

MATEMÁTICAS

Sandra Peña Alonso

EJE 4

Propongamos



Introducción	3
¿Qué es el razonamiento cuantitativo?	4
Interpretación y representación.	8
Formulación y ejecución	10
Juguemos con los números	10
Descifrar datos	12
Formas de razonamiento en matemáticas	13
Razonamiento abstracto	13
Razonamiento deductivo	14
Razonamiento inductivo	15
Razonamiento verbal	16
Razonamiento numérico.	17
¿Qué es la argumentación matemática?	19
La argumentación en matemáticas nos convoca a la modelación	21
Otros razonamientos con objetos imposibles	23
Bibliografía	26

En este eje de pensamiento se pretende dar respuesta a la pregunta ¿Cuáles son los saberes que como profesional de la *Fundación Universitaria del Área Andina* debo fortalecer para ser un ciudadano matemáticamente competente? Las competencias son un enfoque de evaluación del aprendizaje, el desempeño laboral y del desarrollo de las capacidades, con gran auge y aceptación en los contextos educativos y laborales.

Las empresas aplican pruebas de competencias para determinar habilidades, capacidades e indicadores de desempeño de sus aspirantes y colaboradores. Estas pruebas, generalmente están valoradas por la intención de un psicólogo o una psicóloga, quien valora actitudes, conocimientos, habilidades y aptitudes frente a una situación determinada.

En este eje se pretende familiarizarlos con los saberes: saber ser, saber hacer, saber saber, saber convivir, en el contexto de situaciones matemáticas, que de una parte favorecen el desarrollo del pensamiento matemático y de otro lado, fortalecen habilidades previamente adquiridas. En este orden, se requiere de actitud frente a las tareas propuestas, dado que varias están orientadas al descubrimiento, al análisis y a la argumentación mediada por juegos, trucos, herramientas web y otros recursos que tendrán la finalidad de acercarlos al razonamiento matemático.

¿Qué es el
razonamiento
cuantitativo?





Figura 1.
Fuente: shutterstock/307963430

El razonamiento cuantitativo es una competencia transversal que se supone presente en los planes de profesionalización vigentes. Esta entrada, nos debe indicar que la relación psicología y matemáticas está presente a donde quiera que vayamos. Esta competencia es valorada en las pruebas profesionales y en los niveles educativos de media y básica. De acuerdo a los planteamientos del Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación (ICFES, 2016) **el razonamiento cuantitativo se corresponde, con los saberes que un ciudadano, en su cotidianidad pone en juego ante la resolución de situaciones problema.** Esta primera mirada de las matemáticas, alude a unos saberes que transversalizan y dinamizan la vida de las personas en su diario. Matemáticas que son útiles por su carácter práctico y en ocasiones por su uso no interiorizado o reconocido como un conocimiento formal y validado.

Todos sabemos matemáticas, en ocasiones las usamos para hacer cuentas, materializar proyectos, organizar los gastos de la casa o para emprender un proceso de ahorro. Otras matemáticas, hacen presencia en nuestra cocina, cuando vamos a preparar un arroz, debemos saber estimar la cantidad de agua que se requiere, la cantidad de arroz, sal, tiempos de cocción entre otros saberes. Aun así, es probable que el arroz no quede bien preparado, no por no saber hacer el arroz, sino por desconocer esos conocimientos matemáticos, tan necesarios y útiles en la vida diaria.



Figura 2.

Fuente: shutterstock/613330520

En el módulo del ICFES (2016), se define “razonamiento cuantitativo como un conjunto de elementos de las matemáticas, sean estos conocimientos o competencias, que permiten a un ciudadano tomar parte activa o informada en los contextos social, cultural, político, administrativo, económico, educativo y laboral”. No escapamos a las matemáticas, estos conocimientos nos acompañan en nuestra vida diaria y nos conducen a tomar decisiones más fiables. Nos encontramos con las matemáticas en las noticias, en el periódico, en una programación cultural, en la vida laboral, en la organización y vida familiar, es decir que el vínculo con esta disciplina es más cercano de lo que comúnmente se cree.



¡Recordemos que!

Las matemáticas se configuran como una articulación de saberes, que favorecen el desarrollo científico, humano y tecnológico en una sociedad. Actualmente, mediante la aplicación experta de métodos, desarrollo de modelos, elaboración de software, captura y tratamiento de datos etc. se están generando soluciones prácticas a problemas que requieren del uso y apropiación de herramientas y técnicas matemáticas.

Dicho lo anterior, en esta idea de articulación se propone un enlace o entrelazamiento entre los saberes matemáticos que se enseñan en la escuela y los saberes de las matemáticas aplicados a la solución de problemas prácticos, algunos situados en el contexto de las ciencias, en el entorno mismo y en la aplicación de la tecnología.



¡Datos!

El razonamiento cuantitativo según lo propone el ICFES, se compone a su vez de tres subcompetencias que se valoran en las pruebas de estado. Estas tres competencias articuladas, permiten la generación de un saber matemático que contextualiza escenarios de las ciencias, de la cotidianidad y otras, propias de este conocimiento.

Para profundizar en el razonamiento cuantitativo lo invitamos a realizar la lectura complementaria.



¡Lectura complementaria!

Módulo de razonamiento cuantitativo.

Ministerio de Educación Nacional – Saber Pro 2016-2

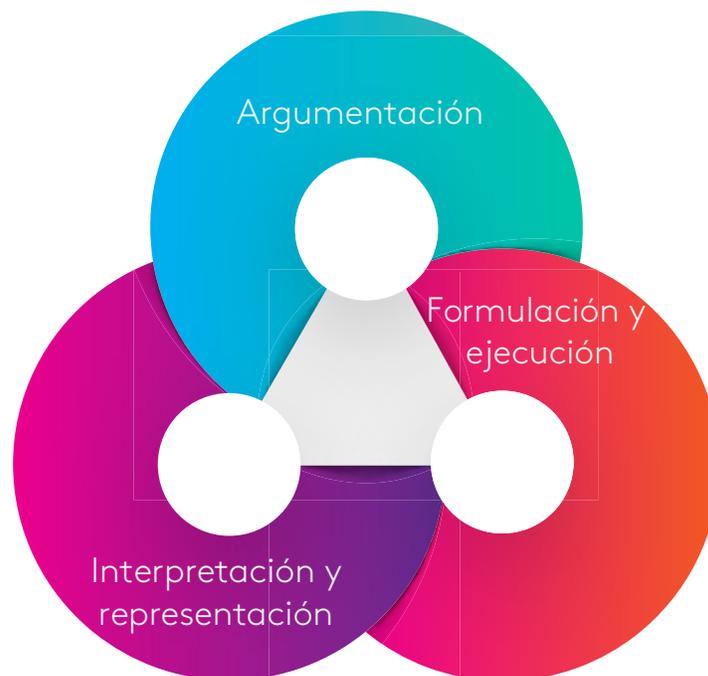


Figura 3 Competencias de razonamiento cuantitativo
Fuente: propia

Interpretación y representación

La interpretación que se espera podamos realizar, responde a diferentes formas de comunicar datos. Datos que están presentes en los problemas, tanto los que se expresan de forma explícita como los que hay que deducir a partir de la información abordada. Datos en enunciados, noticias, gráficos, informes estadísticos, infogramas, archivos de Excel, tablas, por mencionar algunos textos en donde se ubican los mismos.



Ejemplo

Para ilustrar un ejemplo, la figura siguiente corresponde a una pieza gráfica de un infograma presentado en el periódico El Tiempo.

Infografía disponible

<http://www.eltiempo.com/datos/donde-estan-los-billetes-que-ya-no-usamos-69514>



Figura 4. Informa ¿Dónde están los billetes que ya no usamos
Fuente: goo.gl/t2LbmM

Son muchos los datos y clases de los mismos que tenemos en un infograma. Allí encontraremos datos en gráficos, datos que representan frecuencias relativas y porcentuales, datos expresados en cantidades continuas y discretas, datos que caracterizan una o más variables y datos que nos informan e inducen a tomar decisiones o a asumir un punto de vista frente a la información que presenta.

Y habiendo reconocido los datos, ¿Qué se espera que se haga con ellos? El tema en apariencia es sencillo, el asunto no es complicado cuando se sabe cuáles son los datos y para qué serán usados, lo interesante de esta competencia se encuentra en la transición del dato a su representación, es decir después de extraer, escudriñar, identificar, la información cualitativa o cuantitativa, ¿Qué proceso sigue?



¡Recordemos que !

Los datos como ya lo hemos mencionado, pueden ser expresados en diferentes contextos, por ejemplo, pueden ser presentados en situaciones de conteo; en otras ocasiones se busca que los datos nos sirvan para comparar dos magnitudes, para modelar el comportamiento de una variable o simplemente para caracterizar un fenómeno. Así los datos pueden presentarse en contextos de medida, conteo, estudios de probabilidades, procesos de modelación por mencionar algunos aspectos a considerar.

En este orden debe existir una relación entre los siguientes elementos a la hora de interpretar un grupo de datos o en su conjunto una situación que provee datos.

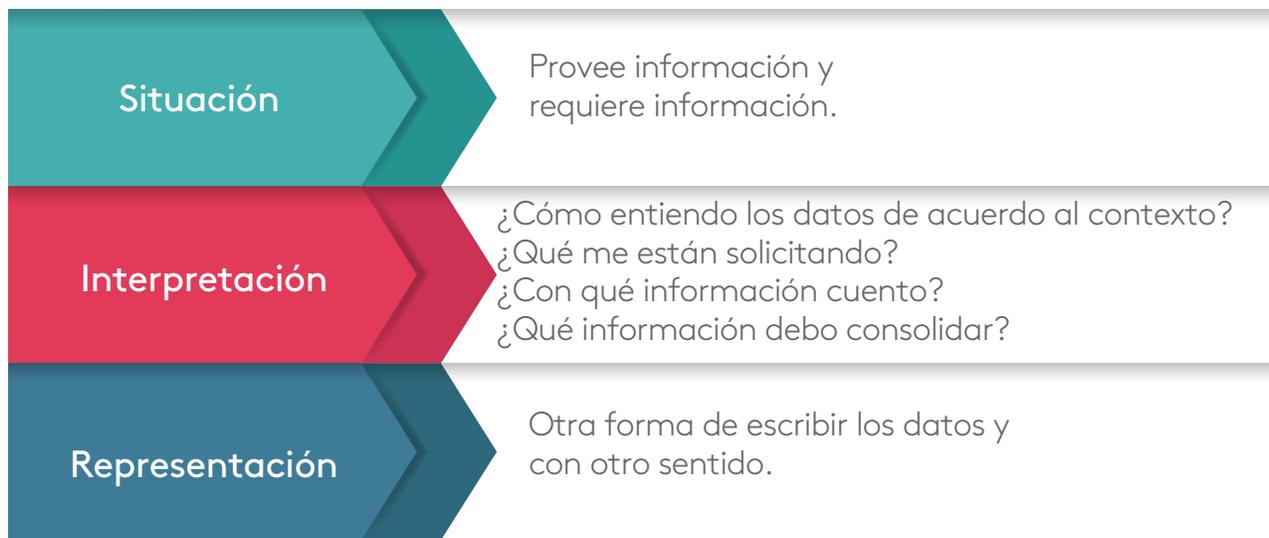


Figura 5. Interpretación y representación de información (datos)

Fuente: propia

De otro modo cuando nos piden interpretar y representar información, nos están solicitando en últimas que demos cuenta de las características básicas de la misma, independientemente del tipo de texto y contexto en el que se nos entregue. A la vez esta información se traduce en insumo para la siguiente competencia que se relaciona con el razonamiento cuantitativo.

Formulación y ejecución

Se espera que a partir de la información logremos generar no una sino varias soluciones de apropiación de la misma. El razonamiento cuantitativo se vinculó en ocasiones con más datos de orden cuantitativo, situación que no desconoce los atributos de algunos fenómenos en el campo de las matemáticas.

Ejemplo: en la siguiente situación se propone una serie numérica.

Juguemos con los números



Instrucción

Completa la serie y explica el patrón numérico

$$1 \times 1 =$$

$$11 \times 11 =$$

$$111 \times 111 =$$

$$1111 \times 1111 =$$

$$11111 \times 11111 =$$

¿Es posible expresar el patrón anterior como una potencia? ¿Qué sucede si se suprime la tercera línea de la serie? Justifica y explica matemáticamente.

Así, para solucionar situaciones como la anterior, y otras de mayor complejidad, se espera que tracemos varios caminos para llegar a una solución involucrando información cuantitativa y esquemática. A la vez, no es suficiente con el diseño de un plan de intervención frente a la situación, sino que debemos poner en práctica nuestro diseño para ser validado en la aplicación; de esta manera sabremos qué lógica tiene dicho procedimiento y si es consistente con la situación planteada. Finalmente, lo que se espera es que lleguemos a una solución viable y consistente.

La tercera competencia es la de argumentación, la intención con relación al razonamiento cuantitativo es que tengamos la capacidad de validar o refutar procedimientos, estrategias, soluciones planteadas ante una situación.

La situación se presenta en un texto informativo lineal. De esta, se pueden derivar varias situaciones matemáticas, por ejemplo:



Ejemplo

“En noviembre de 2012 se produjo la caída de la firma comisionista de bolsa más grande del país, como consecuencia del no pago de un crédito de 20 mil millones de pesos al Banco BBVA que obligó a la intervención y posterior liquidación de Interbolsa por parte de la Superintendencia Financiera.

El descalabro de la firma, con un portafolio de 174 millones de dólares, es quizás el más sonado de los últimos años, una historia de corrupción que defraudó a 1.260 inversionistas colombianos y en pérdidas que alcanzan el billón de pesos” Disponible en <http://www.elcolombiano.com/negocios/economia/los-cinco-escandalos-financieros-mas-polemicos-de-colombia-BA2839542>.

- a. ¿Es correcto afirmar que 174 millones de dólares equivale exactamente en pesos a 509.927.593.644,49? SI_____ NO_____ ¿Por qué?

Evidentemente, para contestar a esta pregunta debemos estar de acuerdo o no con la afirmación que se está realizando. Por ende, se espera que procedamos a realizar una conversión de dólares a pesos para establecer si el valor entregado se ajusta a la situación o si por el contrario la presenta como errónea. **En este caso, el procedimiento utilizado para resolver dicha situación tiene la intención de ser un camino para la elaboración de una explicación acorde al contexto, en caso de que el camino resulte efectivo contestaremos afirmativamente, validando así la solución que nos proponen, pero el ejercicio no finaliza allí, es necesario generar argumentos, razones o explicaciones que den cuenta del por qué esa es la solución y no otra.**

En este sencillo modelo hemos tratado de presentar lo que en primera instancia se espera que hagamos frente a esta competencia. Otra forma de argumentación se elabora a partir de la siguiente situación:



Instrucción

Descifrar datos

Juan nació en MCMLXXXIII. A los V años ingresó a realizar su grado I, cuando cumplió XII años culminó su educación primaria. V años después recibió su titulación como bachiller, luego, un lustro y un año después estaba terminando su carrera. ¿En qué año finalizó su profesión Juan?

- a. En el año MMVII
- b. En el año MMVI
- c. En el año MMIX
- d. En el año MMX

¿Cuál de las opciones es válida para la situación? Explica con el paso a paso de la misma.

Ahora vamos a razonar mientras damos respuesta a algunos cuestionamientos.

- a. ¿Qué hace que un triángulo equilátero sea equilátero y no isósceles? Busca al menos cinco argumentos para dar respuesta a nuestra pregunta.

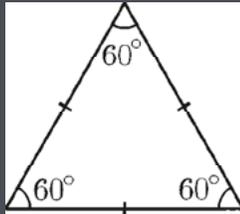


Figura.6
Fuente: propia

- b. ¿Cómo determinar números primos menores que 100 sin utilizar la criba de Eratóstenes? Lista el paso a paso, luego aplica y revisa si el procedimiento es válido o se deben realizar ajustes.

- c. Se proyecta que el valor del transporte público en Colombia tenga el siguiente comportamiento en ciudades capitales. Al año 2030, ¿Cuál será el comportamiento del precio del transporte en cada ciudad?

Año	Aumento	Bogotá \$2200	Medellín \$2000	Barranquilla \$1900	Pasto \$1850
2018	1.2%				
2020	0.7%				
2022	1.4%				
2024	0.5%				
2026	1.6%				

Tabla 1.
Fuente: propia



Instrucción

Elabora un argumento a favor del sistema de movilidad capital, que justifique el precio de transporte para todos los ciudadanos independientemente de los ingresos que tengan.

d. ¿Falso o verdadero? ¿Lo uno sí, lo otro no?

El éxito académico de los estudiantes de la Universidad depende del buen funcionamiento de la plataforma Canvas. Elabora un conjunto de argumentos sencillos para justificar la respuesta frente al supuesto anterior.

Formas de razonamiento en matemáticas

Razonamiento abstracto

Capacidad para resolver problemas de manera lógica. Un razonamiento implica el reconocimiento de un patrón de comportamiento en la situación planteada. Por ejemplo:



Ejemplo

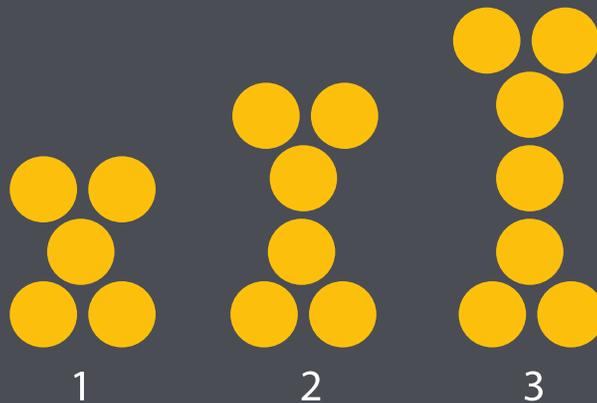


Figura 7
Fuente: propia



Ejemplo

Esta serie numérica y geométrica establece una relación numérica al involucrar operaciones y relaciones entre las cantidades 5, 6, 7...

$$2+1+2$$

$$2+1+1+2$$

$$2+1+1+1+2$$

A nivel geométrico también presenta unas variaciones en la distribución del espacio. Cuando se presenta un patrón con formas y colores se determinan claves para establecer otros razonamientos.

Otro ejemplo:

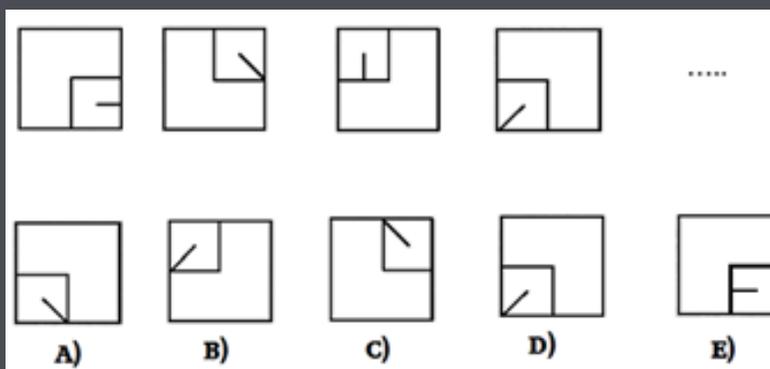


Figura 8
Fuente: Googleimages.com

Razonamiento deductivo

¿Hemos jugado alguna vez a desarrollar el rompecabezas denominado Sudoku? En este juego se aplican varias reglas del razonamiento lógico.

	2			9 3		1 8	
	1			7		6	
7	4				6		2
							7
8		2			1	5 4	9
4		3	5 8				
6			9				2
						8	
	3 7		2 8				5

Figura 8
Fuente: Googleimages.com

Observa que en el arreglo numérico encontramos relaciones numéricas y geométricas. El arreglo se compone de filas, columnas y diagonales. Cada caja está conformada por 3 filas y 3 columnas; en cada caso se muestran algunos números comprendidos entre 1 y 9, incluidos estos. El ejercicio consiste en llenar, organizar, escribir los números faltantes en cada cuadrado sin repetir número en filas y columnas. Un sudoku es un rompecabezas con una solución única.

El razonamiento deductivo se caracteriza porque permite elaborar una conclusión que se deriva de diferentes razonamientos. En este tipo de razonamiento se establece un conjunto de explicaciones, justificaciones, ensayos previos antes de derivar una conclusión que permita un argumento lógico sobre el patrón que explica el funcionamiento de este juego.

En matemáticas y de forma general no hay una única forma de hacer razonamientos, cada persona establece patrones de pensamiento totalmente diferentes. Sin embargo, el razonamiento que es un proceso mental, que guarda algunas reglas que le otorgan un sentido lógico a saber:

- **Principio de identidad:** algo es igual a sí mismo, todo objeto es igual a sí mismo se define como A es A.
- **Principio de no contradicción:** una afirmación no puede ser verdadera y falsa al mismo tiempo. Se puede decir cómo "Es imposible que A sea B y no sea B".
- **Principio del tercero excluido:** dada una situación una alternativa es falsa y la otra verdadera, no hay cabida para una tercera alternativa. Así, "Ser o no ser, esa es la cuestión" se define como "A es B" o "A no es B" "Hoy es viernes u hoy no es viernes".

Razonamiento inductivo

Este tipo de razonamiento es el que nos permite tomar decisiones de acuerdo a un conjunto de pistas que vamos recibiendo del entorno, parte de elementos particulares para establecer generalidades en un comportamiento. Por ejemplo, si amanece oscuro, con algunos indicios de lluvia, hace mucho frío no es difícil deducir que probablemente llueva, por tanto, el uso de paraguas es una buena alternativa para evitar situaciones que no queremos o que ponen en riesgo la salud. Este tipo de razonamiento es un compañero habitual, no somos conscientes del mismo por su naturalidad. Sin embargo, este tipo de razonamiento en matemáticas puede adquirir un carácter formal cuando se entiende que se compone de un conjunto de premisas verdaderas para establecer una conclusión falsa.

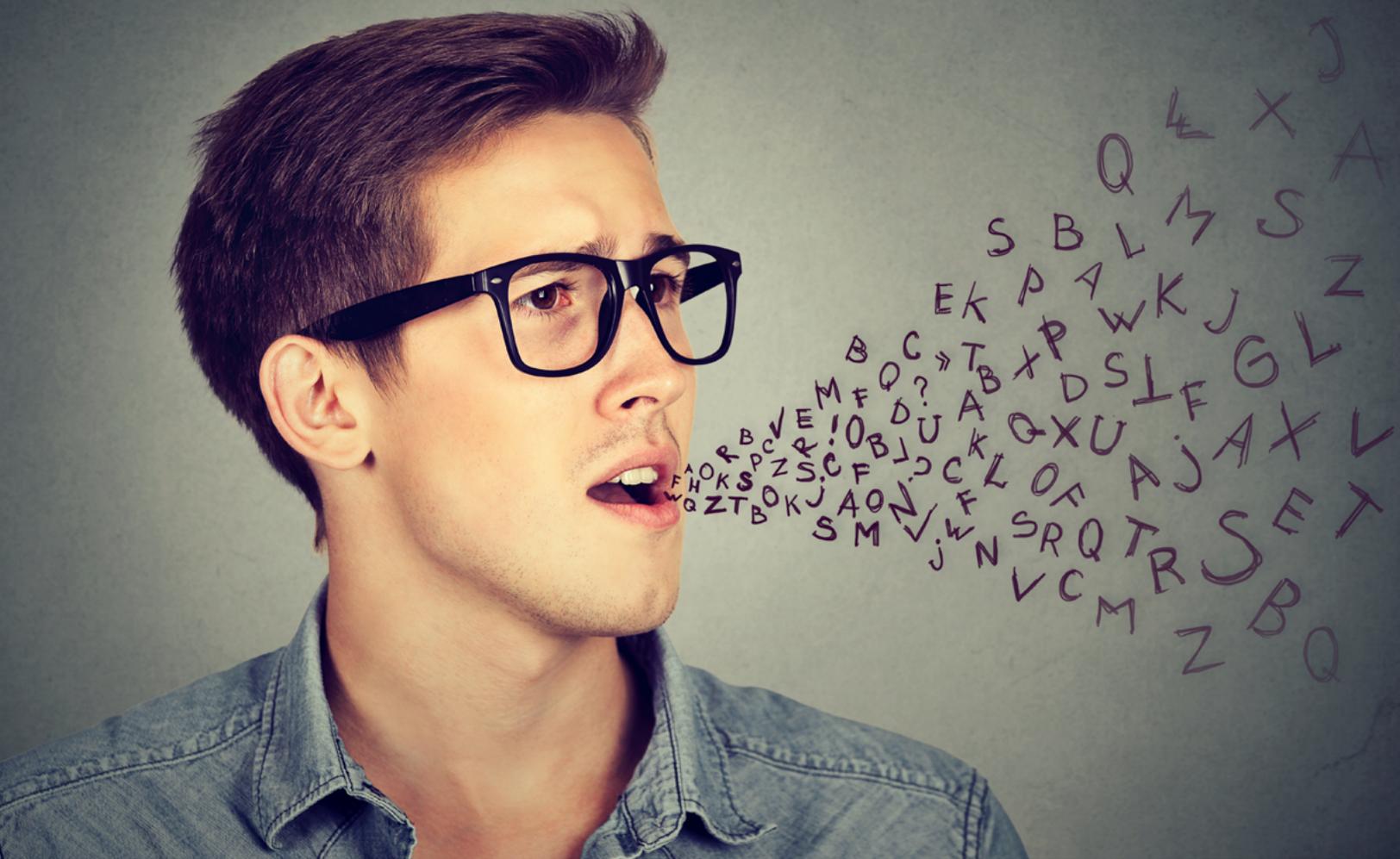


Figura. 10
Fuente: shutterstock_495494197

Razonamiento verbal

Se entiende como el conjunto de reglas que favorecen la actividad mental al procesar información verbal, simbólica, icónica para establecer procesos de clasificación, organización, relación y dotación de significados. Ejemplo, si pasamos del código verbal al escrito nos encontramos con juegos de palabras como el siguiente.

Psicología y matemática

Psicología y matemática



Freud	Idea	Cerebro	Secuencia
Raíz	Serie	Fracción	
Psicología	Número	Potencia	
Pensamiento	Patrón	Razonamiento	
Memoria	Comportamiento	Cantidad	

Figura 11. Relación simbólica, psicología y matemáticas
Fuente: propia

Razonamiento numérico

Este tipo de razonamiento guarda una estrecha relación con el razonamiento verbal, dado que se compone de un conjunto procesos y relaciones entre datos, información, símbolos, gráficos y otros elementos lingüísticos que es preciso identificar, relacionar, interpretar para resolver cualquier situación. Pueda que seamos buenos en el manejo de los números y sus cálculos, pero si no manejamos la información en contextos de uso y aplicación este tipo de razonamiento no se considera lógico.

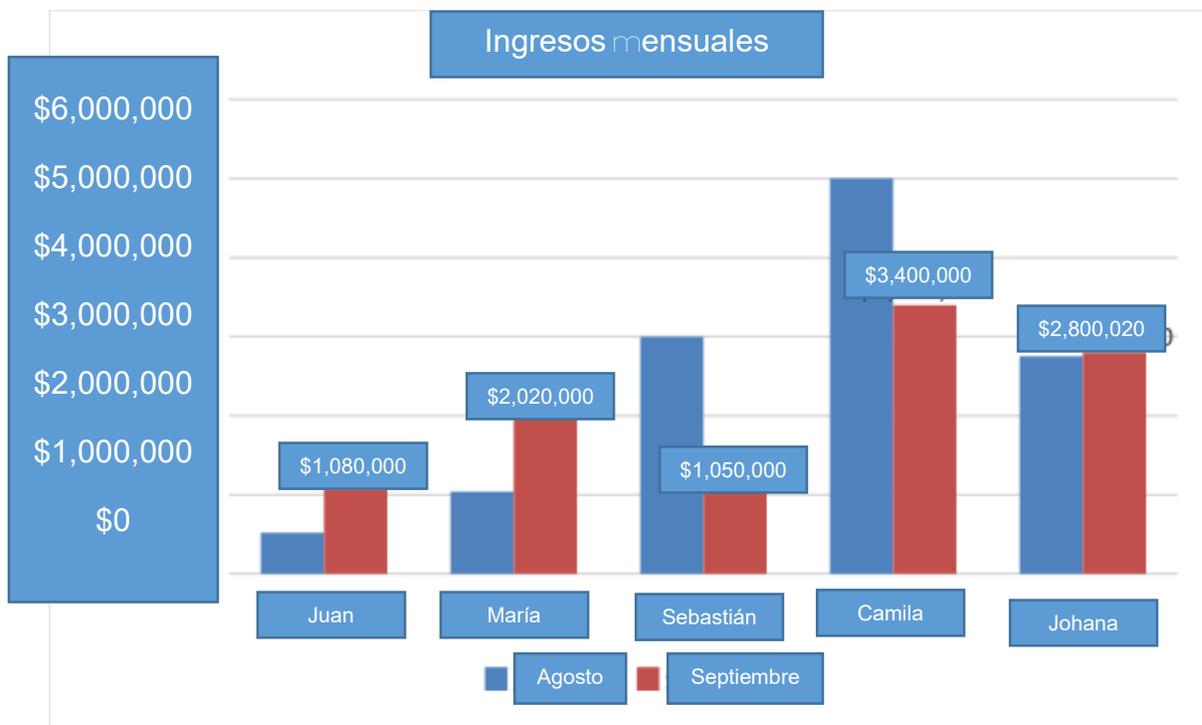


Figura 12. Un texto en matemáticas para el razonamiento
Fuente: propia

Del gráfico anterior podríamos formular algunos interrogantes, por mencionar:

- ¿En cuánto disminuyó el porcentaje de ingresos de Camilo en el mes de septiembre?
- ¿Cuánto más ganó Sebastián con relación a Juan?
- ¿Cuál es la diferencia en porcentaje de los ingresos de chicos con relación a las chicas?
- ¿Se puede determinar una regularidad en el comportamiento de los ingresos de las personas señaladas?



Figura. 13
Fuente: shutterstock_157594730

¿Qué es la argumentación matemática?

De acuerdo con Gamboa, Planas y Edo (2010) este tipo de argumentación refiere a la elaboración de un discurso orientado hacia un receptor con la finalidad de justificar hechos o datos. No puede haber argumentación sin la elaboración de justificaciones y explicaciones.

Así, las explicaciones se consideran unidades iniciales que dan origen a los argumentos. De estas se derivan características de las razones que darán paso a la argumentación. Una explicación deriva en razones y estas a su vez en argumentos. En este tránsito son las conclusiones las formas de validar o negar las razones previamente elaboradas.

Entonces en el camino hacia la argumentación en matemáticas hemos de recorrer varios caminos.

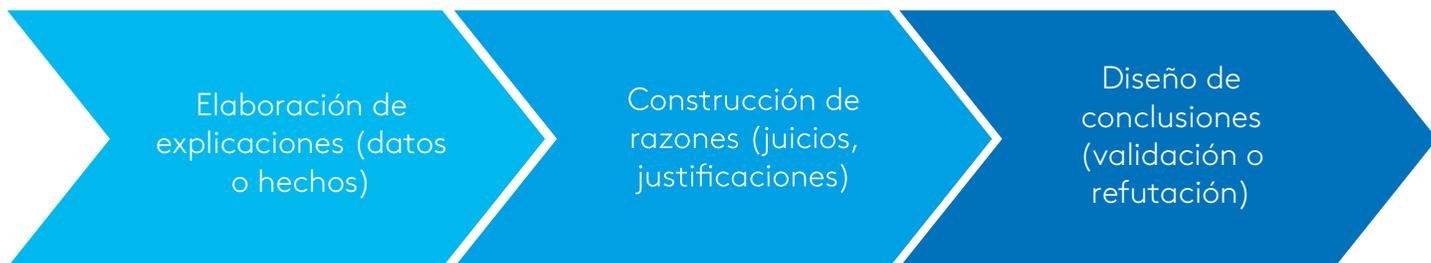


Figura 14. Proceso de argumentación
Fuente: propia



Instrucción

Para contextualizar lo anterior se propone un ejercicio de indagación de algunas teorías que han servido en algún momento histórico para explicar diferentes fenómenos. La invitación es a revisar en detalle cada apartado, los autores y buscar la información necesaria para completar la tabla siguiente.

Teoría	Principales hipótesis	Hechos	Justificación	Conclusión
Teoría fisicoquímica				
Teoría de los campos mórnicos Rupert Shaldrake				
Teoría de la endosimbiosis Lynn Margullis				
Teoría cuántica de David Joseph Bohm				
Teoría Gaia de James Lovelock				
Teoría de las Ecovisiones de Fritjof Capra				

Figura 14. Proceso de argumentación
Fuente: propia

La argumentación en matemáticas nos convoca a la modelación

En el documento de Lineamientos Curriculares de Matemáticas del Ministerio de Educación Nacional (1998), se entiende la modelación como un proceso de pensamiento que se relaciona con otros procesos (resolución de problemas, comunicación, razonamiento etc.) los cuales no actúan de manera independiente en el planteamiento y resolución de problemas reales, sino que se relacionan para la elaboración de juicios, soluciones, ideas, representaciones y estrategias de diferente índole, siendo la elaboración de modelos una forma de hacer concreto lo abstracto de una realidad particular o global.

Como se expresó previamente la modelación es un proceso de pensamiento que se articula con la comunicación y la resolución de problemas. La actuación relacionada de estos tres procesos de pensamiento hará que el estudiante, beneficiario de esta propuesta participe desde una perspectiva que descentraliza los contenidos para ubicarlos en la periferia de intereses pedagógicos y pone en su lugar la relación entre comunicación, modelación y resolución de problemas (Ver relación en gráfico siguiente); siendo la modelación un eje transversal de todo el proceso de formación. Así, la comunicación viene a potenciar las habilidades básicas para expresar de forma oral y escrita las ideas matemáticas, comunicar lo aprendido, comprendido significado, y a la vez aportar al fortalecimiento del lenguaje propio de las ciencias mediante el uso y vinculación de términos técnicos.



Figura 15. Competencias matemáticas articuladas
Fuente: propia

Ahora, los invito a revisar el siguiente enunciado:

Piensa un número, multiplícalo por 5, súmalo uno, multiplica el resultado por 2, divide el resultado entre 10 y resta el número inicial

Figura 16.
Fuente: propia

De acuerdo a la situación una forma de representar correctamente el enunciado en lenguaje matemático es:

- a. $\left\{ \frac{[(5x - 1) + 2]}{10 - x} \right\} - x$
- b. $\left\{ \frac{[(5x + 1)]}{10} \right\} - x$
- c. $\left\{ \frac{[2(5x - 1)]}{10} \right\} - x$

Ahora responde, ¿Qué hace que ese truco funcione para varios números? Elabora al menos tres explicaciones.

¿Con qué números el truco no funciona?

Ahora revisemos el siguiente caso:

Si se realiza el ejercicio con los

Números 1, -1, 2, 2.5, -2

¿Qué variaciones se obtienen en el resultado?

Explica el funcionamiento de este truco.

Piensa un número, súmalo 3, multiplica el resultado por 2, resta de la cantidad anterior 8 y divide entre 2.

Figura 17.
Fuente: propia

Otros razonamientos con objetos imposibles

Los objetos imposibles proponen desafíos al razonamiento. Se consideran imposibles en la medida que no pueden ser reproducidos más allá de los esquemas gráficos, escapan a las formas de racionalidad tradicionales. Estos objetos pueden tener varias perspectivas, pero ninguna de las dos es correcta.

Observa detenida y detalladamente cada imagen, luego responde:

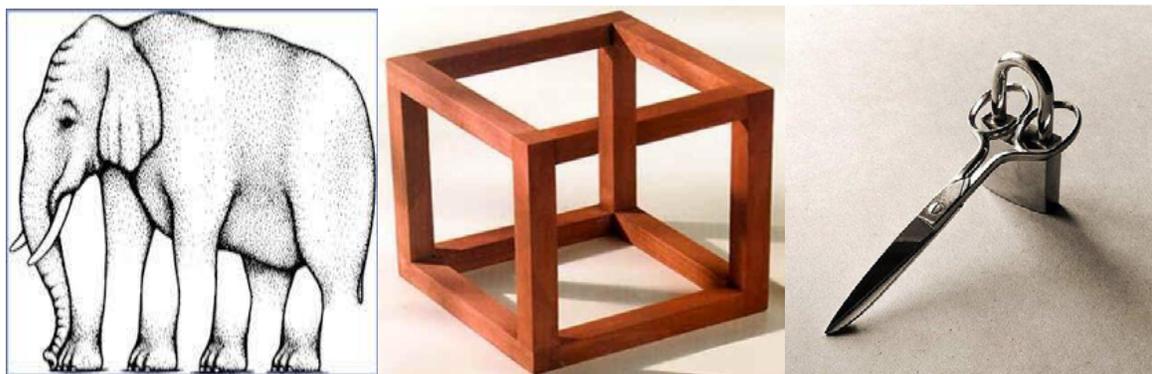


Figura 18. Figuras imposibles
Fuente: propia

- ¿Qué tienen en común las imágenes?
- ¿Qué representan o explican las imágenes?
- ¿Las imágenes que se presentan corresponden con elementos del entorno?
- ¿Pueden proponer una imagen similar?

Ahora bien, otros elementos que favorecen el razonamiento en matemáticas son las paradojas. Las paradojas se sustentan en las contradicciones, son otras formas de lo absurdo. Lee en detalle la siguiente figura, ¿Qué es una paradoja entonces? ¿Cómo se razona este tipo de imágenes?

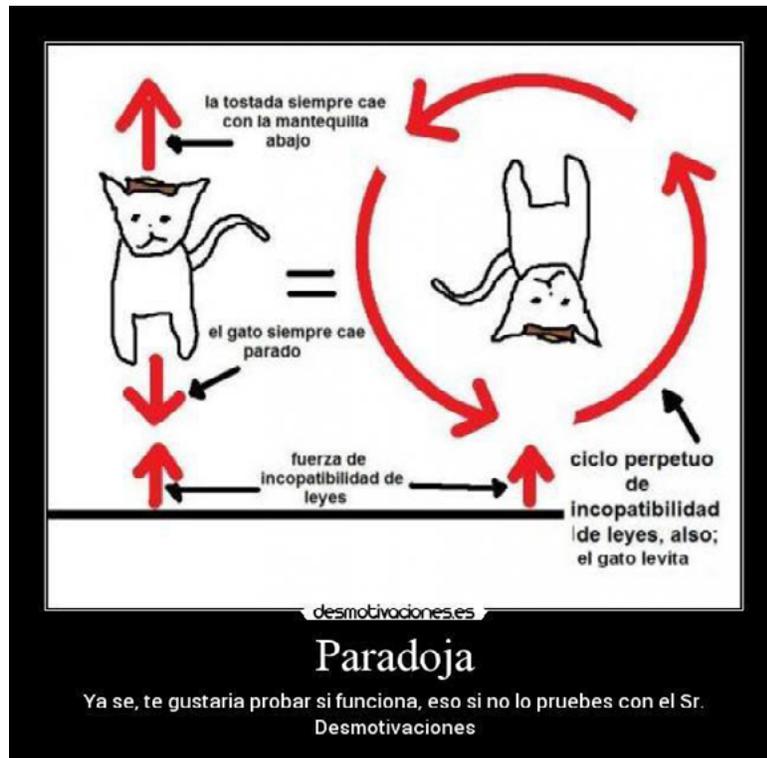
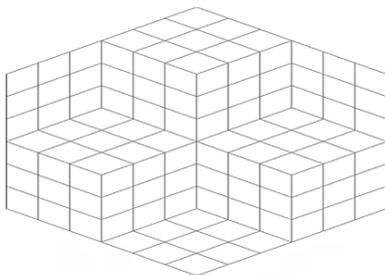


Figura 19. La paradoja del gato
Fuente: www.googleimages.com

Ahora probemos creando con color una paradoja visual con cada diseño dado.

Diseño A.



Diseño B.

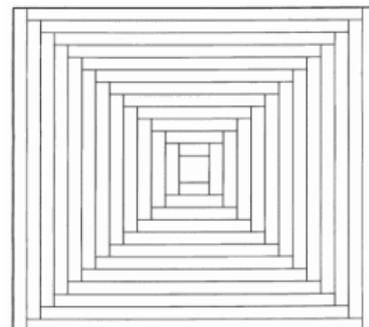


Figura 20.
Fuente: Propia

Para concluir este módulo, queda abierto no sólo a la imaginación sino a las otras formas de razonamiento que puede elaborar un estudiante durante su formación. Se reitera que la argumentación como proceso de pensamiento se consolida durante la vida, este es un espacio para hacer apertura a esta forma de pensar.

Antes de pasar a la evaluación queremos invitarlo a observar lo siguientes vídeos:

 **Video**

- Las matemáticas son para siempre
TEDx
- Me gustan los problemas
TEDx
- Königsberg Bridge Problem
Emathame
- ¿Acabó Pericles con la peste de Atenas usando matemáticas?
Castellano, G



Instrucción

Para finalizar los invitamos a realizar la actividad evaluativa de este eje.

ICFES. (2016). Aprende en línea UDEA. Recuperado de <http://aprendeenlinea.udea.edu.co/lms/moodle/mod/resource/view.php?id=107694>

De Gamboa, G., Edo, M. y Planas R. (2010). Argumentación matemática: Prácticas escritas e interpretaciones. *Suma*. 64, pp. 35-44.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). Colombia Aprende. Recuperado de: http://normaldemompox.tripod.com/documentos/lineamientos_matematicas.pdf