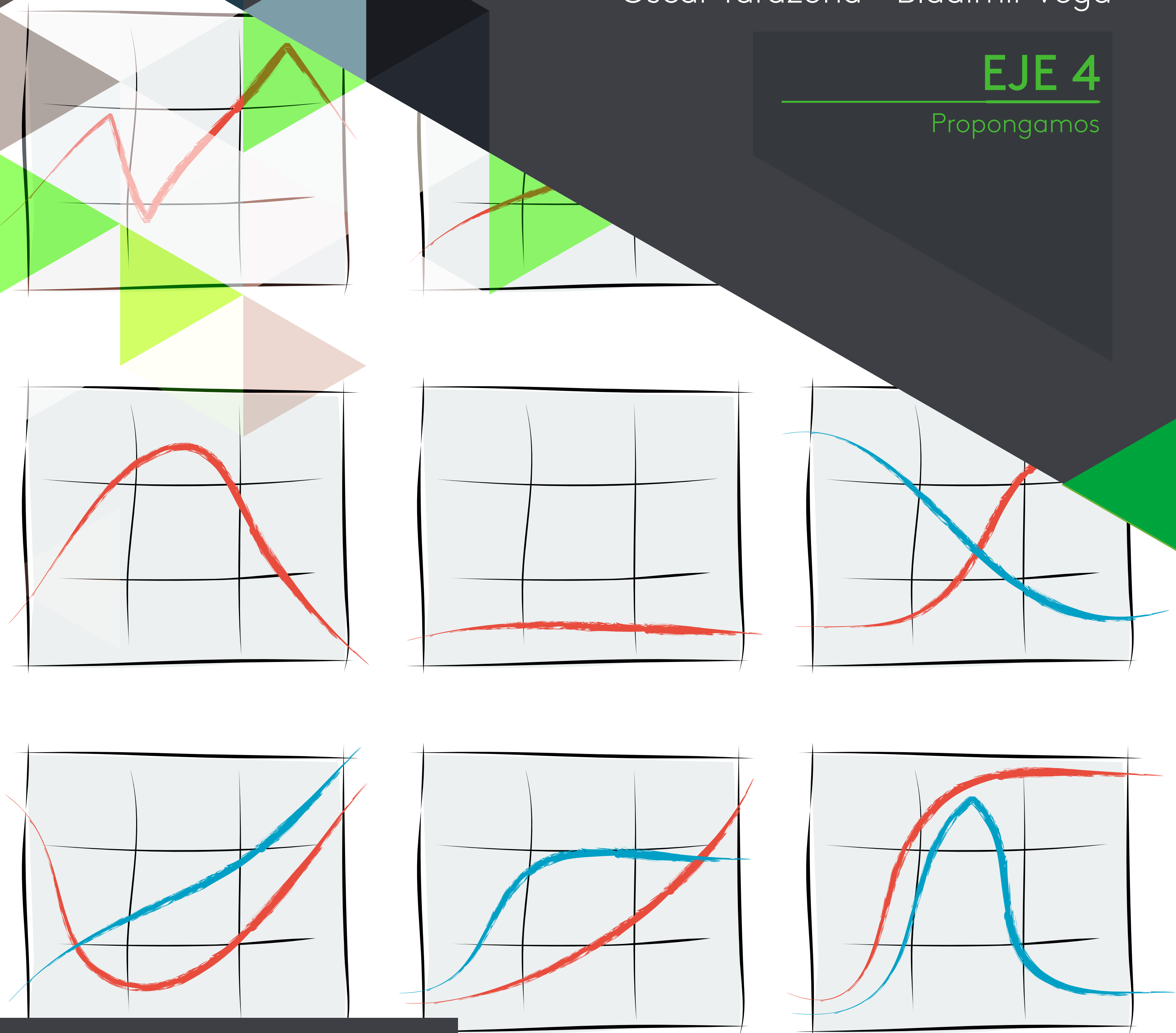
ANÁLISIS NUMÉRICO

Oscar Tarazona - Bladimir Vega

EJE 4

Propongamos



Fuente: Shutterstock/304431980

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina
MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

¿Qué importancia tienen la diferenciación e integración numérica en la solución de diversos problemas relacionados con el análisis numérico?

En un curso básico de cálculo diferencial e integral se deja por sentado que estos conceptos quedan lo suficientemente claros como para aplicarlos en la solución de problemas relacionados con ratas de cambios o cálculo de áreas en la intersección de dos curvas, etc. El cálculo diferencial es una herramienta poderosa a la hora de encontrar cambios de funciones de variable real mediante el concepto de derivada de una función, mientras que el cálculo integral permite encontrar la primitiva de una función cuando se conoce su representación extrapolada, es decir, afectada por sus valores iniciales. Es muy fácil por ejemplo encontrar la aceleración de una partícula si se conoce la función que describe su velocidad y ésta a su vez, si se conoce la función posición. También es fácil encontrar el volumen de combustible contenido en el ala de un avión si se conoce la geometría curvilínea de dicha estructura. Sin embargo, cuando lo que tenemos de estos dos ejemplos no es una función sino un conjunto de valores asociados a dicha función que ahora es "desconocida", el problema se torna difícil y se debe recurrir a realizar un análisis numérico de cada situación; es ahí donde se necesitan de la **diferenciación** e integración numérica.

Diferenciación

Acción de encontrar la derivada de una función matemática.

Instrucción

Antes de continuar con el desarrollo temático de este referente, le invito a la página principal del eje para revisar la línea de tiempo.

Diferenciación e integración numérica

Diferenciación numérica

Como los métodos de interpolación tratados en el eje anterior, la diferenciación numérica es poderosa. Es una técnica que permite calcular una aproximación a la derivada de una función. Como el concepto original de la derivada de una función, esta aproximación se realiza alrededor de un punto utilizando los valores y propiedades que se conocen del cálculo diferencial de una variable. En este sentido será objeto de estudio la fórmula de diferencias finitas.

Diferencias finitas

Cuando se habla en diferenciación numérica de diferencias finitas, se habla de la fórmula de diferencias finitas. Esta es una expresión matemática cuya forma es: $f(x+b)-f(x+a)$ y su significado, igual al que conoce el estudiante de su curso de cálculo diferencial, un ejemplo fundamental, sería mencionar que la aproximación de las derivadas por diferencias finitas, el cual es el papel fundamental de la diferenciación numérica, juega un papel esencial dentro del análisis numérico para la resolución de problemas relacionados con ecuaciones diferenciales, entre otros.

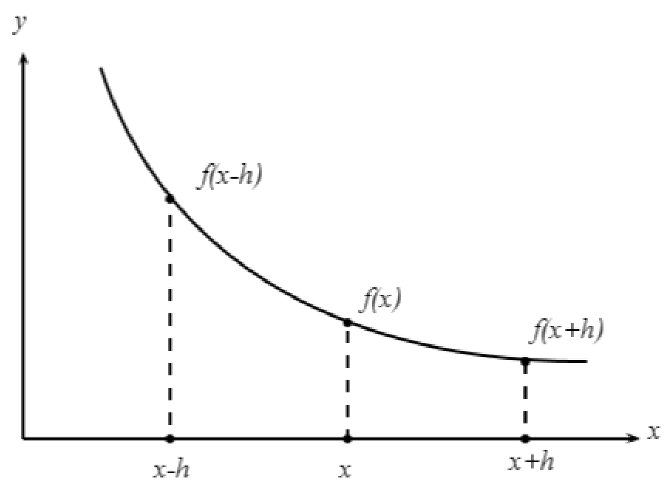


Figura 1. Técnica de diferencias finitas
Fuente: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Latex.draw.tex.png

Empecemos nuestra discusión recordando que la forma de la derivada de una función es:

$$f'(x) = lim_{h\to 0}\,\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Lo cual podemos escribir de la siguiente forma para simplificar la expresión un poco:

$$f'(x) = lim_{h\to 0} \frac{\nabla f_1}{h}$$

y recordando que la técnica de diferencias divididas consiste en aproximar la derivada de una función en un punto.

En la técnica en mención se consideran tres formas generales.

Diferencias finitas anterior

La expresión para las diferencias finitas hacia atrás es de la forma:

$$\nabla_h[f](x) = f(x) - f(x-h)$$

$$f'(x) = lim_{h\to 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

Diferencias finitas posterior

La expresión para las diferencias finitas hacia adelante es de la forma:

$$\nabla_h[f](x) = f(x+h) + \ f(x)$$

$$f'(x) = lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) + \ f(x)}{h}$$

Diferencias finitas centradas

La expresión para las diferencias finitas centradas es de la forma:

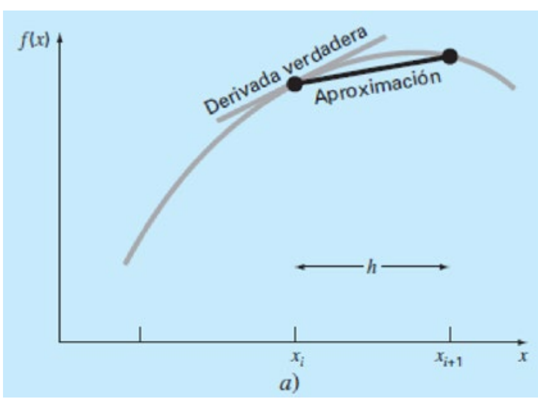
$$\delta_h[f](x) = f(x + \frac{1}{2}h) - f(x - \frac{1}{2}h)$$

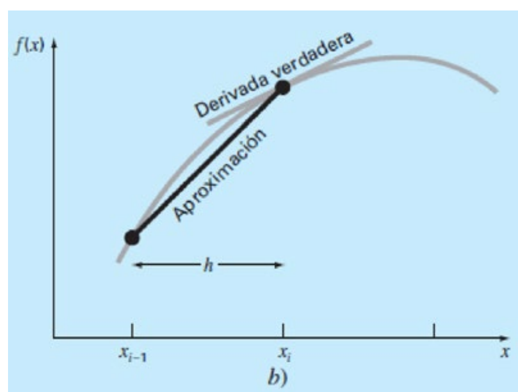
$$f'(x) = lim_{h\to 0} \frac{f(x + \frac{1}{2}h) - f(x - \frac{1}{2}h)}{h}$$

Con las definiciones anteriores podemos escribir la fórmula de la diferencia hacia delante de dos puntos, la fórmula de la diferencia centrada de tres puntos, y la formula de la diferencia centrada de tres puntos para la segunda deriva tal como se muestra en la siguiente tabla:

Fórmula de la diferencia hacia delante de dos puntos.	$f'(x) = lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} - \dfrac{h^2}{2} f''(c)$
Fórmula de la diferencia centrada de tres puntos.	$f'(x) = lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{2h} - \dfrac{h^2}{6} f'''(c)$
Fórmula de la diferencia centrada de tres puntos para la segunda derivada.	$f'(x) = lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h^2} - \dfrac{h^2}{12} f''''(c)$

Tabla 1.
Fuente: propia





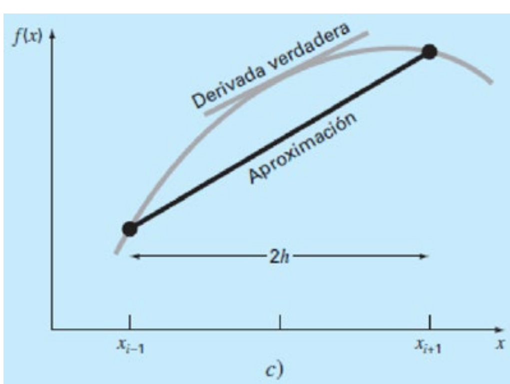


Figura 2. Gráficas de diferencias finitas de la 1° derivada: a) hacia adelante, b) hacia atrás, c) central.
Fuente: (Sauer, 2013)

Ejemplo

Vamos a usar la fórmula de diferencia hacia adelante de dos puntos con ***h*** = 0.2 para aproximar la derivada de $f(x) = \frac{1}{x^2}$, en x= -2

$$f'^{(x)} = lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\frac{1}{(x+h)^2}+\frac{1}{x^2}}{0{,}2} = \frac{\frac{1}{(-2+0{,}2)^2}+\frac{1}{(-2)^2}}{0{,}2}$$

$$= \frac{\frac{1}{(-1.8)^2}+\frac{1}{4}}{0{,}2} = 2.7932$$

$$f'^{(x)} = 2.7932$$

En general el estudiante puede, a manera de ejercicio práctico, resolver el mismo ejercicio aplicando la fórmula de la diferencia centrada de tres puntos y la centrada de tres puntos para la segunda deriva además de calcular el error: $\frac{h^2}{2}f''(c)$

Instrucción

Con el fin de profundizar en el concepto de diferenciación numérica los invito a la página principal del eje para revisar el video y la lectura:

Video

Derivada progresiva (diferencias progresivas) - ejercicio

https://www.youtube.com/watch?v=O7iK7IKQ7jc

Lectura recomendada

Métodos numéricos para ingenieros (pp. 668-671)

Steven Chapra y Raymond Canale

Integración numérica

El concepto de integración numérica se relaciona mucho con el concepto de interpolación polinomial, tratado en el eje anterior. Es decir, en el eje anterior encontrábamos un polinomio de interpolación mediante la aplicación de un método conocido el cual permitía encontrar una función que contenía a un conjunto de puntos obtenidos experimentalmente. Ahora podemos evaluar alguna integral conocida en dicho polinomio y por ende aproximarla al valor real de la integral buscada. En otras palabras la integración numérica desea encontrar una solución aproximada de la integral: $\int_a^a f(x)d$

Para el estudio de la integración numérica discutiremos la fórmula de Newton-Cotes, la cual tiene como representación de su naturaleza matemática la regla del trapecio y la técnica de Simpson.

Integración
Acción de encontrar la antiderivada de una función derivada.

Newton-Cotes
Son los tipos de integración numérica más comunes. Se basan en la estrategia de reemplazar una función complicada o datos tabulados por un polinomio de aproximación que es fácil de integrar.

Fórmula de Newton-Cotes

En la teoría del análisis numérico, las fórmulas de Newton-Cotes es un conjunto de fórmulas en el contexto de la integración numérica, cuyo objetivo es evaluar la función en puntos equidistantes pertenecientes a un intervalo del dominio de la función, y poder así encontrar un valor aproximado de la integral $\int_a^a f(x)d$

La idea básica de la fórmula de Newton-Cotes, es encontrar el valor aproximado de una integral reemplazando una función cuya estructura matemática es complicada de resolver por los métodos tradicionales del cálculo integral, y expresarla como un polinomio de interpolación, es decir:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b (a_0 + a_1x + \cdots a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n)d$$

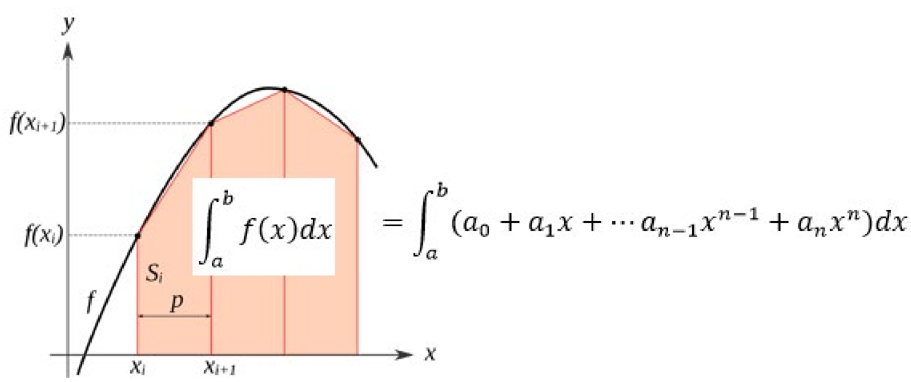


Figura 3. Interpretación geométrica de la fórmula de Newton-Cotes
Fuente: https://en.wikipedia.org/wiki/Trapezoidal_rule

Regla del trapecio

La regla del trapecio constituye una fórmula cerrada de las fórmulas de Newton-Cotes, ya que involucra los dos valores o cotas [a,b] del intervalo donde se desea aproximar el valor de la integral.

Por la definición anterior se tiene que:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b P(x)x$$

Si observamos la figura 4, se tiene que la línea recta que une los dos extremos del intervalo puede ser escrita como:

$$y(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) = f(x)$$

Luego si reemplazo este valor de la función en la integral obtengo:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b [f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)]d$$

El estudiante puede comprobar que el resultado de esta integración es:

$$\int_a^b f(x)dx = (b - a)\frac{f(a) + f(b)}{2}$$

La cual es precisamente la fórmula del trapecio.

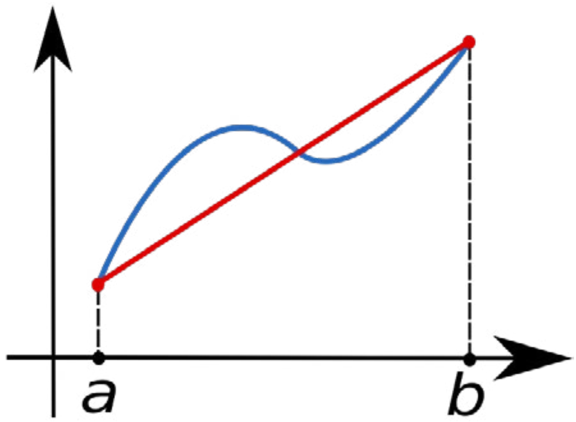


Figura 4. Representación geométrica de la regla del trapecio
Fuente: https://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Trapezoidal_rule_illustration.png

Como en toda medida, el valor de la integral hallado por la regla del trapecio puede ser una más precisa. Para ello, se debe particionar el intervalo [a,b] en segmentos iguales y de manera prudente aplicar la regla a cada uno de ellos. Una expresión general que permite este proceso es:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}f(x_0) + h\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)$$

Ejemplo

Para demostrar lo fácil que resulta ser la regla del trapecio en la aproximación del valor de una integral, consideremos las integrales:

$$\int_0^1 e^{x^2}dx \qquad \int_2^4 \frac{e^x}{x}d$$

Y hallemos sus valores aproximados.
Para:

$$\int_0^1 e^{x^2}dx$$

Tenemos que a=0, b=1, f(x)= e^{x^2}, luego tenemos que:

$$\int_0^1 e^{x^2}dx = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} = (1-0)\frac{f(0)+f(1)}{2} = \frac{e^{(0)^2}+e^{(1)^2}}{2} = \frac{1+e}{2} = \frac{3.7182}{2} \cong 1.86$$

Por tanto:

$$\int_0^1 e^{x^2}dx \cong 1.86$$

Para la integral:

$$\int_2^4 \frac{e^x}{x}dx$$

Procedemos igual:

$$\int_2^4 \frac{e^x}{x}dx = (4-2)\frac{f(2)+f(4)}{2} = (4)\frac{\frac{e^2}{2}+\frac{e^4}{2}}{2} = \frac{e^2}{2}+\frac{e^4}{4} \cong 17.3$$

Por tanto:

$$\int_2^4 \frac{e^x}{x}dx \cong 17.3$$

Regla de Simpson

Si el estudiante entendió unívocamente el proceso para aproximar el valor de una integral por la regla del trapecio, entenderá también la regla de Simpson si ahora sólo tiene en cuenta que esta última tiene por objeto cambiar el polinomio lineal de la regla del trapecio por un polinomio de grado superior:

Regla de Simpson
Método de integración para calcular integrales definidas donde se conectan grupos sucesivos de puntos sobre la curva mediante parábolas.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b P^n(x)x$$

La regla de Simpson presenta con variación de la forma del polinomio la regla de Simpson 1/3 y 3/8. El primero se halla reemplazando en la formula anterior un polinomio de grado 2 y el segundo un polinomio de interpolación de grado 3. El estudiante debe recordar que estos polinomios de interpolación fueron desarrollados a partir de los polinomios de interpolación de Lagrange.

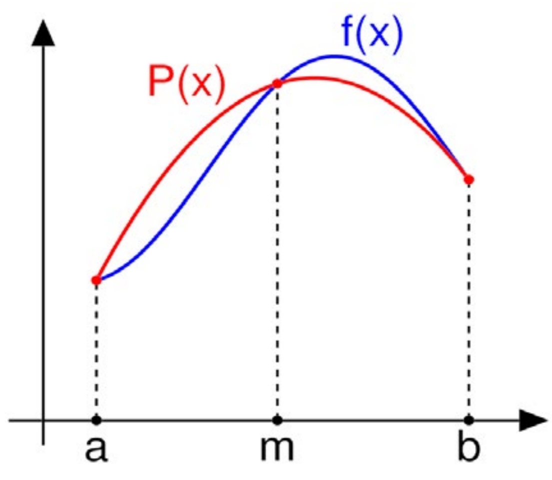


Figura 5. Representación geométrica de la regla de Simpson
Fuente: https://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Simpsons_method_illustration.png

Ahora bien, al igual que la regla del trapecio, estas formas de la regla de Simpson también tienen sus formas compuestas. Para simplificar la presentación de éstas, a continuación, se muestra una tabla con dichas expresiones.

Regla de trapecio

La regla se basa en aproximar el valor de la integral de f(x) por el de la función lineal que pasa a través de los puntos (a, f(a)) y (b, f(b)).

a)

Regla de Simpson 1/3
$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\frac{f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)}{6}$
Regla de Simpson 1/3 Compuesta
$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\frac{f(x_0)+4\sum_{i=3,5,7}^{n-1} f(x_i)+2\sum_{j=2,4,6}^{n-2} f(x_j)+f(x_n)}{6}$

b)

Regla de Simpson 3/8
$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\frac{f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+f(x_3)}{8}$

Tabla 2. Expresiones para aproximar integrales por la regla de Simpson: a) regla de Simpson 1/3, b) regla de Simpson 3/8.
Fuente: propia

Instrucción

Ahora los invito a la página principal del eje para ver el video sobre la regla de Simpson 3/8, y a consultar la lectura:

Video

Regla de Simpson 3/8 ejercicio métodos numéricos

https://www.youtube.com/watch?v=QpBvNSg43Xs

Lectura recomendada

Métodos numéricos para ingenieros (pp. 621-628)

Steven Chapra y Raymond Canale

Para mostrar la aplicación de la regla de Simpson, considere el siguiente ejemplo:

Ejemplo

Aplicar la regla de Simpson para calcular el valor de la integral dada por:

$$\int_{-1}^{1} e^{-x^2} dx$$

Entonces:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = (b-a)\frac{f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)}{6}$$

$$\int_{-1}^{1} e^{-x^2} dx = \frac{1-(-1)}{6}[f(-1)+4f(\frac{1-1}{2})+f(1)]$$

$$\int_{-1}^{1} e^{-x^2} dx = \frac{1-(-1)}{6}[e^{-(-1)^2}+4e^{(\frac{1-1}{2})^2}+e^{(1)^2}]$$

$$\int_{-1}^{1} e^{-x^2} dx = \frac{2}{6}[e^{-1}+4e^{0}+e^{-1}]$$

$$\int_{-1}^{1} e^{-x^2} dx = \frac{1}{3}[0.34+4(1)+0.37]$$

Por tanto:

$$\int_{-1}^{1} e^{-x^2} dx \cong 1.58$$

Vemos que las fórmulas de Newton-Cotes, constituyen técnicas de encontrar el valor de la integral de una función con un grado bastante aceptable de precisión.

Instrucción

Apreciados estudiantes, ahora los invito a revisar los recursos y actividades de aprendizaje de este eje.

No olviden realizar la actividad evaluativa de este último eje del módulo Análisis Numérico.

BIBLIOGRAFÍA

Burden, R., Faires, J. y Solorio, P. (2011). *Análisis numérico*. México, México: Cengage Learning.

Chapra, S. y Canale, R. (2006). *Métodos numéricos para ingenieros*. México, México: McGraw-Hill

Robles, J., Gómez, M. y González, J. (201). *Análisis numérico*. México, México: McGraw-Hill

Sauer, T. (2013). *Análisis numérico*. México, México: Editorial Pearson

Venegas, L. (2011). *Métodos numéricos aplicados a la ingeniería*. Lima, Perú: Macro E.I.R.L