MATEMÁTICAS

Sandra Peña Alonso

EJE 3

Pongamos en práctica

Fuente: Shutterstock/244680268

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina
MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Este eje está dedicado al estudio de los procesos de comunicación y de modelación en matemáticas. La pregunta orientadora de este referente de pensamiento es: *¿Cómo la modelación de fenómenos de variación y cambio, mediados por el lenguaje algebraico, contribuye a la formación de pensamiento variacional en la Fundación Universitaria del Área Andina?*

Las matemáticas al igual que otras ciencias tienen su propio código de comunicación. En ocasiones, el acceso a un conjunto de símbolos, representaciones y expresiones que parecen otra lengua, restringe el acceso al pensamiento matemático. El álgebra es una forma de comunicación formal de las matemáticas que se han estudiado hasta el momento, el estudio de las expresiones algebraicas, las operaciones y la modelación de fenómenos no son otra cosa, que la extensión de la aritmética, sólo que manifestada en el pensamiento abstracto.

El lenguaje matemático es universal, se caracteriza por su conexión con el estudio de fenómenos derivados de otros contextos como las ciencias: física, química, geometría, estadística, topografía y topología, por mencionar algunas. El código de las matemáticas tiene tantas variaciones como otros, de acuerdo al contexto comunica, sin embargo, se compone de un conjunto de símbolos, significados, reglas de uso y formas de decodificación que es preciso atender.

Este conjunto de símbolos, reglas y combinaciones constituyen una forma de codificar y decodificar lo que se quiere comunicar, se hace necesario entonces que todos los participantes tengan acceso a estas expresiones para saber qué es lo que se pretende a partir de este módulo.

Para el desarrollo del eje relacionado con el pensamiento variacional, se ha propuesto una ruta, donde el participante es un co-constructor del contenido presentado, por ello, se espera una participación detallada, dinámica, integradora y relacional de cada una de las actividades propuestas. Adicional, la lectura de cada una de las situaciones expuestas requiere de una segunda construcción para su comprensión y problematización.

Contextualización: el lenguaje matemático y el lenguaje de la vida diaria

Figura 1 Caricatura Matemáticas educadas
Fuente: http://www.triego.com/2013/09/11/mucho-gusto-un-amigo-mas/

Las personas hoy se comunican a través de diferentes expresiones, códigos, símbolos y lenguajes (música, grafiti, atuendos, gestualidad, danza etc.). El lenguaje es un dispositivo que brinda la posibilidad de manifestar sentimientos, expectativas, proyectos e ideas en general. De la misma manera que cada persona asume unas formas que le son propias en la comunicación verbal, gestual, corporal, escrita u oral, en las matemáticas, también se apropia un lenguaje conformado por signos, números, símbolos. Este lenguaje puede ser confuso y enredado, pues hay una creencia de que solo los profesores, científicos, ingenieros, ecónomos, contadores y otros profesionales pueden entenderlo en determinados espacios de divulgación del conocimiento.

Los participantes de este curso, tienen el reto de conocer y aproximarse a la primera barrera con la que se pueden encontrar al estudiar las matemáticas indefinidas: El lenguaje de las matemáticas, por esta razón aparentemente esencial, se propone un recorrido por las siguientes definiciones que con ayuda de los compañeros pueden decodificar y contextualizar mediante ejemplos cotidianos.

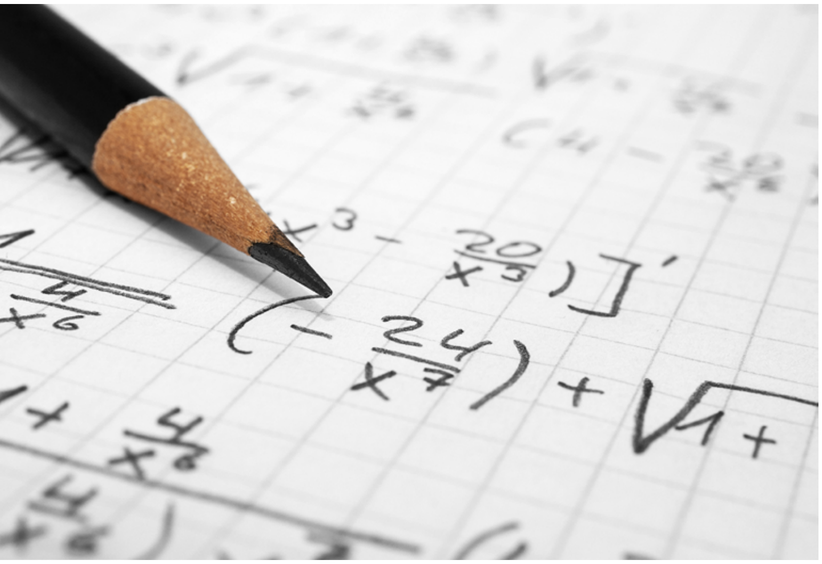


Figura.2
Fuente: www.shutterstock.com/358855256

La comunicación según la definen los lineamientos curriculares de matemáticas propuestos por el Ministerio de Educación Nacional (1998), se entienden como un proceso de pensamiento que favorece el desarrollo de otros procesos siempre y cuando se le integre de manera armónica mediante estrategias que vinculen transiciones del pensamiento concreto al pensamiento abstracto y viceversa.

De igual modo, la comunicación permite la expresión de las mismas mediante diferentes sistemas de representación. En la siguiente tabla se ilustran algunos elementos propios del código de comunicación en matemáticas

Tipo de signo	Descripción y uso
Signos de relación.	Estos signos son los que permiten establecer comparaciones entre dos magnitudes. Sirven para relacionar cantidades, Por ejemplo: ≤menor o igual que; ≥mayor o igual que; =gual que; ≠diferente a.
Signos de operación.	Son todos aquellos que denotan acciones como agregar, quitar, aumentar, reiterar, partir, repartir entre otras. Ejemplo: Producto axb; a*b;(a) (b); a.b Adición a+b; Sustracción:a -b;División: a÷b;a/b; a:b Potencia; a^x;a.a= a^2; Radicación √(a) ; ∛a por mencionar algunos ejemplos.
Signos de agrupación.	Estos signos están asociados a las operaciones matemáticas, sirven para cambiar, invertir, modificar, transformar el orden de una operación. Estos signos son paréntesis ( ), llaves cor- chetes [a+b], barras ǁaǁ .

Tabla 1 Tipos de signos que se usan en contextos numéricos, de medida, variación, probabilidad e incertidumbre en matemáticas
Fuente: propia

Instrucción

Para contextualizar el cuadro anterior, resuelve las situaciones:

a. Ubica en la recta numérica el número que cumpla con la condición dada:

- Un número comprendido entre -1 y 0 que sea decimal.
- Un número fraccionario mayor que uno y menor que 2.
- Un número racional.
- La raíz cúbica de un número.
- La potencia cúbica de -2.

b. Resuelve las operaciones indicadas.

- $-2+(-4*2)=$
- $\frac{2^3}{3}+\frac{1}{2}-(-0.25)=$
- $\sqrt{(\sqrt[3]{16})}=$
- $[(-4+1.25)-(-3)+5^\wedge(-1)]=$

El uso y apropiación de los números, las operaciones y los símbolos matemáticos permiten pensar diferentes situaciones de la vida diaria. A continuación, se propone un grupo de ejercicios para contextualizar la importancia del lenguaje matemático, al igual que sus formas de expresión.

a. Dibujar el rectángulo, cuyo perímetro está representado por la expresión . ¿Cuál es el área del rectángulo?

b. ¿Qué proporción del salario de un padre de familia corresponde a la educación de sus hijos?

c. Al cabo de un año escolar la inversión de una familia en diversión para sus hijos es de:

d. ¿Cómo se puede expresar la disminución del valor de una consola de Xbox, si su precio se reduce en un 10% al año?

e. ¿Cuál es el aumento en el valor de la matrícula por periodo académico, para el caso de un estudiante de primer semestre, inscrito en una carrera profesional si al iniciar paga $3´857.000? La inversión total en la formación de este profesional por costo de matrícula corresponde a: ______________.

Las anteriores situaciones, son algunas de las que con frecuencia son resueltas sin prestar mayor atención a la potencia en el significado de sus signos, símbolos y formas de expresión verbal, oral y escrita. Incluso, en ocasiones es más sencillo comunicar ideas matemáticas desde el código lingüístico oral, pues se presentan conflictos cuando se debe escribir eso que se está pensando, y con mayor restricción al intentar que otra persona lo entienda.

Instrucción

El siguiente ejercicio se propone en pares, se deben asignar dos roles, el primero de lector y el segundo de escritor. El lector, en voz alta leerá cada situación a su compañero escritor, él segundo por su parte, intentará expresar con símbolos, números y signos cada enunciado. Luego se intercambian los roles y se comparan los resultados. ¿Qué reflexión suscita este ejercicio? ¿hubo coincidencias en las expresiones escritas? Los enunciados son:

a. El doble de un número más otro número.

b. La tercera parte de un número aumentado en el doble del mismo número.

c. El producto de dos números elevados al cuadrado aumentados en el primer número.

d. El cociente de dos números equivale a la cuarta parte del primer número.

e. La suma de a y b equivale a la mitad del segundo número aumentado en el doble del primero.

f. La suma del producto de tres pares números.

g. Un número excede a otro en cuatro.

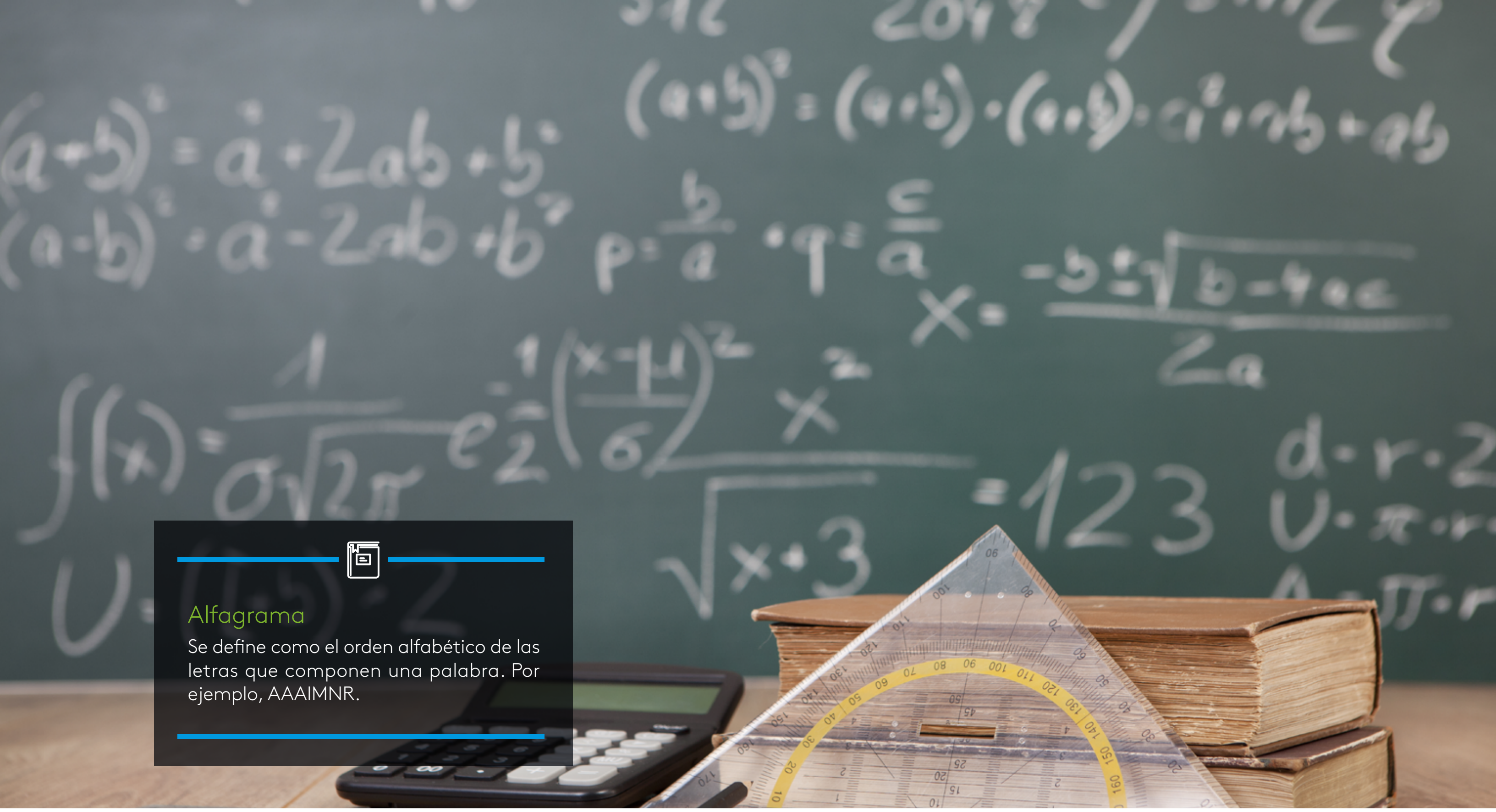
h. La raíz cuarta de un número equivale al producto de la raíz cuadrada de un número por la raíz quinta del mismo.

Para conocer una historia divertida de un hombre que calculaba lo invitamos a observar el siguiente vídeo.

Video

El hombre que calculaba- Malba Tahan

Educación, nuestro empeño



Alfagrama

Se define como el orden alfabético de las letras que componen una palabra. Por ejemplo, AAAIMNR.

Figura 3.
Fuente: www.shutterstock.com/364470776

Expresiones algebraicas

Para contextualizar y hacer una apertura a la construcción de expresiones algebraicas diferenciadas estas, de las expresiones aritméticas por su significado se propone la siguiente actividad como introductoria. Juega con las letras. *¿Cuántas palabras más, se puede formar con las letras de la palabra MARIANA*?

Esta combinación se denomina anagrama. Es posible que posterior al ejercicio, se hayan configurado las siguientes palabras.

-AMAINAR	- ANIMARA
-AMARIAN	- IMANARA
-AMARINA	- MANARIA
-AMINARA	- MARIANA

En un anagrama se identifican las consonantes, las vocales y los alfagramas. Y lo anterior, *¿Cómo se relaciona con las expresiones algebraicas?* Los anagramas son una analogía para explicar que las expresiones algebraicas tienen un funcionamiento similar al de los anagramas. El ejercicio es muy sencillo, una expresión algebraica es una forma simbólica de representar un número, operación, o idea matemática que habita el pensamiento abstracto, representado en las personas, los libros, artículos científicos y otras formas de comunicación.

Del anagrama anterior se puede determinar su valor numérico. Por ejemplo si se establece que la letra A= -2, la letra I= ½, la letra M= 0.25, N= 0, R= √2. Completa la tabla siguiente de acuerdo al modelo presentado.

Palabra	Valor numérico	Resultado
AMAINAR	$-2+0.25+(-2)+1/2+0+(-2)+\sqrt{2} =$	-3.84
AMARIAN		
AMARINA		
AMINARA		
ANIMARA		
IMANARA		
MANARIA		
MARIANA		

Tabla 2
Fuente: propia

En el ejercicio anterior se visibiliza una de las dificultades que en ocasiones limitan a las personas, para comprender y construir el sentido numérico en una expresión algebraica. Las expresiones algebraicas también nos permiten construir caminos para representar ideas del mundo cotidiano en un conjunto de símbolos, signos y números formales.

Así, una expresión algebraica se compone de números, signos que pueden indicar operación, relación o jerarquía entre las operaciones; a la vez integra letras que pueden detonar cambios en un fenómeno o por el contrario pueden significar la ausencia de cambio y variación (constantes y variables). En seguida se presentan dos tipos de expresiones algebraicas, unas que se construyen desde frases matemáticas que se relacionan con la vida cotidiana y otras que se construyen desde un contexto predeterminado.

Caso 1. Expresiones algebraicas en la cotidianidad

a. El costo de un pasaje en el sistema de Transmilenio durante 5 días = 5 ($2.200) = $11.000.

b. Costo total del pan que compra una ama de casa durante 7 días a la semana=. Donde 7 es el número de días y x,y,m,a,b ó la letra que sea para representar el costo del pan del cual no se sabe su precio a diario.

c. Número de horas que dura tres desplazamientos en la ciudad aumentado en 30 minutos que corresponde a los trancones = 3x+30; de tal modo que cada desplazamiento puede durar un tiempo diferente o el mismo tiempo.

Caso 2. Un truco matemático

Algebra de azulejos.

Piensa un número, súmale 3, multiplica el resultado por 2, resta de la cantidad anterior 8 y divide entre 2.

Piensa un número = x, y, m, n, o cualquier letra

Súmale 3 = x+3

Multiplica el resultado por 2 = 2 (x+3)

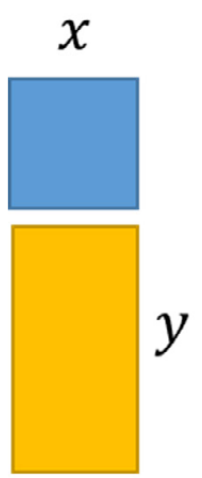
Resta de la cantidad anterior 8 = 2 (x+3) – 8

Divide entre 2 =

Figura. 4
Fuente: propia

La pregunta para este caso es, *¿Qué número se obtiene?* La respuesta se puede encontrar en dos contextos, el primero, si se otorga diferentes valores numéricos a la letra o cantidad desconocida, es posible establecer un conjunto de valores aritméticos. El segundo, si no se otorga ningún valor numérico a la cantidad desconocida, el número estaría dado por una expresión algebraica, de la cual no es posible derivar un número en el contexto aritmético sino en el contexto algebraico.

Se propone a continuación un ejercicio introductorio para revisar una configuración del código matemático en la generación de expresiones algebraicas. Observa:



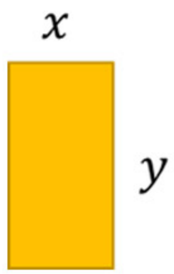
En las figuras de la izquierda se presentan dos variedades de figuras geométricas con la asignación de un valor simbólico en uno de los lados de las mismas.

El cuadrado azul tiene como medida de uno de sus lados la letra “X”. Esa letra puede significar cualquier valor numérico, sin embargo, para este ejercicio importa lo que representa en el contexto de medida que se quiere resaltar. En este orden la letra “X” denota la medida de uno de los lados del cuadrado y por ende la medida de todos los lados. Si nos piden calcular el perímetro del cuadrado, ¿Cuál será el número algebraico que lo representa?

Figura. 5
Fuente: propia

En este caso el valor algebraico del perímetro del cuadrado está representado por la expresión:

$4x$,donde 4 es el número de lados con la misma medida del cuadrado y x el valor algebraico asignado a esta longitud.



En este caso y representa la medida del lado con mayor longitud del rectángulo y se infiere que el lado menor mide x, si se le relaciona con el cuadrado anterior. Así, el perímetro de esta figura estará representado por la expresión.

Figura. 6
Fuente: propia

¿Cuál será entonces, la expresión algebraica que denote el perímetro del rectángulo?

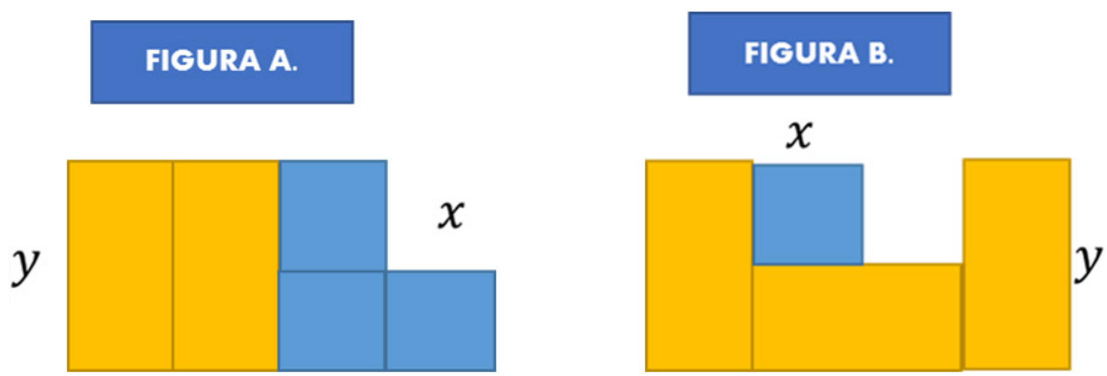


Figura. 7
Fuente: propia

Partiendo del ejercicio propuesto, ¿Cuál es el perímetro de cada figura? ¿Cuál es la figura con mayor perímetro?

Si se concluye que la figura A tiene como perímetro $10x+y$ y la figura B registra $3y+8x$, se ha establecido desde el lenguaje la asignación de una expresión numérica a la longitud de las dos formas.

Para dar respuesta a la segunda pregunta se tienen algunas restricciones, y éstas, se asocian a los valores literales que se asignan a las longitudes de cada figura, pues se desconoce el valor real de cada letra, y de este modo, ¿Cuál es el criterio para determinar numéricamente qué figura tiene mayor o menor perímetro?

Si se asigna una medida a cada letra x=2cm ,y=4 cm. ¿Cuál de las dos figuras tiene mayor perímetro? De este modo para determinar el perímetro de la figura A se tiene, y+10 x expresión antes mencionada;luego se sustituyen los valores de las medidas de tal manera que 4 cm+10 (2 cm)=24 cm.

¿Cuál es la medida del perímetro de la figura B?

Ahora bien, si se entrega la expresión 2x^2+2xy. ¿Cuál de las figuras la representa mejor?

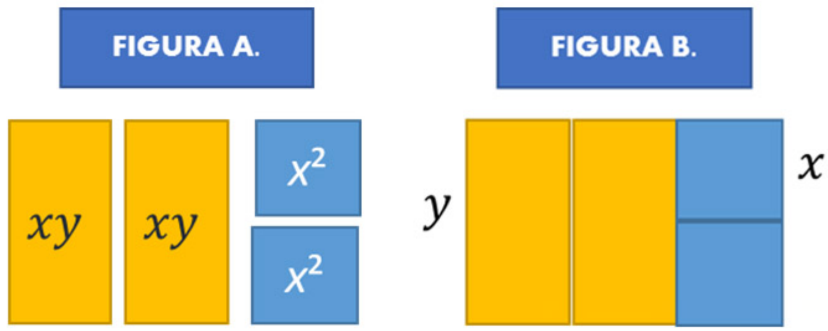


Figura. 8
Fuente: propia

Asociado al tema de las expresiones algebraicas viene la construcción de términos como los polinomios y las operaciones que con este tipo de cantidades se pueden elaborar. En la siguiente figura se ilustra, los elementos que componen una expresión algebraica, la constitución y clasificación de estas estructuras y algunos ejemplos donde es posible identificar elementos de cantidades algebraicas.

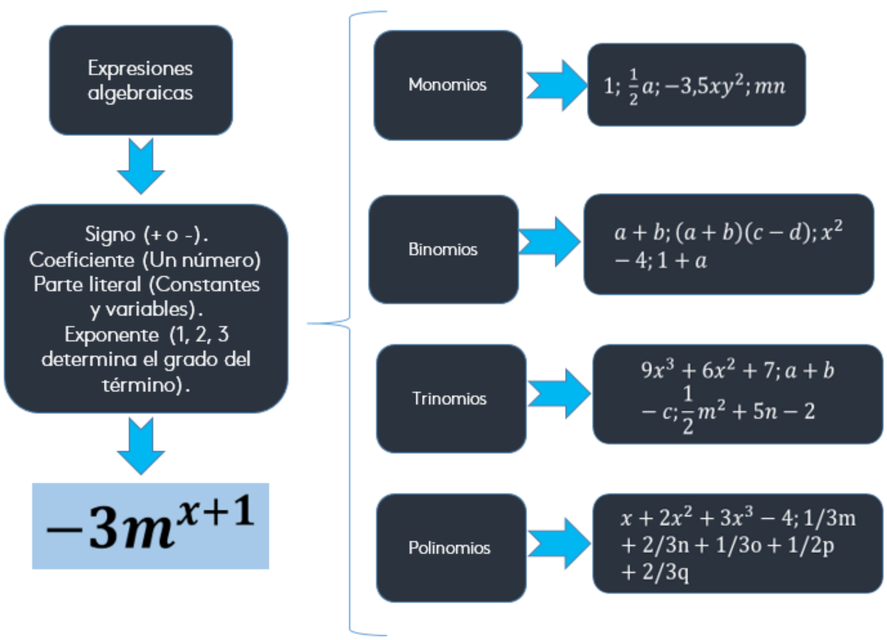


Figura. 9 Clasificación de las expresiones algebraicas
Fuente: propia

Una cantidad algebraica a diferencia de una cantidad aritmética, cumple con la función de representar una generalización de la misma. En aritmética una cantidad se representa con un solo número y nada más, en álgebra las cantidades se representan con letras y estás pueden estar asumiendo un sinfín de valores que se le pueda atribuir dependiendo del contexto. Así por ejemplo de la siguiente figura geométrica.

Se puede denotar su longitud con la letra De igual modo se puede decir que su área es a2. Esta última generalidad aplica para todos los cuadrados, sin importar su tamaño, disposición en el espacio o contexto.

Figura. 10
Fuente: propia

Con el fin de profundizar nuestros aprendizajes lo invitamos a realizar la siguiente lectura complementaria del profesor Carlos Vasco.

Lectura recomendada

El pensamiento variacional y la modelación matemática.

Carlos E. Vasco

Operaciones con expresiones algebraicas

El principio para operar (sumar, restar, multiplicar, dividir) este tipo de estructuras algebraicas, parte de la identificación de términos que se denominan semejantes. Se propone entonces el desarrollo de la siguiente unidad didáctica la cual tiene como finalidad favorecer la construcción del sentido numérico a través de la construcción de cantidades algebraicas y su correspondiente desarrollo operativo.

Semejantes
Dos o más términos son semejantes cuando tienen la misma parte literal.

Para el abordaje de cada una de las situaciones que se consideran a continuación, los participantes de este curso seguirán las orientaciones que se relacionan en la tabla contigua.

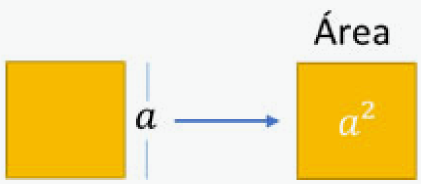
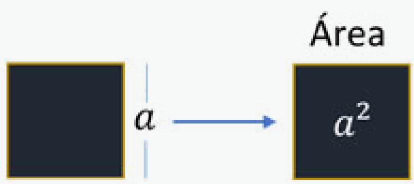
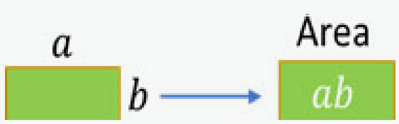
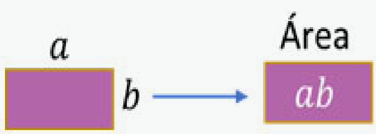
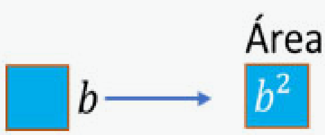
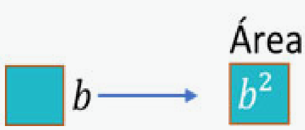
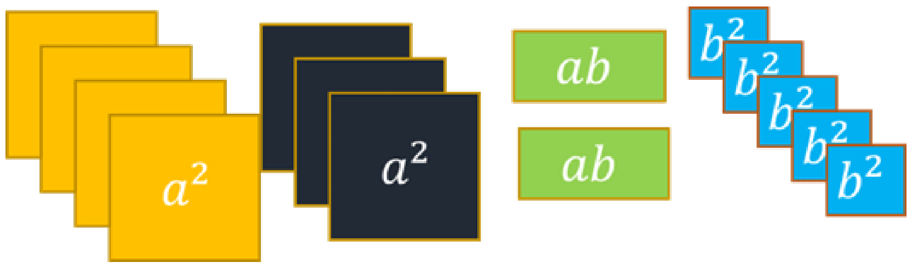
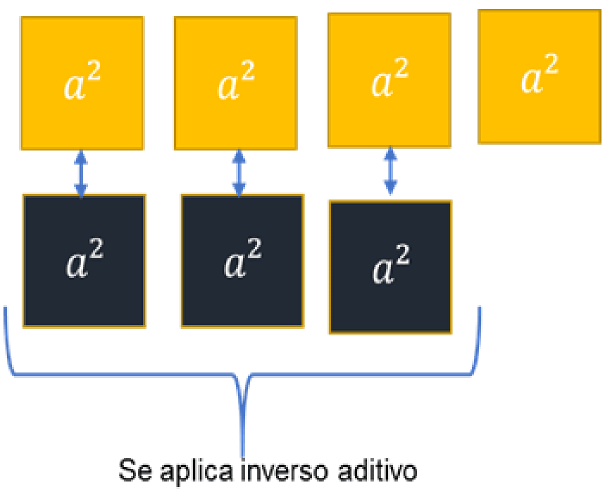
Figura	Clasificación
	Cantidad positiva.
	Cantidad negativa.
	Cantidad positiva.
	Cantidad negativa.
	Cantidad positiva.
	Cantidad negativa.

Tabla 4
Fuente: propia

Se inicia por la representación de algunas cantidades algebraicas con la intención de construir expresiones y posibilitar su caracterización:





La cantidad se expresa; luego se hace la reducción de términos semejantes, este proceso se hace por suma o por resta.

Los términos semejantes son que para este caso representan cuadrados positivos (amarillos) y cuadrados negativos (azul), al reducir se obtiene, la expresión resultante es.

Figura. 11
Fuente: propia

En el siguiente ejemplo se ilustra el proceso de suma y resta de expresiones algebraicas, dadas las cantidades.

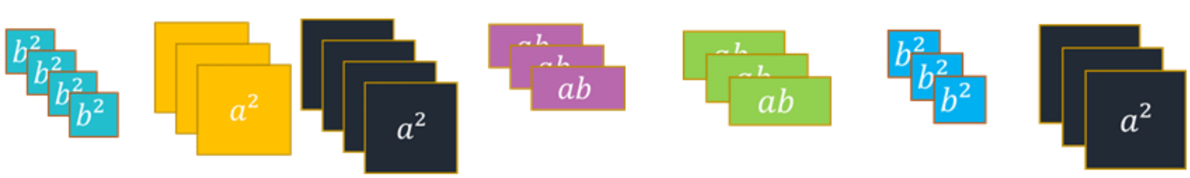


Figura. 12
Fuente: propia

Se inicia por la construcción simbólica de cada expresión algebraica:

Cantidad 1. $4b^2+3a^2-4a^2-3ab$, luego se reducen términos semejantes, se obtiene:

Cantidad 2. $3ab+3b^2-3a^2$, no hay términos semejantes. Luego se aplica el principio de suma, bien sea usando el algoritmo o por relación de cantidades geométricas. En la siguiente figura se ilustra el proceso.

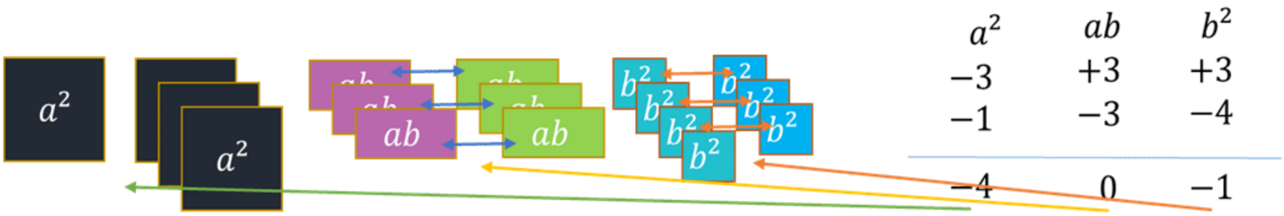


Figura. 13
Fuente: propia.

Se obtiene como resultado $-4a^2-b^2$

De otro modo, si se pide restar $5a^2-4ab$ de $-7ab-6a^2+3b^2$. ¿Qué cantidad se considera minuendo? Y ¿Qué cantidad es el sustraendo?

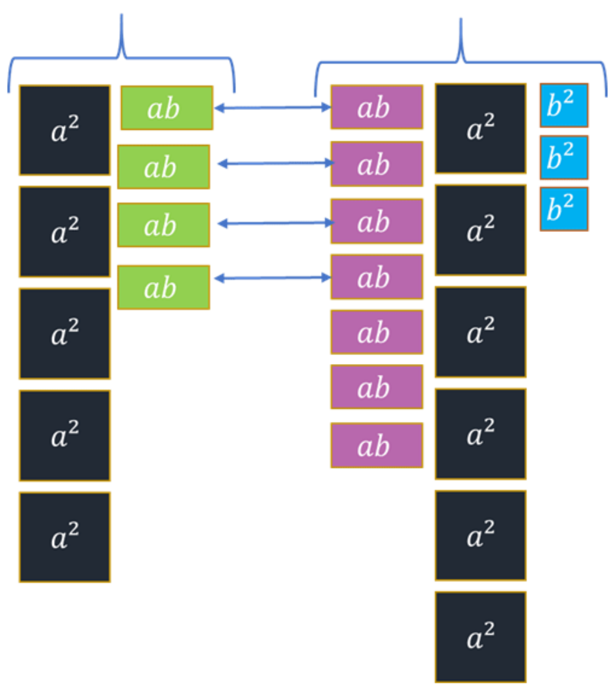


Figura. 14
Fuente: propia.

Se considera que el minuendo es y el sustraendo es Para restar es necesario representar simbólicamente la información Hasta acá se ha escrito la operación de acuerdo a la información suministrada. Si se nota, el sustraendo fue ubicado dentro de un paréntesis, lo que implica que el signo menos (-) que le antecede tiene la función de transformar la cantidad que está dentro del mismo.

El signo menos en estos casos indica que se debe transformar la cantidad que está dentro del paréntesis para determinar el opuesto al sustraendo, lo que quiere decir, que cambia los signos de los términos que están dentro de este signo. Así: luego se procede a realizar la reducción de términos semejantes.

Instrucción

Como una forma de fortalecer los aprendizaje y de practicar para la evaluación le invitamos a realizar la actividad de repaso.

Para la multiplicación de expresiones algebraicas se procede aplicando propiedades de los productos. Para su representación se iniciará por ilustrar en un esquema los factores a partir de las longitudes de las figuras, en el eje horizontal se ubica uno de los factores, solo se tomará como referente la longitud de un lado de cada figura. Para este caso es 2a,medida que designa la longitud de cada figura sumados, luego en el eje vertical, se ubica el segundo factor y su representación gráfica, se toman también las longitudes de los lados de cada figura, cantidad que se representa como , para este caso es el producto de un monomio por un binomio. Al aplicar la propiedad distributiva para la multiplicación se obtiene $2a\ (a+b)=2a^{\wedge 2}+2ab$..

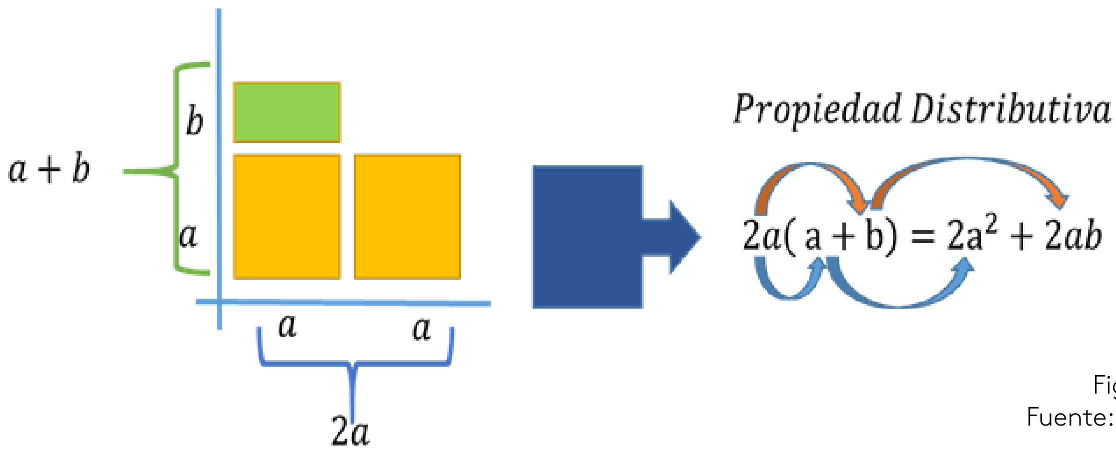


Figura. 15
Fuente: propia.

Al multiplicar dos binomios se obtiene:

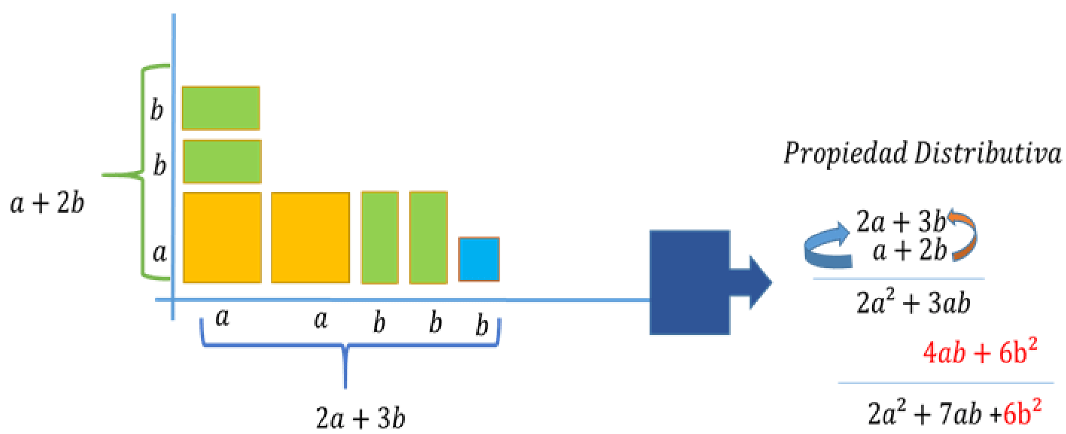
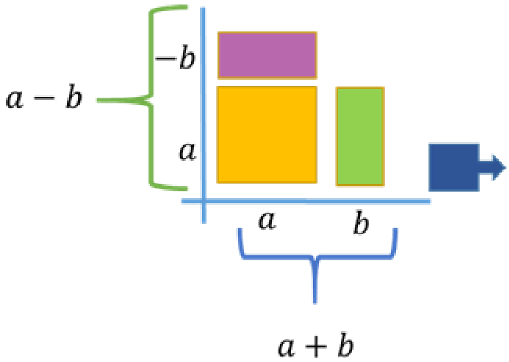


Figura. 16
Fuente: propia.

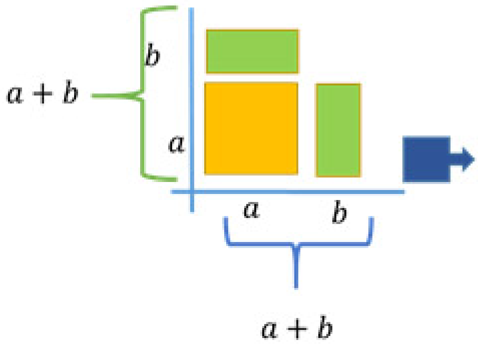
Algunos productos clásicos – Diferencia de cuadrados



$$(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$$

Figura. 17
Fuente: propia.

Suma de cuadrados



$$(a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Figura. 18
Fuente: propia

Ahora el ejercicio contrario, dadas las figuras busca el valor de los lados. ¿Cuál es el producto en cada caso?

a) b) c)

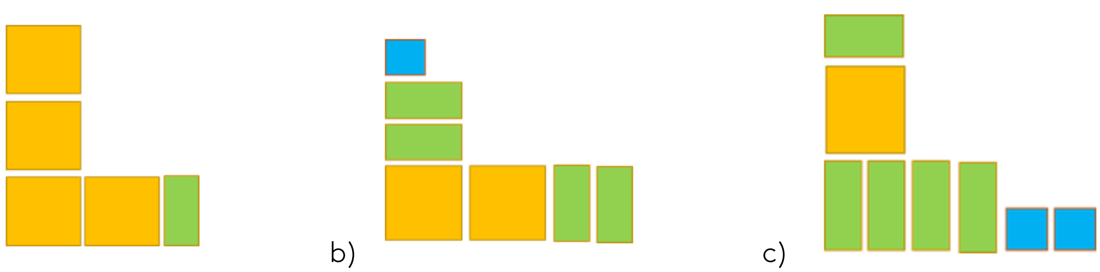


Figura. 19
Fuente: propia

La multiplicación y la factorización son operaciones cercanas. El principio de las dos es la relación que existe entre los factores de un producto y su resultado.

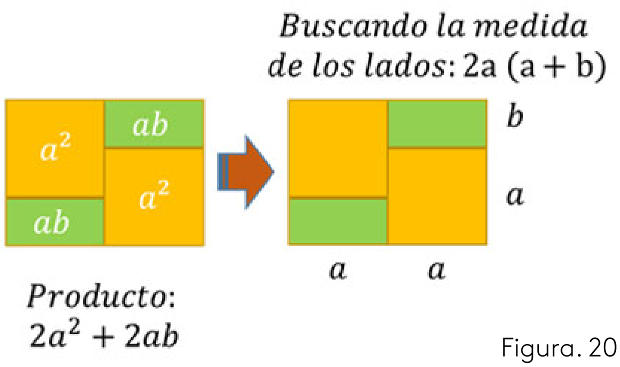


Figura. 20
Fuente: propia

De acuerdo a este ejemplo, ¿Qué es la factorización? La relación es muy sencilla, mientras que en un producto se busca establecer el área de una figura multiplicando la longitud de sus lados para llegar a un resultado final; la factorización parte de un área que se presenta elaborada y de la cual hay que derivar la medida de los lados.

Instrucción

Para finalizar lo invitamos a realizar la actividad evaluativa del eje 3.

BIBLIOGRAFÍA

Colombia, M. (1998). *Lineamientos curriculares de matemáticas*. Bogotá: Magisterio.

Vasco, C. (s.f). *El pensamiento variacional y la modelación matemática*. Colombia: Universidad del Valle, Universidad de Manizales.