$ Como todo número elevado a la cero da uno, a puede ser cualquier numero diferente de cero

Si $\log x=\frac{1}{2}\log a+3\log b-\frac{1}{3}(\log c+2\log d)$expresa x en función de a, b, c y d

$$\log x=\frac{1}{2}\log a+3\log b-\frac{1}{3}(\log c+2\log d)$$

$$\log x = \log a^{\frac{1}{2}} + \log b^3 - \frac{1}{3}(\log c + \log d^2)$$

$$\log x = \log\left(a^{\frac{1}{2}} * b^3\right) - \frac{1}{3}\log(c * d^2)$$

$$\log x = \log\left(a^{\frac{1}{2}} * b^3\right) - \log(c * d^2)^{\frac{1}{3}}$$

$$\log x = \frac{\log\left(a^{\frac{1}{2}} * b^3\right)}{\log(c * d^2)^{\frac{1}{3}}}$$

Calcular

a. $\log_5 625 - \log_3 243 + \log_4 256$;

$$\log_5 5^4 - \log_3 3^5 + \log_4 4^4 = 4\log_5 5 - 5\log_3 3 + 4\log_4 4 = 4 - 5 + 4 = 3$$

b. $\log_3 1 + \log_2 64 + \log_3 9 + \log_7 49$

$$0 + \log_2 2^6 + \log_3 3^2 + \log_7 7^2 = 6 + 2 + 2 = 10$$

c. $\log_3 \frac{1}{9} - \log_5 0{,}2 + \log_6 \frac{1}{6} - \log_2 0{,}5$

$$\log_3 1 - \log_3 9 - \log_5 1 + \log_5 5 + \log_6 1 - \log_6 6 - \log_2 1 + \log_2 2$$
$$= 0 - 2 - 0 + 1 + 0 - 1 - 0 + 1 = -1$$

REMISIÓN A FUENTES COMPLEMENTARIAS

- *http://www.youtube.com/watch?v=kzFFQwh8NZE*
- *http://www.youtube.com/watch?v=TC8d0KHjDpw*
- *http://www.youtube.com/watch?v=13PmSi8e3NU*
- *http://www.youtube.com/watch?v=qu2xaDVi3YQ*

2
UNIDAD

MATEMÁTICAS - SEMANA 3

FUNDACIÓN UNIVERSITARIA
DEL ÁREA ANDINA

Personería Jurídica Res. 22215 Mineducación Dic. 9-83

2

UNIDAD

Introducción

En esta cartilla se abordan las ecuaciones lineales, las ecuaciones cuadráticas, las ecuaciones cúbicas y la resolución de los mismos.

Se trabajan las estructuras básicas de cada una de estas ecuaciones, los elementos que las caracterizan, la forma como se solucionan cada una de las ecuaciones y la forma como se resuelven situaciones expresadas con este tipo de ecuaciones

Metodología

El proceso de aprendizaje académico por medio de la cartilla se desarrolla en tres etapas. La primera hace referencia a la lectura completa del módulo, realizando la respectiva interpretación, análisis y comprensión del contenido. La segunda etapa es el análisis del video y el contenido del mismo. Y la tercera etapa es la aplicación de los contenidos expuestos a situaciones generales, particulares y específicas.

La segunda etapa puede ser retomada cuantas veces quiera, pero tiene un tiempo limitado para adquirir los conocimientos. Recuerde que debe avanzar con las restantes cartillas y con ello los módulos.

Mapa conceptual del módulo

Objetivos y Competencias

Objetivos

- Solucionar ecuaciones lineales cuadráticas y cúbicas

1. Aprender a identificar y resolver ecuaciones lineales, cuadráticas y cúbicas.

2. Relacionar las características de las ecuaciones lineales, cuadráticas y cúbicas y su resolución.

Competencias

- Comprender que la solución de las ecuaciones lineales, cuadráticas y cúbicas permiten comprender situaciones de la vida cotidiana.

Soluciona ecuaciones lineales cuadráticas y cúbicas

1. Aprende a identificar y resolver ecuaciones lineales, cuadráticas y cúbicas.

2. Relaciona las características de las ecuaciones lineales, cuadráticas y cúbicas y su res-lución.

Comprende que la solución de las ecuaciones lineales, cuadráticas y cúbicas permiten comprender situaciones de la vida cotidiana.

Desarrollo temático

6.1 Componente Motivacional.

Identificar las características de las ecuaciones, ya sean lineales, cuadrática, cúbicas o de las inecuaciones, son elementos importante en el análisis, interpretación y modelación de situaciones de la cotidianidad.

Estos elementos son muy importantes en el desarrollo de procesos de análisis e interpretación de situaciones.

6.2 Recomendaciones académicas.

En esta cartilla se abordan las ecuaciones lineales, las ecuaciones cuadráticas, las ecuaciones cúbicas, inecuaciones y la resolución de los mismos.

Se trabajan las estructuras básicas de cada una de estas ecuaciones, los elementos que las caracterizan, los cortes que cada una de ellas tiene con respecto a cada uno de los ejes, la forma como se solucionan cada una de las ecuaciones y la forma como se resuelven situaciones expresadas con este tipo de ecuaciones o inecuaciones.

Se debe profundizar en las características de las inecuaciones y de las ecuaciones, los procedimientos para su solución, sus formas de representación y de las características que cada una de ellas tiene.

6.3 Desarrollo de cada una de las unidades temáticas.

ECUACIONES[1]

Una ecuación es una igualdad en la cual hay términos conocidos y términos desconocidos. El término desconocido se llama incógnita y se representa generalmente por las últimas letras del abecedario: "x", "y" o "z", y los valores conocidos se llaman constantes.

$23 + x = -12$

$123 = 4x - 31$

$x + 144 = 96 - 24$

$3x + 5y - 2 = 0$

$5 - ab = ax - by$

$5x + 7 = 9x - 22$

$0 = 5xy + 15x - 3$

$3/5x \div 6/10y = -32$

Las ecuaciones pueden clasificarse desde diferentes puntos de vista.

1. Por la parte literal. Se clasifican en:

a) Numérica. Es una ecuación en la que aparecen las letras de las incógnitas acompañadas de constantes numéricas

Por ejemplo la ecuación $3t + 5 = 9t - 6$

b) Literal. Es una ecuación en la que además de las variables aparecen otras letras que representan cantidades conocidas.

1- CASTILLO,M R. (1997). Algunas aplicaciones de las ecuaciones funcionales. España. Universidad de Cantabria.

Por ejemplo la ecuación $12y - 4c = 4a + 5y$

2. Por la forma de presentación de las variables. Se clasifican en:

a) Entera. Es aquella en la que ninguno de sus términos tiene denominador

Por ejemplo la ecuación $3z - 5 = 29$

b) fraccionaria. Es aquella en la cual algunos de sus términos tienen denominador, estos pueden ser:

c) Racional. Es aquella en la que las incógnitas tienen raíces cuadradas ni cúbicas.

d) Irracional. Si las incógnitas no tienen raíz cuadrada exacta

3. Por el término de mayor grado. Se clasifican en:

a) Lineales. Cuando el mayor exponente de la variable o variables es 1. Además se les llama así porque al graficar la ecuación se obtiene una línea recta

Por ejemplo la ecuación $2t - 7 = 5t + 3$ es lineal con una sola variable: t

Por ejemplo la ecuación $7x - 4y = 8$ es lineal en dos incógnitas: x, y. La representación gráfica de la ecuación lineal es una recta.

b) Cuadráticas. Cuando el mayor exponente de la variable es 2. Al graficarla se obtiene una figura que se llama parábola.

Por ejemplo la ecuación $z2 - 6z - 8 = 0$ es cuadrática porque el mayor exponente de la variable z es 2.

c) Cúbicas. Cuando el mayor exponente de la variable es 3.

Por ejemplo la ecuación $2r3 - 9r + 3 = 2$ es de grado 3 o cúbica.

Para ecuaciones de grado 4, 5 y 6, etc, se nombra solo diciendo el grado.

4 Por el número de incógnitas.

a) Ecuaciones de una sola variable: cuando solo interviene una cantidad desconocida.

Por ejemplo la ecuación $5x2 + 15 = 0$ es de una variable: x

Por ejemplo la ecuación $0.3t - 4 = 0.75$ es de una variable.

Cabe resaltar que aunque son ecuaciones de una sola incógnita, el grado es diferente.

b) Ecuaciones de dos o más variables: cuando intervienen dos cantidades desconocidas. Si hay igual número de ecuaciones que de variables, entonces se llama n ecuaciones con n variables.

Por ejemplo la expresión $2x - 6y + 8 = 0$ es una ecuación de dos variables x e y

Por ejemplo la expresión

$-5.6x - 15y = 90$

$3.47x + 0.35y = 24$

se llama sistema de tres ecuaciones lineales en tres variables

Podemos combinar las diferentes notaciones para ecuaciones y ver lo que resulta como se evidencia en los siguientes ejemplos.

Ejemplo, la ecuación $ax^2 + dx + e = 0$ es cuadrática literal.

Ejemplo, la expresión $5x^2 - 4y^2 = 120$ y

$$8x^2 + 6y^2 = 15$$

se llama sistema de dos ecuaciones cuadráticas en dos variables

Por ejemplo la expresión $3x^2 - 5/4\ x + 12/7 = 21$ se llama ecuación fraccionaria cuadrática.

RESOLUCIÓN ECUACIONES DE PRIMER GRADO[2]

Se considera, para solucionar ecuaciones de primer grado:

Quitar el paréntesis

Reducir denominadores

Agrupar los términos de las variables y los términos independientes.

Reducir a términos semejantes

Despejar la incógnita.

Por ejemplo, $3x = 6$

Al despejar la variable $x = 3/6 = 1/2$

Si $3x - 4 = 16 + x$

Se agrupan los términos semejantes

Agrupamos los términos semejantes, los independientes y sumamos:

2- BALDOR, A. (2005). Algebra. México, México D.F. Grupo patria cultural.

$3x - x = 16 + 4$

$X = 10$

Si $2(3x - 4) = 5 + x$

Quitamos paréntesis:

$6x - 8 = 5 + x$

Agrupamos términos y sumamos:

$6x - x = 5+8$

$5x = 13$

Despejamos la incógnita:

$X = 13/5 \quad 4$

Si $\frac{x-1}{6} - \frac{x-3}{2} = -1$

Se amplifica la expresión para simplificar el denominador, para lo cual calculamos el mínimo común múltiplo, m.c.m de 6 y 2 es 6

Al multiplicar toda la ecuación por 6 queda $x-1 - 3(x-3) = -6$

Y al quitar los paréntesis, agrupar términos y sumar términos semejantes, queda

$x-1 -3x + 9 = -6 \qquad 9 - 1 +6 = 3x - x \qquad 14 = 2x \qquad 14/2 = x \quad x = 7$

Si $\frac{3}{4}(2x + 4) = x + 19$

Se rompen paréntesis y simplificamos quedando

$\frac{6}{4}x + \frac{12}{4} = x + 19 \qquad \frac{3}{2}x + 3 = x + 19$

Amplificando para simplificar los denominadores se tiene

$3x + 6 = 2x + 38 \quad 3x - 2x = 38 -6 \quad x = 32$

Si $2-\left[-2\,(x+1)-\frac{x-3}{2}\right]=\frac{2x}{3}-\frac{5x-3}{12}+3x$

Al quitar los corchetes queda $2-\left(-2x-2-\frac{x-3}{2}\right)=\frac{2x}{3}-\frac{5x-3}{12}+3x$

Al quitar los paréntesis $2+2x+2+\frac{x-3}{2}=\frac{2x}{3}-\frac{5x-3}{12}+3x$

Al amplificar se tiene, $24+24x+24+6(x-3)=8x-(5x-3)+36\,x$

Al agrupar términos se tiene $24\,x+6x-\;\;8x+5x-36x=3-24-24+18$

Al sumar algebraicamente $-9x=\;-27$ que al dividir toda la igualdad en -9 queda

X = 3

Por ecuación cuadrática

Una ecuación cuadrática es una ecuación de la forma $ax^2+bx+\;\;c=0$ donde a, b y c son números reales, por ejemplo:

$7x^2 + 5x + 10$ a = 7, b = 5, c = 10

$5x^2 - 9x$ a = , b = -9, c = 0

$-7x^2 + 10$ a = -7, b = 0, c = 10

Hay tres formas de solucionar la ecuación cuadrática o hallar las raíces de la ecuación:

Por factorización.

Completando el trinomio cuadrado perfecto

O por la formula cuadrática.

Por factorización

La factorización simple consiste en convertir la ecuación cuadrática en un producto de binomios. $ax^2 + bx + c = 0$ $(px+q)(rx+s)=0$ Luego, se busca el valor de x de cada binomio. X = -q/p y x = -s/r

Por ejemplo

$x^2 + 2x - 8 = 0$ $a = 1$ $b = 2$ $c = -8$

como el primer término tiene raíz cuadrada exacta x, se organizan dos paréntesis así:

$(x \quad)(x \quad) = 0$ porque $x*x = x^2$

Se buscan dos términos que multiplicados den -8 y sumados algebraicamente den 2, estos son 4 y -2 quedando:

$(x - 2)(x + 4) = 0$ y al tener $a * b = 0$ entonces $a = 0$ y $b = 0$, por tanto

$(x - 2) = 0$ $(x + 4) = 0$ entonces $x = 2$ y $x = -4$ soluciones o raíces de la ecuación cuadrática.

Completando el cuadrado

Para utilizar este método la ecuación debe ser de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ con la constante $a = 1$. Cuando esto no ocurre se divide toda la ecuación en a, quedando $\frac{a}{a}x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

Expresando $b/a = d$ y $c/a = e$, al sustituir queda la expresión $x^2 + dx + e = 0$ se reescribe la expresión quedando de la forma $x^2 + dx = -e$

Se realiza el cálculo de $\left(\frac{d}{2}\right)^2$ valor que se suma a ambos lados de la igualdad quedando

$$x^2 + dx + \left(\frac{d}{2}\right)^2 = -e + \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

Con esta información se completa el trinomio cuadrado perfecto con los términos de la izquierda quedando $\left(x + \frac{d}{2}\right)^2 = -e + \left(\frac{d}{2}\right)^2$

Se despeja x quedando las expresiones $x + \frac{d}{2} = \pm\sqrt{-e + \left(\frac{d}{2}\right)^2}$

Por tanto se tiene por solución cualquiera de las dos alternativas de:

$$x = \frac{d}{2} \pm \sqrt{-e + \left(\frac{d}{2}\right)^2}$$

Por ejemplo si se tiene la ecuación $4x^2 + 8x - 12 = 0$ se divide todo en 4 quedando

$\frac{4}{4}x^2 + \frac{8}{4}x - \frac{12}{4} = 0$ por tanto se transforma la ecuación a $x^2 + 2x - 3 = 0$ se organiza la información de la siguiente manera $x^2 + 2x + (\quad) = 3 + (\ )$

Se toma el coeficiente de x que en este caso es 2 y lo divido en 2 y se eleva al cuadrado, este valor, que es uno en este caso, se coloca en los paréntesis quedando la expresión como $x^2 + 2x + (\ 1\ ) = 3 + (\ 1\ )$ se organiza la expresión de la izquierda con el método anterior $(x+1)(x+1) = 4$ entonces $(x+1)^2 = 4$

Se despeja $x + 1 = \pm\sqrt{4}$ $\quad por\ tanto\ x = -1 \pm 2$ lo que determina dos valores para x: x = -3 y x = 1

Formula cuadrática

Para este método se debe identificar los valores de a, b y c,en $ax^2 + bx + \quad c = 0$que reemplazados en la ecuación $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ y permiten calcular el o los valores de x.

Por ejemplo al solucionar $4x^2 + 8x - 12 = 0$ utilizando este método a= 4, b = 8 y c = -12 valores que al reemplazarlos queda

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 * 4 * (-12)}}{2 * 4}$$

Entonces $x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 192}}{2*4} = \frac{-8 \pm \sqrt{256}}{8} = \frac{-8 \pm 16}{8}$

De donde se dan dos resultados $x = \frac{-8+16}{8} = 1 \quad y\ x = \frac{-8-16}{8} = -3$ sin importan el método utilizado siempre los resultados son iguales.

Factorización[3]

Factor común

Cuando los términos de un polinomio tienen un factor común se escribe el término como factor común de los restantes términos del factor.

$$a^2 + 2a = a(a+2)$$

$$10b + 30\,ab^2 = 10\,b\,(1+3a)$$

Factorización por productos notables

Se identifica que $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$, por lo tanto la diferencia de cuadrados, es igual al producto de dos binomios conjugados.

$$9x^2 - 16a^2 = (3x-4a)(3x+4a)$$

$$25x^2 - 64a^2b^2 = (5x-8ab)(5x+8ab)$$

Factorización del trinomio cuadrado perfecto

Un trinomio cuadrado perfecto, es un trinomio de la forma

$$x^2 + 2bx + b^2 \qquad o \qquad x^2 - 2bx + b^2$$

Donde esta ordenado el trinomio y se cumple la condición que el primer y segundo término tiene raíz cuadrada y el segundo término es dos veces el producto de las raíces.

$$x^2 + 2bx + b^2 \qquad\qquad x^2 - 2bx + b^2$$

$$x \qquad b \qquad\qquad x \qquad b$$

$$2bx \qquad\qquad 2bx$$

Al ser cumplida la condición queda factorizada la expresión así:

$$x^2 + 2bx + b^2 = (x+b)^2 \qquad\qquad x^2 - 2bx + b^2 = (x-b)^2$$

$$4x^2 - 20xy + 25y^2 = (2x)^2 - 2\,(2x)(5y) + (5y)^2$$

$$(2x-5y)^2$$

http://books.google.com.co/books?id=K1M4iJHKS1UC&pg=PR4&lpg=PR4&dq=M%C3%A9todos+Num%C3%A9ricos+en+qu%C3%ADmica+con+Matlab+osorio&source=bl&ots=lEN-cM3GsP&sig=kN_YqHcCZVBrBQldyDLy0q8EkSg&hl=es-419&sa=X&ei=Ht- UUuuRAfShsQS7p4CwBw&ved=0CDMQ6AEwAg#v=onepage&q=M%C3%A9todos%20Num%C3 %A9ricos%20en%20qu%C3%ADmica%20con%20Matlab%20osorio&f=false

LA ECUACIÓN CÚBICA[4]

La ecuación cúbica o conocida como ecuación de tercer grado, es aquella ecuación que obedece a un polinomio de tercer grado de la forma ax3+bx2+cx+d=0 donde a es un coeficiente diferente de cero. Su solución se debe al matemático italiano Niccolo Fontano Tartaglia, pero muchos afirman que este realmente copió el método de un alumno del profesor Scipione del Ferro quien nunca publicó nada al respecto.

La historia parece castigar a Tartaglia ya que fue Gerolamo Cardano, después de engañarlo, el que se encargaría de escribir el método de solución en su famoso libro "Ars Magna".

Métodos de solución de la ecuación cúbica.

Lo primero es dividir la ecuación completa por el primer término ¨a¨

$$ax^3 + bx^2 - cx + cd = 0 \quad \rightarrow \; x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0$$

Al tener las siguientes equivalencias $j = \frac{b}{a}$ $\quad k = \frac{c}{a}$ $\quad y\; l = \frac{c}{a}$ se reescribe la ecuación quedando de la forma $x^3 + jx^2 + kx + l = 0$

Se realiza la siguiente sustitución $x = z - \frac{j}{3}$ (*) quedando la ecuación de la forma

$\left(z - \frac{j}{3}\right)^3 + j\left(z - \frac{j}{3}\right)^2 + k\left(z - \frac{j}{3}\right) + 1 = 0$ Al desarrollar la expresión nqueda

$$z^3 - 3z^2\frac{j}{3} + 3z\left(\frac{j}{3}\right)^2 - \left(\frac{j}{3}\right)^3 + z^2 j - 2z\frac{j^2}{3} + \frac{j^3}{9} + kz - k\frac{j}{3} + 1 = 0$$

4- OSORIO, R. Métodos Numéricos en química con Matlab. Recuperado de http://books.google.com.co/ books?id=K1M4iJHKS1UC&pg=PA74&dq=resolver+LA+ECUACI%C3%93N+C%C3%9ABICA&hl=es-419&sa=X&ei=wSIRUrPYHKW02AXAtYHQBA&ved=0CC4Q6AEwAA#v=onepage&q=resolver%20LA%20ECUACI%C3%93N%20C%C3%9ABICA&f=false. El 16 de junio de 2013

$$z^3 - z\,\frac{j^2}{3} + \frac{2j^3}{27} + kz - k\,\frac{j}{3} + 1 = 0$$

Al expresar $p = -\frac{j^2}{3} + k \quad q = \frac{2\,j^3}{27} - \frac{kj}{3} + 1$ queda la expresión de la forma $z^3 + pz + q = 0$ que corresponde a la ecuación cúbica reducida.

Ahora, si z= u +v en la ecuación reducida queda

$$(u+v)^3 + (u+v)p + q = 0 \rightarrow u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + (u+v)p + q = 0$$

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u+v) + q = 0$$

La última ecuación se hace 0 si

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q & Ec\,1 \\ uv = -\dfrac{p}{3} \; que\ equivale\ a\ u^3v^3 = -\dfrac{p^3}{27} & Ec\,2 \end{cases}$$

Se tiene el sistema de ecuaciones con dos incógnitas, cuyas soluciones son:

$$\begin{cases} u = \left(-\dfrac{q}{2} + \sqrt{\dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}} \\ v = \left(-\dfrac{q}{2} - \sqrt{\dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}} \end{cases}$$

Al reemplazar en * $z = \left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}}$

Cuy valor nos sirve para encontrar x dado que $x = z - \frac{j}{3}$

Pero de esta forma solo obtenemos una raíz (solución de la ecuación) y como la ecuación es de tercer grado debemos encontrar 3 soluciones (lo cual se garantiza gracias al teorema fundamental del álgebra) entre reales y complejas.

Para encontrar las dos soluciones restantes se procede a dividir a la ecuación cúbica reducida por $\mathbf{Z - Z_1}$**.** Siendo

$z_1 = \left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}}$ La división es exacta ya que z_1 es solución de $Z^3 + pz + q = 0$

Dividiendo se tiene

$$\frac{z^3 + pz + q}{z - z_1} = z^2 + z_1 z + (z_1^2 + p) \rightarrow z^3 + pz + q$$
$$= (z - z_1)\left(z^2 z_1 z + (z_1^2 + p)\right)$$

por tanto $(z - z_1)\left(z^2 z_1 z + (z_1^2 + p)\right) = 0$ donde centramos la atencion en el segundo factor $(z - z_1)\left(z^2 z_1 z + (z_1^2 + p)\right)$ ya que del primero sabemos que si $z = z_1$ la ecuación se hace cero $(z - z_1)\left(z^2 z_1 z + (z_1^2 + p)\right) = 0$ es una ecuación de segundo grado con soluciones

$$\begin{cases} z_2 = -\frac{z_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{z_1}{2}\right)^2 + \frac{q}{z_1}} \\ z_3 = -\frac{z_1}{2} - \sqrt{\left(\frac{z_1}{2}\right)^2 + \frac{q}{z_1}} \end{cases}$$

En conclusión las tres soluciones son

$$z_1 = \left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$z_2 = -\frac{z_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{z_1}{2}\right)^2 + \frac{q}{z_1}}$$

$$z_3 = -\frac{z_1}{2} - \sqrt{\left(\frac{z_1}{2}\right)^2 + \frac{q}{z_1}}$$

Se recuerda que $x = z - j/3$ la raíz que contiene a $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ nos ayuda a determinar cuántas soluciones reales o complejas posee la ecuación.

Si $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0$ entonces la ecuación posee una solución real y dos complejas

Si $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 0$ las tres raíces son reales, donde al menos dos son iguales

Si $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$ las tres raíces son reales.

Por ejemplo

Determinar las raíces de $2x^3+5x^2+4x+1 = 0$

Se procede por identificar los términos **a=2, b=5, c=4 y d=1**
Luego se calculan j, k y l que son los que nos permiten encontrar p y q
j = b/a = 5/2, j = 2.5
k = c/a = 4/2, k = 2
l = d/a = 1/2, l = 0.5

$$p = -\frac{j^2}{3} + k \text{ entonces } p = -\frac{(2{,}5)^2}{3} + 2 \therefore \boldsymbol{p = -\frac{1}{12}}$$

$$q = \frac{2j^2}{27} - \frac{kj}{3} + l \; entonces \; q = \frac{2(2{,}5)^2}{27} - \frac{2\,(2{,}5)}{3} + 0{,}5 \;\; \therefore \;\; \boldsymbol{q = -\frac{1}{108}}$$

Se procede con el cálculo de Z_1,Z_2 y Z_3

$$z_1 = \left(-\frac{\left(-\frac{1}{108}\right)}{2} + \sqrt{\frac{\left(-\frac{1}{108}\right)^2}{4} + \frac{\left(-\frac{1}{12}\right)^3}{27}} \right)^{\frac{1}{3}} + \left(-\frac{\left(-\frac{1}{108}\right)}{2} - \sqrt{\frac{\left(-\frac{1}{108}\right)^2}{4} + \frac{\left(-\frac{1}{12}\right)^3}{27}} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$z_1 = \frac{1}{3}$$

$$z_2 = -\frac{z_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{z_1}{2}\right)^2 + \frac{\left(-\frac{1}{108}\right)}{z_1}} = -\frac{\frac{1}{3}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\frac{1}{3}}{2}\right)^2 + \frac{\left(-\frac{1}{108}\right)}{\frac{1}{3}}} = -\frac{1}{6}$$

$$z_3 = -\frac{z_1}{2} - \sqrt{\left(\frac{z_1}{2}\right)^2 + \frac{\left(-\frac{1}{108}\right)}{z_1}} = -\frac{\frac{1}{3}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\frac{1}{3}}{2}\right)^2 + \frac{\left(-\frac{1}{108}\right)}{\frac{1}{3}}} = -\frac{1}{3}$$

Como x = z – j/3 tenemos que sustituir cada una de las zetas encontradas para encontrar las raíces de la ecuación

$x_1 = z_1 - j/3$; $x_1 = 1/3 - 2.5/3$, $x_1 = -1/2$
$x_2 = z_2 - j/3$; $x_2 = -1/6 - 2.5/3$, $x_1 = -1$
$x_3 = z_3 - j/3$; $x_3 = -1/6 - 2.5/3$, $x_1 = -1$

Tenemos una ecuación cúbica con tres soluciones reales donde dos de ellas son iguales. Lo cual

se sabía antes ya que para esta ecuación en particular $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=0$

SISTEMAS DE ECUACIONES[5]

Cuando las ecuaciones tiene más de una variable se organizan en sistemas de ecuaciones, los cuales pueden ser:

Sistemas de ecuaciones lineales, que a su vez pueden ser de dos por dos, tres por tres.

Sistemas de ecuaciones no lineales.

Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas

Existen varios métodos para solucionar un sistema de ecuaciones dos por dos, entre los cuales esta sustitución, igualación y reducción.

Método de sustitución

La aplicación de este método en un sistema de dos ecuaciones con dos variables, lleva a la aplicación de pasos generales para su desarrollo.

Se despeja una incógnita en una de las ecuaciones.

Se sustituye la expresión de esta incógnita en la otra ecuación, obteniendo un ecuación con una sola incógnita.

Se resuelve la ecuación.

El valor obtenido se sustituye en la ecuación en la que aparecía la incógnita despejada.

Los dos valores obtenidos constituyen la solución del sistema.

Apliquemos los pasos en el siguiente ejemplo

$$\begin{cases} 5x-6y=-12 \\ 3x+6y=18 \end{cases}$$

Despejamos una de las incógnitas en una de las dos ecuaciones. Elegimos la incógnita que tenga el coeficiente más bajo.

$3x = 18 - 6y$ al dividir en 3 queda $x = 6 - 2y$

5- JIMENEZ, J. (2005). Matemáticas 1. Jalisco México. Editorial Umbral.

Sustituimos en la otra ecuación la variable x, por el valor anterior:

5(6-2y)-6y = -12

R**esolvemos la ecuación** obtenida:

30-10y-6y = -12 -16y = -42 entonces y = 42/16 = 21/8

S**ustituimos el valor**obtenido en la variable despejada.

X = 6 – 2*21/8 = 6 -21/4 =(24-21)/4 entonces x = 3/4

S**oluciónx = 3/4, y = 21/8 que identifica el punto donde se cortan las rectas que representan la gráfica de las dos ecuaciones (3/4, 21/8**

Método de igualación

Para aplicar el método de igualación se tienen los siguientes pasos:

a. Se despeja la misma incógnita en ambas ecuaciones.

b. Se igualan las expresiones, con lo que obtenemos una ecuación con una incógnita.

c. Se resuelve la ecuación.

d. El valor obtenido se sustituye en cualquiera de las dos expresiones en las que aparecía despejada la otra incógnita.

e. Los dos valores obtenidos constituyen la solución del sistema.

Apliquemos el método en el siguiente ejemplo

$$\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases}$$

a. Despejamos, por ejemplo, la incógnita x de la primera y segunda ecuación:

$3x = \ -6 + 4y \qquad x\,\frac{-6+4y}{3}$

$2x = 16 - 4y \qquad x = \frac{16-4y}{2}$

b. Igualamos ambas expresiones:

$\frac{-6+4y}{3} = \frac{16-4y}{2}$

c. Resolvemos la ecuación:

$2(-6+4y) = 3(16-4y) \qquad -12 + 8y = 48 - 12y$

$8y + 12\,y = 48 + 12 \qquad 20\,y = 60 \qquad y = 3$

d. Sustituimos el valor dey, en una de las dos expresionesen las que tenemos despejada la x:

$x = \frac{-6+4*3}{3} = \frac{-6+12}{3} \qquad x = 2$

e. Solución: x= 2 y= 3 entonces (2,3)

Método de reducción

La solución del sistema de ecuaciones utiliza los siguientes pasos:

a. Se preparan las dos ecuaciones, multiplicándolas por los números que convenga.

b. La restamos, y desaparece una de las incógnitas.

c. Se resuelve la ecuación resultante.

d. El valor obtenido se sustituye en una de las ecuaciones iniciales y se resuelve.

e. Los dos valores obtenidos constituyen la solución del sistema.

Apliquemos el método en el siguiente ejemplo

$$\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases}$$

Por la estructura de las expresiones es fácil reducir y, de este modo no tendríamos que preparar las ecuaciones. Para reducir la x, se realiza el producto por 2 y por -3, así:

$$\begin{cases} 3x - 4y = -6 & \xrightarrow{*2} \\ 2x + 4y = 16 & \xrightarrow{*\,(-3)} \end{cases}$$

Restamos miembro a miembro y resolvemos la ecuación:

$$\begin{cases} 6x - 8y = -12 \\ -6x - 12y = -48 \end{cases}$$

-20y = -60 y= 3

Sustituimos el valor de y en la segunda ecuación inicial.

2x + 4*3 = 16 2x + 12 = 16 2x = 4 x = 2

Solución: x = 2 y = 3

Sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas

Método de Gauss[6]

Este método consiste en utilizar el **método de reducción** de manera que **en cada ecuación tengamos una incógnita menos que en la ecuación precedente.**Para aplicar este método se tiene los siguientes pasos

a. Ponemos comoprimera ecuación la que tenga como coeficiente de x, 1 ó -1**,** en caso de que no fuera posible lo haremos con y o z, cambiando el orden de las incógnitas.

6- KOLMAN, B. (2005).Algebra lineal. México. Editorial Pearson.

b. Hacemos reducción con la 1ª y 2ª ecuación, para eliminar el término en x de la 2ª ecuación. Después ponemos como segunda ecuación el resultado de la operación.

c. Hacemos lo mismo con la ecuación 1ª y 3ª ecuación, para eliminar el término en x.

d. Tomamos las ecuaciones2ª y 3ª, trasformadas, para hacer reducción y eliminar el término en y.

e. Obtenemos el sistema equivalente escalonado.

f. Encontrar las soluciones.

Apliquemos el método en el siguiente ejemplo

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 4z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

a. Se traspone como primera ecuación la que tenga el coeficiente de x: 1 ó -1, en caso de que no fuera posible lo haremos con y o z, cambiando el orden de las incógnitas.

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 4z = 2 \end{cases}$$

b. Hacemos reducción con la 1ª y 2ª ecuación, para eliminar el término en x de la 2ª ecuación. Después ponemos como segunda ecuación el resultado de la operación: $E'_2 = E_2 - 3E_1$

$$\begin{array}{r} \begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ -3x - 3y + 3z = -3 \end{cases} \\ \hline -y + 4z = -2 \end{array}$$

c. Hacemos lo mismo con la ecuación 1ª y 3ª ecuación, para eliminar el término en x**.** $E'_3 = E_3 - 5E_1$

$$\begin{cases} 5x + 3y + 4z = 2 \\ -5x - 5y + 5z = -5 \end{cases}$$
$$\overline{\quad -2y + 9z = -3 \quad}$$

Quedando

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ -y + 4z = -2 \\ -2y + 9z = -3 \end{cases}$$

d. Tomamos las ecuaciones2ª y 3ª**,** trasformadas, para hacer reducción y eliminar el término en y. $E''_3 = E'_3 - 2E'_2$

$$\begin{cases} -2y + 9z = -3 \\ 2y - 8z = 4 \end{cases}$$
$$\overline{\quad z = 1 \quad}$$

e. Obtenemos el sistema equivalente <u>escalonado</u>.

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ -y + 4z = -2 \\ z = 1 \end{cases}$$

f. Encontrar las soluciones. Como z = 1 al reemplazar en la segunda ecuación,

-y + 4*1 = -2 entonces y = 6

X + 6 – 1 = 1 entonces x = -4

Sistemas de ecuaciones no lineales

La resolución de estos sistemas se suele hacer por el método de sustitución, para ello seguiremos los siguientes pasos:

a. Se despeja una incógnita en una de las ecuaciones, preferentemente en la de primer grado.

b. Se sustituye el valor de la incógnita despejada en la otra ecuación.

c. Se resuelve la ecuación resultante.

d. Cada uno de los valores obtenidos se sustituye en la otra ecuación, se obtienen así los valores correspondientes de la otra incógnita.

Apliquemos el método en el siguiente ejemplo

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x + y = 7 \end{cases}$$

La resolución de estos sistemas se suele hacer por el método de sustitución, para ello seguiremos los siguientes pasos:

Se despeja una incógnita en una de las ecuaciones, preferentemente en la de primer grado. $y = 7 - x$

Se sustituye el valor de la incógnita despejada en la otra ecuación.

$x^2 + (7 - x)^2 = 25$

Se resuelve la ecuación resultante.

$x^2 + 49 - 14x + x^2 = 25$

$2x^2 - 14x + 24 = 0$

$x^2 - 7x + 12 = 0$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2} = \frac{7 \pm 1}{2} = \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

Cada uno de los valores obtenidos se sustituye en la otra ecuación, se obtienen así los valores correspondientes de la otra incógnita.

$x = 3$ $y = 7 - 3$ $y = 4$ (3,4)

$x = 4$ $y = 7 - 4$ $y = 3$ (4,3)

6.3.1 Ejemplos, ejercicios o casos de aplicación práctica.

A. Clasifica las siguientes ecuaciones según sean literales o numéricas

1. $2x - 6a + 3y = y + 3x - 2b$ Numéricas
2. $z - 6 + 3y = 3$Numéricas
3. $5(x - 9) + 3(3 + 2x) = 2x - 3$Numéricas
4. $a + 3b - x = 3x - 4b$ Literal
5. $x + y - c = 3x + 6y$ Literal

B. Clasifica las siguientes ecuaciones según sean enteras o fraccionarias

1. $2t - 8 = 5t + 7$ Entera
2. $\frac{8y}{7} + \frac{3x}{5} = 10$ Fraccionarias
3. $x + y - z = 8$ Entera
4. $\frac{7}{x - 4} + \frac{2}{x + 8} = 16$ fraccionarias
5. $2y - 2x = 23$ entera

C. Según el exponente clasifica a las siguientes ecuaciones:

1. $3w - 7 = 12$ lineal
2. $8x^2 - 5x + 21 = 1$ cuadráticas
3. $3y - 6x = 2$ lineal
4. $12z^3 - 4z^2 + 3z = 7$ cúbica
5. $4y^5 + 5y^4x - 9y^2x^3 + 6yx^4 - x^5 = 12$ cinco
6. $X^3 - 7x^2y + 5xy^2 + y^3 = 3$ cúbicas
7. $12z^4 + 4z^3 = 12$ cuatro
8. $2t^2 - 5t = 2$ cuadrática
9. $x(8 + 2x) = 2x - 4$ cuadrática
10. $3x - 6 = 4x + 3$ lineal

D. Según el número de incógnitas y la cantidad de ecuaciones clasifica las siguientes expresiones:

$2x - 2y = 7$ 2x2
$5x + 8y = 14$

$3t - 2r = 17$ 2x2
$7t + 6r = 2$

$$6x - 9y - 5z = 11 \quad 3x3$$
$$9x + 2y - 3z = 27$$
$$5x + 8y - 7z = 10$$

$$0.7x^2 - 5.2y^2 = 2.31 \quad 2x2$$
$$9.1x^2 + 0.2y^2 = -0.12$$

$$2x - 7y - 4z + 2w = 12 \quad 4x4$$
$$2x + 7y + 3z - 3w = 5$$
$$10x + 8y - 7z - 7w = 10$$
$$8x + 3y - 2z + w = 1$$

$$-4x + 7y - 2z = -15 \quad 3x3$$
$$-2x - 2y - 3z = 16$$
$$5x + 8y + 2z = 19$$

E. solucionar la ecuación $x^3+2x^2+x+2 = 0$

Se identifican los términos de la expresión a = 1, b = 2, c= 1 y d = d

Se calcula los valores de j, k y l para calcular p y q

j = b/a = 1/1, j = 2
k = c/a = 1/1, k = 1
l = d/a = 2/1, l = 2

$$p = -\frac{j^2}{3} + k \; entonces \; p = -\frac{(2)^2}{3} + 2 \; \therefore \boldsymbol{p = -\frac{1}{3}}$$

$$q = \frac{2j^2}{27} - \frac{kj}{3} + l \; entonces \; q = \frac{2(2)^2}{27} - \frac{1*2}{3} + 2 \quad \therefore \quad \boldsymbol{q = \frac{52}{27}}$$

Se procede con el cálculo de Z_1,Z_2 y Z_3

$$z_1 = \left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{(q)^2}{4} + \frac{(p)^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(-\frac{(q)}{2} - \sqrt{\frac{q^{\;2}}{4} + \frac{(p)^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$z_1 = \left(-\frac{\left(\frac{52}{27}\right)}{2} + \sqrt{\frac{\left(\frac{52}{27}\right)^2}{4} + \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(-\frac{\left(\frac{52}{27}\right)}{2} - \sqrt{\frac{\frac{52}{27}^2}{4} + \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$z_1 = \left(-\frac{26}{27} + \sqrt{\frac{675}{729}}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(-\frac{26}{27} - \sqrt{\frac{675}{729}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$z_1 = \left(-\frac{26}{27} + \frac{5}{9}\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(-\frac{26}{27} - \frac{5}{9}\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$z_1 = \left(\frac{-26 + 15\sqrt{3}}{27}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{-26 - 15\sqrt{3}}{27}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$z_1 = \left(\frac{-2 + \sqrt{3}}{27}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{-2 - \sqrt{3}}{27}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$z_1 = -\frac{4}{3}$$

$$z_2 = -\frac{z_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{z_1}{2}\right)^2 + \frac{(q)}{z_1}} = -\frac{-\frac{4}{3}}{2} + \sqrt{\left(\frac{-\frac{4}{3}}{2}\right)^2 + \frac{\left(\frac{52}{27}\right)}{-\frac{4}{3}}} = -\frac{1}{6}$$

$$z_2 = \frac{2}{3} + \sqrt{\frac{4}{9} - \frac{13}{3}} = \frac{2}{3} + \sqrt{-1} = \frac{2}{3} + i$$

$$z_3 = -\frac{z_1}{2} - \sqrt{\left(\frac{z_1}{2}\right)^2 + \frac{q}{z_1}} = -\frac{-\frac{4}{3}}{2} - \sqrt{\left(\frac{-\frac{4}{3}}{2}\right)^2 + \frac{\left(\frac{52}{27}\right)}{-\frac{4}{3}}}$$

$$z_3 = \frac{2}{3} - \sqrt{\frac{4}{9} - \frac{13}{9}} = \frac{2}{3} - \sqrt{-1} = \frac{2}{3} - i$$

Para determinar los valores de x se sustituyen en la expresión x = z-j/3 así:

$$x_1 = z_1 - \frac{j}{3} = -\frac{4}{3} - \frac{2}{3} = -2$$

$$x_2 = z_2 - \frac{j}{3} = \frac{2}{3} + 1 - \frac{2}{3} = i$$

$$x_3 = z_3 - \frac{j}{3} = \frac{2}{3} - 1 - \frac{2}{3} = -i$$

La ecuación cúbica posee una solución real, dos imaginarias y dos complejas conjugadas, lo que se evidencia porque para esta ecuación se observa que: $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0$

F. Solucionar el sistema de ecuaciones lineales utilizando el método de sustitución, igualación y reducción

Sustitución

$$\begin{cases} \frac{3x}{2} + y = 11 & (1) \\ x + \frac{y}{2} = 7 & (2) \end{cases}$$

$$(1)\frac{3x}{2} + y = 11$$

$$de\ 1\ se\ obtiene \qquad y = 11 - \frac{3x}{2}(3)$$

$$reemplazo\ \ 3\ en\ 2\ \ asi\ \ x + \frac{11 - \frac{3x}{2}}{2} = 7$$

$$multiplico\ todo\ en\ 2\ quedando \quad 2x + \ 11 - \frac{3x}{2} = 14$$

$se\ multiplíca\ nuevamente\ por\ para\ reducir\ el\ denominador\quad 4x + 22 - 3x$
$= 28$

$\therefore\quad x = 6$

$reempalzo\ \ a\ x = 6\ en\ 3\ \ y = 11 - \dfrac{3x}{2}$

$y = 11 - \dfrac{3 * 6}{2} = 11 - 9 = 2$

$\therefore\quad y = 2\qquad \boldsymbol{R}\ \ (\mathbf{6}, \mathbf{2})$

Igualación

$$\begin{cases} \dfrac{3x}{2} + y = 11 & (1) \\ x + \dfrac{y}{2} = 7 & (2) \end{cases}$$

$de\ 1\qquad (3)\quad 3x + 2y = 22$

$de\ 2\qquad (4)\quad 2x + y = 14$

$como\quad x = \dfrac{22 - 2y}{3}\qquad y\qquad x = \dfrac{14 - y}{2}$

$igualando\quad \dfrac{22 - 2y}{3} = \dfrac{14 - y}{2}$

Al solucionar $\quad 2(22 - 2y) = 3(14 - y)$

$44 - 4\ y = 42 - 3y$

$44 - 42 = 4y - 3y$

$\therefore\quad 2 = y$

Reemplazo y = 2 en (4) $\qquad 2x + y = 14\quad entonces\ 2x + 2 = 14$
$2x = 12\ \therefore\quad x = 6\qquad \boldsymbol{R}\ \ (\mathbf{6}, \mathbf{2})$

Reducción $\begin{cases} \frac{3x}{2} + y = 11 & (1) \\ x + \frac{y}{2} = 7 & (2) \end{cases}$

$$\frac{3x}{2} + y = 11 \quad Se\ multiplica\ \ por\ \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$queda\ \ -\frac{3x}{4} - \frac{y}{2} = -\ \frac{11}{2} \quad (3)$$

$$\begin{cases} -\dfrac{3x}{4} - \dfrac{y}{2} = -\ \dfrac{11}{2} \\ x \quad + \quad \dfrac{y}{2} = 7 \end{cases}$$

$$\frac{x}{4} = \frac{3}{2} \quad \therefore \quad x = 6\ (4)$$

$$reemplaxo\ 4\ en\ 1 \quad \frac{3x}{2} + y = 11 \quad \frac{3 * 6}{2} + y = 11$$

$$9 + \ y\ = 11 \quad \therefore \quad Y = 2 \quad \boldsymbol{R}\ (\mathbf{6,2})$$

G. Solucionar el sistema de ecuaciones 3x3 por el método de Gauss

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + y + z = 4 \\ 2x + 2y - z = \ -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + y + z = 4 \\ 2x + 2y - z = \ -4 \end{cases}$$

$$\begin{array}{rrrl} 1 & -1 & 1| & 2 \\ 1 & 1 & 1| & 4 \\ 2 & 2 & -1| & -4 \end{array} \qquad \begin{array}{r} f_1 \to f_1 \\ f_1 * (-1) + \ f_2 \to f_2 \\ f_1 * (-2) + \ f_3 \to f_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrl} 1 & -1 & 1| & 2 \\ 0 & 2 & 0| & 2 \\ 0 & 4 & -3| & -8 \end{array} \qquad \begin{array}{r} f_1 \to f_1 \\ f_2 * \left(\dfrac{1}{2}\right) \to f_2 \\ f_2 * (-2) + \ f_3 \to f_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrl} 1 & -1 & 1| & 2 \\ 0 & 1 & 0| & 1 \\ 0 & 0 & -3| & -12 \end{array} \qquad \begin{array}{r} f_2 \ + \ f_1 \to f_1 \\ f_2 \to f_2 \\ f_3 * (-1/3) \to f_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrl} 1 & 0 & 1| & 3 \\ 0 & 1 & 0| & 1 \\ 0 & 0 & 1| & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{r} f_3 * (-1) \ + \ f_1 \to f_1 \\ f_2 \to f_2 \\ f_3 \to f_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrl} 1 & 0 & 0| & -1 \\ 0 & 1 & 0| & 1 \\ 0 & 0 & 1| & 4 \end{array} \qquad \therefore \quad x = -1, \qquad y = 1 \quad Z = 4$$

EJERCICIOS

a. Clasifica las siguientes ecuaciones según sean literales o numéricas

1. $3x – 7Y- 6X6 =4x - y + 9x$
2. $3z – 5 -6x = 10$
3. $5(x + 7) + 4(5+ 10x) = 9x -3$
4. $r + 3t – x = bx – 4C$
5. $6x + 7y +5x = 3x + 9y$.

b. Clasifica las siguientes ecuaciones según sean enteras o fraccionarias

1. $7t +18 = t + 7$
2. $8/5y + 6/5x\_ = 17$
3. $2/5x + 3y + 6 z = 6,25$
4. $6/(4x-12) + 5/(2x+7) = 6$
5. $7y - 5x = 1$

C. Según el exponente clasifica a las siguientes ecuaciones:

1. $5x^3 + 11 = 2$
2. $9x – 15x + 2 = 15$
3. $5 y – 5x^2 = 4$
4. $5z^6 -3z^2 + 2z = 10$
5. $5y^5 + 6y^4x^3 --7 x^4 – 2x^5 = - 11x^7$
6. $X^4 -8x^2y^3 +15xy+y^3 = 13$
7. $12z +4z = 12$
8. $7t^4 – 8t = 2$
9. $x(8 -x) = -9x – 4$
10. $3x – 9= 5x + 5x^2$

D. Según el número de incógnitas y la cantidad de ecuaciones clasifica las siguientes expresiones:

$$2x + 2y = 17$$
$$6x + 8y = 4$$

$$5t - 5r = 17$$
$$6t - 4r = 1$$

$$3x + 2y – 7z = 1$$
$$9x + 5y – 3z = 2$$
$$x - 6y – 9z = 12$$

$$12.7x^2 – 5.2y^2 = 1.31$$
$$4.1x^2 + 32y^2 = –5.12$$

$2x - 5y - 4z + 4w = 12$

$2x - 4y + 3z - 5w = 5$

$6x + 6y - 8z - 97w = 10$

$-4x + 7y - 2z = -15$

$-2x - 2y - 3z = 16$

E. solucionar las ecuaciones cúbicas

a. $x^3 - 3x^2 + 2x - 3 = 0$

b. $-3x^3 + 2x^2 - 6x - 7 = 0$

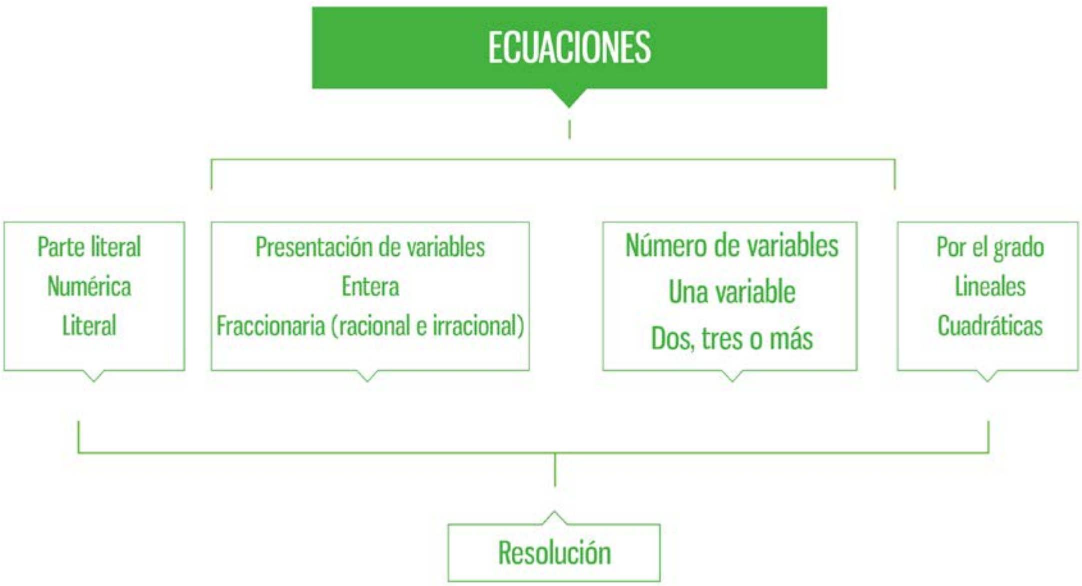
c. $2x^3 + 4x = 0$

F. Solucionar por igualación, sustitución y reducción el siguiente sistema de ecuación.

$A. \begin{cases} x - 7y = 8 \\ 3x + 5y = 3 \end{cases}$

$B. \begin{cases} 3x - 1 = y - 3 \\ 4x - 5 = y + 6 \end{cases}$

6.3.2 Síntesis de cierre del tema.



6.3.3 Actividades auto-evaluativas propuestas al estudiante.

a. Clasifica las siguientes ecuaciones según sean literales o numéricas

1. $5x – 5Y- 3x =x - 2 y + 4x$
2. $4z – 12 +3x = 12$
3. $3(x – 7) -2(4+ 12x) = 7x + 93$
4. $p + 3q – x = ax – 4b$
5. $4x + 5y –3x = 13x + 9yB.$

b. Clasifica las siguientes ecuaciones según sean enteras o fraccionarias

1. $2t – 8 = 5t + 7$
2. 9/6y + 2/4x_ = -16
3. $2/3x + 5y – 8 z = 8,25$
4. $7/(x-5) + 2/(x+9) = 6$
5. $6y + 3x = 12$

C. Según el exponente clasifica a las siguientes ecuaciones:

1. $3w^3 – 7 = 12$
2. $8x – 5x + 21 = 1$
3. $3 y – 6x^2 = 2$
4. $2z^6 – 4z^2 + z = 17$
5. $4y^5 + 5y^4x^3 +6x^4 – x^5 = 12x^7$
6. $X^4 -8x^2y^3 +15xy+y^3 = 13$
7. $12z +4z = 12$
8. $2t^4 – 8t = 2$
9. $x(6 -x) = -2x – 4$
10. $3x – 6 = 4x + 3x^2$

D. Aplicar la factorización a las situaciones planteadas en los puntos a, b y c.

a. Según el número de incógnitas y la cantidad de ecuaciones clasifica las siguientes expresiones:

$x - 2y = 17$

$7x + 18y = 4$

$3t - 2r = 17$

$8t + 5r = 12$

$6x + 9y – 5z = 11$

$7x + 3y – 2z = 2$

$x - 6y – 9z = 12$

$2.7x^2 – 3.2y^2 = 0.31$

$0.1x^2 + 32y^2 = – 1.12$

$$\begin{aligned} 2x - 7y - 4z + 2w &= 12 \\ 2x + 7y + 3z - 3w &= 5 \\ 10x + 8y - 7z - 7w &= 10 \\ 8x + 3y - 2z + w &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -4x + 7y - 2z &= -15 \\ -2x - 2y - 3z &= 16 \\ 5x + 8y + 2z &= 19 \end{aligned}$$

f. solucionar las ecuaciones cúbicas

a. $2x^3-3x^2+2x-3=0$

b. $-x^3+3x^2-4x-1=0$

c. $x^3+2x=0$

a. Solucionar por igualación, sustitución y reducción el siguiente sistema de ecuación.

$$\begin{cases} 6x - 5y = -9 \\ 4x + 3y = 13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 1 = y + 4 \\ x - 3 = 3y - 7 \end{cases}$$

b. Solucionar por el método de Gauss

$$\begin{cases} x + y + z = 12 \\ 2x - y + z = 7 \\ x + 2y - z = 6 \end{cases}$$

2

UNIDAD

MATEMÁTICAS - SEMANA 4

FUNDACIÓN UNIVERSITARIA DEL ÁREA ANDINA

Personería Jurídica Res. 22215 Mineducación Dic. 9-83

Introducción

En esta cartilla se abordan el estudio a las inecuaciones ya sean lineales, cuadráticas o racionales y la resolución de las mismos.

Se trabajan las estructuras básicas de cada una de estas inecuaciones, los elementos que las caracterizan, los cortes que cada una de ellas tiene con respecto a cada uno de los ejes, la forma como se solucionan cada una de las inecuaciones y la forma como se resuelven situaciones expresadas con este tipo de inecuaciones.

Metodología

El proceso de aprendizaje académico por medio de la cartilla se desarrolla en tres etapas. La primera hace referencia a la lectura completa del módulo, realizando la respectiva interpretación, análisis y comprensión del contenido. La segunda etapa es el análisis del video y el contenido del mismo. Y la tercera etapa es la aplicación de los contenidos expuestos a situaciones generales, particulares y específicas.

La segunda etapa puede ser retomada cuantas veces quiera, pero tiene un tiempo limitado para adquirir los conocimientos. Recuerde que debe avanzar con las restantes cartillas y con ello los módulos.

Mapa conceptual del módulo

Objetivos y Competencias

Objetivos

- Solucionar situaciones de la vida cotidiana aplicando las alternativas de solución de las inecuaciones

1. Aprender a identificar y resolver inecuaciones.
2. Relacionar las características de las inecuaciones y su resolución.
3. Comprender que la solución de las inecuaciones lineales, cuadráticas y cúbicas permiten comprender situaciones de la vida cotidiana.

Competencias

- Soluciona situaciones de la vida cotidiana aplicando las alternativas de solución de las inecuaciones

1. Aprende a identificar y resolver inecuaciones.
2. Relaciona las características de las inecuaciones y su resolución.
3. Comprende que la solución de las inecuaciones lineales, cuadráticas y cúbicas permiten comprender situaciones de la vida cotidiana.

Desarrollo temático

6.1 Componente Motivacional.

Identificar las características de las inecuaciones, ya sean lineales, cuadrática, cúbicas o de los sistemas de inecuaciones, son elementos importante en el análisis, interpretación y modelación de situaciones de la cotidianidad.

Estos elementos son muy importantes en el desarrollo de procesos de análisis e interpretación de situaciones.

6.2 Recomendaciones académicas.

En esta cartilla se abordan los contenidos relacionados con las inecuaciones, las alternativas o las formas de construir una solución que estas tienen.

Se trabajan las estructuras básicas de cada una de las inecuaciones, lineales, cuadrática, con una o dos incógnitas los elementos que las caracterizan, las formas como se construyen las soluciones y la forma como se resuelven situaciones expresadas con este tipo de inecuaciones.

Se debe profundizar en las características de las inecuaciones, los procedimientos para su solución, sus formas de representación y de las características que cada una de ellas tiene.

6.3 Desarrollo de cada una de las unidades temáticas.

COMPETENCIA GENERAL	COMPETENCIA ESPECIFICA
El estudiante aprende a identificar y resolver inecuaciones.	El estudiante diferencia las características de las inecuaciones.
El estudiante relaciona las características de las inecuaciones y su resolución.	El estudiante Aplica las características de las inecuaciones y su resolución.
El estudiante entiende las características de las inecuaciones y su resolución.	El estudiante entiende las características de las inecuaciones y su resolución.

INECUACIÓN

Iniciamos estableciendo como desigualdad a una relación de dos expresiones matemáticas que tiene cantidades conocidas y variables por medio de la expresión mayor que, menor que, mayor o igual que o menor o igual que, donde la solución de es un conjunto o intervalo de valores que hace que la expresión sea verdadera.

Las desigualdades pueden ser de la siguiente forma:

$$5x+3 \geq 2x-1 \quad 3x^2-5x+1<0 \quad \frac{x}{x+3} \leq 4$$

Las desigualdades pueden ser expresiones lineales, cuadráticas, de grado n o racionales y al resolver una inecuación o consiste en transformar la inecuación inicial en otras equivalentes más sencillas, hasta llegar a expresiones de la forma

$$x < K, x \leq K, \ x > K \ \ o \ x \geq k$$

Para solucionar una desigualdad, se basa en la transformación de la inecuación en una expresión equivalente más sencilla y se procede de manera similar a la de la igualdad, por tanto dos inecuaciones son equivalentes y si a los dos miembros de la inecuación se les suma o resta la misma cantidad se obtiene una inecuación equivalente.

$$a > b \ \rightarrow \ a+c > b+c \quad o \quad a < b \ \rightarrow \ a+c < b+c$$

$$a \geq b \ \rightarrow \ a+c \geq b+c \quad o \quad a \leq b \ \rightarrow \ a+c \leq b+c$$

A partir de estas operaciones se establece lo que comúnmente se denominada trasposición de términos que está acompañado de la denominada simplificación de términos iguales: si a los dos miembros de una inecuación se encuentra un mismo término sumando, estos términos se pueden simplificar sin que se altere la desigualdad.

Y si se multiplican o dividen los dos términos de la inecuación por una misma cantidad positiva, se obtiene una inecuación equivalente, con el mismo sentido de la desigualdad: si C > 0 entonces

$$a > b \ \rightarrow \ a*c > b*c \quad o \quad a < b \ \rightarrow \ a*c < b*c$$

$$a \geq b \ \rightarrow \ a*c \geq b*c \quad o \quad a \leq b \ \rightarrow \ a*c \leq b*c$$

En tanto si la cantidad por la que se multiplica es negativa se procede a cambiar el sentido de la desigualdad: si C < 0 entonces

$$a > b \;\rightarrow\; a * c < b * c \quad o \quad a < b \;\rightarrow\; a * c > b * c$$

$$a \geq b \;\rightarrow\; a * c \leq b * c \quad o \quad a \leq b \;\rightarrow\; a * c \geq b * c$$

Si los miembros de la inecuación son positivos, al elevarlos al cuadrado el sentido de la desigualdad se mantiene

$$a > b \rightarrow a^2 > b^2 \quad o \quad a < b \rightarrow a^2 < b^2 \quad o$$

$$a \geq b \rightarrow a^2 \geq b^2 \quad o \quad a \leq b \rightarrow a^2 \leq b^2$$

Si los miembros de una inecuación tienen el mismo signo, los inversos de los términos de la inecuación cambian de sentido en la inecuación

$$si\ a > b > 0 \;\rightarrow\; \frac{1}{a} < \frac{1}{b} \quad o \quad si\ a < b < 0 \;\rightarrow\; \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$

$$Si\ a \geq b \geq 0 \;\rightarrow\; \frac{1}{a} \leq \frac{1}{b} \quad o \quad si\ a \leq b \leq 0 \;\rightarrow\; \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$$

INECUACIONES DE PRIMER GRADO

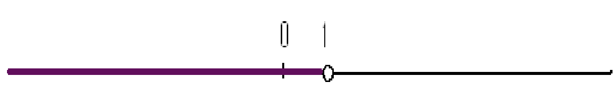
Estas propiedades permiten establecer una inecuación más simple que indica el intervalo solución o valores que satisfacen la inecuación por ejemplo:

$$-5x + 3 > 8 \quad sumando -3\ queda \quad -5x > 5 \quad al\ dividir\ en -5\ queda\ \ x < -1$$

Se exponen en este ejercicio las propiedades que permiten solucionar una inecuación, quedando como solución

a. El conjunto $\{x /\ x \in R\ y\ x < 1\}$

b. Como el intervalo $(-\infty, 1)$

c. O en la forma gráfica 

Lo expuesto nos lleva a indicar cuatro formas de especificarse el intervalo

Intervalo abierto (a,b)

Intervalo cerrado [a,b]

Intervalo abierto cerrado (a,b]

Intervalo cerrado abierto [a,b)

El manejo de los intervalos, varía de acuerdo a los valores, razón por la cual se amplía su comprensión en la medida que se trabajan los contenidos.

La inecuación que se desarrolló anteriormente es una inecuación lineal. Se conservan las mismas características de las ecuaciones lineales y el proceso de solución es similar.

Examinemos este ejemplo.

$3x - 2 \leq 2x - 8$ aplicar el inverso aditivo de 2x quedando

$3x - 2x - 2 \leq 2x - 2x - 8$ operando las expresiones con variables

$x - 2 \leq -8$ aplicando el inverso aditivo de -2 queda

$x - 2 + 2 \leq -8 + 2$ operando las expresiones constantes

$x \leq -6$ por tanto

El intervalo es $(-\infty, -6]$

El gráfico es

Examinemos otro ejemplo $\frac{x}{6} + \frac{x-1}{9} \geq \frac{5}{8}$ inecuación lineal con coeficientes racionales. Al calcular el mínimo común múltiplo de 6, 9 y 8 que sería 72.

$\frac{x}{6} + \frac{x-1}{9} \geq \frac{5}{8}$ Se multiplica y simplifica la expresión por el m.c.m.

$12x + 8(x-1) \geq 9 * 5$ Operando y rompiendo paréntesis

$12x + 8x - 8 \geq 45$ Sumo términos con la variable

$20x - 8 \geq 45$ Aplicar el inverso aditivo de -8 a ambos lados de la inecuación

$20x - 8 + 8 \geq 45 + 8$ Operando

$20x \geq 53$ Dividiendo todo en 20

$x \geq 53/20$ Queda la desigualdad

El intervalo $\left[\frac{53}{20}, \infty\right) = \left[2\frac{13}{20}, \infty\right)$

Con la gráfica

INECUACIONES POLINÓMICAS CUADRÁTICAS

Frecuentemente se encuentran inecuaciones polinómicas de la forma

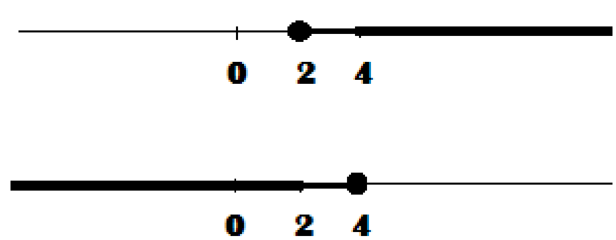
$ax^2 + bx + c >< \leq o \geq 0$

Para solucionar este tipo de expresiones se descomponen el polinomio en factores para desarrollar el procedimiento de inecuaciones de primer grado.

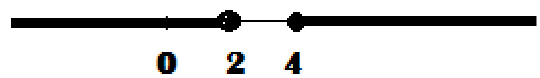
Por ejemplo $x^2 - 6x + 8 \geq 0$ se expresa como $(x-2)(x-4) \geq 0$ se debe cumplir que la multiplicación de dos expresiones sea positiva, entonces los dos términos son positivos o los dos términos son negativos, entonces

$x - 2 \geq 0 \wedge x - 4 \geq 0$		$x \geq 2 \wedge x \geq 4$
$\vee$	al despejar	$\vee$
$x - 2 \leq 0 \wedge x - 4 \leq 0$		$x \leq 2 \wedge x \leq 4$

y la representación gráfica es:



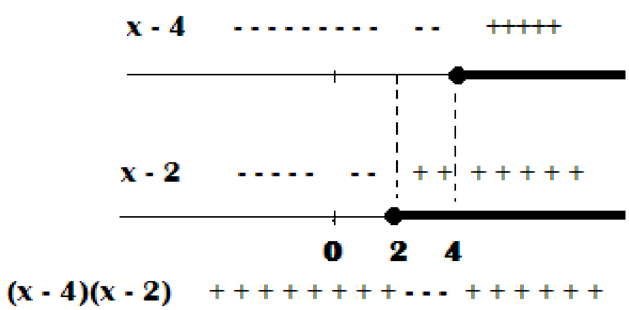
La unión de las dos situaciones lleva al conjunto solución $(-\infty,2] \cup [4,\infty)$ que se representa gráficamente así:



El mecanismo utilizado anteriormente es una alternativa de solución, examinemos otra alternativa con la misma expresión $x^2 - 6x + 8 \geq 0$ se factoriza, $(x-2)(x-4) \geq 0$

Haciendo uso de la propiedad de la igualdad: si a*b = 0 entonces a=0 o b=0 se tiene que:
$x - 2 \geq 0 \quad \rightarrow \quad x \geq 2$ $\qquad$ $x - 4 \geq 0 \quad \rightarrow \quad x \geq 4$

Que se representa gráficamente como:



Se concluye como solución el intervalo $(-\infty,2] \cup [4,\infty)$

INECUACIONES FRACCIONARIAS[1]

Un procedimiento similar a los expuestos anteriormente se aplica para el caso de tener una fracción en uno de los términos de la inecuación. Si los dos términos de la inecuación son fraccionarios se reduce de tal manera que una de las expresiones sea cero. Examinemos el siguiente ejemplo

1- ANSALONI, A. (1985). Matemáticas preuniversitarias. Caracas Venezuela. Editorial reverte.

$\frac{x-3}{x+2} \leq 0$ este ejemplo tiene condiciones especiales por tomar la igualdad situacion que no puede cumplir el denominador por no estar definida la división en cero, además para que el cociente de dos cantidades de negativo (menor que cero) uno debe ser positivo en tanto el otro es negativo.

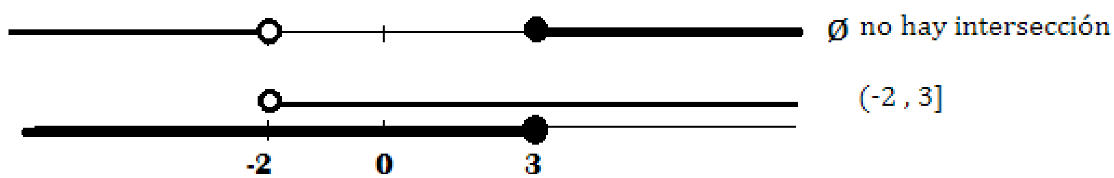
Usando el primer método expuesto se tiene:

$x-3 \geq 0 \wedge x+2 < 0$ $\qquad\qquad$ $x \geq 3 \wedge x < -2$

$\vee$ $\qquad$ al despejar $\qquad$ $\vee$

$x-3 \leq 0 \wedge x+2 > 0$ $\qquad\qquad$ $x \leq 3 \wedge x > -2$

La representación gráfica es:



La unión de los intervalos define la solución quedando (-2,3]

RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE INECUACIONES CON UNA INCOGNITA[2]

Un sistema de inecuaciones con una incógnita no es más que un conjunto de dos o más inecuaciones que satisfacen los mismos valores de las incógnitas, siendo estos los valores solución del sistema.

Por esto, solucionar un sistema de inecuaciones nxn se trata de hallar el valor de las incógnitas que satisfacen las inecuaciones, para lo cual se soluciona por separado cada una de las inecuaciones, se representa las soluciones de cada inecuación en una misma recta real y se determina los elementos comunes a las inecuaciones como solución del sistema. Examinemos el siguiente ejemplo: solucionar la inecuación compuesta

$$-5 \leq 3x + 4 < 7$$

Esta expresión equivale a decir $\begin{cases} -5 \leq 3x+4 \\ 3x+4 < 7 \end{cases}$

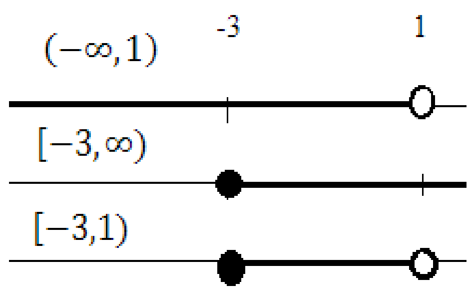
2- MEGIA, F & OTROS. (2005). Matemáticas previas al cálculo. Medellín Colombia. Sello editorial.

De la expresión $-5 \leq 3x + 4$ se obtiene que $-3 \leq x$ la solución $[-3, \infty)$ y

De la expresión $3x + 4 < 7$ se obtiene que $x < 1$ la solución es $(-\infty, 1)$

Por tanto para determinar los puntos comunes

se determina la intersección o sea



$(-\infty, 1) \cap [-3, \infty) = [-3,1) \;\; o \;\; -3 \leq x < 1$

Gráficamente se tiene para su solución

INECUACIONES DE PRIMER GRADO CON DOS INCOGNITAS[3]

Un sistema de inecuaciones de primer grado con dos incógnitas es cualquier inecuación equivalente a:

$ax + by + c < 0; \quad ax + by + c \leq 0; \quad ax + by + c > 0; \quad ax + by\, c \geq 0$

En este caso, las soluciones son conjuntos de pares de números, razón por la cual no se puede representar sobre una línea recta, sino por un subconjunto del plano cartesiano. Es importante recordar que la ecuación general de una recta es

ax + by + c =0 información que se utiliza para resolver las inecuaciones de primer grado con dos variables.

Resolución gráfica

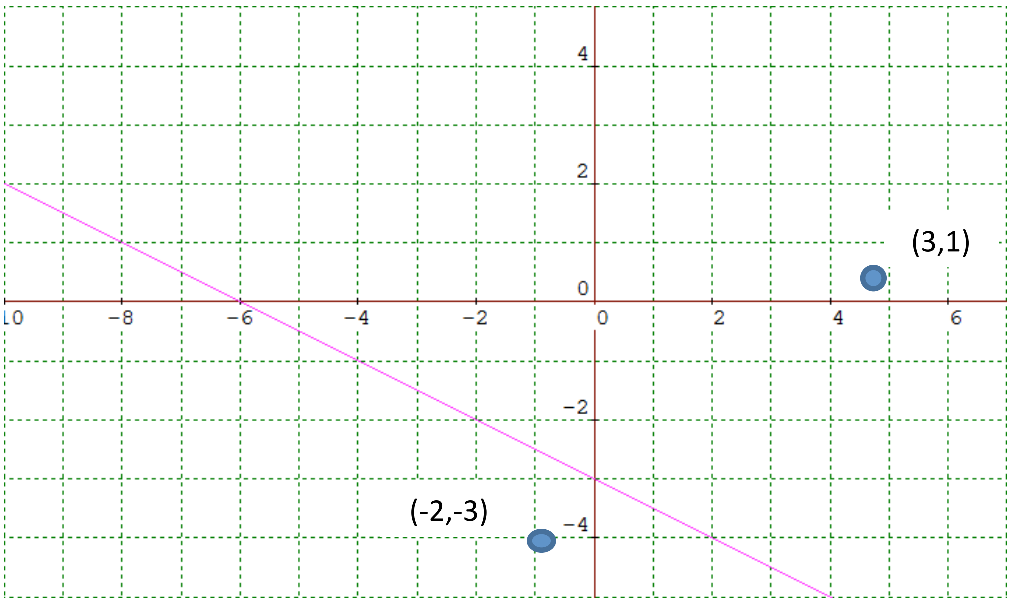
Como se planteó anteriormente, la solución de una inecuación de dos variables son parejas de números de la forma (x_o, y_o), donde al dar valores a las incógnitas satisfacen la inecuación.

Para resolver una inecuación de este tipo, se realiza la recta, se selecciona un puto que no está sobre la recta y se comprueba si al tomar el punto, que posee unas determinadas coordenadas,

3- GONZALES, C & OTROS. (2010). Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales. Madrid, España. Ed, editex.

satisface las condiciones de la inecuación, si es así el punto está en la zona solución o que satisface la inecuación, si no es así el punto está en la zona de valores que no satisfacen la inecuación.

Por ejemplo solucionar la inecuación x + 2y + 6 >0 se escribe la expresión de la forma x+2y+6=0 al despejar y tenemos y = - x/2 – 3 y los puntos de corte a los ejes son (0,-3) y (-6,0).



4

Seleccionado el punto (3,1) y reemplazado los valores en la inecuación x + 2y + 6 >0 se tiene 3+2*1 +6 = 11 > 0

En tanto en el intervalo (-2,-3), al reemplazar los valores en la inecuación x + 2y + 6 >0 se tiene -2 – 2 * (-3) + 6 = - 2 < 0

4- Gráfica de y = - x/2 – 3 elaborada con el software Graphmatica.

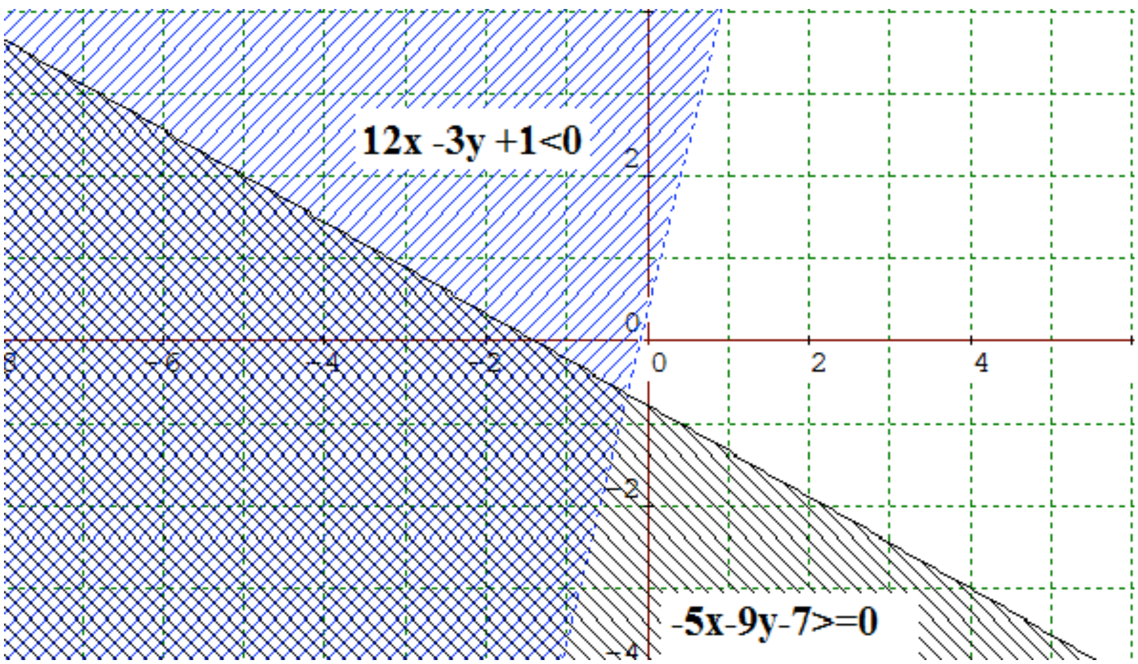
SISTEMAS DE INECUACIONES DE PRIMER GRADO CON DOS INCOGNITAS

Un sistema de inecuaciones de primer grado con dos incógnitas es un conjunto formado por dos o más inecuaciones de primer grado donde estas contienen dos incógnitas.

De la misma manera, como en el sistema con una incógnita, se resuelven las inecuaciones por separado y se determina la intersección de las soluciones de las inecuaciones como una sola solución. Por ejemplo la solución del sistema

$$12x - 3y + 1 < 0$$
$$-5x - 9y - 7 \geq 0$$

Está conformado por los puntos sobre el plano cartesiano resultantes de la intersección entre las soluciones de las dos inecuaciones que se definen en la siguiente gráfica.



Se establece como solución los puntos del plano localizados a la izquierda estrictamente de la gráfica 12 x – 3y + 1 =0 y abajo e incluidos en la recta -5x-9y-7=0

INECUACIONES DE SEGUNDO GRADO CON DOS INCOGNITAS

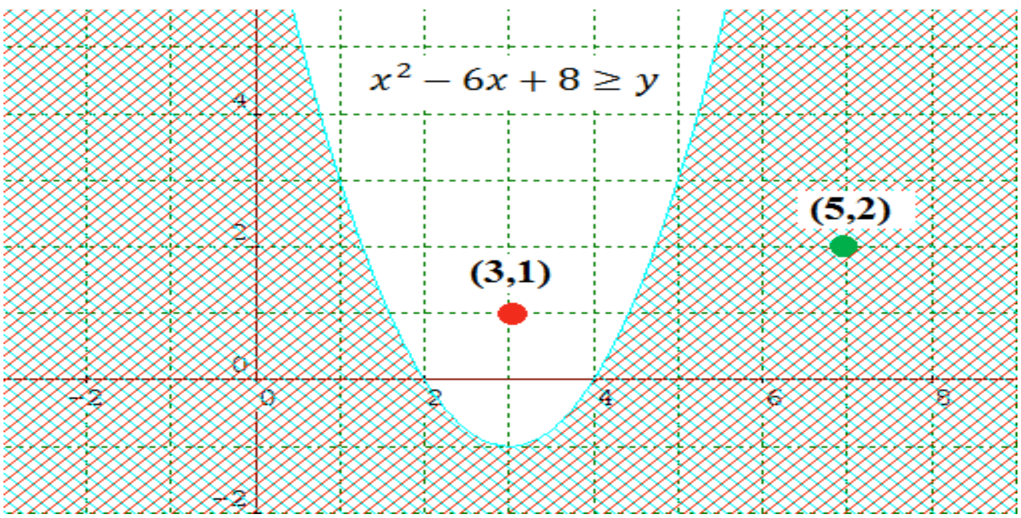
Al considerar la solución de una inecuación cuadrática con dos ecuación se determina la solución de la expresión como si fuera ecuación $ax^2 + bx + c = y$ se define un punto (x_o, y_0) en la parte superior y en la parte inferior de la gráfica, se identifica si el valor satisface la inecuación o no y se define el o los intervalos de puntos que la satisfacen.

Es de anotar que las inecuaciones que comparten la igualdad hacen que se tomen como solución los puntos de la recta, en tanto si no toma la igualdad se aproxima pero nunca estos puntos forman parte de la solución.

Por ejemplo para solucionar la inecuación $x^2 - 6x + 8 \geq y$, se determinan la gráfica de la curva y se han tomado los puntos (5,2) y (3,1) fuera y dentro de la gráfica. Al calcular los valores por (5,2) quedad

$x^2 - 6x + 8 \geq y \quad 5^2 - 6 * 5 + 8 \ \geq 2$ situación que satisface la expresión por ser $3 \geq 2$ en tanto

$x^2 - 6x + 8 \geq y \quad 3^2 - 6 * 3 + 8 \ \geq 2$ situación que no satisface la expresión por ser $1 \ngeq 2$ entonces los puntos en esta zona no satisfacen la inecuación



INECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO Y UNA SOLA VARIABLE.

Para establecer la solución de una inecuación con valor absoluto, es importante relacionar las propiedades

1. $|a| < b \text{ equivale a } \quad -b \ < a < b$

2. $|a| \leq b$ *equivale a* $\;-b \leq a \leq b$

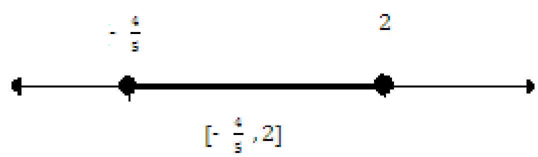
3. $|a| > b$ *equivale a* $\;a < -b\;$ *o* $\;a > b$

4. $|a| \geq b$ *equivale a* $\;a \leq -b\;$ *o* $\;a \geq b$

Examinemos el siguiente ejemplo

$|3 - 5x| \leq 7$

Al examinar se identifica la propiedad 3, quedando: $-7 \leq 3 - 5x \leq 7$ al sumar todo por -3 se obtiene $-7 - 3 \leq 3 - 3 - 5x \leq 7 - 3$ $\quad -10 \leq -5x \leq 4$ al dividir todo en -5 se obtiene $2 \geq x \geq -\frac{4}{5}$ siendo la solución los valores contenidos en el intervalo $[-\frac{4}{5}, 2]$ que gráficamente es



6.3.1 Ejemplos, ejercicios o casos de aplicación práctica.

Solucionar la inecuación $\frac{3x}{4} - 10 > 8$

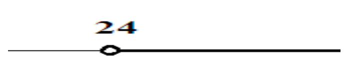
$\frac{3x}{4} - 10 > 8$ multiplico las expresiones por 4

$3x - 40 > 32$ sumando los miembros de la desigualdad por 40 queda

$3x - 40 + 40 > 32 + 40$ realizando la suma

$3x > 72$ dividiendo en 3 queda

$x > 24$ conjunto solución $(24, \infty)$



Solucionar la inecuación $\frac{13}{4} > \frac{x+3}{x-2} > \frac{1}{4}$

$\frac{13}{4} > \frac{x+3}{x-2} > \frac{1}{4}$ se separan las dos inecuaciones

$\frac{13}{4} > \frac{x+3}{x-2}$ se determina y multiplica por el mínimo común múltiplo 4(x-2)

$\frac{13(4(x-2))}{4} > \frac{(x+3)(4(x-2))}{x-2}$ al simplificar queda

$13(x-2) > 4(x+3)$ al aplicar la distributiva queda

$13x - 26 > 4x + 12$ agrupando términos

$13x - 4x > 12 + 26$ sumando

$9x > 38$ dividiendo en 9

$x > \frac{38}{9}$ conjunto solución de esta parte $(\frac{38}{9}, \infty)$

La segunda pate

$\frac{x+3}{x-2} > \frac{1}{4}$ se determina y multiplica por el mínimo común múltiplo 4(x-2)

$\frac{(x+3)(4(x-2))}{x-2} > \frac{1*4(x-2)}{4}$ al simplificar queda

$4(x+3) >$ x-2 al aplicar la distributiva queda

$4x + 12 > x$-2 agrupando términos

$4x - x > -12 - 2$ sumando

$3x > -14$ dividiendo en 3

$x > -14/3$ conjunto solución de esta parte $(-\frac{14}{3}, \infty)$

Al calcular las dos partes se determina la intersección de los dos intervalos

$$\left(\frac{38}{9}, \infty\right) \cap \left(-\frac{14}{3}, \infty\right) = (\frac{38}{9}, \infty)$$

Solucionar la inecuación $x^2 + 7x + 10 \leq 0$

$x^2 + 7x + 10 \leq 0$ factorizando la expresión

$(x + 5)(x + 2) \leq 0$ para que a* b sea negativo se dan que a>0 y b<0 o a<0 y b>0

$x + 5 \geq 0 \wedge x + 2 \leq 0$ $\qquad\qquad$ $x \geq -5 \wedge x \leq -2$

$\vee$ $\qquad$ al despejar $\qquad$ $\vee$

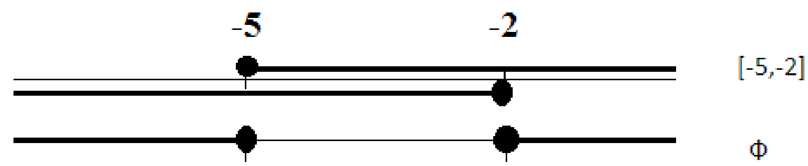
$x + 5 \leq 0 \wedge x + 2 \geq 0$ $\qquad\qquad$ $x \leq -5 \wedge x \geq -2$

La representación gráfica

$x \geq -5 \wedge x \leq -2$

$\vee$

$x \leq -5 \wedge x \geq -2$



Solucionar la inecuación $-3 \leq \frac{x-2}{x+2} < 5$

$-3 \leq \frac{x-2}{x+2} < 5$ separo las inecuaciones y desarrollo la de la izquierda así:

$-3 \leq \frac{x-2}{x+2}$ se multiplican los términos por x + 2

$-3(x + 2) \leq \frac{(x-2)(x+2)}{x+2}$ al simplificar y multiplicar queda

$-3x - 6 \leq x - 2$ agrupando y sumando

$-4 \leq 4x$ dividiendo en 4

$-1 \leq x$ el conjunto solución parcial $[-1, \infty)$

De la segunda parte de la inecuación

$\frac{x-2}{x+2} < 5$ se multiplica los dos términos por x+2

$\frac{(x-2)(x+2)}{x+2} < 5(x + 2)$ simplificando y multiplicando

$x - 2 < 5x + 10$ agrupando y sumando

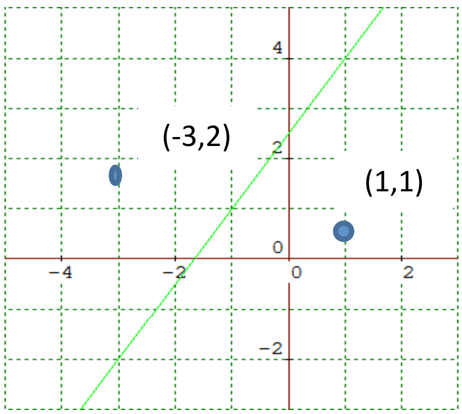
$-12 < 4x$ dividiendo en 4

$-3 < x$ el conjunto solución parcial $(-3, \infty)$ 

Solucionar el sistema de inecuaciones

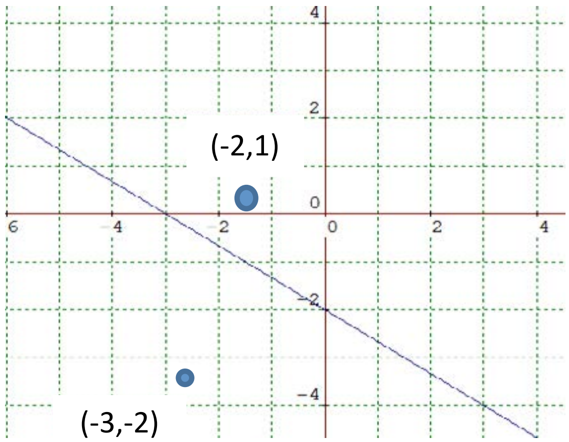
(1) $\quad 3x - 2y + 5 \leq 0$
(2) $\quad -2x - 3y - 6 > 0$

De la expresión 1 se tiene que $y = \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$ que es la ecuación de la recta que pasa por $\left(0, \frac{5}{2}\right)$ y $\left(-\frac{5}{3}, 0\right)$ como se muestra en la siguiente gráfica

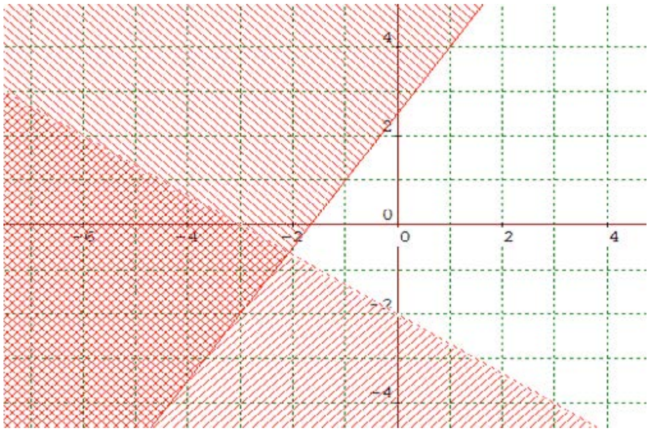


Al reemplazar el punto (1,1) no se satisface la inecuación. En tanto al reemplazar por (-3,2) el valor satisface la inecuación indicando que los puntos solución son los que están sobre la recta y en la parte superior de la misma.

Al graficar la expresión 2 que se puede expresar como $y = -\frac{2x}{3} - 2$ que pasa por los puntos $(0,-2)$ y $(-3,0)$ es:



Al evaluar la inecuación en el punto (-2,1) los valores no la satisfacen, en tanto los valores del punto (-3,-2) si la satisfacen, entonces los valores que satisfacen la inecuación son los que están bajo la recta $y = -\frac{2x}{3} - 2$. La intersección de las dos expresiones se identifica en la siguiente gráfica.



EJERCICIOS

Determine la solución a las siguientes inecuaciones

1. $2x - 3 > 5$

2. $(x-1)(5-x) < 0$

3. $\dfrac{3}{x} \geq \dfrac{2}{x-1}$

4. $-2 \leq 5 - 7x \leq 4$

5. $\dfrac{-2}{x-3} \geq \dfrac{x}{4-2x}$

6. $\dfrac{5x-2}{2x+1} - 2 > \dfrac{x}{2x+3}$

7. $\dfrac{-3}{x} \leq \dfrac{-5x}{x^2+6}$

8. $(x-1)(x+2)(3-x) \geq 0$

9. $\dfrac{2x}{x-3} \leq \dfrac{3}{x}$

10. $\dfrac{2}{1-3x} \leq \dfrac{5}{x}$

11. $|1+3x| \leq 5$

12. $|-5x-2| \geq 2$

13. $1 + 2\,|3+2x| > 6$

14. $\dfrac{(x-2)(3x+2)}{2x+3} \leq 0$

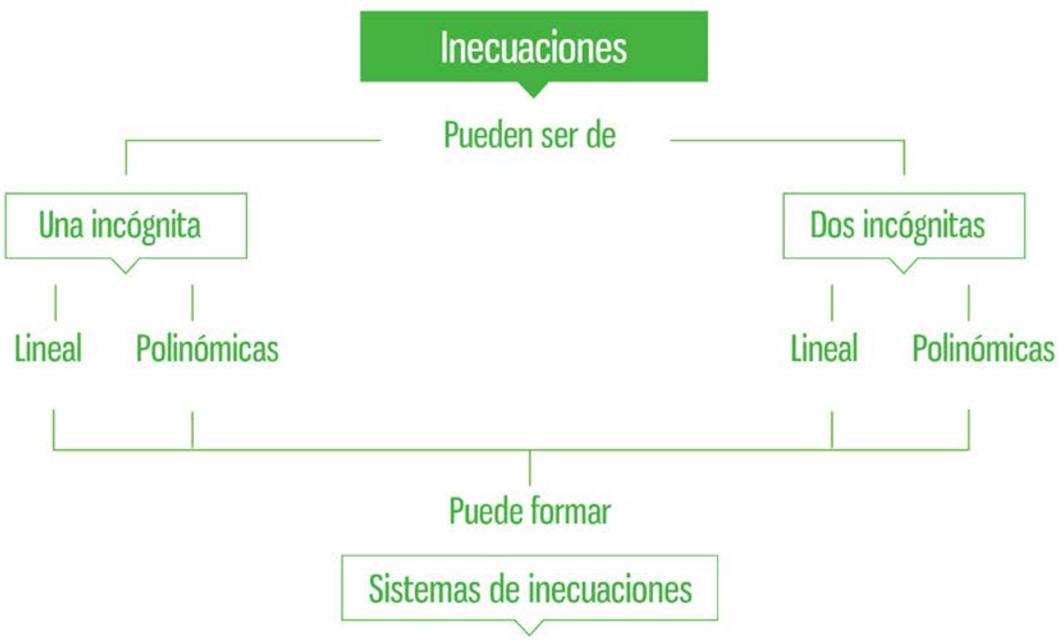
15. $3x + 2y - 12 < 0$

16. $\dfrac{2x}{5} - 3y - 11 > -3$

17. $\begin{cases} 3x - 2\,y - 7 \;\geq 0 \\ \quad x^2 - y - 17 \end{cases}$

18. $\begin{cases} \;x - y + 5 < 0 \\ 3x + 2y - 8 > 0 \end{cases}$

6.3.2 Síntesis de cierre del tema.



6.3.3 Actividades auto-evaluativas propuestas al estudiante.

1. $2x + 5 > 8$
2. $(x+2)(6+x) < 0$
3. $\frac{8}{x} \geq \frac{5}{x+1}$
4. $-6 \leq 5 + 5x \leq 7$
5. $\frac{4}{x+3} \geq \frac{2x}{-4+2x}$
6. $\frac{x+3}{2x-2} - 6 > \frac{2x}{3x-43}$
7. $\frac{5}{x} \leq \frac{-4x}{x^2-8}$
8. $(x+2)(x-3)(3+x) \geq 0$
9. $\frac{2x}{x+5} \leq \frac{3}{x-1}$
10. $\frac{2}{1-5x} \leq \frac{5}{x-2}$
11. $|1-4x| \leq 15$
12. $|-5x-4| \geq 2$
13. $5 - 6\,|3x+2| > 6$
14. $\frac{(x+2)(3x+2)}{x-3} \leq 0$
15. $4x - 3y - 12 < 0$
16. $\frac{2x}{3} - 5y - 1 > -3$
17. $\begin{cases} 6x + 3y + 7 \geq 0 \\ x^2 + y + 17 \end{cases}$
18. $\begin{cases} x - 3y - 7 < 0 \\ 4x + 6y - 8 > 0 \end{cases}$

REMISIÓN A FUENTES COMPLEMENTARIAS

ANSALONI, A. (1985). Matemáticas preuniversitarias. Caracas Venezuela. Editorial reverte.

MEGIA, F & OTROS. (2005). Matemáticas previas al cálculo. Medellín Colombia. Sello editorial.

GONZALES, C & OTROS. (2010). Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales. Madrid, España. Ed, editex.

3

UNIDAD

MATEMÁTICAS - SEMANA 5

FUNDACIÓN UNIVERSITARIA
DEL ÁREA ANDINA

Personería Jurídica Res. 22215 Mineducación Dic. 9-83

3

UNIDAD

INTRODUCCIÓN

En esta cartilla se aborda los contenidos relacionados con el concepto de relaciones de expresiones, funciones de variables reales, relaciones entre variables y notaciones de funciones y relaciones.

Las funciones matemáticas aportar herramientas para interpretar situaciones cotidianas, para aprender estos elementos teóricos se deben leer los contenidos del módulo, comprender sus procedimientos y manejar estos contenidos en la aplicación.

METODOLOGÍA

El proceso de aprendizaje académico por medio de la cartilla se desarrolla en tres etapas. La primera hace referencia a la lectura completa del módulo, realizando la respectiva interpretación, análisis y comprensión del contenido. La segunda etapa es el análisis del video y el contenido del mismo. Y la tercera etapa es la aplicación de los contenidos expuestos a situaciones generales, particulares y específicas.

La segunda etapa puede ser retomada cuantas veces quiera, pero tiene un tiempo limitado para adquirir los conocimientos. Recuerde que debe avanzar con las restantes cartillas y con ello los módulos.

MAPA CONCEPTUAL

FUNCIONES

ELEMENTOS DE LA FUNCIÓN REAL

NOTACIÓN
VALORACIÓN
DOMINIO
RECORRIDO
TRASLACIÓN

CLASIFICACIÓN

INYECTIVA
SUPRAYECTIVA
BIYECTIVA
PAR

OPERACIONES

SUMA
RESTA
MULTIPLICACIÓN
DIVISIÓN
COMPOSICIÓN

OBJETIVOS Y COMPETENCIAS

- Comprender el concepto de funciones en los reales

Objetivos

1. Aprender a identificar las características de las funciones en los reales.
2. Relacionar las características de las funciones en los reales.
3. Entender las características de las funciones en los reales.

Competencias

1. Aprende e identifica las características las funciones en los reales.
2. Relaciona las características de las funciones en los reales.
3. Entiende las características de las funciones en los reales.

DESARROLLO TEMÁTICO

COMPONENTE MOTIVACIONAL.

La construcción del concepto de función es muy importante en el desarrollo matemático de cualquier profesional, en especial cuando se trata de áreas del conocimiento como en la que usted está preparándose.

Es de relevante importancia identificar las características de las funciones en los reales para interpretar y comprender sus relaciones.

RECOMENDACIONES ACADÉMICAS

La presente cartilla contiene elementos fundamentales sobre funciones la notación, el cálculo del valor de la función en un determinado elemento de la variable independiente, el dominio, el recorrido o valores que puede tomar la variables independiente y dependiente de la función, la forma como se identifica, desde la ecuación el desplazamiento de gráfica sobre el plano cartesiano, la clasificación de las funciones en inyectiva, biyectiva, suprayectiva, par o impar.

Además de lo expuesto se presentan las operaciones básicas que se desarrollan entre funciones, suma, resta, multiplicación división y composición de funciones. Estos conceptos son fundamentales en la construcción de un pensamiento formal.

COMPETENCIA GENERAL	COMPETENCIA ESPECIFICA
El estudiante aprende a identificar las características de las funciones en los reales.	El estudiante diferencia las características de las funciones en los reales.
El estudiante relaciona las características de las funciones en los reales	El estudiante interpreta las características de las funciones.
El estudiante entiende las características de las funciones en los reales.	El estudiante entiende las características de las funciones reales.

FUNCIONES

Con el fin de iniciar el trabajo con funciones, es necesario presentar el concepto de relación. Se define como relación entre X y Y como un conjunto de pares ordenados, de la forma (x,y), donde x es un elemento del conjunto X ($x \in X$) y, y un elemento del conjunto Y ($y \in Y$).

A partir de la definición se plantea que una función de X a Y es una relación entre X y Y con la propiedad de que si dos pares ordenados tiene el mismo valor de x, entonces tiene el mismo valor de y. $f: X \to Y$

Es así como se asocia a cada elementos de X, que se denomina dominio, un único valor de Y, rango de la función.   Entonces y = f(x)

$\{y \in Y, \exists\ x\ \in X\ tal\ que\ y = f(x)\} = \ \{f(x), con\ x\ \in dom\ f\}$

El punto de coordenadas (x,y) está formado por dos variables, x es la variable independiente, y la variable dependiente (depende del valor asignado a x).

Las funciones se pueden escribir de varias formas, en forma implícita, explicita o en notación de funciones, examinemos el siguiente ejemplo:

$X^3 + 3x - 4y - 5 = 0$	en forma implícita
$y = \frac{1}{4}(x^3 + 3x - 5)$	en forma explicita
$f(x) = \frac{1}{4}(x^3 + 3x - 5)$	notación de funciones

La ecuación es implícita cuando contiene la variable pero no está despejada la variable dependiente que al quedar despejada se denomina ecuación explicita.

NOTACIÓN FUNCIONAL

Una función se denota con una letra f o g o h que se utiliza para nombrar la función, que al escribir f(x) se lee f de x, que significa el valor que toma la función cuando a x se le asigna un determinado valor.

F(x)= 3x + 2, g(x)= $g(x) = 3ln\sqrt[8]{x-6} + 4x^7$

EVALUACIÓN DE UNA FUNCIÓN

Se evalúa una función en un determinado valor cuando se calcula el valor de la función (valor en el rango) cuando se examina en un valor del dominio.

Por ejemplo se evalúa la función , si $f(x) = x^3 - 4$ calcular f(2), f(a), f(a+h), f(a+h)- f(a)

1. $f(2) = 2^3 - 4$

   $f(2)=8-4$

   $f(2)=4$

2. $f(a) = a^3 - 4$
3. $f(a+h) = (a+h)^3 - 4 = a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3 - 4$
4. $f(a+h)-f(a)=(a+h)^3-4-(a^3 - 4) = a3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3 - 4 - a^3 + 4=3a^2h + 3ah^2 + h^3$

FUNCIONES INYECTIVAS, SUPRAYECTIVAS Y BIYECTIVAS

La **función inyectiva** es una función $f: X \to Y$ (uno a uno) si a cada punto del dom f tiene imágenes diferentes

$x_1, x_2 \in dom\ f, x_1 \neq x_2 \to f(x_1) \neq f(x_2)$

En otros términos, f es inyectiva si $\forall\ x, y \in dom\ f, f(x) = f(y) \to x = y$

La **función suprayectiva** es una función $f: X \to Y$ (sobreyectiva) si todo punto de Y es la imagen de un valor de X bajo f

$\forall\ y\ \in Y, \exists x\ \in dom\ f\ tal\ que\ y = f(x)$

Por tanto $f\ es\ suprayectiva\ \leftrightarrow im\ f = Y$

Se puede establecer a partir de la gráfica que f : R ⇒ R es biyectiva si toda recta horizontal corta a su gráfica a lo sumo en un punto y es suprayectiva si toda recta horizontal corta a la gráfica por lo menos en un punto

Ejemplo: La función $f: X \to Y$ definida como f(x) = x^2 no es inyectiva ya que

f(-x)=f(x), para todo x Є R. Tampoco es suprayectiva, porque $im\ f = [0, \infty) \Rightarrow R$definida por g(x)= x^2 si es inyectiva, ya que

$x \geq 0, y \geq 0, x^2 = y^2 \ \rightarrow \ x = y$

Es de anotar que si f y g son diferentes entonces el dom f ≠ dom g por ser el dom g⊂ dom f y f(x) = g(x) para todo x Є dom g a lo que hace referencia la denominada restricción de f al conjunto $[0, \infty)$

Una función $f: X \to Y$ es biyectica si dom X y f es a la vez inyectiva y suprayectiva

Una función $f: X \to Y$ es biyectiva si y solo si es invertible, es decir si y solo si existe $g: Y \to X$

Tal que $g(f(x)) = x \quad \forall x \in X \quad y \quad f(g(x)) = y \ \forall y \in Y$

DOMINIO Y RECORRIDO DE UNA FUNCIÓN

Como se estableció anteriormente el dom f ⊂ X en tanto la ran f ⊂ Y se pueden establecer los elementos de la variable independiente que intervienen en la función y de acuerdo a estos los valores que intervienen en la variable dependiente.

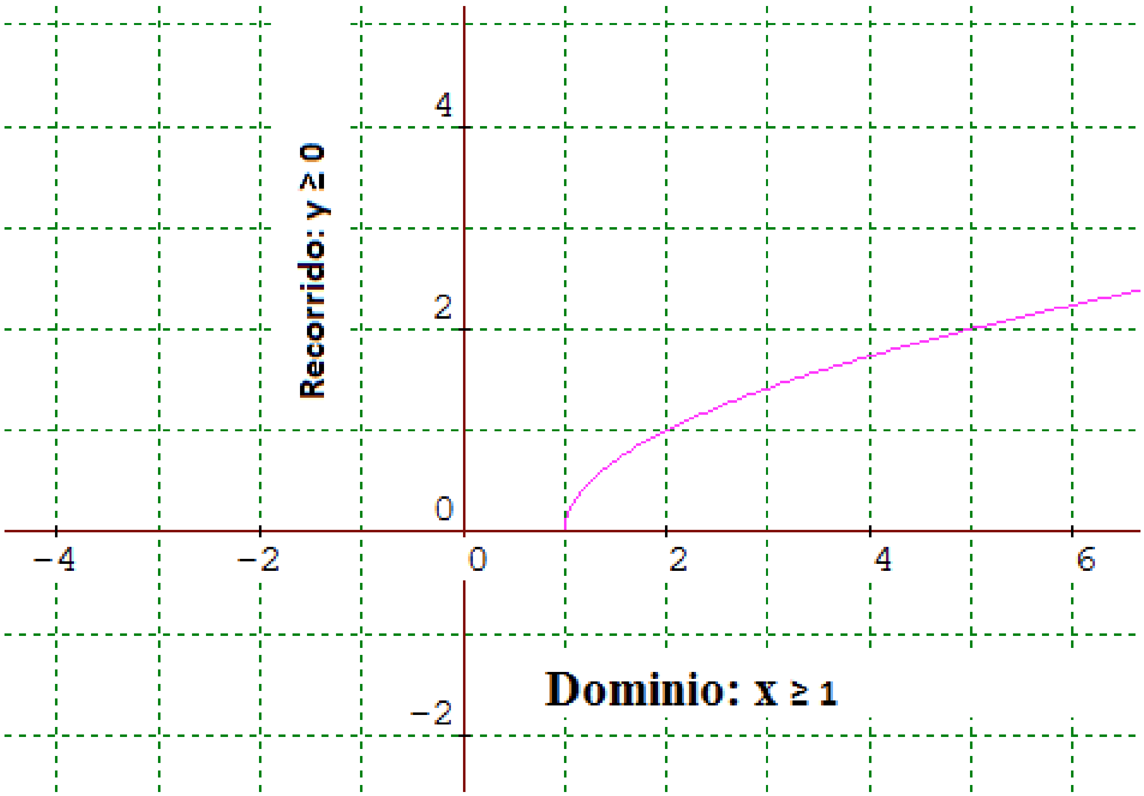
Por ejemplo el dominio y el rango de $f(x) = \sqrt{x-1}$

Por ser una raíz cuadrada la expresión x-1 debe ser mayor que cero entonces

$$x - 1 > 0 \ \ por\ tanto\ x > 1$$

es decir toma los valores $[1, \infty)$ para el dominio o valores de x, mientras para y se tiene que

$\sqrt{x-1} > 0$ siempre es un valor positivo por tanto el recorrido o rango es $[0, \infty)$[1]



DOMINIO DE LA FUNCIÓN COMPUESTA[1]

Una función compuesta puede estar definida por más de una expresión y se puede determinar el dominio y el rango de la misma a partir de la definición misma de la función.

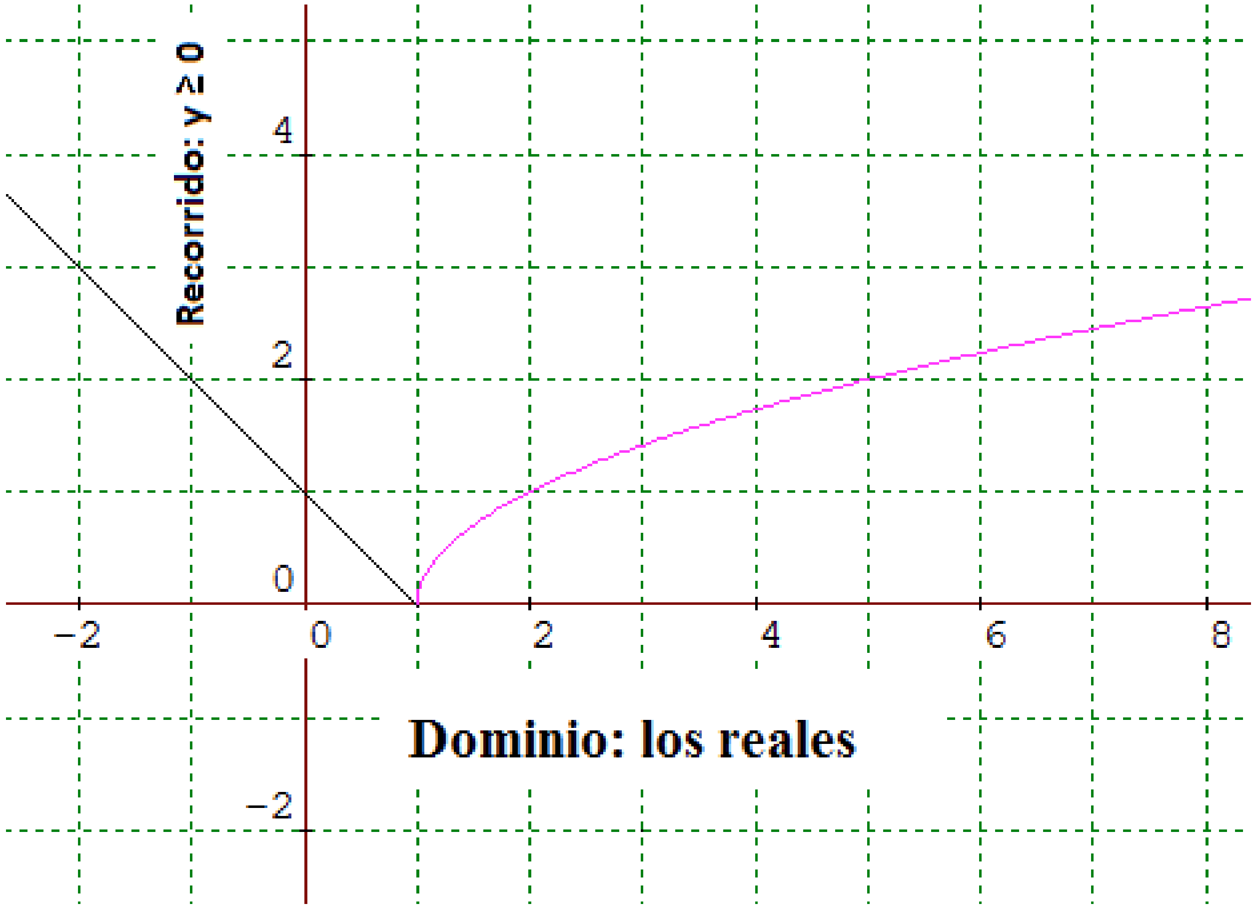
Por ejemplo determinar el dominio y recorrido de la función compuesta

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & si\ x < 1 \\ \sqrt{x-1} & si\ x \geq 1 \end{cases}$$

Examinemos la gráfica vinculada a la función compuesta

1 Grafmatica. Sofware de uso libre.

2 LARSON, R. (2010).Cálculo 1. México, México, D.F.: Mc Graw Hill.



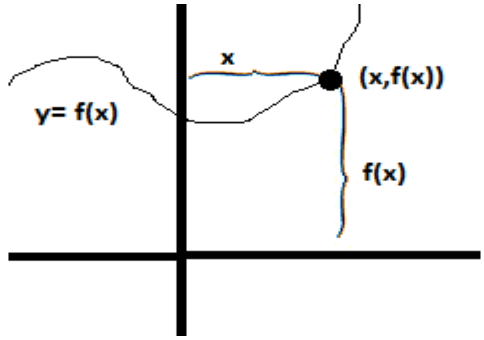
Como la función está definida para $x < 1$ $y\ para\ x \geq 1$ su dominio es todo el conjunto de los números reales. Donde la función es 1-x el rango siempre es positivo por estar definido en el dominio $x < 1$ y para $x \geq 1$ siempre la imagen es positiva se tiene que el recorrido de la función compuesta es $[0, \infty)$.

GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

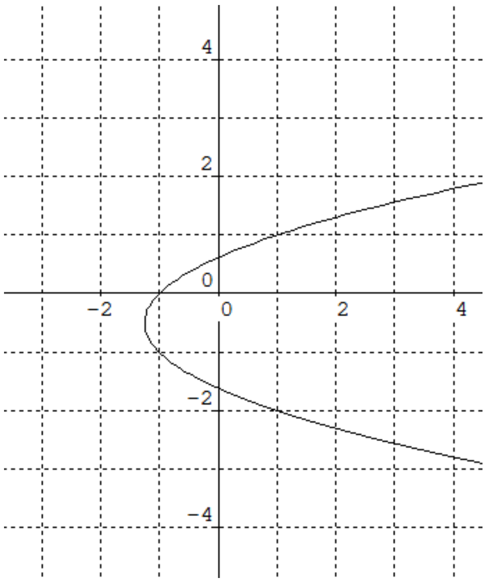
La grafica de toda función y =f(x)está constituida por todos los puntos (x, f(x)), donde x pertenece al dominio, x Є X, y pertenece al recorrido y Є Y.

x = distancia dirigida desde y

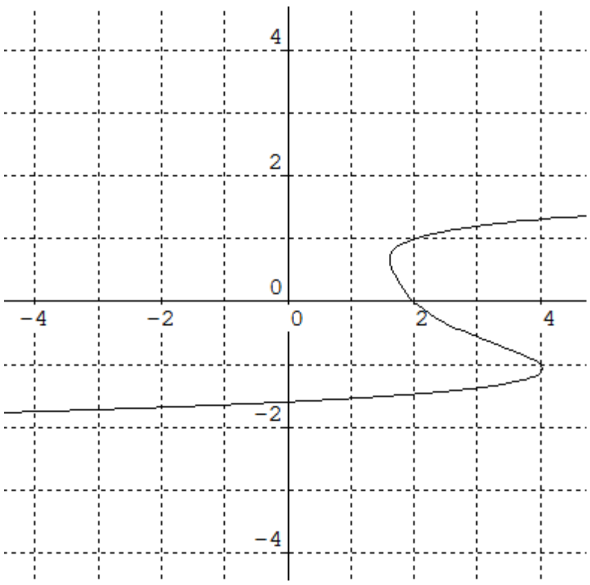
y = f(x) distancia dirigida desde x



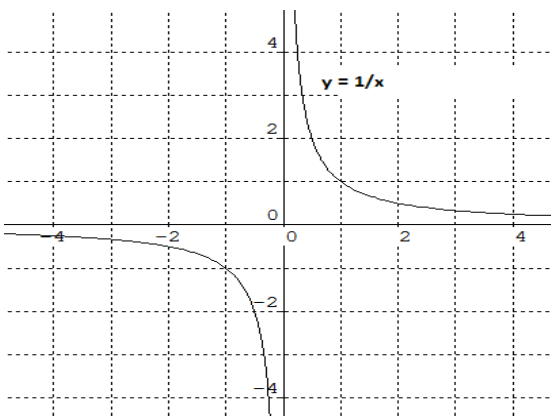
Se cumple que si corresponde a la gráfica de una función, al trazar una recta de manera vertical esta recta solo corta la gráfica de la función en uno y solo un punto a la vez. Esto es lo denominado criterio de la recta vertical para determinar si corresponde a la gráfica de una función. Por tanto se puede observar en los siguientes ejemplos si son o no graficas de una función.



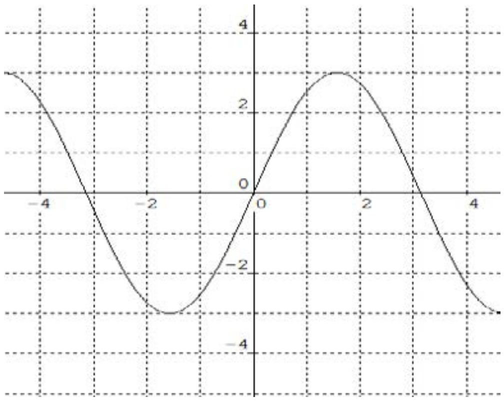
No es función



No es función



Es función



Es función

OPERACIONES CON FUNCIONES

A partir de funciones se pueden construir nuevas funciones por medio de la adición, sustracción, multiplicación y división, por tanto:

Dadas dos funciones f y g se tiene

La suma de funciones, donde $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

La diferencia de funciones, donde $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$

El producto de funciones, donde $(f * g)(x) = f(x) * g(x)$

El cociente de funciones, donde $(f / g)(x) = f(x) / g(x)$ con $g(x) \neq 0$

En cada caso, el dominio de la función es constante de aquellos valores de x comunes a los dominios de las funciones f y g, con el caso adicional de excluir los valores que hacen de $g(x)=0$

Por ejemplo: Al tomar las funciones $f(x) = \frac{x-3}{2}$ $g(x) = \sqrt{x}$

Las cuales tienen como dominio todos los reales y los reales positivos.

Entonces al construir la función $f(x)+g(x)=\frac{x-3}{2}+\sqrt{x}$ el dominio son los valores

comunes de los dos dominios, o la intersección de los dominios:

de $(-\infty,\infty)\cap[0,\infty) = [0,\infty)$ de manera similar se tiene:

$$f(x)+g(x)=\frac{x-3}{2}+\sqrt{x} \qquad [0,\infty)$$

$$f(x)-g(x)=\frac{x-3}{2}-\sqrt{x} \qquad [0,\infty)$$

$$f(x)*g(x)=\frac{x-3}{2}*\sqrt{x} \qquad [0,\infty)$$

$$f(x)/g(x)=\frac{x-3}{2}/\sqrt{x} \qquad (0,\infty)$$

Lo propuesta no es más que la combinación de dos funciones. Existen otra forma de combinar dos funciones que recibe el nombre de composición de funciones.

COMPOSICIÓN DE FUNCIONES[1]

Sea f y g dos funciones. La función definida como (fog)(x) = f(g(x)) se llama función compuesta de f con g, donde el dominio de f o g está formado por el conjunto de todas las x del dominio de g tales que g (x) esté en el dominio de f.

Al establecer (fog)(x) = f(g(x)) puede ocurrir que no sea lo mismo que (gof)(x) = g(f(x)), examinemos el siguiente ejemplo:

Si f(x)= 2x -3 y g(x)=sen x

a. calcular las funciones compuestas f o g y g o f.

b. Comparar las funciones.

1. $(\mathrm{fog})(\mathrm{x})=\mathrm{f}(\mathrm{g}(\mathrm{x}))=2\ (sen\ x)-3$

2. $(\mathrm{gof})(\mathrm{x})=\mathrm{g}(\mathrm{f}(\mathrm{x}))=\ sen\ (2x-3)$

3 PURCELL, E (2007). Cálculo., México, México D.F.: Prentice Hall.

Al comparar las dos composiciones son sus resultados totalmente diferentes. Por tanto

$$(f\ o\ g)(x) \neq (g\ o\ f)(x)$$

FUNCIÓN PAR E IMPAR[4]

Una función es par cuando su gráfica es simétrica con respecto al eje y, por tanto:

La función y = f(x) es par si f(-x) = f(x)

Y la función es impar cuando la gráfica es simétrica con respecto al origen, por tanto

La función y = f(x) es impar si f(-x) = - f(x)

Por ejemplo indicar si la función es par, impar o ninguna de las dos

a. $f(x) = x^3 + x$

b. $g(x) = 1 + \cos x$

Solución

a. La función a, $f(x) = x^3 + x$ es impar, porque:

$$f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -(x^3 - x) = -f(x)$$

b. La función g (x) = 1 + cos x es par, porque

$$g(-x) = 1 + \cos(-x) = 1 + \cos x = g(x)$$

4 LEITHILD, L. (1998). El cálculo. México, México D.F.: Oxford University Press.

TRASLACIÓN DE FUNCIONES[5]

Toda las funciones f(x) se pueden trasladar, sin cambiar de forma, en cualquiera de las direcciones del plano cartesiano, arriba, abajo, a derecha o a izquierda, esto ocurre al sumar o restar un valor cualquiera a la función en posiciones específica. Esto ocurre de la siguiente manera:

Desplazamiento vertical hacia arriba de c unidades de la gráfica cuando se suma a la función un valor $c > 0$. $y = f(x) + c$

Esto es: si $y = f(x)$ y se quiere desplazar para arriba 3 unidades queda $y = f(x)+3$

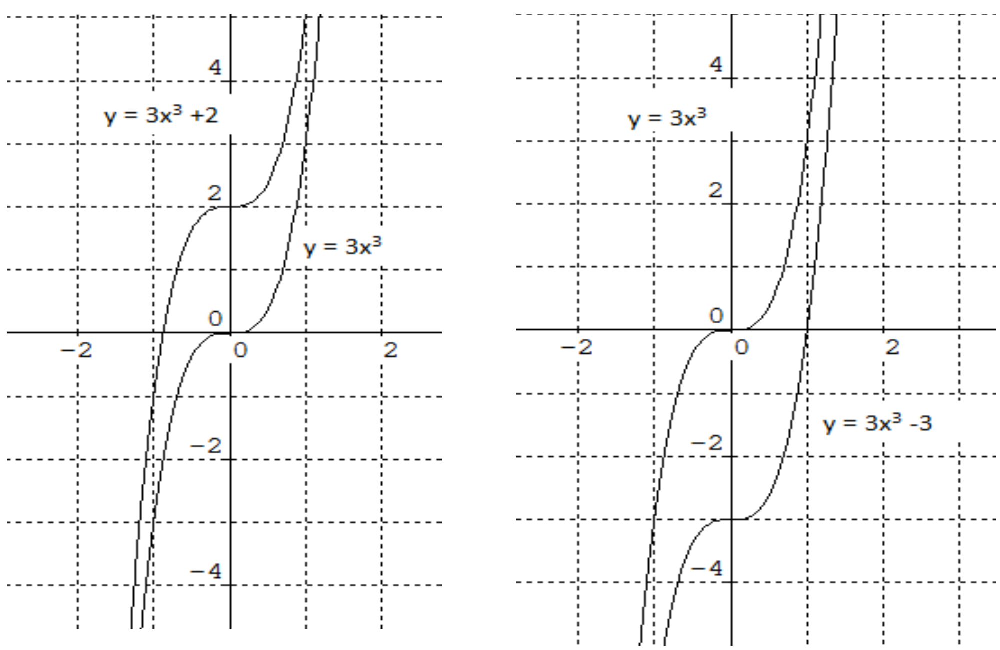
Desplazamiento vertical hacia debajo de c unidades de la gráfica cuando se suma a la función un valor $c < 0$. $y = f(x) + c$

Esto es: si $y = f(x)$ y se quiere desplazar para abajo 3 unidades queda $y = f(x)-3$

Por ejemplo si $y = 3x^3$ y se quieres desplazar 2 unidades para arriba la función queda ahora $y = 3x^3 + 2$.

Y si quieres desplazar 3 unidades para abajo la función queda ahora

$y= 3x^3-3$.Comparemos las dos gráficas.



5 SWOKOWSKI, E. (1988). Cálculo con geometría analítica. México, México D.F. : Grupo editorial Iberoamericana

El desplazamiento horizontal hacia la derecha, c unidades de la gráfica, se produce cuando se determina la resta de un valor c en la función, así:

Si y =f(x) se desplaza a la izquierda c unidades al graficar y = f(x-c)

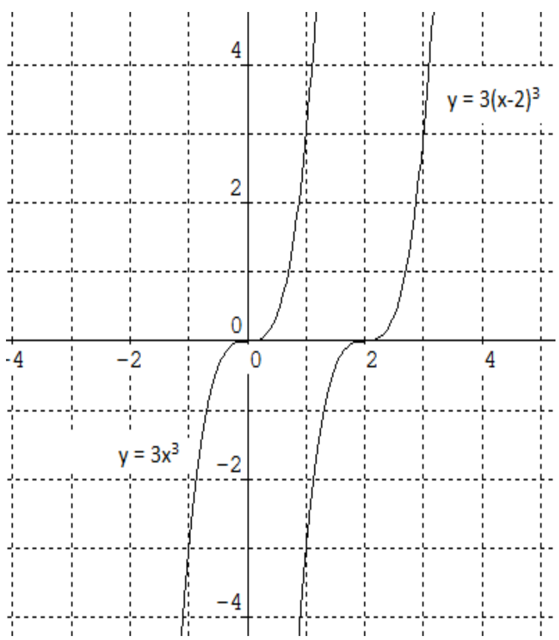
El desplazamiento horizontal hacia la izquierda, c unidades de la gráfica, se produce cuando se determina la suma de un valor c en la función, así:

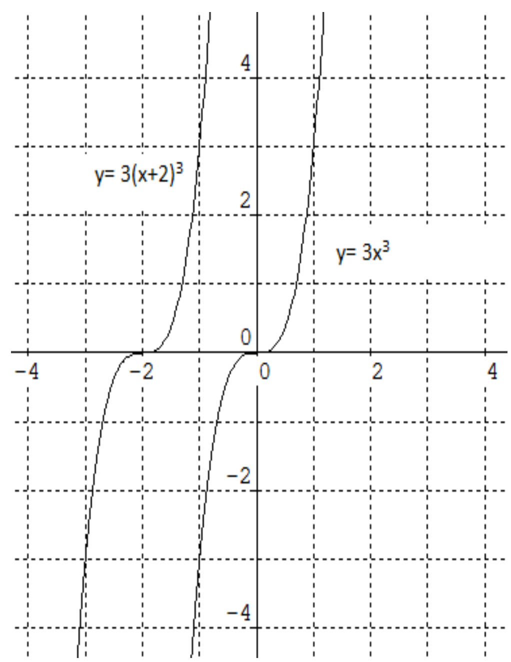
Si y =f(x) se desplaza a la izquierda c unidades al graficar y = f(x+c)

Por ejemplo si y = 3x3 y se quieres desplazar 2 unidades para la derecha la función queda ahora y = 3(x-2)3

Y si quieres desplazar 2 unidades para izquierda la función queda ahora

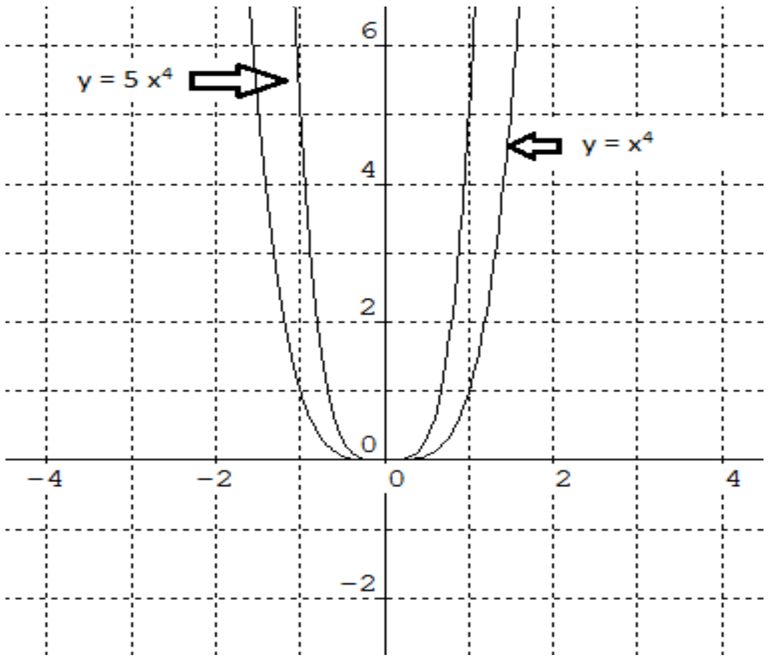
y= 3(x+2)3. Comparemos las dos gráficas.





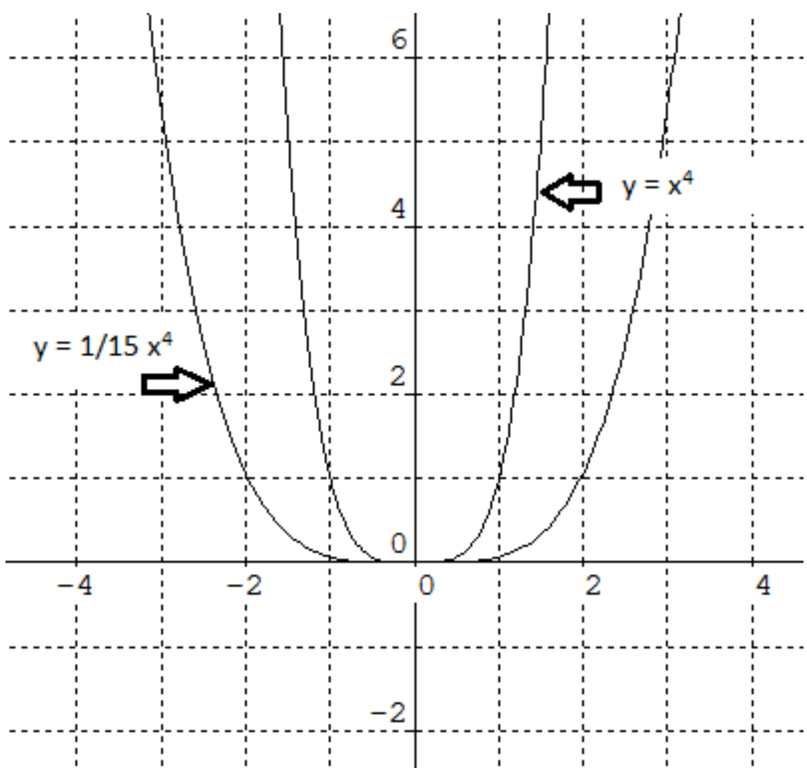
La gráfica puede acercarse al eje y en la medida que se multiplica la función por valor c cada vez más grande, entonces si y = f (x) la gráfica de la función se aproxima al eje y al graficar y = cf(x)

Por ejemplo si y = x^4 y se multiplica la función por 5 la gráfica de función se aproxima al eje vertical así:

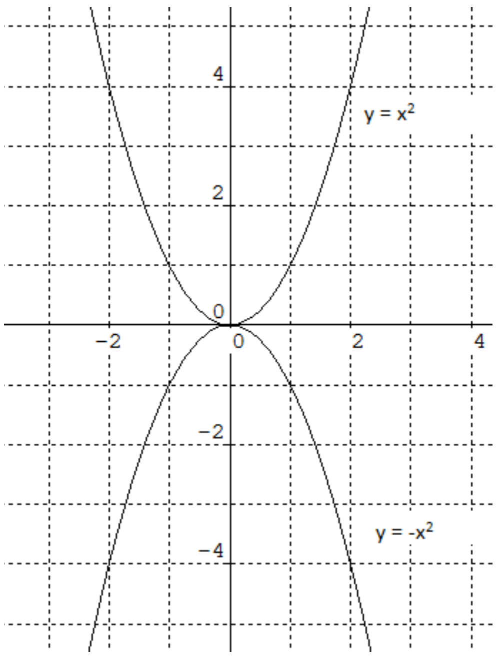


La gráfica puede alejarse del eje y en la medida que se multiplica la función por valor $0<c<1$, entonces si $y = f(x)$ la gráfica de la función se aleja del eje y al graficar $y = cf(x)$

Por ejemplo si $y = x^4$ y se multiplica la función por 1/15 la gráfica de función se aleja eje vertical así:



Si se observa detenidamente todas las gráficas presentadas hasta el momento son positivas en el momento que la función y = f(x) se multiplica por un valor negativo, la función cambia su concavidad, por ejemplo si a $y = x^2$ se multiplica por (-1) se produce el siguiente cambio.



EJEMPLOS, EJERCICIOS O CASOS DE APLICACIÓN PRÁCTICA

EJEMPLOS

1. Escriba la función de las maneras que faltan en la siguiente tabla

Situación	IMPLÍCITA	EXPLICITA	DE FUNCION
1	4X-7Y +11 =0		
2		$y = \sqrt{3X^2+5} - 6$	
3			$f(x) = 3\sqrt[5]{3x+23}$

A partir de la situación

1. 4X-7Y +11 =0 de manera explícita queda y = 4/7 x + 11/7 y como función f(x) = 4/7 x + 11/7.

De la situación 2, $y = \pm\sqrt{3X^2+5} - 6$ de manera implícita puede expresarse de la siguien

te manera $(y+6)^2 - 3x^2 - 5 = 0$ y como función $f(x) = \pm\sqrt{3X^2+5} - 6$

Y la tercera, propuesta como función se puede escribir de manera explícita como

$y = 3\sqrt[5]{3x+23}$ y de manera implícita como $243y^5 - 3x - 23 = 0$

2. Dada la función $y = x^3 - 5x^2 - 3x + 6$ hallar a. f(0), b.f(3), c. f(x-h),

$f(x) = y = x^3 - 5x^2 - 3x + 6$ entonces

$f(0) = 0^3 - 5*0^2 - 3*0 + 6 = 6$

$f(3) = 3^3 - 5*3^2 - 3*3 + 6 = 27-45-9+6 = -21$

$f(x-h) = (x-h)^3 - 5(x-h)^2 - 3(x-h) + 6$

$f(x-h) = x^3 - 3x^2h + 3xh^2 - h^3 - 5(x^3 - 2xh + h^2) - 3x + 3h + 6$

$f(x-h) = x^3 - 3x^2h + 3xh^2 - h^3 - 5x^3 + 10xh - 5h^2 - 3x + 3h + 6$

$f(x-h) = -3x^2h + 3xh^2 - h^3 - 4x^3 + 10xh - 5h^2 - 3x + 3h + 6$

3. Sea $h: R \to R$ la funcion definida para todo $x \in R$ por $h(x) = x^2 - x$ determinar si la

función es biyectiva.

Para determinar si la función $h(x) = x^2 - x$ es biyectiva se requiere comprobar que la ecuac

ión en al despejar x en función de y tiene una solución única para todos los valores de $y \in R$

(esto es para cada y la solución de esta ecuación corresponde a $h^{-1}\ (y)$).

$x^2 - x = y$ completo el trinomio cuadrado perfecto

$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = y + \frac{1}{4}$ la ecuación tiene solución si y solo si $y \geq -\frac{1}{4}$ por tanto, la $im\ h = [-\frac{1}{4}, \infty)$

y para $y > -\frac{1}{4}$ se tienen dos soluciones distintas así: $x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{y + \frac{1}{4}}$

Una de las soluciones es mayor que ½ y la otra menor que ½ lo que permite concluir que la función h no es ni inyetiva ni biyetiva.

Pero la función $f: [\frac{1}{2}, \infty) \rightarrow [-\frac{1}{4}. \infty)$ definida en $f(x) = x^2 - x$ es invertible siendo su in

versa la función definida por $f^{-1}(y) = \frac{1}{2} \pm \sqrt{y + \frac{1}{4}}$

4. Determinar el dominio y el recorrido de la función definida como $g(x) = \sqrt{x(x-3)}$

Como $\sqrt{x(x-3)}$ no es un número real cuando $x(x-3) < 0$ el dominio de la función se

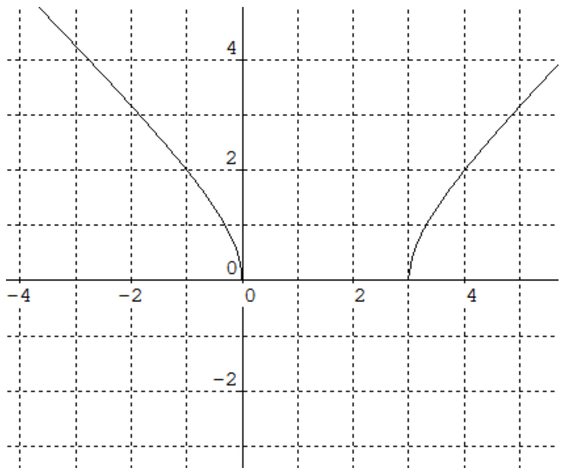
constituye por los valores de x para los cuales $x(x-3) \geq 0$ desigualdad que se satisface cuan

do $x \geq 0\ y\ \ x - 3\ \geq 0\ \ \ o\ \ x\ \leq 0\ \ y\ \ x - 3\ \leq 0$

$x \geq 0\ \ y\ \ x - 3\ \geq 0$	$x \geq 0\ \ y\ \ x\ \geq 3$	$[3, \infty)$
$\vee$	$\vee$	$\vee$
$x\ \leq 0\ \ y\ \ x - 3\ \leq 0$	$x\ \leq 0\ \ y\ \ x \leq 3$	$(\infty, 0]$

Por tanto el dominio de $g(x) = \sqrt{x(x-3)}$ esta dado por $(\infty, 0] \ \cup \ [3, \infty)$

Al calcular la función para los valores en cada uno de los intervalos, se observa que la imagen de la función está definida desde cero hasta infinito, por tanto el recorrido está definido en $[0, \infty)$. Esto se puede comprobar en la gráfica.



5. Evaluar la función $f(x) = 5x - 3$ en los valores dados

a. f(0)

b. f(-3)

c. f(b)

d. f(x-1)

Solución:

a. $f(x) = 5x - 3 \qquad f(0) = 5 * 0 - 3 = 3$

b. $f(x) = 5x - 3 \qquad f(-3) = 5\ (-3) - 3 = \ -15 - 3 = \ -18$

c. $f(x) = 5x - 3 \qquad f(b) = \ \ 5 * b - 3 = 5b - 3$

d. $f(x) = 5x - 3 \qquad f(x-1) = 5(x-1) - 3 = \ \ 5x - 5 - 3 = 5x - 8$

6. Si f(x) = 3x + 1 , g(x) = 2x2 – 3x, h(x)= x – 3 $\sqrt{x-1}$ calcular y simplificar.

a. f (x) + g(x)- 3 h(x)

b. 2g(x)-5 h(x)

c. g(x)/h

d. (g o h)(x)

Solución

a. f (x) + g(x)- 3 h(x) = 3x + 1+2x^2 – 3x –3(x – 3 $\sqrt{x-1}$) = 1+2x^2 –3 x+9 $\sqrt{x-1}$)

b. 2g(x)-5 h(x)= 2(2x^2 – 3x)- 5(x – 3 $\sqrt{x-1}$) = 4x^2 – 6x- 5x + 15 $\sqrt{x-1}$ = 4x^2 – 11x + 15 $\sqrt{x-1}$

c. g(x)/h = (2x^2 – 3x)/ (3x + 1) = $\frac{2}{3}x - \frac{11}{9} + \frac{11/9}{3x+1}$

d. (g o h)(x) = g(h(x)) = 2(x – 3 $\sqrt{x-1}$)^2 – 3(x – 3 $\sqrt{x-1}$)

2(x^2 – 6 x$\sqrt{x-1}$ + x-1)- 3x + 9 $\sqrt{x-1}$ = 2x^2 – 12 x$\sqrt{x-1}$ + 2x-2-3x + 9$\sqrt{x-1}$

2x^2 –x-2 – 12 x$\sqrt{x-1}$ +9$\sqrt{x-1}$ = 2x^2 –x-2 +(9 – 12 x)$\sqrt{x-1}$

7. Determine si la función f es par o impar

a. $f(x) = 3x^3 - 4\,x$

b. $f(x) = 9 - 5x^2$

Solución

a. $f(x) = 3x^3 - 4\,x$

Si x es un número real, entonces

$f(-x) = 3(-x)^3 - 4(\,-x) = \;-3x^3 + 4\,x \;=\; -(3x^3 - 4\,x) = \;-f(x)$

Por lo tanto f(x) es impar

b. $f(x) = 9 - 5x^2$ Si x es un número real

c. $f(-x) = 9 - 5(-x)^2 = 9 - 5x^2 = f(x)$ Por tanto f(x) es par.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Escriba la función de las maneras que faltan en la siguiente tabla

Situación	IMPLÍCITA	EXPLICITA	DE FUNCION
1	3X+2Y – 5 =0		
2		$Y = \sqrt{X^2 - 5} + 2$	
3			$f(x) = 3\sqrt[5]{x-3}$
4	2/3 x – 3/5 y = 11/5		
5		Y = 3/7 $(x\text{-}2)^{1/2}$	
6			g(t) = 3 sen (t+2)

2. A cada una de las funciones hallar f(0), f(3), f (t), f(x+h), f(x+h)+ f(x)

Y = x^4+ $5x^3$- x

Y = (x+3)(2x-4)

g(x) = (x^2-3x+1)/(x-1)

$h(t) = 5t\sqrt{3t^2 - 5t}$

g(n) = ($5n^2$- 3n + 4)(3n +11)

3. Sea $h: R \rightarrow R$ la funcion definida para todo $x \in R$ por la expresión dada determinar si la función es biyectiva.

a. $h(x) = 4x^3 - 1$

b. $f(t) = 5t - 4$

c. $g(x) = x^2 - 6x$

4. Encuentre el dominio y el recorrido de las funciones. Apoyarse en un gráfico de la función

a. f(x)= $4x^2$

b. g(x) = $\sqrt{6x}$

c. g(t) = $t^2 - 5$

d. h(x)= 2/ (x-3)

e. $t(x) = \begin{cases} 2x+1 & x < 0 \\ 2x+2 & x \geq 0 \end{cases}$

5. Evaluar la función en los valores dados de la variable independiente y simplificar los resultados

5.1 $f(x) = 7x - 4$

a. f(0)

b. f(-5)

c. f(t)

d. f(x-1)

5.2 $f(x) = \sqrt{x+5}$

a. f(2)

b. f(-7)

c. f(k+1)

d. f(x-1)

e. f(x+h)

5.3 $g(x) = 5x^2 - 3x + 4$

a. g(-2)

b. g(7)

c. g(k-1)

d. g(x-1)

e. g(x+h)- g(x)

5.4 $h(x) = sen\ x - 3x$

a. h(0)

b. h(-3)

c. h(b)

d. h(x-1)

6. Si f(x) = 2x -4 y g(x) = $4x^2 - x$ h(x)= $x - 2\sqrt{2x - 3}$ calcular

a. f (x) -2 g(x)+3 h(x)
b. 2g(x)+3 h(x)
c. g(x)/h
d. (g o h)(x)
e. (h o g)()
f. (f o g)(x)
g. (g o f)(x)

7. Determine si la función f es par o impar

a. $f(x) = 5x^2 - 7\ x$

b. $f(x) = 6 - 5x^3$

c. $f(x) = 3x^2 + 9\ x$

d. $f(x) = 3x^2 - 5\ x + 8$

e. $f(x) = -\frac{1}{4+x}$

SÍNTESIS DE CIERRE DEL TEMA.

FUNCIONES

ELEMENTOS DE LA FUNCIÓN REAL

Notación: implícita, explicita o como función.

Valoración: f(5), f(h)

Dominio: valores de la variable independiente.

Recorrido: valores de la variable dependiente.

Translación: f(x)n±h; f(x±h)n; nf(x)

CLASIFICACIÓN

Inyectiva

Suprayectiva

Biyectiva

Par: si f(-x)=f(x)

Impar: si f(-x)=-f(x)

OPERACIONES

Suma: f(x) + g(x)

Resta: f(x) - g(x)

Multiplicación: f(x) g(x)

División: f(x)/g(x)

Composición: f{g(x)}

ACTIVIDADES AUTO-EVALUATIVAS PROPUESTAS AL ESTUDIANTE.

1. Escriba la función de las maneras que faltan en la siguiente tabla

Situación	IMPLÍCITA	EXPLICITA	DE FUNCION
1	5X+3Y – 11 =0		
2		$Y = \sqrt{X^2+6} - 3$	
3			$f(x) = 2\sqrt[3]{x-7}$
4	3/5 x + 5/7 y = 1/5		
5		Y = 2/9 $(x+5)^{1/2}$	
6			g(t) = 3cos (t-5)

2. A cada una de las funciones hallar f(0), f(3), f (t), f(x+h), f(x+h)+ f(x)

$Y = x^3 + 6x^2 - 4x$

Y = (x+7)(4x-5)

$g(x) = (x^3+5x+7)/(x+1)$

$g(n) = (4n^2 - 6n + 11)(3n + 11)$

$h(t) = 4t\sqrt{35-6t}$

3. Sea $h: R \rightarrow R$ la funcion definida para todo $x \in R$ por la expresión dada determinar si la función es biyectiva.

a. $h(x) = 7x^3 - 8$

b. $f(t) = 6t - 3$

c. $g(x) = 3x^2 + 7x$

4. Encuentre el dominio y el recorrido de las funciones. Apoyarse en un gráfico de la función

a. f(x)= $5x^2$

b. g(x) = $\sqrt{7x}$

c. g(t) = $t^2 - 5$

d. h(x)= 2/ (x-7)

e. $t(x) = \begin{cases} 3x+4 & x < -1 \\ x+2 & x \geq -1 \end{cases}$

5. Evaluar la función en los valores dados de la variable independiente y simplificar los resultados

a. $f(x) = 7x - 4$

1. f(0)
2. f(-5)
3. f(t)
4. f(x-5)

b. $f(x) = \sqrt{2x - 7}$

1. f(4)
2. f(-8)
3. f(k-2)
4. f(x+h)
5. f(x+h)- f(h)

c. $g(x) = 4x^2 + 5x + 4$

1. g(-2)
2. g(7)
3. g(k-1)
4. g(x-1)
5. g(x+h)- g(x)

d. $h(x) = sen\ 2x + 5x$

1. h(4)
2. h(0)
3. h(h)
4. h(x+3)

6. Si $f(x) = 3x - 5$; $g(x) = 3x^2 \; x$; $h(x) = x - 2\sqrt{2x-3}$ calcular

1. f (x) -3 g(x)+5h(x)
2. 4g(x)+6 h(x)
3. g(x)/h
4. (g o h)(x)
5. (h o g)()
6. (f o g)(x)
7. (g o f)(x)

7. Determine si la función f es par o impar

1. $f(x) = 4x^2 + 6x$
2. $f(x) = 6 + 3x^3$
3. $f(x) = 3x^2 + 5\,x$
4. $f(x) = 3x^2 + 4\,x + 8$
5. $f(x) = -\dfrac{5}{6 \pm 3x}$

3

UNIDAD

MATEMÁTICAS - SEMANA 6

FUNDACIÓN UNIVERSITARIA
DEL ÁREA ANDINA

Personería Jurídica Res. 22215 Mineducación Dic. 9-83

INTRODUCCIÓN

En esta cartilla se presentan formas de representar funciones, por medio gráfico, tablas, tipos de funciones, y las funciones como modelos matemáticos que permiten solucionar situaciones de la cotidianidad.

Se debe leer detenidamente los contenidos interpretar los procedimientos y haciéndose necesario reconstruir paso a paso los procesos que se desarrollan en los contenidos. Estos contenidos permiten avances notables en la construcción de procesos interpretativos, analíticos y comprensivos de la matemática, base fundamental para la matemática avanzada.

METODOLOGÍA

El proceso de aprendizaje académico por medio de la cartilla se desarrolla en tres etapas. La primera hace referencia a la lectura completa del módulo, realizando la respectiva interpretación, análisis y comprensión del contenido. La segunda etapa es el análisis del video y el contenido del mismo. Y la tercera etapa es la aplicación de los contenidos expuestos a situaciones generales, particulares y específicas.

La segunda etapa puede ser retomada cuantas veces quiera, pero tiene un tiempo limitado para adquirir los conocimientos. Recuerde que debe avanzar con las restantes cartillas y con ello los módulos.

MAPA CONCEPTUAL

CLASES DE FUNCIONES

Modelos de representación

Tablas
Gráficos
Verbales
Matemáticos

OBJETIVOS Y COMPETENCIAS

Comprender el manejo de las funciones

Objetivos

- Aprender la representación de funciones por medio de tablas, gráficas, ecuaciones y de la verbalización.
- Manipular las características de las funciones por medio de tablas, gráficas, ecuaciones y de la verbalización.
- Integrar las características de las funciones por medio de tablas, gráficas, ecuaciones y de la verbalización a la solución de situaciones cotidianas

Competencias

- Aprende la representación funciones por medio de tablas, gráficas, ecuaciones y de la verbalización.
- Manipula las características de las funciones por medio de tablas, gráficas, ecuaciones y de la verbalización.
- Entiende las características de las funciones por medio de tablas, gráficas, ecuaciones y de la verbalización a la solución de situaciones cotidianas

DESARROLLO TEMÁTICO

COMPONENTE MOTIVACIONAL.

Los contenido de planteados en esta cartilla como formas de representar funciones, por medio gráfico, tablas, tipos de funciones, y las funciones como modelos matemáticos que permiten solucionar situaciones de la cotidianidad, son fundamentales en la construcción de proceso mentales que posteriormente se utilizan en contenidos más avanzados.

Estos contenidos permiten avances notables en la construcción de procesos interpretativos, analíticos y comprensivos de la matemática, base fundamental para la matemática avanzada.

RECOMENDACIONES ACADÉMICAS.

En esta cartilla se presentan formas de representar funciones, por medio gráfico, tablas, tipos de funciones, y las funciones como modelos matemáticos que permiten solucionar situaciones de la cotidianidad.

Se debe leer detenidamente los contenidos interpretar los procedimientos y haciéndose necesario reconstruir paso a paso los procesos que se desarrollan en los contenidos.

En lo referente s los ejercicios, es muy importante que usted se apoye en un software de graficación, ya sea derive u otro. Les recomiendo el programa gramática, es un programa sencillo de manejar y permite ser descargado por ser de uso gratuito, además de permitir realizar varias gráficas en el mismo plano lo que permite comparaciones.

DESARROLLO DE CADA UNA DE LAS UNIDADES TEMÁTICAS.

COMPETENCIA GENERAL	COMPETENCIA ESPECIFICA
El estudiante representa funciones por medio de tablas, gráficas, ecuaciones y de la verbalización.	El estudiante diferencia las características de las funciones en tablas, gráficas, ecuaciones y de la verbalización.
El estudiante manipula las características de las funciones por medio de tablas, gráficas, ecuaciones y de la verbalización.	El estudiante manipula las características de las funciones en tablas, gráficas, ecuaciones y de la verbalización.
El estudiante integra las características de las funciones por medio de tablas, gráficas, ecuaciones y de la verbalización a la solución de situaciones cotidianas	El estudiante integra las características de las funciones reales en tablas, gráficas, ecuaciones y de la verbalización a la solución de situaciones cotidianas

CLASIFICACION DE FUNCIONES Y REPRESENTACIONES

La noción actual de función es el resultado del trabajo de varios siglos por parte de estudiosos de esta área del conocimiento, quienes llegaron de una u otro forma a concluir que muchos de los fenómenos d la naturaleza se podían representar mediante modelos matemáticos o a partir de funciones elementales, las cuales se pueden organizar en tres grandes categorías:

1. Funciones algebraicas (Polinómicas, radicales, racionales)

2. Funcione trigonométricas (seno, coseno, tangente, cotangente, secante, cosecante)

3. Funciones exponenciales y logarítmicas.

Cada una de estas clasificaciones se puede presentar de cuatro maneras diferentes[1]:

Verbalmente (por medio de una descripción verbal)

- Numéricamente (por medio de una tabla de valores)
- Visualmente (por medio de una representación gráfica)
- Algebraicamente (por medio de una formula)

1 STEWART, J. (2008).Calculo de una variable. México, México D.F.: Cengage.

Se considera necesario, para la construcción del conocimiento eficiente, el manejo apropiado de diversas formas de representación o de tratamiento de una misma información, en este sentido se puede aprovechar las cuatro formas de representar las funciones con el fin de consolidar en conocimiento, aunque hay funciones que se dejan describir de manera más sencilla de una determinada forma que con otra.

Examinemos el siguiente ejemplo

El área A de un círculo depende del radio r del mismo. La regla que relaciona r con A se expresa mediante la ecuación $A = \pi r^2$. Con cada número positivo r existe asociado un valor A por lo que A es función de r.

A lo mejor la forma de más utilidad del área de un circulo en función de su radio es la fórmula algebraica, aunque se puede organizar una tabla con los valores y con ellos llegar a trazar una gráfica

Se evidencian las cuatro formas de representar la misma función. Examinemos

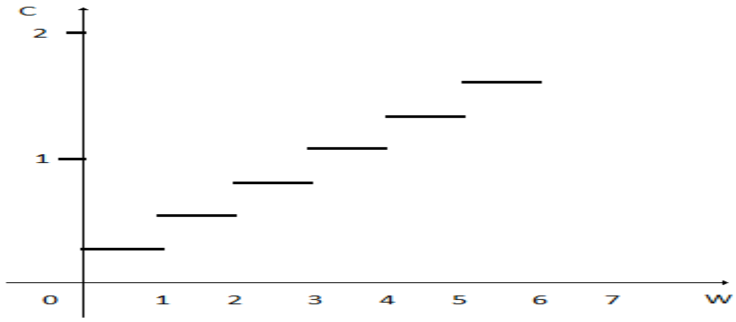
Ejemplo 1.

El costo C de enviar una carta por correo en primera clase depende de su peso W. Aunque no existe una fórmula que relacione de manera sencilla a W con C, la oficina de correos tiene una regla para determinar C cuando se conoce W.

Esta misma situación de manera verbal se expresa así: Sea C(W) como el costo de enviar por correo una carta en primera clase con un peso W. La regla utilizada en 1996 por la U.S. Postal Service (Servicio Postal de Estados Unidos) es la siguiente: el costo es de 39 centavos de dólar hasta por una onza, más 24 centavos por cada onza sucesiva hasta 13 onzas. Quedando representada la información en la siguiente tabla:

W (onzas)	C(W) (dólares)
$0<W\leq 1$	0,39
$1<W\leq 2$	0,63
$2<W\leq 3$	0,87
$3<W\leq 4$	1,11
$4<W\leq 5$	1,35
$5<W\leq 6$	1,59
.	.
.	.
.	.
$11<W\leq 12$	3,03
$12<W\leq 13$	3,27

A partir de esta información se puede construir una representación visual, una gráfica la cual sería así:



Hasta ahora se han se han mostrado tres representaciones de la misma situación, la verbal, donde se hace la descripción de la situación y la relación entre las variables, la numérica, expresada en la tabla de valores de acuerdo a las condiciones expuestas en la primera representación, la visual expresada por la gráfica.

A partir de la representación numérica se muestra que la expresión inicia con un valor de 15 centavos y que va aumentando de 24 en 24, claro esta se tiene en cuenta siempre como valores que saltan, entonces es una situación discreta.

Haciendo uso de la tabla se añade una columna donde relaciona el incremento del costo de onza a onza así:

W (onzas)	C(W) (dólares)	
0<W≤1	0,39	0,15 + 1*0,24
1<W≤2	0,63	0,15 + 2*0,24
2<W≤3	0,87	0,15 + 3*0,24
3<W≤4	1,11	0,15 + 4*0,24
4<W≤5	1,35	0,15 + 5*0,24
5<W≤6	1,59	0,15 + 6*0,24
.	.	
.	.	
.	.	
11<W≤12	3,03	0,15 + 12*0,24
12<W≤13	3,27	0,15 + 13*0,24
		0,15 + n*0,24

Por tanto a partir de la información se conforma la expresión

$$C(W) = 0{,}15 + [\![W]\!] * 0{,}24 \quad \text{con } w \leq 13$$

Que es la cuarta forma de representación de la función la algebraica.

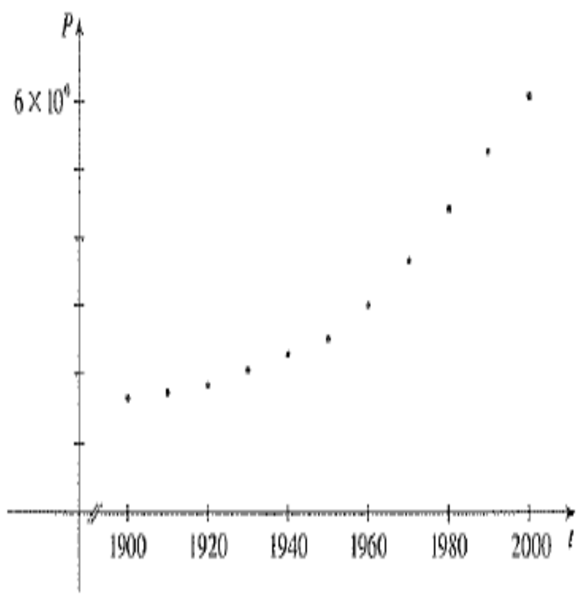
AÑOS	POBLACION (EN MILLONES)
1900	1650
1910	1750
1920	1860
1930	2070
1940	2300
1950	2560
1960	3040
1970	3710
1980	4450
1990	5280
2000	6080

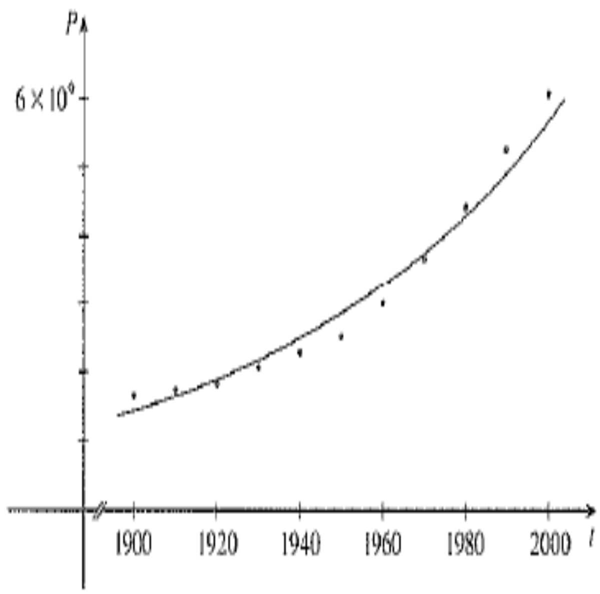
Ejemplo 2

Se establece que la población humana del mundo P, depende del tiempo t. En la tabla se presenta la estimación de la población en un determinado tiempo t, P(t) para ciertos años después.

Para cada valor de tiempo t le corresponde un valor P, por tanto p es una función que depende del tiempo t.

La función P(t) es la población del mundo en un tiempo t, donde la tabla de valores de la población suministra una representación apropiada de la función. Al llevar los datos de la tabla a una gráfica estos quedan localizados así:





Tomado de Calculo Stewart 6ª edición, Pág. 14.

Esta representación permite exponer los datos relacionados y pueden llegar a formar una gráfica como la que aparece al lado derecho.

Utilizando los métodos apropiados se puede construir una expresión algebraica aproximada que es

$$P(t) \approx (0{,}008079266) * (1{,}013731)^t$$

Esta función es denominada, modelo matemático, relacionado al crecimiento poblacional en el mundo. Se pude asegurar que es una función expresada por una fórmula que da una aproximación para el comportamiento de la población.

CLASIFICACIÓN DE FUNCIONES Y MODELOS MATEMÁTICOS

Con el fin de comprender apropiadamente las relaciones entre las funciones, a continuación se hace una ampliación de las funciones presentando más estrategias de graficación y la forma de construir modelos matemáticos, información que se requiere para poder comprender los proceso que se realizan cotidianamente.

Existen dos funciones con características especiales la función valor absoluto y la función mayor entero de la cual ya se hizo una muestra en el ejemplo uno.

La primera se define de la siguiente manera

$$|x| = \begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ -x & si\ x < 0 \end{cases}$$

Y la segunda

$$[\![x]\!] = el\ mayor\ entero\ que\ es\ menor\ o\ igual\ a\ x$$

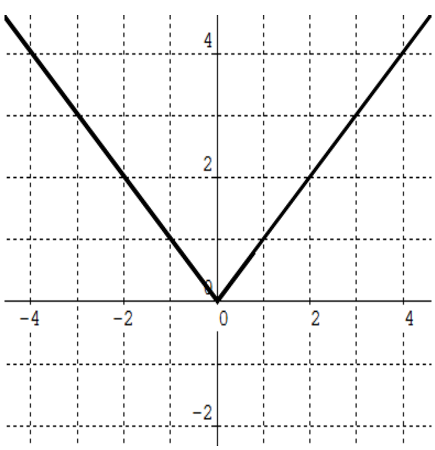
Con el fin de comprender eficientemente la definición propuesta se plantean los siguientes ejemplos:

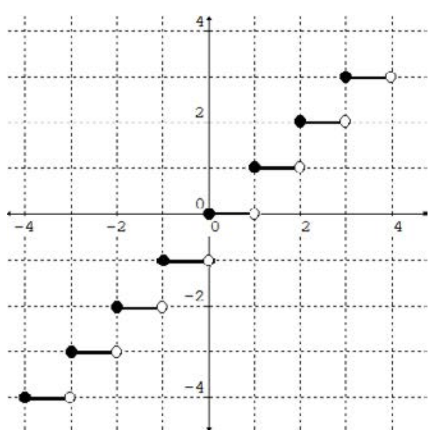
Aplicando la definición de valor absoluto

$$|-3{,}1| = |3{,}1| = 3{,}1$$

Y aplicando la definición de mayor entero

$$[\![-3{,}1]\!] = -4 \ \ y\ [\![3{,}1]\!] = 3$$

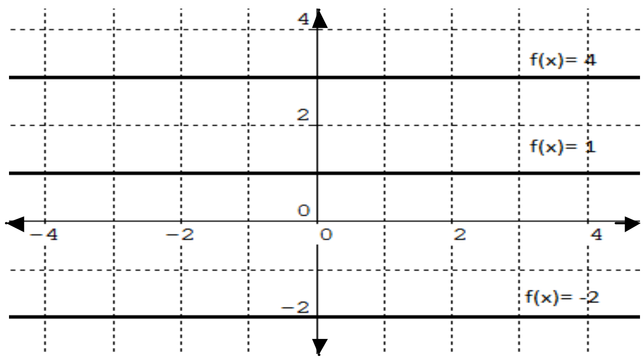




Con frecuencia la función valor absoluta es recordada por formar en su gráfica un pico en el origen, en tanto la gráfica de la función mayor entero da un salto de entero en entero.

FUNCIÓN CONSTANTE.

Cuando una función tiene la forma f(x)= k donde k es cualquier valor constante o número real, esta recibe el nombre de función constante, donde su gráfica es una recta horizontal que está a una distancia k del eje horizontal, así como se muestran los ejemplos en la siguiente gráfica.



FUNCIÓN POLINOMIAL

Cualquier función que puede que se pueda obtener a partir de una función constante y la función idéntica, por medio del uso de las operaciones suma, diferencia y multiplicación reciben el nombre de función polinomial. Esto quiere decir que la función tiene la forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + a_{n+2} x^{n+2} + \ldots + a_1 x + a_0$$

Donde $a_1, a_2, a_3 \ldots$ Son números reales y n es un número entero no negativo. Si $a_n \neq 0$,

n es el grado de la función polinomial.

Por ejemplo si se tiene $f(x) = ax + b$ esta es una función polinomial de grado uno o denominada función lineal.

Cuando $f(x) = ax^2 + bx + c$ es una función polinomial de segundo grado o conocida co

múnmente como función cuadrática.

Las funciones lineales y las funcione cuadráticas reciben una apartado específico por la importancia y la amplia aplicación que estas tiene.

Cuando se calcula el cociente entre funciones polinomiales, se construyen las denominadas funciones racionales, las cuales tienen la forma

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + b_{m-2} x^{m-2} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

En esta función el dominio está definida por los números reales para los cuales el denominador es diferente de cero

También se conoce la función algebraica explícita, siendo aquella que se puede obtener a partir de las funciones constantes y la función identidad por medio de las cinco operaciones: suma, resta, multiplicación, división y radicación, por ejemplo:

$$f(x) = 5x^{2/7} = 5\sqrt[7]{x^2} \qquad g(x) = \frac{(x+5)\sqrt{x+2}}{x^4 + \sqrt[3]{x^2+2}}$$

Trigonométricas, inversas exponenciales y logarítmicas.

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS[2]

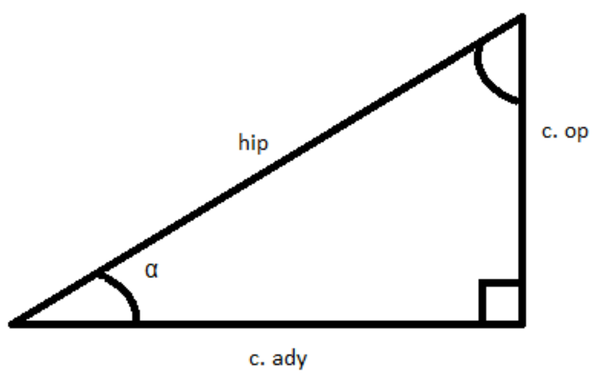
Se define la función trigonométrica como la relación métrica existente entre los catetos de un triángulo rectangular y uno de sus ángulos agudos, o la relación ente los catetos y el ángulo central de una circunferencia unitaria o de radio 1

A partir de la relación entre los catetos y el ángulo agudo se tiene:

$$Sen\ \alpha = \frac{c.op}{hip}$$

$$Cos\ \alpha = \frac{c.ady}{hip}$$

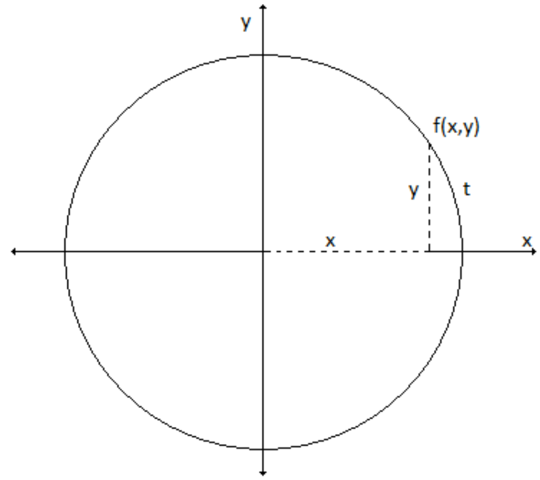
$$Tan\ \alpha = \frac{c.op}{c.ady}$$



Una manera más amplia de definir las funciones trigonométricas está relacionada con la circunferencia unitaria y de centro en el origen del plano cartesiano cuya ecuación es $x^2 + y^2 = 1$.

Se asume A, como el punto (1,0) y t un número positivo. Existe un punto P en el círculo C tal que la distancia, medida en sentido contrario a las manecillas del reloj alrededor del arco AP que es igual al número t, tal como se muestra en la figura.

2 PURCELL, E (2007). Cálculo., México, México D.F.: Prentice Hall.

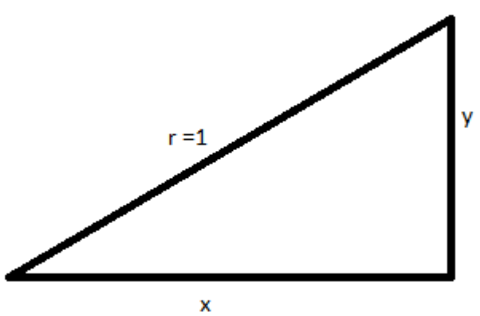


La circunferencia de radio r tiene una longitud de $2\pi r$ de modo que la circunferencia C es 2π, entonces si $t = \pi$ entonces el punto P está en la mitad de la circunferencia, donde P es el punto (-1,0) y si $t = 3\pi/2$ entonces el punto P es (0,-1) y si $t= 2\pi$ entonces P es el punto A.

Por tanto, si t es un número real que determina el punto P(x,y) entonces

Sen t = y y Cos t = y

Utilizando la información establecida en la gráfica anterior, se forma un triángulo rectangular así:



aplicando el teorema de Pitágoras

$x^2 + y^2 = 1$

Y reemplazando Sen t = y y Cos t = y

Se tiene que

$(Sen\ t)^2 + (Cos\ t)^2 = 1$

Conocida como la identidad trigonométrica fundamental

PROPIEDADES BÁSICAS DEL SENO Y COSENO.

Por las condiciones iniciales y como t puede ser cualquier número real, el dominio de la función es ($-\infty, \infty$) y como X y Y están entre -1 y 1, por ser el valor máximo y el mínimo de la circunfe rencia unitaria, se considera como rango de la función el intervalo $[-1,1]$.

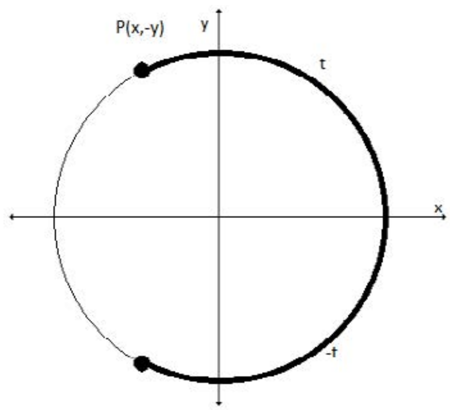
Como la circulo unitario tiene 2π de circunferencia, los valores de t y de t+2π determinan el mismo lugar P(x,y), por tanto

$$\mathbf{Sen\ (t + 2\pi) = sen\ t} \qquad \mathbf{cos\ (t + 2\pi) = cos\ t}$$

Cuando los puntos $P_1 y\ P_2$ corresponden a t y a –t , respectivamente , estos son dimétricos res

pecto al eje x, por tanto las abscisas de $P_1 y\ P_2$ son la misma y las ordenadas difieren del signo,

por tanto: **sen (-t) = - sen t** y **cos (-t) = cos t**



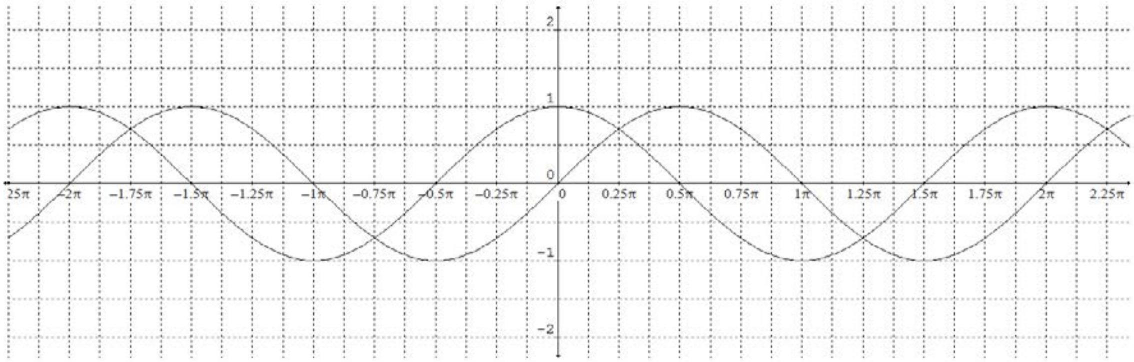
A partir de lo expuesto, la función la función seno es una función par y la función coseno es una función impar. Con la información suministrada se puede considerar que

$$Sen\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = Cos\,t \quad y \quad Cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = Sen\,t$$

Las funciones trigonométricas se pueden representar, como una expresión algebraica, como hasta ahora se ha presentado, de manera matemática por medio de una tabla o de manera gráfica, así:

T	Sen t	Cos t
0	0	1
$\pi/6$	½	$\sqrt{3}/2$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	½
$\pi/2$	1	0
$2\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	-½
$3\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$
$5\pi/6$	½	$-\sqrt{3}/2$
π	0	-1

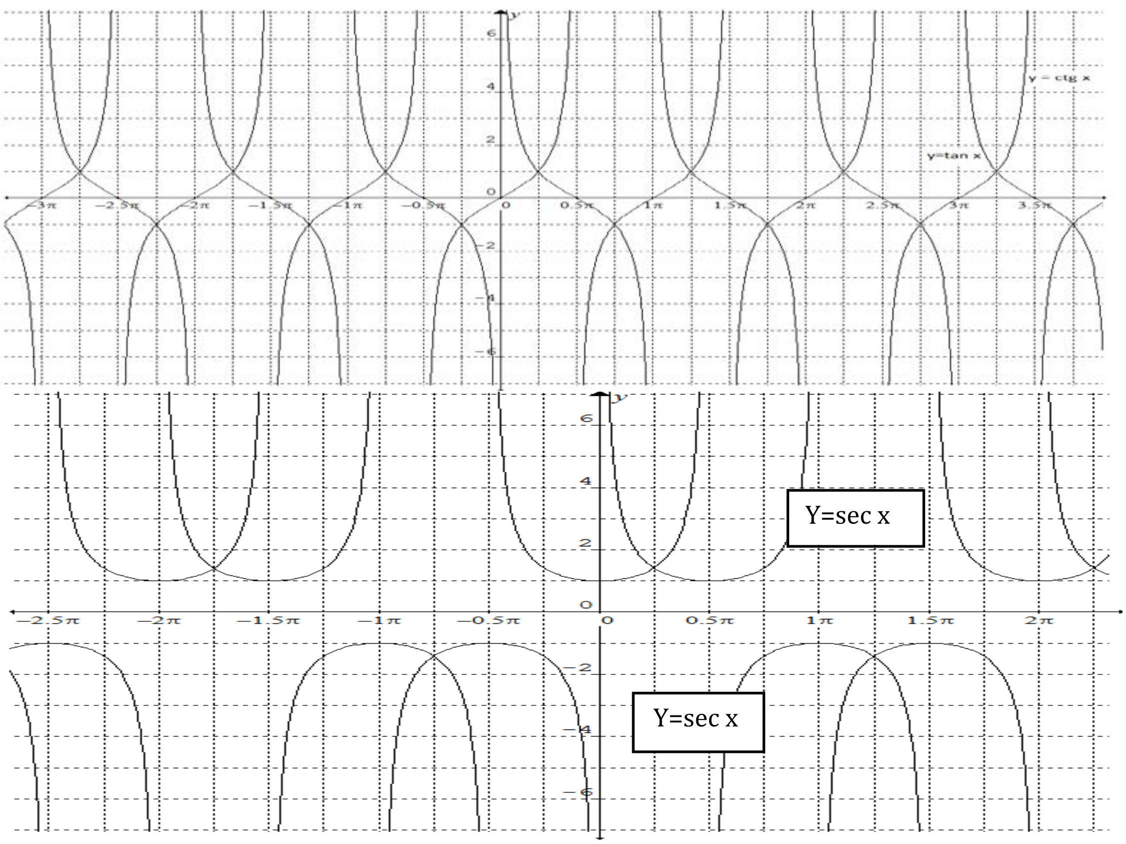
O de manera gráfica como se indica en la siguiente representación



Las otras funciones trigonométricas que son el resultado de relacionar las funciones seno y coseno son:

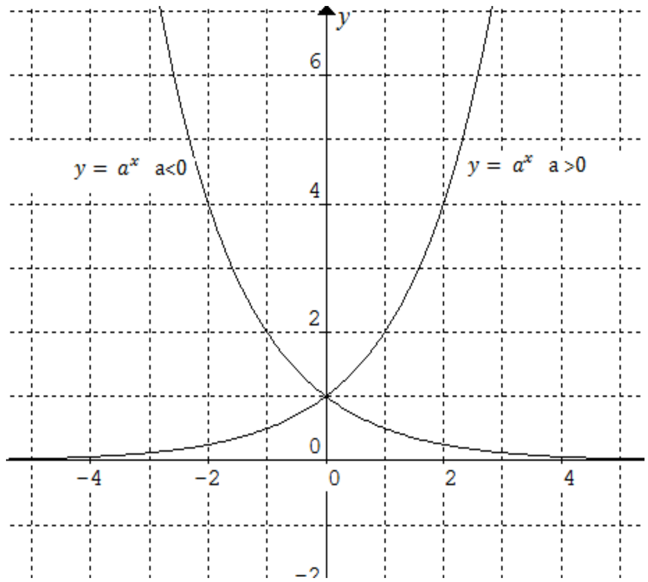
$$\tan x = \frac{Sen\ x}{Cos\ x},\ \cot x = \frac{Cos\ x}{Sen\ x},\ \sec x = \frac{1}{Cos\ x},\ \csc x = \frac{1}{sen\ x}$$

Las gráficas de las funciones tan x, cot x, sec x y csc x son:



FUNCIÓN EXPONENCIAL

Dado a >0 o a<0 , se considera la función $f_a : R \rightarrow (0, \infty)$ definida como $f_a(x) = a^x$ para todo $x \in R$ se considera una función exponente, donde su grafica es



FUNCIÓN LOGARÍTMICA[3]

Se define la función logarítmica de base a para x >0, a >0 y a ≠1

$$y = log_a x \;\; si \;\; y \; solo \; si \; a^y = x$$

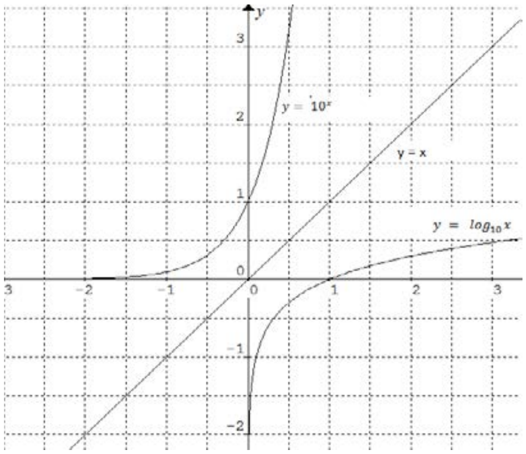
Examinado lo expuesto en la segunda parte, un término a multiplicado por sí mismo y veces el resultado es x en tanto en la primera parte, cuantas veces (y) debe multiplicar por sí mismo el valor a para que el resultado sea x

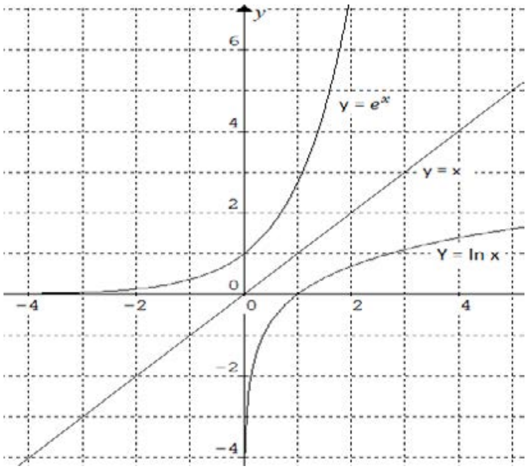
Por tanto las expresiones están relacionadas, mientras en una se determina el resultado de aplicar un exponente en la otra expresión se busca determinar el valor de la potencia.

El logaritmo tiene las siguientes propiedades:

1. $log_a 1 = 0 \;\; porque \; a^0 = 1$
2. $log_a a = 1 \;\; porque \; a^1 = a$
3. $log_a a^x = x \;\; porque \; a^{log_a x} = x$
4. $log_a x = log_a y \;\; porque \; x = y$

3 LARSON, R. (2010).Cálculo 1. México, México, D.F.: Mc Graw Hill.





EJEMPLOS, EJERCICIOS O CASOS DE APLICACIÓN PRÁCTICA.

1. Indicar si las siguientes funciones son algebraicas, trigonométrica, exponenciales o logarítmicas:

a. $f(x) = 3x^5 + 2x^4 + x^3 - x + 6$

b. $f(x) = \frac{2x^3 - 4x}{5}$

c. $f(x) = \frac{3x^4 + 5x^2 - x + 1}{5x^2 - 3}$

d. $f(x) = 5 * 2^x$

e. $f(t) = \sqrt{1 - 3x}$

f. $f(\propto) = 3\ sen\ x$

g. $f(k) = \ln k$

h. $f(k) = -3$

Solución

a. $f(x) = 3x^5 + 2x^4 + x^3 - x + 6$ exponencial por tener la forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + a_{n+2} x^{n+2} + \ldots + a_1 x + a_0$$

b. $f(x) = \frac{2x^3 - 4x}{5}$ también es exponencial porque es el denominador un coeficiente.

c. $f(x) = \frac{3x^4 + 5x^2 - x + 1}{5x^2 - 3}$ racional por tener la forma

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + b_{m-2} x^{m-2} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

d. $f(x) = \ 5 * 2^x$ exponencial por ser de la forma $y = a^x$

e. $f(t) = \sqrt{1-3x}$ radical por tener la forma

$$f(x) = \sqrt[n]{f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + b_{m-2}x^{m-2} + \dots + b_1 x + b_0}}$$

f. $f(\propto) = 3\ sen\ x$ trígonométrica por estar involucrada una función trigonométrica

g. $f(k) = \ln k$ logarítmica por ser de la forma $f(x) = \ln x$

h. $f(k) = -3$ es una función constante.

2. En una tienda de productos químicos no se ha diseñado una representación algebraica entre el costo de un producto químico y la cantidad de gamos vendidos. Siempre se vende una cantidad exacta en gramos donde cada gramo tiene un costo de $2400 pesos. El costo por un gramo, con el estuche, es de $3900 de dos gramos es de $6300 gramos, no hay límite de gramos a vender pero no se cobran fracciones de gramo, si se pasa del peso exacto, se cobra el siguiente gramo completo.

Solución

Se observa una relación entre el costo y la cantidad del producto químico en gramos, razón por la cual se construye una representación matemática, una representación algebraica y una representación gráfica

Se han toma los datos relacionados entre el pago, en pesos, por adquirir producto químico y el peso, en gramos. Se ha colocado la información en la siguiente tabla

W (gramos)	C(W) (pesos)
0<W≤1	3900
1<W≤2	6300
2<W≤3	8700
3<W≤4	11100
4<W≤5	13500
5<W≤6	15900
.	.
.	.
.	.
11<W≤12	30300
12<W≤13	32700
.	
.	
.	
n-1<W≤n	

3. Un poste que tiene una altura desconocida, genera una sombra que medida sobre el piso tiene una longitud de 8m, a una determinada hora del día, genera una sombra que con el piso tiene un ángulo de elevación de 30 grados. Indicar la longitud del poste y la distancia que hay entre el extremo superior del poste y el punto de la sombra más lejano del poste.

Solución

Lo primero a examinar son los datos suministrados, la información solicitada, la construcción de una representación gráfica de la información, una alternativa de solución que posteriormente se ejecuta para determinar la solución a la situacion planteada.

1. Información suministrada. Después de realizar la lectura del enunciado se detecta que:

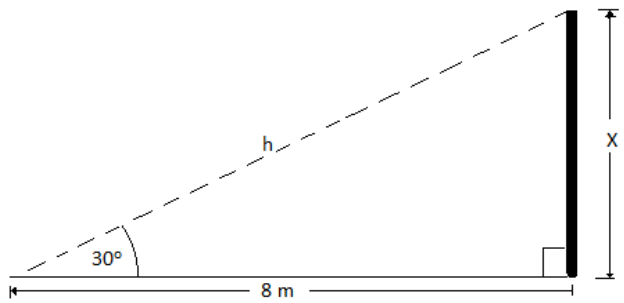
a. Un poste de longitud desconocida.

b. Una sombra de 8 m e longitud.

c. El ángulo de elevación del piso al haz de luz es de 30 grados.

2. Solicitan hallar la longitud del poste y la distancia del extremo superior del poste al punto extremo opuesto de la sombra de la base del poste.

3. Al examinar la información y lo solicitado se propone la siguiente gráfica



4. Al examinar la gráfica y la información, se tiene un ángulo y el cateto adyacente al ángulo, por tanto se plantea como alternativa de solución utilizar la definición de función coseno para hallar el valor de h. Ahora, como se tiene el cateto adyacente y utilizando la definición de función tangente se calcula el valor del cateto opuesto x.

5. Se aplica la primera alternativa de solución propuesta, como

$$\cos\alpha = \frac{c.ady}{hip} \quad entonces \quad \cos 30° = \frac{8m}{h} \quad por\ tanto\ h = \frac{8m}{\cos 30°} \quad como \quad \cos 30\ ° = 0{,}8660$$

Se tiene que $h = \frac{8m}{0{,}8660} = 9{,}2378\,m$

Se calcula el valor de x utilizando la definición de función tangente, por tanto:

$$\text{Tan}\,\alpha = \frac{c.op}{c.ady}\ entonces\ \tan 30° = \frac{c.op}{c.ady}\ por\ tanto\ \ \tan 30° = \frac{x}{8m}$$

$$al\ despejar\ \ \tan 30° * 8m = x\ entonces\ \ x = 0{,}5 * 8m = 4m$$

Por tanto, la altura del poste es de 4m y la longitud del borde superior del poste al punto de la sombra más lejano de la base del poste es de 9,2378 m

4. Dada la función f(x)= - x/4 indicar los puntos que pertenecen o no a la función

a. (0,0)

b. (-2,1)

c. (-5,5/4)

d. (1/2 , - 1/8)

Solución

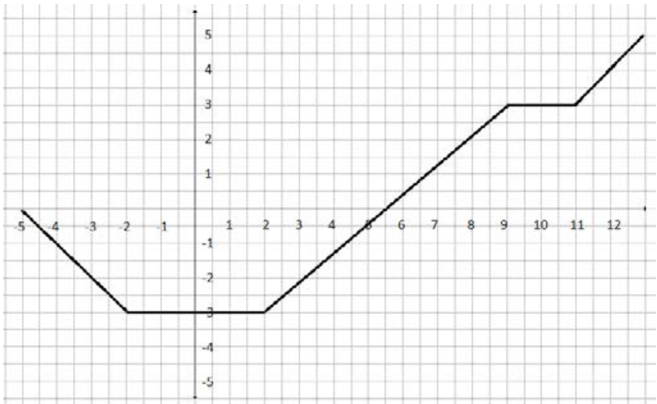
a. (0,0) es la coordenada de un punto de la función, al sustituir x por cero f(x) = 0

b. (-2,1) es la coordenada de un punto de la función, al sustituir x por -2, f(x) = 1

c. (-5,5/4) es coordenada de un punto de la función, al sustituir x por -5, f(x)=5/4

d. (1/2, - 1/8) es la coordenada de un punto de la función, al sustituir x por 1/2, f(x) = - 1/8.

5. A partir de la siguiente gráfica, indicar los siguientes valores



a. f(-3)

b. f(-5)

c. f(0)

d. f(4)

e. El valor de f(x)= -1 si x =

f. El valor de f(x)= 3 si x =

g. El valor de f(x)= 0 si x =

Solución

a. f(-3) = -2

b. f(-5)= 0

c. f(0) = -3

d. f(4) = -1,1

e. El valor de f(x)= -1 si x = 4

f. El valor de f(x)= 3 si x = [9, 11]

g. El valor de f(x)= 0 si x = -5 y 5,5

EJERCICIOS

1. Indicar si las siguientes funciones son algebraicas, trigonométrica, exponenciales o logarítmicas:

a. $f(x) = 3x^3 + 3x^2 + 6x - 8$

b. $f(x) = \frac{3x^2 - 14x}{5x - 3}$

c. $f(x) = \frac{3x^4 - 6x^3 - x + 1}{x^2 + 5}$

d. $f(x) = 5/2^x$

e. $f(t) = \sqrt{1 + 1/3x}$

f. $f(\propto) = 3 \cos x$

g. $f(k) = \ln(x - 3)$

h. $f(k) = -3$

2. En un almacén de productos al menos y al detal no se ha diseñado una representación algebraica entre el costo de un producto químico y la cantidad de gamos vendidos. Siempre se vende una cantidad exacta de que tiene un costo de \$1400 pesos. El costo del primer producto, con el estuche, es de \$2900 de cada uno de los siguientes tiene un costo de \$6300, no hay límite de productos a comprar. Determinar una expresión matemática, una expresión gráfica y una algebraica de la situación

3. A una pared de 10 metros de altura debe se le debe colocar una escalera hasta el borde superior, de manera que quede la escalera con una inclinación de58° contra el piso. Determinar la longitud de la escalera y la distancia a la que queda de la base de la pared.

4. Dada la función $f(x) = 5x - \frac{2x^2-3x}{x^2+1}$ indicar los valores de la función

a. f(0)
b. f(1)
c. f(-3)
d. f(1/2)
e. f(0,25)
f. f(a)
g. f(x+h)

5. Para cada una de las siguientes funciones construir una tabla de valores y una gráfica en el intervalo de datos dado como dominio. Utilice la calculadora para los cálculos.

a. $f(x)= 3x- 2 \ln (x+1)$
b. $f(t) = 3t^2 – 5t - 6$
c. $f(t) = 5 t + 3/(t+2)$

SÍNTESIS DE CIERRE DEL TEMA.

CLASIFICACIÓN DE LAS FUNCIONES

Algebráicas
Trigonométricas
Exponenciales
Logarítmicas

Formas de presentación

Verbal
Numérica
Visual
Algebraica

ACTIVIDADES AUTO-EVALUATIVAS PROPUESTAS AL ESTUDIANTE.

1. Escribir una función algebraicas, trigonométrica, exponenciales, logarítmicas, mayor entero y justificar porque es de cada una.

2. Los materiales por cada par de zapatos tiene un costo de $12000.oo y un costo de producción por cada par de zapatos de $25000.oo Además de estos costos se tiene que hacer un pago mensual de $150000.oo por concepto de energía eléctrica. Si los gastos de producción de la empresa están representados por los costos de los materiales más los costos de producción las los costos fijos mensuales por concepto de servicios públicos. Si la cantidad máxima de pares de zapatos producidos al mes es de 150, construir una tabla donde se muestre el comportamiento de los valores, una expresión algebraica que me permita determinar el monto a pagar sabiendo el número de pares de zapatos fabricados.

3. Sobre una superficie plana se han demarcado dos segmentos perpendiculares de 22 m y 14 m cada uno. Construir una gráfica donde se evidencie la información suministrada, indicar la longitud de la diagonal que se puede construir entre los dos segmentos y el ángulo que hay entre la diagonal y las perpendiculares.

4. Dada la función $f(x) = 5x + \frac{3x}{x-1}$ indicar los valores de la función

a. f(0)
b. f(1)
c. f(-3)
d. f(1/2)
e. f(0,25)
f. f(a)

5. Para cada una de las siguientes funciones construir una tabla de valores y una gráfica en el intervalo de datos dado como dominio. Utilice la calculadora para los cálculos.

a. $f(x)= 3x- 2 \ln x$
b. $f(t) = 3t^2$
c. $f(t) = 5t – 3/(t-2)$

4
UNIDAD

MATEMÁTICAS - SEMANA 7

FUNDACIÓN UNIVERSITARIA
DEL ÁREA ANDINA
Personería Jurídica Res. 22215 Mineducación Dic. 9-83

INTRODUCCIÓN

En esta cartilla se realiza el estudio de los modelos lineales, además de la aplicación de estos modelos a situaciones cotidianas.

Estos modelos matemáticos pueden aportar herramientas para interpretar situaciones cotidianas, para aprender estos elementos teóricos se deben leer los contenidos del módulo, comprender sus procedimientos y manejar estos contenidos en la aplicación.

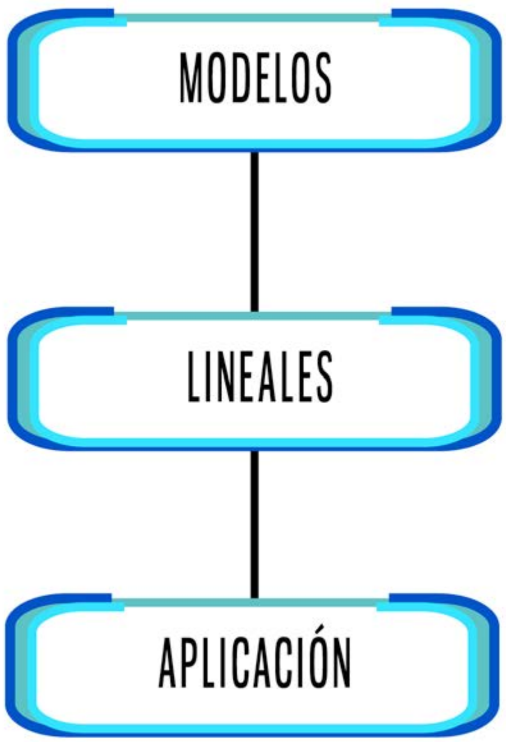
METODOLOGÍA

El proceso de aprendizaje académico por medio de la cartilla se desarrolla en tres etapas. La primera hace referencia a la lectura completa del módulo, realizando la respectiva interpretación, análisis y comprensión del contenido. La segunda etapa es el análisis del video y el contenido del mismo. Y la tercera etapa es la aplicación de los contenidos expuestos a situaciones generales, particulares y específicas.

La segunda etapa puede ser retomada cuantas veces quiera, pero tiene un tiempo limitado para adquirir los conocimientos. Recuerde que debe avanzar con las restantes cartillas y con ello los módulos.

MAPA CONCEPTUAL

MODELOS LINEALES APLICACIÓN



OBJETIVOS Y COMPETENCIAS

Objetivos

- Comprender los modelos lineales, sus características y su aplicación.

Aprender las características y la aplicación de los modelos lineales.

Aplicar los modelos lineales a situaciones cotidianas.

Evaluar la interpretación y la aplicación de los modelos lineales.

Competencias

Aprende las características y la aplicación de los modelos lineales.

Aplica los modelos lineales a situaciones cotidianas.

Evalúa la interpretación y la aplicación de los modelos lineales.

Evalúa la interpretación y la aplicación de los modelos lineales.

DESARROLLO TEMÁTICO

6.1 COMPONENTE MOTIVACIONAL.

La modelación de la función lineal con su respectiva aplicación es fundamental en el desarrollo del conocimiento matemático en cualquier profesión, en especial cuando se trata de áreas del conocimiento como en la que usted está preparándose.

Es de relevante importancia la construcción de modelos lineales para la interpretación y solución de situaciones de la cotidianidad.

6.2 RECOMENDACIONES ACADÉMICAS

La presente cartilla contiene elementos fundamentales sobre las funciones lineales y cuadráticas y su modelación.

Es fundamental el aprender a modelar apropiadamente las funciones lineales y cuadráticas para permitir la interpretación y comprensión de situaciones de la cotidianidad. Es fundamental la lectura comprensiva de los contenidos, interpretar los procedimientos y realizar las actividades durante la semana para que usted no se atrase en el proceso.

6.3 DESARROLLO DE CADA UNA DE LAS UNIDADES TEMÁTICAS.

MODELO LINEAL

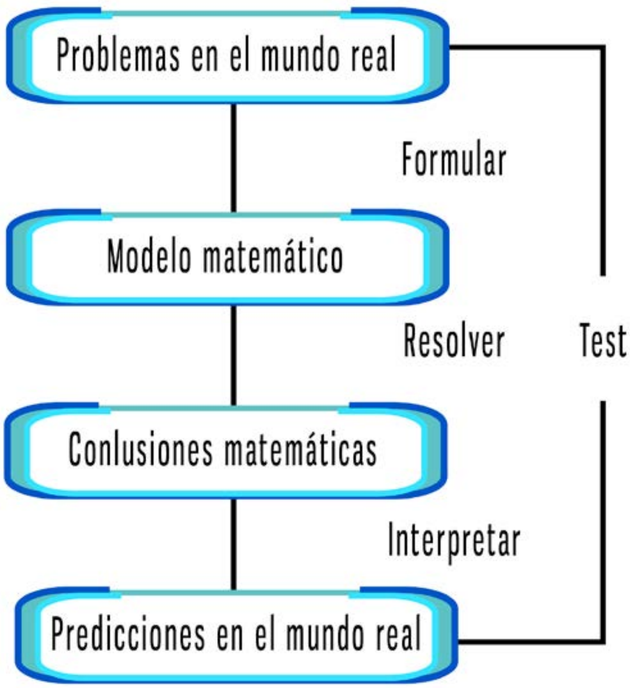
Se define como modelo a una estructura que presenta las características de una determinada situación, o en su defecto, describe teóricamente un objeto o situación dentro de una determinada área del conocimiento, por tanto un modelo matemático es una descripción teórica de un objeto o situación que está fuera de la matemática desde los conocimientos y las expresiones matemáticas.

Algunos ejemplos de estas modelaciones son la variación del tamaño de una determinada población a través del tiempo, los pronósticos económicos, la demanda de un producto, la rapidez de la caída de un producto, la concentración de un producto en una reacción química, la expectativa de vida de un apersona, la variación del área de una superficie en la medida que varía uno de sus lados u otras situaciones.

Los modelos matemáticos son de tipo cuantitativos por estar estructurados a partir del manejo y estudio de cantidades, además los modelos pueden ser de simulación donde se busca predecir una determinada situación de forma precisa, con el fin de establecer una configuración satisfactoria o de control para, a partir de determinados ajustes, alcanzar resultados particulares.

El proceso de modelación puede ser esquematizado así: [1]

[1] STEWART, J. (2008).Calculo de una variable. México, México D.F.: Cengage.



El esquema propuesto anteriormente, especifica varias fases. Después de definir una situación del mundo real, se debe formular un modelo matemático donde se identifiquen y asignen nombre a las variables independientes y dependiente que intervienen, además de establecer supuestos que simplifiquen el fenómeno para hacerlo susceptible de rastrearse de forma matemática.

Por lo general se utilizan conocimientos de física y de matemática para construir ecuaciones donde se relacionan las variables. En situaciones donde no se evidencian las leyes de la física se requiere recopilar la información por medio de datos teóricos o recopilados en pruebas de laboratorio, organizarlos en tablas y analizarlos a partir del comportamiento de los valores de las variables.

A partir de esta representación numérica, se puede construir una representación gráfica por medio de un plano cartesiano. En algunos casos estas representaciones inducen al reconocimiento de una expresión algebraica apropiada.

A partir de la aplicación de la expresión algebraica y del análisis a los procesos matemáticos se realizan deducciones sobre la situación propuesta inicialmente y con ello explicaciones o predicciones.

Después de lo expuesto, se evalúan las predicciones propuestas con datos del mundo real. En caso de no satisfacen las condiciones de la realidad, se hacen las respectivos ajustes al modelo o en su defecto realizar una nueva formulación del modelo, para lo cual se reinicia el proceso.

En ningún caso el modelo matemático es una representación totalmente precisa de una situación física, es más una representación ideal de una situación donde se simplifica la realidad hasta permitir cálculos matemáticos con tal precisión que permite generar conclusiones valiosas.

Existen diferentes tipos de modelos matemáticos entre los cuales está el modelo lineal y el modelo cuadrático. El primero se estudia durante esta semana, en tanto el modelo cuadrático se estudia en la semana ocho.

MODELO LINEAL

Al decir que Y es una función lineal de x, se refiere a que la gráfica de esta función es una recta, que utiliza la pendiente y la intersección de la ecuación de una recta para escribir una expresión algebraica de la función. Esta expresión algebraica es de la forma y=f(x) = mx + b donde m es la pendiente de la recta y b es el valor en el corte de la recta sobre el eje y.

Una característica particular de esta función es que crece o decrece en una proporción constante.

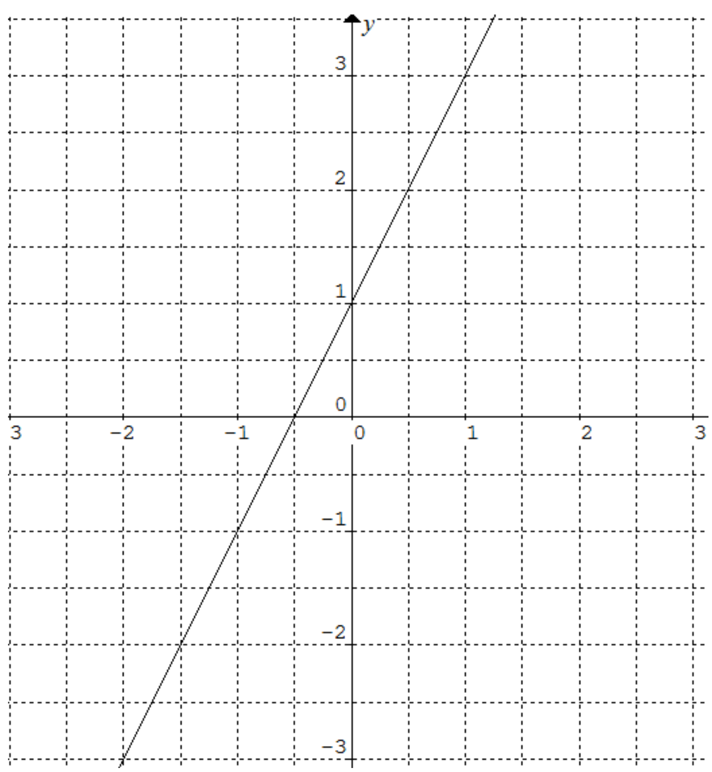
Por ejemplo, al examinar la expresión algebraica f(x)= 2x+1 se observa que al aumentar x en un valor de 0,1 el valor de y = f(x) aumenta 0,2. Esto significa que f(x) se incrementa cinco veces tan rápido como x.

Por la planteado la pendiente de la función f(x)= 2x+1 es 2 siendo este valor la razón de cambio de y respecto a x.

Utilizando la expresión algebraica f(x)= 2x+1 se puede observar la representación matemática y la representación gráfica de la misma función, así:

Verbal

X	f(x)= 2x+1
0,0	1,0
0,1	1,2
0,2	1,4
0,3	1,6
0,4	1,8
0,5	2,0
0,6	2,2
0,7	2,4



Se puede considerar, a partir de lo expuesto que la pendiente, de una recta no vertical, es la relación entre el número de unidades que asciende o desciende verticalmente por cada unidad que avanza o varia horizontalmente, de izquierda a derecha. Por tanto, al considerar dos puntos $(x_1, y_1)\ y\ (x_2, y_2)$ que pertenecen a una misma recta, al desplazarse de izquierda a derecha por la recta, se produce una variación vertical de

$$\Delta y = y_2 - y_1 \qquad \textit{Cambio en } y$$

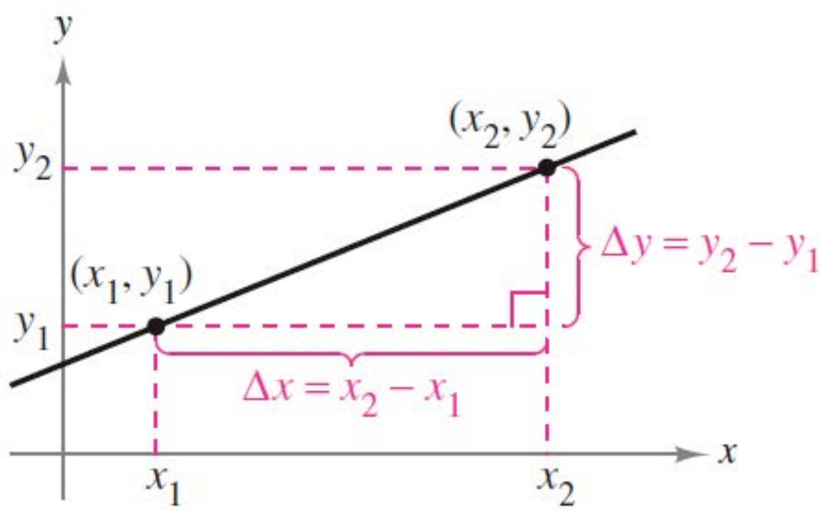
Unidades por cada variación horizontal

$$\Delta x = x_2 - x_1 \qquad \textit{Cambio en } x$$

Unidades. (Δ es la letra griega delta mayúscula y los símbolos Δx y Δx se leen "delta de x " o variación de x y "delta de y" o variación de y)

Entonces, la pendiente de m de una recta no vertical que pasa por $(x_1, y_1)\ y\ (x_2, y_2)$ es:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\ con\ x_2 \neq x_1$$



al aplicar la fórmula de la pendiente se observa que:

$$\boxed{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-(y_2 - y_1)}{-(x_2 - x_1)} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}}$$

A partir de la pendiente m de la recta, calculada con dos puntos $(x_1, y_1)\ y\ (x_2, y_2)$por los que pasa la recta, se termina su ecuación o expresión algebraica, así:

Se toma la expresión y= mx + b, el valor calculado de m y las coordenadas de uno de los puntos, $(x_1, y_1)\ o\ (x_2, y_2)$, se sustituyen para calcular el valor de b y se escribe la expresión algebraica particular de la recta.

Por ejemplo. Calcular la ecuación de la recta que pasa por los puntos (-3,2) y (4,-3).

Solución

Se toma la expresión $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Se determina cual es el punto 1, (x_1, y_1) y quien es el punto 2, (x_2, y_2)

Para el caso $(x_1, y_1) = (-3,2)$ y $(x_2, y_2) = (4,-3)$

Se reemplazan los valores

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-3-2}{4-(-3)} = \frac{-5}{7}$$

Por tanto la pendiente $m = \frac{-5}{7}$

Se identifica así que la variación horizontal de siete unidades ocasiona una variación vertical descendente de cinco unidades, por tanto la recta es descendente.

Calculado el valor de la pendiente en $\frac{-5}{7}$ se toma uno de los puntos sobre los cuales pasa la recta, para lo cual tomo $(x_1, y_1) = (-3,2)$ y en la expresión algebraica y=mx+b realizo las respectivas sustituciones para calcular el valor particular de b, asi:

$2 = \frac{-5}{7} * (-3) + b$ Multiplico

$2 = \frac{15}{7} + b$ Despejando

$2 - \frac{15}{7} = b$ Sumando

$-\frac{1}{7} = b$

Al reemplazar el valor de la pendiente $m = \frac{-5}{7}$ y el valor $-\frac{1}{7} = b$ en la expresión y=mx+b , Se consigue la ecuación particular de la recta que pasa por los puntos $(-3,2)\ y\ (4,-3)$, por tanto:

$$y = -\frac{5}{7}x - \frac{1}{7}$$

La ecuación de la recta se ha expresado en una de las formas, las cuales son:

1. Forma general	$Ax + By + C = 0 \quad (A,B \neq 0)$
2. Recta vertical	$x = a$
3. Recta horizontal	$y = b$
4. Forma punto pendiente	$y - y_1 = m(x - x_1)$
5. Forma pendiente – intersección	$y = mx + b$

RAZONES Y RITMOS O VELOCIDADES DE CAMBIO.[2]

La pendiente de una recta se puede interpretar como una razón o proporción o como una tasa, ritmo o velocidad de cambio. Cuando las dos variables x y y, que se localizan sobre los ejes horizontal y vertical correspondientemente, tiene la misma unidad de medida, la pendiente no tiene unidades y es una razón o proporción y si los ejes tiene diferentes unidades de medida, la pendiente es una tasa, ritmo o velocidad de cambio.

Examinemos el siguiente ejemplo relacionado con la razón de cambio

La población en una ciudad en 1995 era de 3827000 habitantes y en el 2005 el número de pobladores era de 4665000, Determinar la razón de cambio de la población durante estos 10 años.

$$Ritmo\ o\ velocidad\ de\ cambio = \frac{cambio\ de\ población}{cambio\ en\ años}$$

$$= \frac{4665000 - 3827000\ (personas)}{2005 - 1995 \qquad (año)} = 83800\ personas\ por\ año$$

[2] LARSON, R. (2010).Cálculo 1. México, México, D.F.: Mc Graw Hill.

Si la población continua creciendo a un ritmo de 83800 personas por año en el 2015 alcanzará 5503000 habitantes.

Ejemplo 2

A medida que el aire seco se mueve hacia arriba, se expande y se enfría. Si la temperatura del suelo es de 20°C y la temperatura a la altura de 1 km es de 10°C.

a. Exprese la temperatura T (en °C) como una función de la altura h (en kilómetros) suponiendo un modelo lineal adecuado.

b. Construir una representación gráfica de la expresión algebraica construida.

c. Indicar que representa la pendiente calculada.

d. Calcular el valor de la temperatura a una altura de 2,5 km

Solución

a. Para determinar la expresión se asume, como lo plantea el enunciado, T es una función lineal de h, se puede expresar como

$$T = mh + b$$

Y como se tienen valores iniciales cuando la altura h es cero la temperatura T es 20°C, se genera la relación (0, 20) entre la variable independiente h y la variable dependiente T se reemplazan en

$$T = mh + b \qquad 20 = m * 0 + b$$

Entonces b = 20

Entonces el corte del eje y está a 20 unidades del origen (la ordenada al origen)

Como la altura a un kilómetro es de 10°C se genera otra relación entre la altura y la temperatura (1,10).

Al usar las dos relaciones (0,20) y (1,10) se calcula la pendiente

$$m = \frac{\Delta T}{\Delta h} = \frac{20 - 10}{0 - 1} = -\frac{10}{1} = -10$$

Por tanto la función que expresa la situacion es

$$T = -10h + 20$$

sobre el cual se ha calculado al pendiente

b. Para construir la gráfica es necesario determinar los puntos de corte con los ejes así:

Hallar el valor de T si h =0 entonces T = 20 quedando (0,20)

Y hallar el valor de h si T = 0 entonces h = 2 quedando (2,0).

Al localizar los puntos sobre el plano cartesiano y trazar la recta queda:

c. La pendiente representa la variación de la temperatura respecto al tiempo, siendo esta -10 °C por kilómetro

d. A una altura de 2,5 km se puede calcular la temperatura al sustituir h en la expresión algebraica

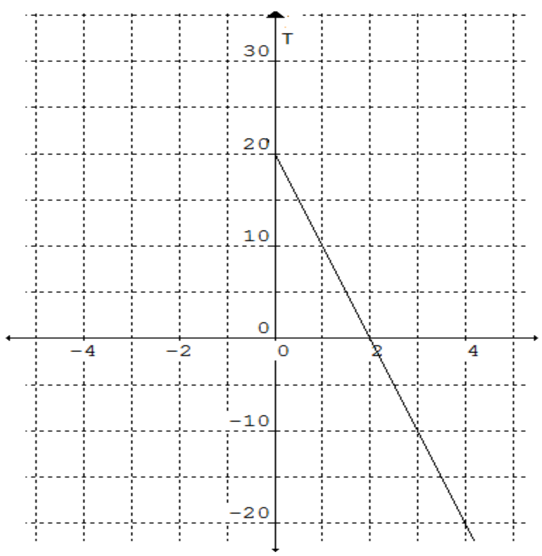
$$T = -10 * 2,5 + 20 = -5°C$$

[3] STEWART, J. (2008).Calculo de una variable. México, México D.F.: Cengage.

En algunos casos no hay principios físicos que ayudan a formular el modelo, por lo que se construye un modelo empírico a partir de la información recolectada y se busca una curva que coincida o se aproxime con los datos, de tal manera que se aproxime a la tendencia fundamental de los datos.

Examinemos el siguiente ejemplo[3]

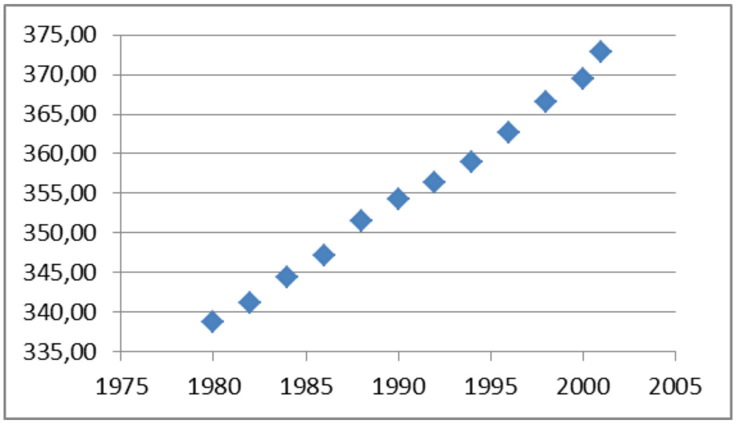
En la tabla sindica el nivel promedio de dióxido de carbono en la atmósfera, medido en partes por millones tomados en el observatorio Mauna Loa de 1980 a 2002. Con la información diseñar un modelo para el nivel de dióxido de carbono.



AÑO	Nivel de CO_2 (en ppmm)
1980	338,7
1982	341,1
1984	344,4
1986	347,2
1988	351,5
1990	354,2

AÑO	Nivel de CO_2 (en ppmm)
1992	356,4
1994	358,9
1996	362,6
1998	366,6
2000	369,4
2001	372,9

[3] STEWART, J. (2008).Calculo de una variable. México, México D.F.: Cengage.



Por la distribución de los puntos correspondientes a la información, se puede ver que están cerca de una recta, por tanto se selecciona un modelo lineal. Pero existen numerosas rectas posibles que se aproximan a los puntos de la información, por esta razón, ¿cuál se debe seleccionar?

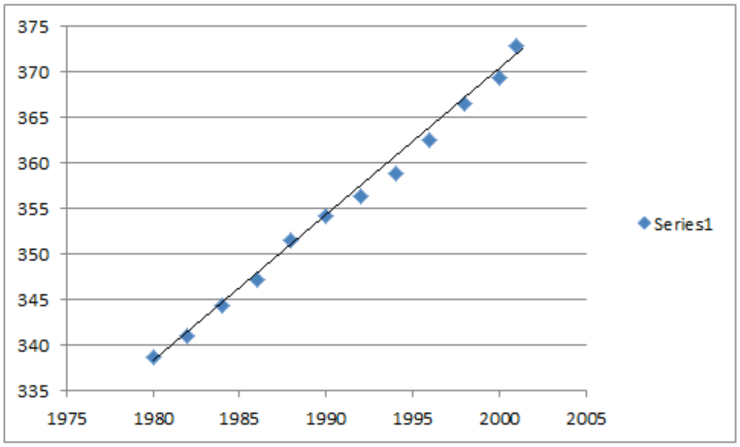
A partir de la distribución de los puntos, la línea que pasa por el primer y el último punto de la información parece ser una posibilidad. Utilizando esa información la pendiente de la recta se calcula con los puntos (2002, 372.9) y (1980, 338.7), así:

$$\frac{372{,}9 - 338{,}7}{2002 - 1980} = \frac{34{,}2}{22} = 1{,}5545$$

Utilizando la pendiente y el punto (1980, 338.7) se formula la ecuación:

$$C - 338{,}7 = 1{,}5545\,(t - 1980) \quad o \quad C = 1{,}5545t - 2739{,}21$$

La ecuación proporciona un modelo lineal posible para el nivel de dióxido de carbono, lo que se representa en la gráfica



Aunque el modelo coincide razonablemente con la información, es necesario construir un modelo más próximo a los niveles reales de CO_2, para lo cual se utiliza un procedimiento estadístico conocido como regresión lineal.

Para el cálculo de la regresión lineal $\hat{Y} = mX + b$ se recurre a la tabla de valores inicial y cálculos que se realizan con estos datos, como:

X_i *datos de la variable años*

Y_i *datos de la variable* CO_2

$\bar{X}$ *el promedio de los datos de la variable años*

$\bar{Y}$ *el promedio de los datos de la variable nivel de* CO_2

$X_i - \bar{X}$ *el valor de la variable años menos su promedio*

$Y_i - \bar{Y}$ *el valor de la variable nivel de* CO_2 *menos su promedio*

$(X_i - \bar{X})^2$ *el valor de la variable años menos su promedio al cuadrado*

Quedando la tabla así:

AÑOS (X_i)	Nivel de CO_2 (en ppmm)(Y_i)	$X_i - \bar{X}$	$Y_i - \bar{Y}$	$(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})$	$(X_i - \bar{X})^2$
1980	338,7	-10,916667	-16,6	181,4895833	119,1736111
1982	341,1	-8,9166667	-14,2	126,8395833	79,50694444
1984	344,4	-6,9166667	-10,9	75,56458333	47,84027778
1986	347,2	-4,9166667	-8,1	39,94791667	24,17361111
1988	351,5	-2,9166667	-3,8	11,15625	8,506944444
1990	354,2	-0,9166667	-1,1	1,03125	0,840277778
1992	356,4	1,0833333	1,1	1,164583333	1,173611111
1994	358,9	3,0833333	3,6	11,02291667	9,506944444
1996	362,6	5,0833333	7,3	36,98125	25,84027778
1998	366,6	7,0833333	11,3	79,86458333	50,17361111
2000	369,4	9,0833333	14,1	127,8479167	82,50694444
2001	372,9	10,083333	17,6	177,2145833	101,6736111

1990,916667	355,3
Promedio Xi	Promedio Yi

870,125	550,9166667
sumatoria de $(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})$	Sumatoria de $(X_i - \bar{X})^2$

Teniendo en cuenta que en la regresión lineal $m = \frac{\sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum (X_i - \bar{X})^2} = \frac{870{,}125}{550{,}916666} = 1{,}5794131$

Y como $\bar{Y} = m\,\bar{X} + b$ $entonces$ $b = \bar{Y} - m\,\bar{X}$ al reemplazar los valores queda

$b = 355{,}3 - 1{,}5794131 * 1990{,}9166667 = -2789{,}1549$

Por tanto la ecuación que proporciona una modelo lineal para el nivel de CO_2 respecto al tiempo es:

$C = 1{,}5794131\, t - 2789{,}1549$

Con esta expresión se puede determinar el nivel de CO_2 en cualquier año por ejemplo en 2015

$C = 1{,}5794131\, t - 2789{,}1549$

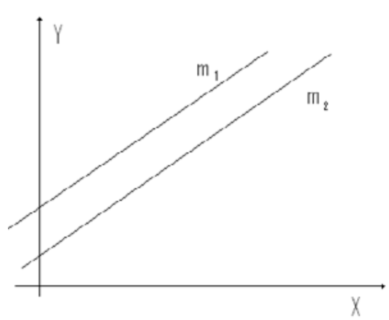
$C = 393{,}36253$ partes por millones

Rectas paralelas y rectas perpendiculares

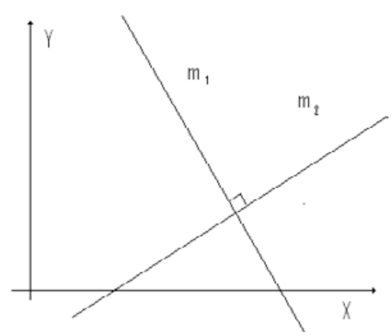
Dentro de la modelación lineal se considera importante relacionar expresiones algebraicas lineales, para lo cual se utiliza la pendiente de la expresión para determinar si las funciones son paralelas o perpendiculares.

De manera específica dos rectas no verticales son paralelas si y solo si tienen la misma pendiente $m_1 = m_2$

y son perpendiculares si y solo si sus pendientes son reciprocas negativas, $m_1 = -\frac{1}{m_2}$



Rectas paralelas



Rectas perpendiculares

Lee todo en: Definici—n de modelo matem‡tico - QuŽ es, Significado y Concepto ***http://definicion.de/modelo-matematico/#ixzz2dkGcT9HT***

Construir la ecuación de general de la recta que pasa por el punto (3,-2) y es:

a. Paralela a y -2x+4=0

b. erpendicular a y +3x -2=0

Solución

a. Se debe escribir la ecuación y -2x+4=0 de la forma pendiente intersección con el fin de compararla con y = mx +b.

Por tanto y -2x+4=0 se expresa como y = 2x-4 que al compárala con la ecuación pendiente intersección encontramos que m = 2

Como la pendiente es m=2 y el punto (3,-2) y utilizando la ecuación pendiente intersección se calcula el valor de b así:

Como y = mx +b se reemplaza m=2 y el punto (3,-2)

-2 = 2* 3 +b opero y despejo

-8 = b

Se construye la ecuación de la recta:
Y = 2x-8 ecuación paralela

b. Para construir la ecuación perpendicular se expresa la ecuación como pendiente intersección, así: y= -3x +2

La pendiente de esta recta es $m_1 = -3$ por la definición de la recta perpendicular

$m_2 = -\frac{1}{m_1}$ entonces $m_2 = -\frac{1}{-3} = \frac{1}{3}$

Como y = mx +b se reemplaza m=1/3 y el punto (3,-2)

-2 = 1/3 *3 + b

-3 = b

Se construye la ecuación de la recta perpendicular y = 1/3 x - 3

6.3.1 Ejemplos, ejercicios o casos de aplicación práctica.

Determinar la expresión de la ecuación punto pendiente que pasa por los puntos (-5,3)y (7,-4)

Solución

A partir de las coordenadas de los puntos (-5,3); (7,-4) y la expresión $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ se determina el valor de la pendiente $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-4-3}{7-(-5)} = \frac{-7}{12} = -\frac{7}{12}$

Haciendo uso del valor de la pendiente y las coordenadas de uno de los puntos, se remplaza en la ecuación pendiente intersección y se calcula el valor de b, así:

$$como \quad y = mx + b \quad con\ m = -\frac{7}{12} \quad y\ (7, -4)$$

$$-4 = -\frac{7}{12} * 7 + b$$

$$-4 + \frac{49}{12} = b$$

$$\frac{1}{12} = b$$

En el valor de $m = -\frac{7}{12}$ y $b = \frac{1}{12}$ se construye la expresión

$$y = -\frac{7}{12}x + \frac{1}{12}$$

2. A partir de la ecuación 4y - 3 x – 5=0 construir la ecuación de la recta paralela y que pasa por (-2,4)

Solución

A partir de la expresión 4y - 3 x – 5=0 se despeja y quedando

$y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$ comparando con la expresión de la recta pendiente intersección y = mx + b se encuentra que $m = \frac{3}{4}$ valor que corresponde a la pendiente y como la recta a construir es una recta paralela, tiene el mismo valor en la pendiente, por tanto se tiene que

$y = mx + b,\ m = \frac{3}{4}\ y\ el\ punto\ (-2{,}4)$ se calcula el valor de b

$$4 = \frac{3}{4} * (-2) + b$$

$$4 = -\frac{3}{2} + b$$

$$4 + \frac{3}{2} = b$$

$$\frac{11}{2} = b$$

Se construye la ecuación $y = \frac{3}{4}x + \frac{11}{2}$ que es paralela a la ecuación inicial.

3. A partir de la ecuación 5y + 2 x – 7=0 construir la ecuación de la recta Perpendicular que pasa por (-3,1)

Solución

A partir de la expresión 5y + 2 x – 7=0 se despeja y quedando

$y = -\frac{2}{5}x + \frac{7}{5}$ comparando con la expresión de la recta pendiente intersección y = mx + b se encuentra que $m_1 = -\frac{2}{5}$ valor que corresponde a la pendiente de la recta 1 y como la recta a construir es una recta perpendicular, el valor en la pendiente de la otra recta es el inverso multiplicativo y signo opuesto quedando $m_2 = \frac{5}{2}$, por tanto se tiene que

$y = mx + b,\ \ m_2 = \frac{5}{2}\ y\ el\ punto\ (-3{,}1)$ se calcula el valor de b

$$1 = \frac{5}{2} * (-3) + b$$

$$4 = -\frac{15}{2} + b$$

$$4 + \frac{15}{2} = b$$

$$\frac{23}{2} = b$$

Se construye la ecuación $y = \frac{5}{2}x + \frac{23}{2}$ que es perpendicular a la ecuación inicial.

4. La demanda para un producto está determinada por le expresión $q = -4{,}5\ p + 4000$ pares vendidos por semana y la oferta está determinada por la expresión $q = 50\ p - 1995$ pares por semana, identificado p como el precio Se obtiene el precio de equilibrio cuando la demanda es igual a la oferta. Calcular el precio de equilibrio y la demanda de equilibrio.

Solución

Se toman las ecuaciones y se soluciona el sistema de ecuaciones. Como q está despejado en las ecuaciones e igualando se tiene:

$$-4{,}5\ p + 4000\ = 50\ p - 1995$$

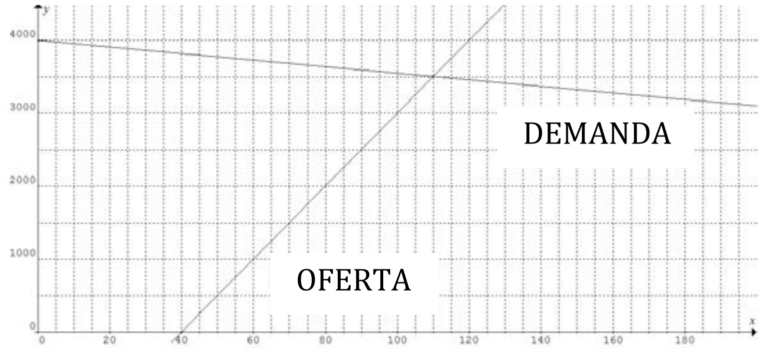
$$54{,}5\ p = 5995$$

$$p = 110$$

El precio p de equilibrio es $110 y la demanda de equilibrio se calcula al sustituir p en cualquiera de las dos ecuaciones, entonces:

$q = -4{,}5\ (110) + 4000 = 3505$

El número de pares por semana es de 3505



En el momento que el precio es inferior a precio de equilibrio, es mayor la demanda que la oferta y resulta una escasez.

Cuando el precio es igual al precio de equilibrio, no hay escasez ni excedente y se dice que el mercado está en equilibrio o está despejado. Cuando el precio es arriba del precio de equilibrio, es mayor la oferta que la demanda y se resulta un excedente.

5. Un grupo de 28 estudiantes recopiló los siguientes datos, que representan su estatura X y sus envergaduras Y, medida en la pulgada más cerca.

(60,61), (65,65), (68,67), (72,73), (61,62), (63,63), (70,71), (75,74), (71,72), (62,60), (65,65), (66,68), (62,62), (72,73), (70,70), (69,68), (69,70), (60,61), (63,63), (64,64), (71,71), (68,67), (69,70), (70,72), (65,65), (64,63), (71,70), (67,67). Encontrar un modelo lineal que represente estos datos.

Con la información suministrada se organiza la siguiente tabla de datos y los correspondientes cálculos para el cálculo de la regresión lineal cuya ecuación es $m = \frac{(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{(X_i - \bar{X})^2}$ donde $m = \frac{460{,}6785714}{460{,}6785714} = 1$

Y como $\bar{Y} = m\,\bar{X} + b$ *entonces* $b = \bar{Y} - m\,\bar{X}$ al reemplazar los valores queda

$b = 67{,}03571429 - 1 * 66{,}8928571 = 0{,}142857143$

Por tanto la ecuación que proporciona una modelo lineal para la relación entre la estatura y la envergadura es:

$$Y = X + 0{,}142857143$$

	ESTATURA Xi	ENVERGADURA Yi	$X_I - \bar{X}$	$Y_I - \bar{Y}$	$(X_I - \bar{X})(Y_I - \bar{Y})$	$(X_I - \bar{X})^2$
1	60	61	-6,892857	-7,0357143	48,49617347	47,51148
2	65	65	-1,892857	-2,0357143	3,853316327	3,5829082
3	68	67	1,107143	0,9642857	1,067602041	1,2257653
4	72	73	5,107143	4,9642857	25,35331633	26,082908
5	61	62	-5,892857	-6,0357143	35,56760204	34,725765
6	63	63	-3,892857	-4,0357143	15,71045918	15,154337
7	70	71	3,107143	2,9642857	9,210459184	9,6543367
8	75	74	8,107143	7,9642857	64,56760204	65,725765
9	71	72	4,107143	3,9642857	16,28188776	16,868622
10	62	60	-4,892857	-5,0357143	24,63903061	23,940051
11	65	65	-1,892857	-2,0357143	3,853316327	3,5829082
12	66	68	-0,892857	-1,0357143	0,924744898	0,7971939
13	62	62	-4,892857	-5,0357143	24,63903061	23,940051
14	73	73	6,107143	5,9642857	36,4247449	37,297194
15	70	70	3,107143	2,9642857	9,210459184	9,6543367
16	69	68	2,107143	1,9642857	4,139030612	4,440051
17	69	70	2,107143	1,9642857	4,139030612	4,440051
18	60	61	-6,892857	-7,0357143	48,49617347	47,51148
19	63	63	-3,892857	-4,0357143	15,71045918	15,154337
20	64	64	-2,892857	-3,0357143	8,781887755	8,3686224
21	71	71	4,107143	3,9642857	16,28188776	16,868622
22	68	67	1,107143	0,9642857	1,067602041	1,2257653
23	69	70	2,107143	1,9642857	4,139030612	4,440051
24	70	72	3,107143	2,9642857	9,210459184	9,6543367
25	65	65	-1,892857	-2,0357143	3,853316327	3,5829082
26	64	63	-2,892857	-3,0357143	8,781887755	8,3686224
27	71	70	4,107143	3,9642857	16,28188776	16,868622
28	67	67	0,107143	-0,0357143	-0,003826531	0,0114796
	66,8928571 Promedio Xi	67,03571429 Promedio Yi			460,6785714 Suma	460,67857 suma

EJERCICIOS

1. Los siguientes pares de datos representan el índice de exposición a una sustancia cancerígena X y la mortalidad del cáncer Y por cada 100000 personas de una población (3.5, 150.1), (3.58, 133.1), (4.42, 132.9), (2,26, 116.7), (2.63,140.7), (485,165.5), (12.65,210.7), (7.42,181.0), (9.35,213.4)

a. Represente gráficamente los datos. De la observación de la gráfica, ¿Cuál será la gráfica aproximada a un modelo lineal de la información?

b. Aplicar el modelo lineal de regresión para construir la expresión matemática que se ajuste a la información suministrada.

c. Calcular el valor aproximado de Y cuando x = 5.[4]

2. La ley de Hooke establece que la fuerza F necesaria para comprimir o estirar un resorte (dentro de los límites elásticos) es proporcional a la variación de la longitud d que experimenta. Esto es, F= kd, donde k es una medida de la resistencia del resorte a la deformación y se denomina constante elástica. La siguiente tabla muestra el alargamiento d, en centímetros, de un resorte cuando se le aplica una fuerza de F Newtons.

F	20	40	60	80	100
d	1.4	2.5	4.0	5.3	6.6

a. Encontrar una función de regresión a partir de la información suministrada.

b. Realizar un gráfico y examinar que tanto se ajusta el modelo a los datos suministrado. Sustentar la relación.

c. Utilice el modelo para estimar el alargamiento del resorte cuando se le aplica una fuerza de 55 Newtons.

[4] LARSON, R. (2010).Cálculo 1. México, México, D.F.: Mc Graw Hill.Pág. 34.

3. Para cada par de puntos, determinar la ecuación de la recta que pasa por ellos y construir su gráfica.

a. (3,5) (-2,3)

b. (-2,4)(3,-4)

c. (1,2)(-2,-6)

d. (5,4)(2,3)

e. (2/3, 1/8)(0.2, 3/4)

4. Dada la ecuación de la recta, construir la recta paralela y la recta perpendicular que pasa por el punto dado y construir su gráfica.

a. $Y = 3x + 5$ (2,3)

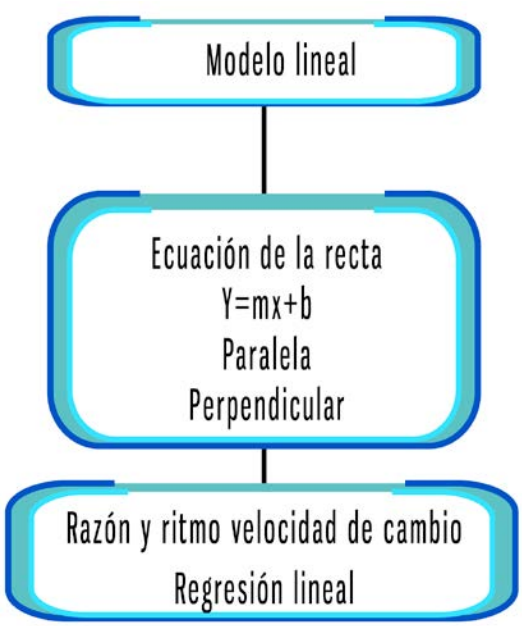
b. $3x + 2y – 2=0$ (0,2)

c. $Y-x-2=0$ (-3,-2)

d. $2/3x + 1/5\ y = -3$ (-2/5,-1/6)

e. $3x – y + 4= 0$ (1.4, 3.2)

6.3.2 Síntesis de cierre del tema.



6.3.3 Actividades auto-evaluativas propuestas al estudiante.

1. Para cada par de puntos, determinar la ecuación de la recta que pasa por ellos y construir su gráfica.

    a. (3,-5) (-2,3)

    b. (2,-4)(3,4)

    c. (-1,2)(-2,6)

    d. (5,-4)(2,-3)

    e. (-2/3, 1/8)(0.2, 3/4)

2. Dada la ecuación de la recta, construir la recta paralela y la recta perpendicular que pasa por el punto dado y construir su gráfica.

    a. Y = 4x - 5 (-2,3)

    b. 3x + 3y + 2=0 (0,-2)

    c. Y-x+4=0 (3,2)

    d. 2/5x - 3/5 y = -3 (2/5,-1/6)

    e. 3x + 2y -54= 0 (1.4, -3.2)

3. Se construye una cinta transportadora de manera que se eleve 1 metro por cada 3 metros de avance horizontal.

    a. Calcular la pendiente de la cinta.
    b. Suponer que la cinta corre entre dos pisos de una fabrica. Calcular la longitud de la cinta si la distancia vertical entre los pisos es de 10 metros.

4. Cada uno de los siguientes datos es la pendiente de una recta que representa los ingresos diarios Y en términos del tiempo X en días. Utilizar la pendiente para interpretar la variación en los ingresos correspondiente a un incremento de un dia

a. m= 800 b. m = 250 c. m = 0

5. La siguiente tabla muestra las poblaciones Y (en millones) de los Estados Unidos durante 2000- 2005. La variable t representa el tiempo en años, t = 0 corresponde a 2000. (Fuentes: U.S. Bureau of the Consus)[5]

T	0	1	2	3	4	5
Y	282.4	285.3	288.2	291.1	293.9	296.6

a. Dibujar los datos en un plano cartesiano y unir los puntos adyacentes con un segmento de línea.
b. Utilizar la pendiente de cada segmento de línea para determinar en qué año se incrementó la población con menor rapidez

6. Un empleado tiene dos opciones a puestos en una corporación. En un puesto le pagan \$14.50 por hora más un bono de \$0.75 por unidad producida. En el otro, \$11.20 por hora más un bono de \$1.30.

a. Construir una tabla donde se representen las dos situaciones

b. Construir una expresión algebraica para cada una de las situaciones.

c. Representar gráficamente las ecuaciones correspondientes a los salarios por hora en términos de X que es el número de unidades producidas por hora para cada una de las opciones.

7. Un pequeño negocio adquiere un equipo de \$875. Transcurridos 5 años el equipo será obsoleto, carente de valor.

a. Escriba una ecuación que proporcione el valor Y del equipo en términos del tiempo X. $0 \leq X \leq 5$

b. Determinar el valor del equipo cuando X = 2

c. Calcular el momento en que el valor del equipo es de \$200.

[5] LARSON, R. (2010).Cálculo 1. México, México, D.F.: Mc Graw Hill. p. 18.

8.1 REMISIÓN A FUENTES COMPLEMENTARIAS

- *http://www.zweigmedia.com/MundoReal/Calcsumm1.html*
- *http://www.slideshare.net/villalobossantiago/modelos-matemticos-8998821*
- *http://definicion.de/modelo-matematico/*
- *http://www.slideshare.net/signosilvia/modelos-matematicos-presentation*
- *http://www.buenastareas.com/ensayos/Ejemplos-De-Modelos-Matematicos-Que-Se/575988.html*

4
UNIDAD

MATEMÁTICAS - SEMANA 8

FUNDACIÓN UNIVERSITARIA
DEL ÁREA ANDINA

Personería Jurídica Res. 22215 Mineducación Dic. 9-83

4

UNIDAD

INTRODUCCIÓN

En esta cartilla se realiza el estudio de los modelos lineales, además de la aplicación de estos modelos a situaciones cotidianas.

Estos modelos matemáticos pueden aportar herramientas para interpretar situaciones cotidianas, para aprender estos elementos teóricos se deben leer los contenidos del módulo, comprender sus procedimientos y manejar estos contenidos en la aplicación.

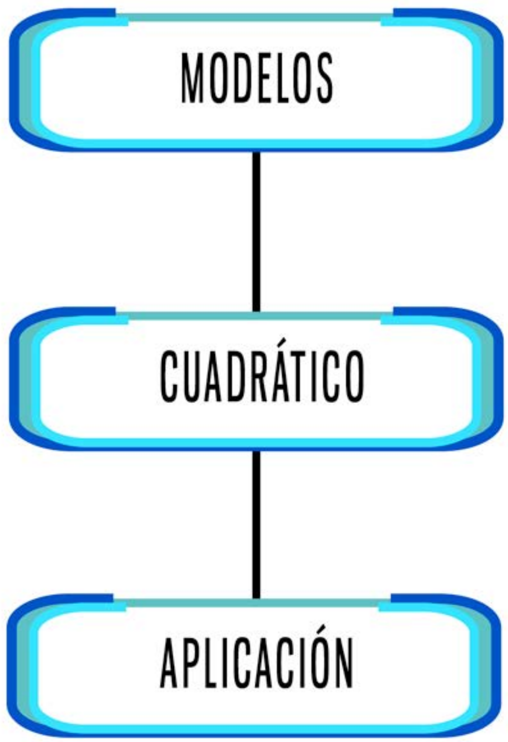
METODOLOGÍA

El proceso de aprendizaje académico por medio de la cartilla se desarrolla en tres etapas. La primera hace referencia a la lectura completa del módulo, realizando la respectiva interpretación, análisis y comprensión del contenido. La segunda etapa es el análisis del video y el contenido del mismo. Y la tercera etapa es la aplicación de los contenidos expuestos a situaciones generales, particulares y específicas.

La segunda etapa puede ser retomada cuantas veces quiera, pero tiene un tiempo limitado para adquirir los conocimientos. Recuerde que debe avanzar con las restantes cartillas y con ello los módulos.

MAPA CONCEPTUAL

MODELOS CUADRÁTICO APLICACIÓN



OBJETIVOS Y COMPETENCIAS

Objetivos

Aprender las características y la aplicación de los modelos cuadráticos

Aplicar los modelos cuadráticos a situaciones cotidianas.

Evaluar la interpretación y la aplicación de los modelos cuadráticos.

Competencias

Aprende las características y la aplicación de los modelos cuadráticos

Aplica los modelos cuadráticos a situaciones cotidianas.

Evalúa la interpretación y la aplicación de los modelos cuadráticos.

DESARROLLO TEMÁTICO

6.1 COMPONENTE MOTIVACIONAL.

La modelación de la función lineal y de la función cuadrática con su respectiva aplicación es fundamental en el desarrollo del conocimiento matemático en cualquier profesión, en especial cuando se trata de áreas del conocimiento como en la que usted está preparándose.

Es de relevante importancia la construcción de modelos lineales y cuadráticos para la interpretación y solución de situaciones de la cotidianidad.

6.2 RECOMENDACIONES ACADÉMICAS.

La presente cartilla contiene elementos fundamentales sobre las funciones cuadráticas y su modelación.

Es fundamental el aprender a modelar apropiadamente las funciones cuadráticas para permitir la interpretación y comprensión de situaciones de la cotidianidad. Es fundamental la lectura comprensiva de los contenidos, interpretar los procedimientos y realizar las actividades durante la semana para que usted no se atrase en el proceso.

6.3 DESARROLLO DE CADA UNA DE LAS UNIDADES TEMÁTICAS.

MODELO CUADRÁTICO

Se define como modelo cuadrático o de segundo grado cuando se genera un modelo de la situación propuesta a partir de una función cuadrática, ya sea de manera verbal, matemática por medio de una tabla, gráfica o algebraica por medio de una expresión.

Como en el modelo lineal, se procura construir la expresión que mejor represente la información de la situación analizada.

Métodos de solución de la ecuación cuadrática[1]

Como el grado de la ecuación cuadrática es dos, en algunos momentos la ecuación tiene dos soluciones, razón por la cual resolver este tipo de ecuaciones es más complejo, para lo cual se ven varios métodos que dependen de la clasificación por su forma.

Completas, cuando la ecuación tiene el término cuadrático, ax^2, el lineal bx y el independiente c, teniendo la forma $ax^2 + bx + c = 0$

Incompletas, son las expresiones donde hace falta el lineal bx o el independiente c, esto ocurre porque b=0 o c=0, quedando las expresiones así:

Incompleta mixta $ax^2 + bx = 0$ incompleta pura $ax^2 + c = 0$

Para la solución de las ecuaciones cuadráticas existen varios métodos para su resolución:

[1] UNIVERSIDAD CNCI DE MÉXICO. Taller de matemáticas I, consultado en http://200.23.36.149/cnci/materia I/TIM110/TIM110_material_b.pdf consultado el 6 de septiembre de 2013, pág. 50.

- Por despeje de la ecuación cuadrática pura.
- Por factorización de la ecuación cuadrática mixta.
- Completando el trinomio cuadrado perfecto
- Por la formula general.

Método de solución por despeje de ecuación cuadrática pura.

Solucionar la ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + c = 0$ consiste en despejar la incógnita con el fin de obtener las dos soluciones por medio de la raíz cuadrada, así:

$$Si \quad ax^2 + c = 0 \quad \rightarrow \quad x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

Ejemplo

Resolver la ecuación $2x^2 - 8 = 0$

La ecuación cuadrática es pura por no poseer el término lineal, por tanto se procede a despejar la variable.

$$2x^2 - 8 = 0$$
$$2x^2 = 8$$
$$x^2 = \frac{8}{2}$$
$$x^2 = 4$$
$$\sqrt{x^2} = \pm\sqrt{4}$$
$$x = \pm 2$$

Se tiene así dos valores que satisfacen la expresión

Ejemplo

Resolver la ecuación $x^2 + 16 = 0$

La ecuación cuadrática es pura por no poseer el término lineal, por tanto se procede a despejar la variable.

$x^2 + 16 = 0$

$x^2 = -16$

$\sqrt{x^2} = \sqrt{-16}$

$x = \sqrt{-16}$

Se presenta la raíz cuadrada de un número negativo, número que no existe en el conjunto de los números reales, porque no existe un número que elevado al cuadrado de -9

Este tipo de números, con raíces cuadradas de números negativos, se les conoce con el nombre de números imaginarios y su nombre se le debe a René Descartes[2]

Es así como se define número imaginario a: $i = \sqrt{-1}$

Por tanto al observar el ejemplo $x = \sqrt{-16}$ y la propiedad $\sqrt{a * b} = \sqrt{a} * \sqrt{b}$

Se puede expresar $x = \sqrt{-16} = \sqrt{(-1) * 16} = \sqrt{-1} * \sqrt{16} = i * \pm 4$

Por tanto lo $x = \pm 4i$

Y las soluciones de $x^2 + 16 = 0$ son: $x = -4i \quad x = 4i$

[2] UNIVIVERSIDAD CNCI DE MÉXICO. Taller de matemáticas I, consultado en http://200.23.36.149/cnci/materia I/TIM110/TIM110_material_b.pdf consultado el 6 de septiembre de 2013, pág. 52.

Método de solución por factorización de ecuaciones cuadráticas mixtas

Para la aplicación de este método se requiere, que la ecuación cuadrática sea mixta, en otras palabras que no posea el término independiente: $ax^2 + bx = 0$

Para solucionar este tipo de ecuación, se utiliza la factorización, por poseer los dos términos un factor común, x, después se igualan los factores a cero y se resuelven las ecuaciones.

Es de resaltar que este tipo de ecuaciones tiene siempre solución y un de ellas es cero.

Ejemplo

Resolver la ecuación $x^2 - 6x = 0$

La ecuación cuadrática es pura por no poseer el término lineal, por tanto se procede a despejar la variable.

$$x^2 - 6x = 0$$
$$x(x - 6) = 0$$

Por la propiedad de los números reales, si a*b = 0 entonces a = 0 o b = 0, se cumple en el ejemplo que:

$x = 0 \quad o \quad x - 6 = 0$

Entonces

Se tiene así dos valores que satisfacen la expresión $x = 0 \quad o \quad x = 6$

Método de solución completando el trinomio cuadrado perfecto

Este método se aplica a la ecuación cuadrática completa: $ax^2 + bx + c = 0$ o a la ecuación incompleta $ax^2 + bx = 0$

Para lo cual se despeja el término independiente, si a es diferente de cero, se divide toda la expresión en este valor. Se toma el coeficiente del término lineal b, se divide en dos y se eleva al cuadrado, este valor se suma a los dos términos de la expresión, para proceder a factoriza el primer término de la igualdad y se opera el segundo término y terminar despejando la variable.

Resolver la ecuación $3x^2 - 12x - 15 = 0$

La ecuación cuadrática es completa y el coeficiente del término cuadrático, a es diferente de un: a = 3, por tanto se divide toda la expresión en 3, quedando

$$x^2 - 4x - 5 = 0$$

Se despeja el coeficiente independiente

$$x^2 - 4x = 6$$

Se toma el coeficiente del término lineal b=-4 se divide en dos y se eleva al cuadrado

$$(b/2)^2 = \ (-4/2)^2 = (-2)^2 = 4$$

Este valor es sumado a las expresiones de la ecuación, quedando así:

$$x^2 - 4x + 4 = 5 + 4$$

Se factoriza el primer término y se opera el segundo

$$(x-2)^2 = \ 9$$

Y se procede a despejar la variable

$$\sqrt{(x-2)^2} = \sqrt{9}$$

$$x - 2 = \ \pm 3$$

$$x = 2 \pm 3$$

se cumple en el ejemplo que:
$x = 2 + 3 = 5 \quad o \quad x = 2 - 3 = \ -1$

Entonces
Se tiene así dos valores que satisfacen la expresión $x = 5 \quad o \quad x = -1$

Método de solución por fórmula general

Este método está relacionado con la fórmula cuadrática o denominada fórmula cuadrática de la cual se obtiene las raíces o soluciones de una ecuación de segundo grado con una incógnita, cuya fórmula es $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Donde

A= Coeficiente del término cuadrático.

B= Coeficiente del término lineal.

C= Coeficiente del término independiente.

Ejemplo.

El producto de dos números es 96 y su diferencia es 4, ¿cuáles son esos números?

Solución

Se representan los números como:

X = el número mayor
Y = el número menor

El enunciado se analiza en dos momentos,

a. El producto de dos números es 96, se representa

$X * y = 96$ (1) y

b. La diferencia de los números es 4, se representa

$X - y = 4$ (2)

De la ecuación (2) se obtiene que $x = 4 + y$. Al reemplazar (2) en (1) queda

$$(4+y) * y = 96$$

$$4y + y^2 = 96$$

$$y^2 + 4y - 96 = 0$$

como la ecuación cuadrática tiene la forma

$$a\&^2 + b\& + c = 0$$

Donde & corresponde a la variables y al comparar las expresiones, se tiene que La variable & es Y.

a = 1
b = 4
c = 96

Al sustituir los valores en la ecuación

$$Y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ se tiene}$$

$$Y = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 * 1 * (-96)}}{2 * 1}$$

$$Y = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 384}}{2}$$

$$Y = \frac{-4 \pm \sqrt{400}}{2}$$

$$Y = \frac{-4 \pm 20}{2}$$

$$Y = \frac{-4+20}{2} \qquad Y = \frac{-4-20}{2}$$

$$Y = 8 \qquad y = -12$$

Las soluciones de la ecuación cuadrática son 8 y -12
Como inicialmente se indicó x = 4 + y al reemplazar por 8 y 12 se tiene

Si y = 8 entonces x = 4 + 8 = 12

Si y = -12 entonces x = 4 + (-12) = -8

Así los pares de números son (12,8) y (-12, -8)

Interpretación desde el discriminante

Se define como discriminante a $\Delta = b^2 - 4ac$

Si $\Delta > 0$, la función tiene dos soluciones $x_1 \neq x_2, \div \in R$

Si $\Delta = 0$ tiene dos soluciones iguales $x_1 = x_2, \in R$

Si $\Delta < 0$ sus soluciones están en el conjunto de los números complejos.

Formas de la función cuadrática[3]

Las funciones cuadráticas se pueden expresar de tres maneras diferentes:

a. De la forma vértice $y = a(x-h)^2 + k$. Esta forma es útil para indicar la transformación que ha tenido la gráfica madre $y = x^2$, las coordenadas del vértice (h,k) de la parábola que es el punto más alto o más bajo y el factor a que indica el valor del estiramiento vertical y cuando es a negativo revela la reflexión de la función sobre el eje x.

b. De la forma factorizada $y = a(x - x_1)(x - x_2)$. De esta forma es sencillo indicar las raíces de la ecuación, x_1 y x_2 que son los valores donde la gráfica se intersecta con el eje x.

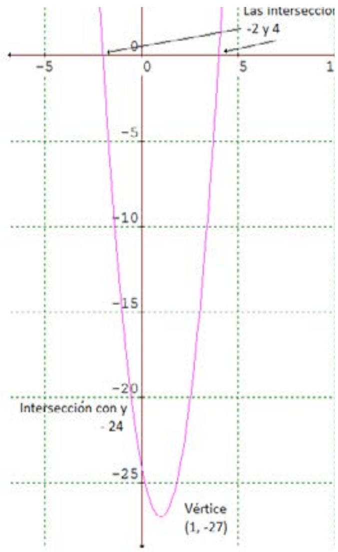
c. De la forma general $y = ax^2 + bx + c$. Esta forma es útil para hallar el valor de C que es la intersección de la gráfica con el eje Y, lo que quiere decir que la parábola pasa por el punto (0, C)

Un ejemplo de la ecuación escrita de las tres formas es:

Forma de vértice: $y = (x-1)^2 - 27$

Forma factorizada: $y = 3(x-4)(x+2)$

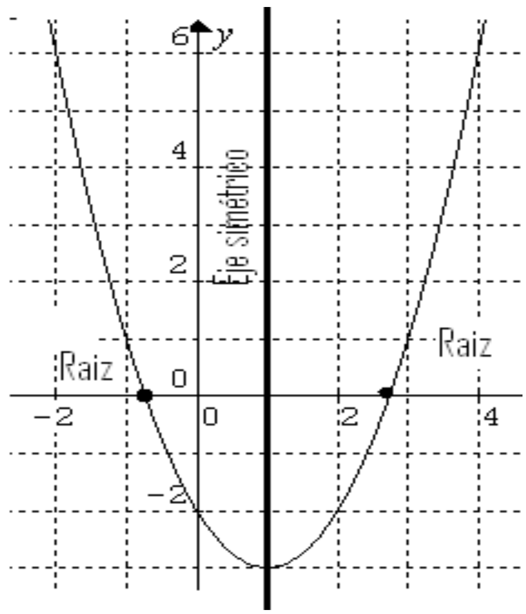
Forma general: $y = 3x^2 - 6x - 24$



[3] HIGH SCHOOL MATH RESOURCES. Algebra Avanzada, consultado en http://math.kendallhunt.com/x19578.html el 6 de septiembre de 2013.

Elementos de la parábola

El dominio de la función cuadrática es R, es decir, la variable x puede ser cualquier número real y su gráfico lo representa la parábola que tiene los siguientes elementos:



Calculo del vértice

Definido el vértice de una parábola como el punto donde la gráfica cambia de sentido. Para calcular el vértice de la función $ax^2 + b\,x + c = y$ se tiene en cuenta que

$$v\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right) \ o \ v\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$$

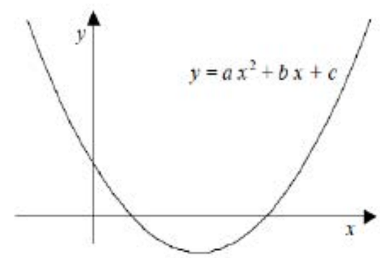
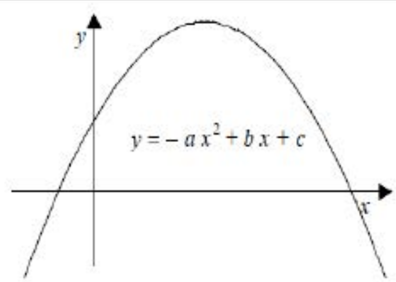
El valor de $-\frac{b}{2a}$ además de permitir el cálculo de las coordenadas del vértice, determina el valor del eje de simetría

Sentido de la parábola

La gráfica de la función cuadrática por ser una parábola tiene un sentido y este depende del signo del coeficiente del término cuadrático, por tanto:

Si el valor de a es positivo, la parábola se abre hacia arriba.

Si el valor de a es negativo, la parábola se abra hacia abajo.

Si a > 0 la parábola abre hacia arriba	
Si a < 0 la parábola abre hacia abajo	

Es importante presentar los métodos que permiten la solución de una ecuación cuadrática, porque hay elementos de este contenido que forman parte de la solución de la función cuadrática.

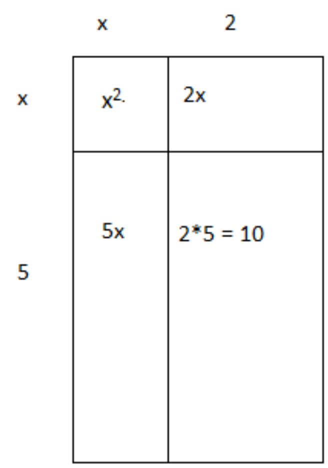
Conversión de forma

A causa de los diversos propósitos, en cada una de las tres formas en que se puede expresar la ecuación cuadrática, es importante realizar la conversión entre ellas, por ejemplo la forma de vértice y factorizada puede cambiarse a la forma general al multiplicar los binomios y operar los términos. En tanto la forma general se puede transformar a la forma de vértice completando el cuadrado y de la forma general a la forma factorizada al factorizar la expresión.

La factorización puede representarse por medio de un diagrama de rectángulo, por ejemplo (x+2)(x+5)= x2+ 7x +10

En algunas oportunidades factorizar es una operación compleja, razón por la cual les presento un método para resolver las ecuaciones cuadráticas, independientemente si puede ser factorizada y es usar la fórmula cuadrática

En la medida que trascurre el contenido, se amplía en las técnicas para transformar las ecuaciones en las diferentes formas.



De la forma de vértice a la forma general.

La función cuadrática al escribir la de forma vértice, es: $y = A(x-h)^2 + k$ al pasarla a la forma general se desarrolla el binomio al cuadrado y se realizan las sumas algebraicas hasta llevar los datos a la forma $y = ax^2 + b\,x + c$

Ejemplo

Expresar la función cuadrática $y = (x-3)^2 - 16$ dada en vértice a forma general,

Dada la expresión $y = (x-1)^2 - 27$ al desarrollar el binomio al cuadrado,

$y = x^2 - 2x + 1 - 27$ al sumar

$y = x^2 - 2x - 26$

De la forma general a la forma vértice

La función cuadrática al escribir la de forma general, es: $y = ax^2 + b\,x + c$ al pasarla a la forma vértice $y = A(x-h)^2 + k$ con base en los términos cuadráticos y lineales se factoriza a, se completa el trinomio cuadrado perfecto, se resta el complemento del trinomio cuadrado perfecto y se operan los términos.

Ejemplo

Expresar la función cuadrática $y = x^2 - 6x + 11$ en la forma vértice

Solución

$y = x^2 - 6x + 11$

como $b = 6$ entonces $\frac{6}{2} = 3$ y $3^2 = 9$ entonce sumo y resto 9

$y = x^2 - 6x + 9 + 11 - 9$ escribiendo el trinomio y sumando

$y = (x-3)^2 + 2$

6.3.1 Ejemplos, ejercicios o casos de aplicación práctica.

Ejemplos

Realizar el análisis y la gráfica de la función $y = x^2 - 8x + 15$

Solución

Es una función cuadrática completa donde:

a = 1 >0 entonces la gráfica es una parábola con las ramas hacia arriba se a

el eje de simetría está determinado por $-\frac{b}{2a} = \frac{-(-8)}{2*1} = 4$

Por tanto el valor del vértice es la abscisa es 4 y la ordenada (y) se calcula

$y = 4^2 - 8 * 4 + 15 = -1$

Entonces las coordenadas del vértice, son (h,k) = (4,-1)

Para calcular los puntos de corte con el eje de la abscisa, se soluciona la función, por cualquiera de los métodos, cuando se cumple que y =0 entonces

$0 = x^2 - 8x + 15$ al solucionarlo por factorización se tiene

0= (x-5)(x-3)   si a*b = 0 entonces a=0 y b = 0 entonces

x-5 = 0   o   x-3=0 por tanto

x=5   o   x =3

Al solucionar $0 = x^2 - 8x + 15$ completando l trinomio cuadrado perfecto se tiene.

$$x^2 - 8x = -15$$

$$x^2 - 8x + 16 = -15 + 16$$

$$(x-4)^2 = 1$$

$$\sqrt{(x-4)^2} = \sqrt{1}$$

$$\pm (x-4) = 1$$

$$x - 4 = 1 \quad o \quad -x + 4 = 1$$

$$x = 1 + 4 = 5 \quad o \quad 4 - 1 = x = 3$$

$$entonces\ x = 5 \quad o \quad x = 3$$

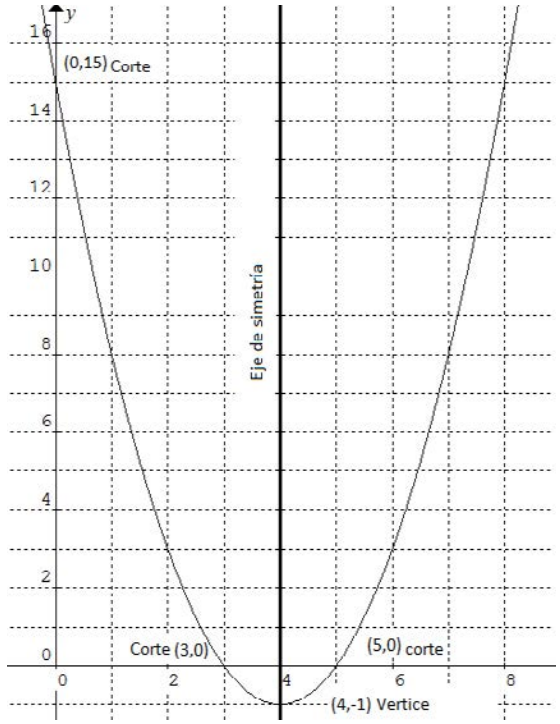
El resolver la expresión $0 = x^2 - 8x + 15$ utilizando la ecuación cuadrática $X = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ se tiene que a= 1, b = -8   y c = 15, al reemplazar los valores se tiene

$$X = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 * 1 * 15}}{2 * 1} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 60}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{8 \pm 2}{2}$$

Entonces $X = \frac{8+2}{2} = \frac{10}{2} = 5 \quad y \quad X = \frac{8-2}{2} = \frac{6}{2} = 3$

Esta información nos indica que los puntos de corte son la abscisa o sea con el eje horizontal, que corresponde siempre a la variable independiente y que en este caso se llama X, son (5,0) (3,0).

Ahora el punto del corte de la gráfica con el eje y tiene una referencia y es que x =0 entonces como $y = x^2 - 8x + 15$ entonces $y = 0^2 - 8 * 0 + 15 = 15$. Por tanto el punto de corte es (0,15). Con la información la gráfica es:



Ejemplo

Calcular una función cuadrática que pasa por los puntos (0,1), (1,0) y (-2,9)

Se está buscando una función del tipo $y = ax^2 + b\,x + c$

Tomando el primer punto de corte (0,1) al reemplazar y = 1 y x = 0 entonces y=c por tanto c = 1.

Hasta el momento se tiene que $y = ax^2 + b\,x + 1$, a lo que falta calcular el valor de a y b para lo cual usamos los valores (1,0)(-2,9) que al sustituir queda:

Con el punto (1,0) $0 = a * 1^2 + b * 1 + 1$ entonces $a + b = -1$ (1)

Con el punto (-2,9) $9 = a * (-2)^2 + b * (-2) + 1$ entonces $4a - 2b = 8$ (2)

Despejando a en (1) queda

a = -b-1 (3) que reemplazado en (2) queda

$4(-b-1) - 2b = 8$

$-4b - 4 - 2b = 8$

$-6b = 12$ entonces

$b = -2$ (4)

Reemplazo (4)en (3) queda:

a = -(-2)-1= 2-1= 1

como a = 1 y b= -2 entonces $y = x^2 - 2x + 1$ es la función cuadrática que cumple las características propuestas.

Ejemplo

Se tiene 24 metros de cerca para delimitar un espacio rectangular que servirá como jardín. Se ha colocado en la tabla las medidas del ancho, el largo y el área de medidas que cumplen la condición

Ancho (m)	0	1	3.5	5	6	8	10.5	12
Largo (m)	12	11	8.5	7	6	4	1.5	0
Área (m^2)	0	11	29.75	35	36	32	15.75	0

Construir la expresión algebraica que determine:

a. El valor del área a partir del valor del ancho.

b. La expresión del área a partir del largo.

c. Construir la gráfica correspondiente a cada una de las situaciones

d. Indicar la medida del ancho y el largo donde el área es máxima.

Solución

a. Con base en la información matemática suministrada se debe llegar a una expresión de la forma $y = ax^2 + bx + c$ donde Y representa el valor del área y X el valor del ancho, para lo cual se identifican los pares de datos, (ancho, área) que en la tabla son:

Ancho (m)	0	1	3.5	5	6	8	10.5	12
Área (m^2)	0	11	29.75	35	36	32	15.75	0

Identifica los pares (0,0), (1,11), (3.5, 29.75), (5,35), (6,36), (8,32), (10.5,15.75) y (12,0)

De los cuales se seleccionan tres cualesquiera: (0,0), (5,35), (6,36) con los cuales se sustituye en $y = ax^2 + b\,x + c$ y se construyen las expresiones:

Con (0,0) $0 = a0^2 + b\,0 + c$ entonces $c = 0$

Como $c = 0$ y con (5,35), $35 = a5^2 + b5$ *entonces* $35 = 25a + 5b$ (1)

Como $c = 0$ y con (6,36), $36 = a6^2 + b6$ *entonces* $36 = 36a + 6b$ (2)

Tomando $35 = 25a + 5b$ (1) Multiplico por 6

$36 = 36a + 6b$ (2) Multiplico por -5

Queda $150\,a + 30\,b = 210$

-180$a - 30\,b = -180$ reduciendo

$-30\,a = 30$ *entonces* $a = -1$

De (1) $b = \frac{35-25a}{5} = 7 - 5a = 7 - 5 * (-1) = 7 + 5 = 12$

Como a = -1, b = 12 y c =0 entonces la expresión del área en función del ancho es $y = -x^2 + 12\,x$

b. Utilizando la información suministrada en la tabla para la relación largo – área, se debe llegar también a una expresión de la forma $y = ax^2 + b\,x + c$ donde Y representa el valor del área y X el valor del largo, para lo cual se identifican los pares de datos, (largo, área) que en la tabla son:

Largo (m)	12	11	8.5	7	6	4	1.5	0
Área (m^2)	0	11	29.75	35	36	32	15.75	0

Se identifican los pares (12,0),(11,11),(8.5,29.75),(7,35),(6,36),(4,32),(1.5,15.75),(0,0) de los cuales se seleccionan tres (0,0),(11,11), (7,35) con los cuales se sustituye en $y = ax^2 + b\,x + c$ y se construyen las expresiones:

Con (0,0) $0 = a0^2 + b\,0 + c$ entonces c = 0

Como $c = 0$ y con (11,11), $11 = a11^2 + b11\ entonces\ \ 11 = 121a + 11b \quad (1)$

Como $c = 0$ y con (5,35), $35 = a5^2 + b5 \quad entonces \quad 35 = 25a + 5b \quad (2)$

Tomando 11$= 121a + 11b \quad (1)$ Multiplico por 5

$35 = 25a + 5b \quad (2)$ Multiplico por -11

Queda $605a + 55\,b = 55$

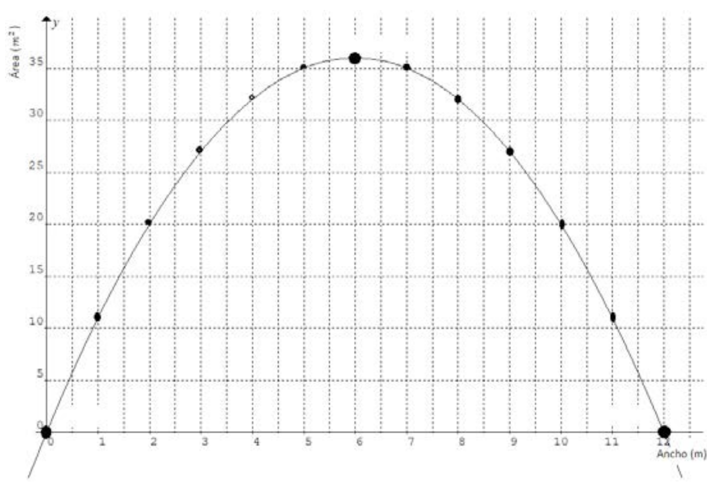
$-275a - 55\,b = -385$ reduciendo

$330\,a = -330 \quad entonces \quad a = \ -1$

De (1) $b = \frac{11-121a}{11} = 1 - 11a = 1 - 11 * (-1) = 1 + 11 = 12$

Como a = -1, b = 12 y c =0 entonces la expresión del área en función del largo es $y = -m^2 + 12\,x$

c. Coinciden las expresiones del área en función del ancho o del largo por tanto realizar una gráfica es realizar la otra gráfica siendo esta:



d. El área es máxima cuando el largo y el ancho son iguales a 6 m, por tanto el áre máxima se construye cuando se construye un cuadrado.

EJERCICIOS.

1. Una función cuadrática de la forma $y = ax^2 + b\,x + 1$ toma el valor y cuando x = -1 y para x=2

2. Si $y = x^2 + k\,x + k$, determinar el valor de k si la gráfica pasa por (2,7)

3. Si $y = x^2 + k\,x + c$ calcular el valor de k y c si la gráfica pasa por (1,0) y (-3,4)

4. Sea $y = ax^2 + b\,x + c$ calcular el valor de a, b y c si la gráfica pasa por (1,0), (0,0) y (-1,2)

5. A cada una de las siguientes funciones determinar el vértice, el eje de simetría, la intersección con los ejes y graficar en el plano cartesiano

a. $y = x^2 - x - 2$
b. $y = -4x^2 - 32\,x - 64$
c. $y = -3x^2 + 6x - 3$
d. $y = 2\,x^2 - 8x$

6. Resolver: Si la suma de dos números es 9 y su producto es 20 ¿cuáles son los números?

7. El número de cerdos atacados cada día por una determinada enfermedad viene dada por la función: $f(x) = -x^2 + 38x + 75$, donde x son los día después de descubierta la enfermedad.

A partir de la situación:

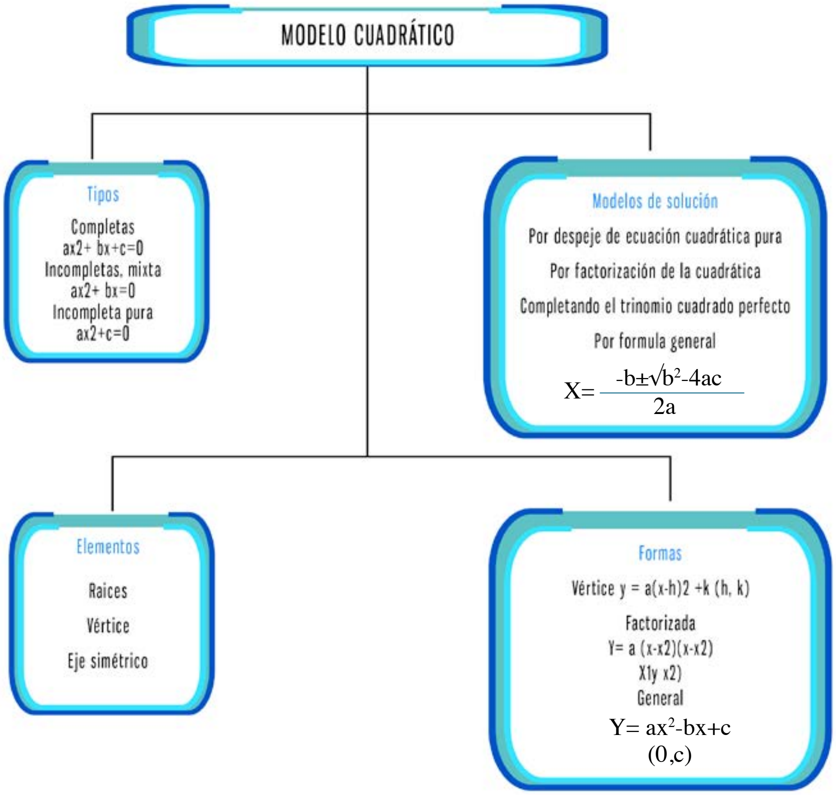
a. Construir una representación matemática (tabla) y una representación gráfica.

b. Determinar la cantidad de cerdos enfermos a los 10 días

c. Indicar si en algún momento deja de aumentar el número de animales enfermos.

d. Establecer una posibilidad para decir cuando desaparece la enfermedad.

6.3.2 Síntesis de cierre del tema



6.3.3 Actividades auto-evaluativas propuestas al estudiante.

[Al final de cada unidad se debe incluir un instrumento de autoevaluación que le permita al estudiante conocer los avances en su aprendizaje de autoestudio, la asimilación cognitiva, el rendimiento académico y el manejo de apoyo.**]**

1. Una función cuadrática de la forma $y = ax^2 + b\,x + 1$ toma el valor y cuando x = -3 y para x=-5

2. Si $y = x^2 + k\,x + k$, determinar el valor de k si la gráfica pasa por (-2,5)

3. Si $y = x^2 + k\,x + c$ calcular el valor de k y c si la gráfica pasa por (2,0) y (-1,-4)

4. Sea $y = ax^2 + b\,x + c$ calcular el valor de a, b y c si la gráfica pasa por (-1,0), (0,0) y (1,-2)

5. A cada una de las siguientes funciones determinar el vértice, el eje de simetría, la intersección con los ejes y graficar en el plano cartesiano

e. $y = x^2 - 3x - 10$

f. $y = 4x^2 - 32x - 64$

g. $y = 3x^2 - 6x + 3$

h. $y = 2x^2 - 12x$

6. Resolver:

a. Si la suma de dos números es 18 y su producto es 45 ¿cuáles son los números?

b. Si la resta de dos números es 6 y su producto es 27 ¿cuáles son los números?

7. El número de plantas de café atacada por un hongo cada día por una determinada enfermedad, viene dada por la función: $f(x) = -x^2 + 8x + 7$, donde x son los día después de descubierta la enfermedad.

A partir de la situación:

a. Construir una representación matemática (tabla) y una representación gráfica.

b. Determinar la cantidad de plantas enfermas a los 5 días

c. Indicar si en algún momento deja de aumentar el número de plantas enfermas.

Establecer una posibilidad para decir cuando desaparece la enfermedad.

8.1 REMISIÓN A FUENTES COMPLEMENTARIAS

- *http://200.23.36.149/cnci/material/TIM110/TIM110_material_b.pdf*
- *http://200.23.36.149/cnci/material/TIM110/TIM110_material_b.pdf*

Bibliografia

1. **ALGEBRA.** Consultado en http://azul2.bnct.ipn.mx/algebra/factorizacion.PDF consultado el 15 de agosto de 2013.
2. **ALLEN, Á.** (2008).Algebra intermedia. México, México D.F.: Pearson Prentice Hall.
3. **ANSALONI, A.** (1985). Matemáticas preuniversitarias. Caracas Venezuela. Editorial reverte.
4. **APONTE, G.** (1998). Fundamentos de Matemáticas Básica.. México. D.F. México. Addison Wesley Longman
5. **APOSTOL, M.** (2006). Matemática. Barcelona, España. Editorial Reverte.
6. **AYRES, F.** (1988).Cálculo diferencial e integral. México, México D.F.: Mc Graw Hill.
7. **BALDOR, A.** (2005). Algebra. México, México D.F. Grupo patria cultural.
8. **BELLO, I.** (2005). Algebra. México, D.F. México. Cegange Learning Editores.
9. **CARROLL, L.** (2008). Alicia en el país de las maravillas. A través del espejo. Madrid: Akal Ediciones.
10. **CASTILLO,M R.** (1997). Algunas aplicaciones de las ecuaciones funcionales. España. Universidad de Cantabria.
11. **CONSEJO NACIONAL DE EDUCACIÓN PARA LA VIDA Y EL TRABAJO.** Propiedades de las operaciones con números reales. México. D.F. México. Consultado en http://www.conevyt.org.mx/colaboracion/colabora/objetivos/libros_pdf/sma3_u1lecc7.pdf el 15 de agosto de 2013.
12. **GÓMEZ,** Pedro. (1995). MateBásica, La belleza y el alcance de lo elemental. Bogotá: Universidad de los Andes.
13. **GONZALES, C & OTROS.** (2010). Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales. Madrid, España. Ed, editex.
14. **GUSTAFSON, D.** (2006).Algebra intermedia. México, D.F. México. Thomson editores.
15. **JIMENEZ, J.** (2005). Matemáticas 1. Jalisco México. Editorial Umbral.
16. **KAUFMANN, J.** (2007). Intermediate Algebra. EEUU: Thomson
17. **KOLMAN, B.** (2005).Algebra lineal. México. Editorial Pearson.
18. **LARSON, R.** (2010).Cálculo 1. México, México, D.F.: Mc Graw Hill.
19. **LEITHILD, L.** (1998). El cálculo. México, México D.F.: Oxford University Press.

20. **MEGIA, F & OTROS.** (2005). Matemáticas previas al cálculo. Medellín Colombia. Sello editorial.

21. **OSORIO, R.** Métodos Numéricos en química con Matlab. Recuperado de

http://books.google.com.co/books?id=K1M4iJHKS1UC&pg=PR4&lpg=PR4&dq=M%C3%A9todos+Num%C3%A9ricos+en+qu%C3%ADmica+con+Matlab+osorio&source=bl&ots=lEN-cM3GsP&sig=kN_YqHcCZVBrBQldyDLy0q8EkSg&hl=es-419&sa=X&ei=Ht-UUuuRAfShsQS7p4CwBw&ved=0CDMQ6AEwAg#v=onepage&q=M%C3%A9todos%20Num%C3%A9ricos%20en%20qu%C3%ADmica%20con%20Matlab%20osorio&f=false

22. **PURCELL, E (2007).** Cálculo., México, México D.F.: Prentice Hall.

23. **REES, P. y SPARKS, F.** (1998). Algebra. México. D.F. México.: Editorial Reverté.
24. **SCHAAF, W y PETERS, M.** (2007).Algebra Y TRIGONOMETRIA. Barcelona, España. Editorial reverte.
25. **STEWART, J.** (2008).Calculo de una variable. México, México D.F.: Cengage.
26. **SWOKOWSKI, E.** (1988). Cálculo con geometría analítica. México, México D.F. : Grupo editorial Iberoamericana
27. **VERGANUD, G.** (1991). El niño las matemáticas y la realidad. Madrid, España: Editorial trillas.

WEBGRAFÍA

1. https://www.youtube.com/watch?v=x2EEmTWVhq8
2. https://www.youtube.com/watch?v=TC8d0KHjDpw
3. https://www.youtube.com/watch?v=Of2wQohpbZo
4. https://www.youtube.com/watch?v=MOM_Kv-8p-g
5. http://www.youtube.com/watch?v=kzFFQwh8NZE
6. http://www.youtube.com/watch?v=TC8d0KHjDpw
7. http://www.youtube.com/watch?v=13PmSi8e3NU
8. http://www.youtube.com/watch?v=qu2xaDVi3YQ
9. http://www.zweigmedia.com/MundoReal/Calcsumm1.html
10. http://www.slideshare.net/villalobossantiago/modelos-matemticos-8998821
11. http://definicion.de/modelo-matematico/
12. http://www.slideshare.net/signosilvia/modelos-matematicos-presentation
13. http://www.buenastareas.com/ensayos/Ejemplos-De-Modelos-Matematicos-Que-Se/575988.html
14. https://sites.google.com/site/ens040modelosmatematicos/modelos-cuadraticos
15. http://books.google.com.co/books?id=kSseL4J0VJIC&pg=PA116&dq=modelos+matematicos+cuadraticos&hl=es-419&sa=X&ei=8wAkUuqtG9PSsAT23IDoCQ&ved=0CDQQ6AEwAQ#v=onepage&q=modelos%20matematicos%20cuadraticos&f=false

Esta obra se terminó de editar en el mes de noviembre
Tipografá Myriad Pro 12 puntos
Bogotá D.C,-Colombia.