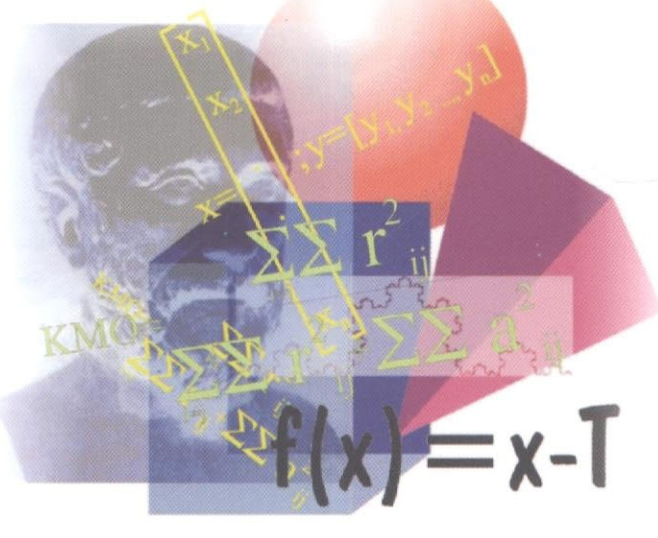
Matemáticas Básicas Para la Salud

ISBN 978-958-98048-0-3

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS



LUZ MARÍA ROJAS D.
Profesora Fundación Universitaria del Área Andina
Directora Departamento de Ciencias Básicas

JOSÉ GERARDO CARDONA TORO
Profesor Universidad Tecnológica de Pereira
Fundación Universitaria del Área Andina

Matemáticas Básicas Para la Salud

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS

ISBN 978-958-98048-0-3

LUZ MARÍA ROJAS D.
Docente Fundación Universitaria del Área Andina
Directora Departamento de Ciencias Básicas

JOSÉ GERARDO CARDONA TORO
Docente Universidad Tecnológica de Pereira
Fundación Universitaria del Área Andina Pereira

Revisión Técnica:

MSc Francisco A. Franco Garcés
Magíster en Matemáticas U.N de Colombia.
Magíster en Finanzas U. Tecnológica de Pereira
Docente Fundación Universitaria del Área Andina Pereira

MSc Jair A. García Arias
Magíster en Física Universidad Tecnológica de Pereira
Docente Universidad del Quindío

Índice General

PRESENTACIÓN

Capítulo 1. CONJUNTOS

1 Conjunto 7
1.1 Notación 7
1.1.1 Descripción 7
1.2 Conjuntos Numéricos 9
1.3 Algebra de conjuntos 10
1.3.1 Unión 10
1.3.2 Intersección 11
1.3.3 Diferencia 13
1.3.4 Complemento de un conjunto 14
1.4. Número de elementos de un conjunto 15

Capítulo 2. UN POCO DE ARITMÉTICA

2. Operaciones indicadas de suma y resta 27
2.1 Números racionales 32
2.2 Expresión decimal de los números racionales 34
2.3 Fracciones complejas 37
2.4 Potenciación y radicación de números reales 38
2.5 Racionalización de denominadores 40
2.6 Expresiones conjugadas 41

Capítulo 3. PROPORCIONALIDAD DIRECTA E INVERSA

3. Proporcionalidad directa 49
3.1 Proporcionalidad inversa 50
3.2 Proporciones 53
3.3 Regla de tres simple 55
3.4 Regla de tres simple inversa 56
3.5 Regla de tres compuesta 58

Capítulo 4. ÁLGEBRA

4. Operaciones fundamentales con expresiones Algebraicas 65
4.1 Expresión algebraica 65
4.2 Polinomio 67
4.3 Símbolos de agrupación 67
4.4 Operaciones con expresiones algebraicas 69
4.5 Descomposición factorial 72
4.5.1 Procedimiento para descomponer en factores 72
4.6 Fracciones algebraicas 78
4.7 Exponentes 82
4.8 Radicales 85

Capítulo 5. ECUACIONES

5. Despeje de fórmulas ... 99
5.1 Ecuaciones ... 102
5.2 Ecuación de segundo grado (o cuadrática) ... 104
5.3 Desigualdades de números reales ... 106
5.4 Inecuación ... 108
5.5 Valor absoluto ... 109
5.6 Sistemas de ecuaciones lineales ... 112
5.7 Aplicaciones de las ecuaciones y sistemas de ecuaciones ... 114

Capítulo 6. ALGUNAS FUNCIONES DE IMPORTANCIA EN SALUD

6. Funciones ... 125
6.1 Definición de función ... 126
6.2 Representación gráfica de funciones ... 128
6.3 La función lineal ... 131
6.3.1 Ecuaciones de la recta ... 132
6.4 Función cuadrática ... 135
6.5 Función exponencial ... 137
6.6 Ecuaciones exponenciales ... 141
6.7 Función logarítmica ... 142
6.8 Ecuaciones exponencial y logarítmica ... 145
6.8.1 Aplicaciones de las funciónes exponencial y logarítmica ... 147

APÉNDICE ... 155

BIBLIOGRAFÍA ... 159

Presentación

Con gran frecuencia, se entiende que en las ciencias de la salud no es necesario conocer las matemáticas y sus aplicaciones. En efecto, muchas facultades de medicina y salud no tiene en su contenido académico asignaturas como matemáticas y física, hoy día es muy importante que dichas facultades las tengan, pues los modelos modernos en salud hace necesario que los médicos y profesionales de disciplinas como: terapia respiratoria, instrumentación quirúrgica, enfermería, radiología y optometría, necesitan tener conceptos básicos de la modelación matemática, pues en el trabajo interdisciplinario moderno se hace fundamental comprender los artículos y productos de la medicina moderna.

En las ciencias modernas, de esta manera, se dice que la biomatemática es la parte de las matemáticas puras que comprende la aplicación de las matemáticas en biología y ciencia naturales al igual que la medicina y la epidemiología.

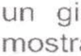
Este texto surge como resultado de 10 años de trabajo en facultades de salud y medicina por parte de los autores que vieron la necesidad de dar un giro a las matemáticas tradicionales y llevarlas a su aplicación, mostrándoles a los estudiantes que las matemáticas si se utilizan en salud y otras ciencias.

Esperamos que estas notas sirvan y den un viraje al mal concepto que tienen los estudiantes modernos de las matemáticas, que no sean el "coco" y que por el contrario sea la partida para que su interés en ellas vaya más allá en la modelación matemática.

Hemos considerado la siguiente metodología, para que el estudiante y el docente tengan una guía de trabajo en clase y fuera de ella.

❖ Este símbolo indica la teoría conceptual de cada tema.

✙ Este símbolo indica taller de clase a realizar por parte del Estudiante en clase con la ayuda del docente.



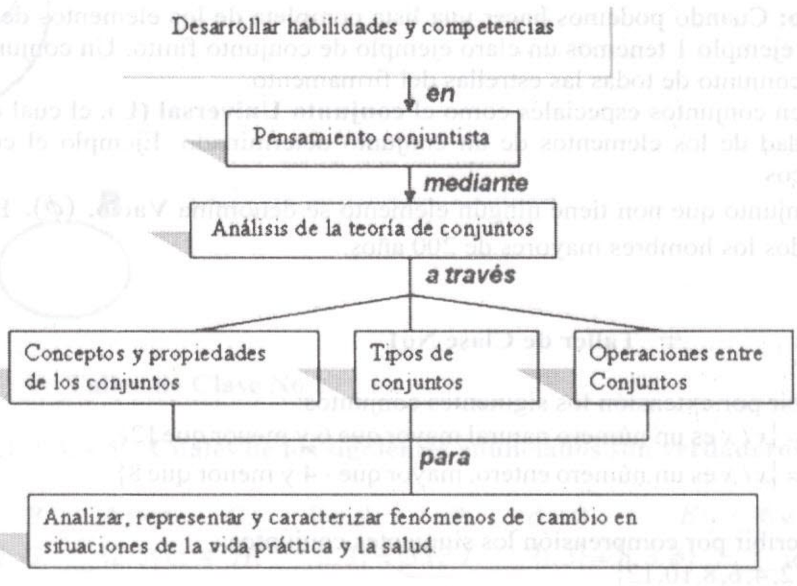
Este símbolo corresponde al taller que el estudiante debe realizar fuera de clase. Esto con el fin de que él afiance sus conceptos y adquiera destrezas en la solución de ejercicios.

Los autores

CAPÍTULO 1

CONJUNTOS

MAPA CONCEPTUAL



PRELIMINARES

❖

1. CONJUNTO: Intuitivamente, colección de objetos de cualquier especie descritos en forma suficientemente clara, con el fin de que no exista duda acerca de que un objeto pertenezca o no al conjunto.

Para indicar que un objeto pertenece al conjunto se utiliza el símbolo $\in$

Para indicar que un objeto no pertenece al conjunto se utiliza el símbolo $\notin$

1.1 Notación: Se utilizan generalmente las letras mayúsculas para denotar los conjuntos y las letras minúsculas para denotar los elementos.

1.1.1 Descripción:

Por extensión: Cuando se hace una lista de sus elementos, separándolos por comas y encerrándolos en llaves. { }.

Ejemplo1: $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

Escribir por extensión el conjunto de los números pares del 1 al 10.

$P = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

Por Comprensión: Cuando se encierra entre llaves una frase descriptiva con la condición o condiciones que deben satisfacer los objetos para pertenecer al conjunto.
Ejemplo2: Escribir el conjunto **A** del ejemplo anterior por comprensión.

$P = \{x / x \text{ es par entre 1 y } 10\}$

En cuanto a la cantidad de elementos un conjunto puede ser **infinito** o **finito**.
Infinito: cuando no podemos escribir una lista completa de los elementos del conjunto.
Finito: Cuando podemos hacer una lista completa de los elementos del conjunto. En el ejemplo 1 tenemos un claro ejemplo de conjunto finito. Un conjunto infinito es el conjunto de todas las estrellas del firmamento.
Existen conjuntos especiales como el **conjunto Universal (U).** el cual contiene la totalidad de los elementos de un conjunto determinado. Ejemplo el conjunto de médicos.
El conjunto que non tiene ningún elemento se denomina **Vacío.** (ϕ). El conjunto de todos los hombres mayores de 200 años.

Taller de Clase No1

Escribir por extensión los siguientes conjuntos:
1. $A = \{x / x \text{ es un número natural mayor que 6 y menor que } 12\}$
2. $A = \{x / x \text{ es un número entero, mayor que - 4 y menor que } 8\}$

B. Escribir por comprensión los siguientes conjuntos:
1. $\{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12\}$
2. $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}\}$

C. Determine cuales conjuntos son finitos y cuales son infinitos:
1. Los múltiplos de 3
2. Divisores de 12.
3. triángulos cuyos lados miden respectivamente 2cm, 4cm y 4 cm.
4. Los optómetras que habitan en Pereira.
5. El número de consultorios de radiología de la ciudad de Pereira.
6. El número de centros de salud del barrio el Jardín de Pereira.
7. El número total de enfermeros del mundo.

El conjunto A es subconjunto de B si todo elemento de A es elemento de B.
Se simboliza por $A \subset B$.
Si existe un elemento en A que no es elemento de B, A no es subconjunto de B.
Se simboliza por $A \not\subset B$.

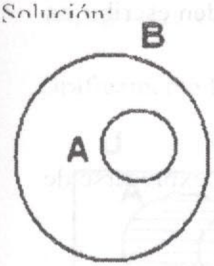
Si $A \subset B$ y $B \subset A$, $A = B$
Si $A \subset B$ y $B \not\subset A$, A es subconjunto propio de B.
Todo conjunto es subconjunto de si mismo.

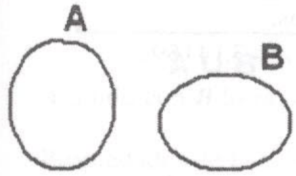
Vacío es subconjunto de todo conjunto.

Ejemplo 3: En un diagrama de Venn representar los siguientes conjuntos:

$a)\ A \subset B \quad b)\ A \not\subset B$

Solución:





⊕ **Taller de Clase No 2**

1. Si $A = \{0,1,2,3,4,5\}$**, Cuales de los siguientes enunciados son verdaderos:**

$A.$ ___ $3 \in A$ $B.$ ___ $5 \subset A$ $C.$ ___ $0 \in A$ $D.$ ___ $\phi = 0$ $E.$ ___ $6 \notin A$

$F.$ ___ $5 = \{5\}$ $G.$ ___ $\{2,5\} \subset A$ $H.$ ___ $\{1,3\} = \{3,1\}$ $I.$ ___ $\{1,3\} = \{1,3,\phi\}$ $j.$ ___ $\{\phi\} \subset A$

2. Si $A = \{a,b,c\}$, $B = \{a,b,c,d\}$**, Cuales de los siguientes enunciados son verdaderos:**

$A.$ ___ $A \in B$ $B.$ ___ $B \subset B$ $C.$ ___ $\phi \in A$ $D.$ ___ $\{a,c,\{b,d\}\} \subset B$

3. Si $1 \in A,\ 2 \in B,\ A \subset C,\ B \subset C$ **. Explicar cada una de las siguientes preguntas:**

A. Es cierto que $1 \in C$?
B. Es cierto que $2 \in C$?
C. Es cierto que $1 \in B$?

❖ **1.2 Conjuntos Numéricos.**

Naturales (N)

Los números naturales son aquellos que denotamos por **N.**

A=$\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,\ldots\}$

Enteros (Z):

$Z = \{\ldots, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\}$

Es de anotar que en **Z** están los enteros negativos $\mathbf{Z}^-$ y los enteros positivos $\mathbf{Z}^+$

Racionales (Q) son aquellos que se denotan por la letra **Q** y se pueden escribir en la forma: p/q con ***p*** **y** ***q*** enteros **y** ***q*** diferente de cero.

$Q = \{\ldots, -5/2, -2, 4/3, -1, -1/2, 0, 1/2, 1, 4/3, \ldots\}$

Irracionales (Q'): se denotan por **Q'** y son aquellos que no pueden expresarse de la forma ***p/q* con *p, q*** $\in Z$.

$\sqrt{2}, \sqrt[3]{4}, \sqrt{3}, e, \pi, \ldots$

Los números π y e tienen gran importancia en las matemáticas.

La razón entre la longitud de la circunferencia y su diámetro: $\pi = 3{,}14159\ldots$

La suma:

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1x2} + \frac{1}{1x2x3} + \frac{1}{1x2x3x4} + \frac{1}{1x2x3x4x5} + \frac{1}{1x2x3x4x5x6} + \frac{1}{1x2x3x4x5x6x7} + \ldots$$

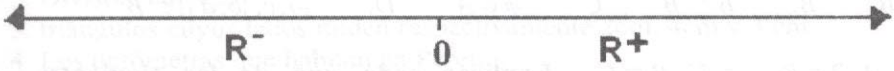
$$= 1 + 1 + 0.5 + 0{,}1666666\ldots + 0.041666\ldots + 0.008333 + 0.0013888 + 0.0001984\ldots + \ldots$$

Se representa por **e**, (Leonard Euler 1707-1783), $e \approx 2.718282828459045\ldots..$

Reales: Se denotan por **R** y lo conforman la reunión de **Q** y **Q'**.

$R = Q \cup Q'$

Se representa en la recta real, a cada punto le corresponderá un número real y a cada número real un punto.



Observación:

$$N \subset Z \subset Q \subset R, \qquad Q' \subset R \qquad R = R^- \cup \{0\} \cup R^+$$

❖

1.3 ALGEBRA DE CONJUNTOS

1.3.1 UNIÓN

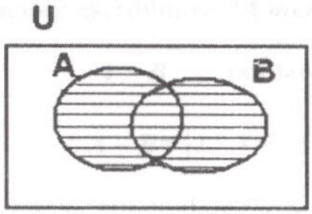
Sean A, B conjuntos cualesquiera; "A unión B" es el conjunto formado por todos los elementos que están en A, o, B (o ambos).

Notación:

Notamos "A unión B", de la siguiente manera: $A \cup B$
Por tanto

$A \cup B = \{x / x \in A, o, x \in B\}$

Gráficamente la unión de A con B está dada por:



A U B

A unido con *B* lo rayado.

Propiedades de la Unión.

a) Para cualquier conjunto *A* se tiene que: $A \cup \phi = A$

b) Para cualquier conjunto *A* se tiene que: $A \cup A = A$

c) Para cualquier conjunto *A* en *U*, se tiene que: $A \cup U = U$

d) Para cualquier conjunto *A* en *U*, se tiene que: $A \cup A' = U$

e) Sean ***A, B,*** conjuntos cualesquiera, entonces: $AUB = BUA$

f) Sean ***A, B,*** conjuntos. Si $AU\,B = \phi$, entonces, $A = \phi$, y $B = \phi$

1.3.2 INTERSECCIÓN

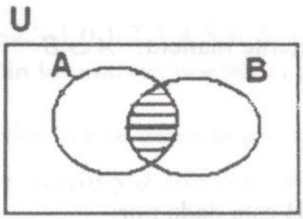
Sean A , B conjuntos cualesquiera;
"A intersección B" es el conjunto de todos los elementos que están en A y en B.

Notación: Notamos "A intersección B", de la siguiente manera:

$A \cap B$

Por tanto, $A \cap B = \{x / x \in A, \wedge , x \in B\}$

Gráficamente la intersección de *A* y *B* se representa de la siguiente forma:



A∩B

Propiedades de la intersección

a) Para cualquier conjunto A, se tiene que:

$$A \cap \phi = \phi$$

b) Para cualquier conjunto A, se tiene que:

$$A \cap A = A$$

c) Para cualquier conjunto A en el universal $\bigcup$ se tiene que:

$$A \cap \bigcup = A$$

d) Para cualquier conjunto A en el universal $\bigcup$, se tiene que :

$$A \cap A' = \phi$$

e) Sean $A, B,$ conjuntos cualesquiera. Entonces:

$$A \cap B = B \cap A$$

f) Sean A, B conjuntos, si $A = \phi$ o, $B = \phi$ entonces:

$$A \cap B = \phi$$

g) Sean A , B , C conjuntos cualesquiera , entonces :

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

h) Sean A_1 , $A_2, \ldots, A_n$ conjuntos cualesquiera, entonces, la intersección existe y

está dada por:

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \{x / x \in A_1, \wedge, x \in A_2, \wedge, \ldots, \wedge, x \in A_n\}$$

$$= \bigcap_{k=1}^{n} A_k$$

Definición

Dos conjuntos A, B se dicen disyuntos(o disjuntos) si su intersección es vacía.

1.3. 3 DIFERENCIA

Sean A, B conjuntos cualesquiera. Definimos "A menos B, como el conjunto de todos los elementos que están en A y no están en B.

Notación: escribimos ***"A menos B"***, así:

$A - B$ por tanto:

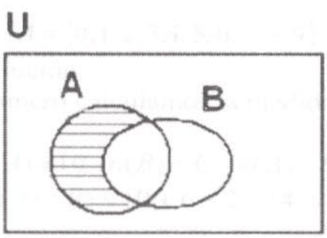
$$A - B = \{x / x \in A, \wedge, x \notin B\} =$$

$$= \{x / x \in A, \wedge x \in B'\} = A \cap B'$$ y notamos a ***"B menos A"*** así:

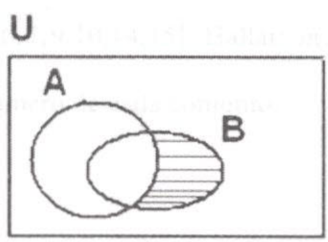
$B - A$ por tanto:

$$B - A = \{x / x \in B, \wedge, x \notin A\} =$$
$$= \{x / x \in B, \wedge, x \in A'\}$$

Gráficamente la diferencia de A y B, se da por:



A - B



B - A

Propiedades de la diferencia

a) La operación diferencia no es conmutativa: Sean A, B conjuntos cualesquiera, se tiene que:

$A - B \neq B - A$

b) Sean A, B conjuntos; De la definición de diferencia se deducen las siguientes relaciones de contenencia:

i) $(A - B) \subset A$

ii) $(B - A) \subset B$

c) Sean A, B conjuntos, si $A \subset B$, entonces $(A - B) = \phi$

d) Sean A, B conjuntos; los conjuntos $(A - B)$, $(B - A)$ y $(A \cap B)$ son mutuamente excluyentes; esto significa que la intersección de dos de éstos es vacia; es decir:

i) $(A - B) \cap (A \cap B) = \phi$

ii) $(A - B) \cap (B - A) = \phi$

iii) $(B - A) \cap (A \cap B) = \phi$

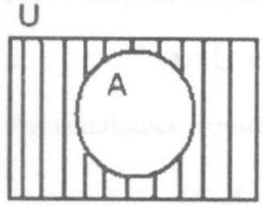
1.3. 4 COMPLEMENTO DE UN CONJUNTO A' o A^C

Sea A un conjunto del Universal. El complemento del conjunto A es lo que le hace falta a A para ser igual a su universo. Es decir; son todos los elementos que no están en A. Notación:

A' o A^C

$A' = \{x / x \in U, y, x \notin A\}$

Gráficamente (el complemento de A es lo rayado)



Ejemplo 4:

Dados los siguientes conjuntos: $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$

$A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ $\quad B = \{2,3,4,6,8\}$ $\quad C = \{1,2,3,9,11,12\}$

Calcular:

$i)\ A - B \quad ii)\ B - A \quad iii)\ A - (B - C) \quad iv)\ A \cup (B \cap C) \quad v)\ B' - (A \cup C) \quad vi) C' - (B \cap A)'$

Solución:

$i)\ A - B = \{1,5,7\} \quad ii)\ B - A = \{8\}$

$iii)\ A - (B - C) = \{1,2,3,4,5,6,7\} - [\{2,3,4,6,8\} - \{1,2,3,9,11,12\}] = \{1,2,3,4,5,6,7\} - \{4,6,8\} =$

$A - (B - C) = \{1,2,3,5,7\}$

$iv)\ A \cup (B \cap C) = \{1,2,3,4,5,6,7\} \cup [\{2,3,4,6,8\} \cap \{1,2,3,9,11,12\}] =$

$A \cup (B \cap C) = \{1,2,3,4,5,6,7\} \cup \{2,3\} = \{1,2,3,4,5,6,7\}$

$v)\ B' - (A \cup C) = \{1,5,7,9,10,11,12\} - [\{1,2,3,4,5,6,7\} \cup \{1,2,3,9,11,12\}] =$

$B' - (A \cup C) = \{1,5,7,9,10,11,12\} - \{1,2,3,4,5,6,7,9,11,12\} = \{10\}$

$vi) C'-(B \cap A)' = \{4,5,6,7,8,10\} - [\{2,3,4,6,8\} \cap \{1,2,3,4,5,6,7\}] = \{4,5,6,7,8,10\} - \{2,3,4,6\}' =$

$C'-(B \cap A)' = \{4,5,6,7,8,10\} - \{1,5,7,8,9,10,11,12\} = \{4,6\}$

1.4 Número de elementos de un conjunto.

Sea A un conjunto finito de k elementos; denotamos por $n(A)$, el número de elementos de del conjunto A. Entonces $n(A) = k$.

Ejemplo 5:

1. Si $A = \phi$, entonces $n(A) = 0$
2. Si $X = \{1,2,3,5,8\}$, entonces, $n(X) = 5$

1.3.1 Medida de la Unión de Conjuntos.

Sean, A, B conjuntos finitos, entonces: $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

Aclaración: si $A \cap B = \phi$ entonces $n(A \cap B) = 0$ luego: $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

Ejemplo 6:

Si $A = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ $B = \{6,7,9,10,14,15\}$. Hallar: $n(A \cup B)$

Solución:

Primero calculamos la medida o número de cada conjunto.

$n(A) = 10 \quad n(B) = 6 \quad n(A \cap B) = 2$

$n(A \cup B) = 10 + 6 - 2 = 14$

Si tenemos tres conjuntos la medida de la unión será:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

Veamos algunas aplicaciones de la medida de un conjunto.

Ejemplo 7:

Los estudiantes de la facultad de ciencias de la salud hicieron una encuesta sobre las brigadas de salud en los barrios A, B y C de Pereira. En total se entrevistaron a 150 personas y obtuvieron los siguientes resultados:

40 personas asisten a la brigada del barrio A
50 personas asisten a la brigada del barrio B
60 personas asisten a la brigada del barrio C
15 personas asisten a las brigadas de los barrios A y B
15 personas asisten a las brigadas de los barrios A y C
15 personas asisten a las brigadas de los programas B y C

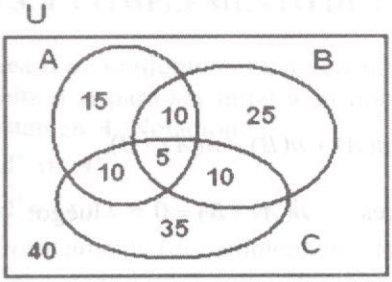
5 personas asisten a las brigadas A, B y C.

Se pregunta:

i) ¿Cuántas personas asisten al menos a uno de las tres brigadas?
ii) ¿Cuántas personas no asisten a ninguna brigada?
iii) ¿Cuántas personas asisten solo a la brigada A?
iv) ¿Cuántas personas asisten solo a las brigadas B y C?

Solución:

Lo primero que debemos hacer, es un diagrama en el cual se reúna la información dada.



i) El número de personas que asisten al menos a uno de las tres brigadas es:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

$$n(A \cup B \cup C) = 40 + 50 + 60 - 15 - 15 - 15 + 5 = 110$$

ii) El número de personas que no asisten a ninguna brigada es:

$$n(U) - n(A \cup B \cup C) = 150 - 110$$

iii) El número de personas que asisten solo a la brigada A es:

$$n(A) - n[(A \cap B) \cup (A \cap C)] = 40 - 25 = 15$$

iv) El número de personas que asisten solo a las brigadas B y C esta dado por:

$$n(B \cap C) - n(A \cap B \cap C) = 15 - 5 = 10$$

Ejemplo 8:

En una población se encuesto a 10.000 personas que utilizan vacunas para la influenza, elaboradas por los laboratorios X y W. Obteniéndose la siguiente información básica 3500 personas compran la vacuna del laboratorio X, 2100 compran la de W y 300 personas compran ambas vacunas. Determinar a) ¿Cuántas personas no compran la vacuna de X? b) ¿Cuántas personas no compran

la de W? c) ¿Cuántas personas compran exclusivamente la de X? d) ¿Cuántas personas compran únicamente la de W?
e) ¿Cuantas personas compran al menos una de estas vacunas? f) ¿Cuántas personas no compran ni del uno ni del otro?

Solución:
Sean $X = \{x / x \text{ compra la vacuna X}\}$
$W = \{x / x \text{ la vacuna W}\}$
Datos:

$n(U) = 10000,\ n(X) = 3500,\ n(W) = 2100,\ n(X \cap W) = 300$

a) El número de personas que no compran la vacuna X es:

$$n(X') = n(U) - n(X) = 10000 - 3500 = 6500$$

b) El número de personas que no compran la vacuna de W es:

$$n(W') = n(U) - n(W) = 10000 - 2100 = 7900$$

c) El número de personas que compran exclusivamente la vacuna de X es:

$$n(X \cap W') = n(X) - n(X \cap W) = 3500 - 300 = 3200$$

d) ¿Cuántas personas compran únicamente la vacuna de W?

$$n(X' \cap W) = n(W) - n(X \cap W) = 2100 - 300 = 1800$$

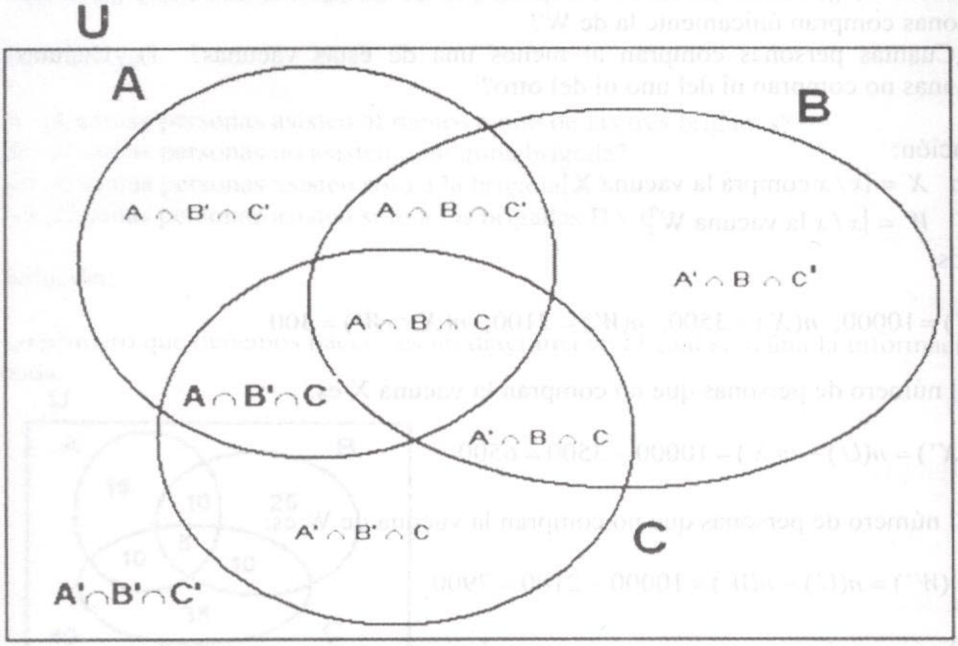
e) ¿Cuántas personas compran al menos una de estas vacunas?

$$n(X \cup W) = n(X) + n(W) - n(X \cap W) = 3500 + 2100 - 300 = 5300$$

f) ¿Cuántas personas no compran ni la una ni la otra?

$$n(X' \cap W') = n(U) - n(X) - n(W) + n(X \cap W) = 10000 - 3500 - 2100 + 300 = 4700$$

Nota importante.
En un grafico podemos ilustrar algunas operaciones importantes a la hora de resolver problemas:

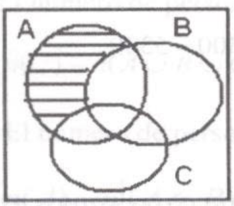


Ejemplo 9:

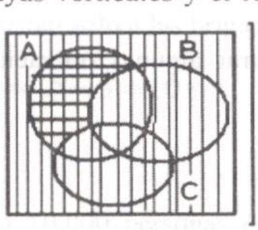
En un diagrama de Venn rayar la parte correspondiente a $(A - C) \cap B'$

Solución:

Primero sombreamos A – C. (Lo rayado)



Ahora sombreamos a B' con rayas verticales y el resultado es la parte común es



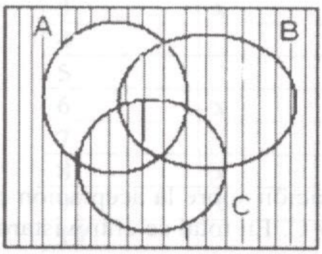
decir donde hay doble rayado.

Ejemplo 10:

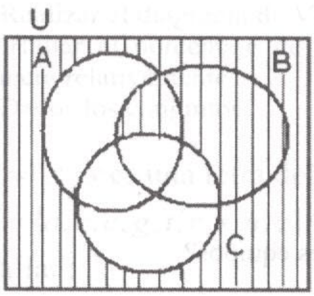
En un diagrama sombrear la parte correspondiente a: $(B \cup A)' - C$

Solución:

Primero sombreamos $(B \cup A')$



Ahora sombreamos $(B \cup A') - C$ para ello basta con quitar las rayas del conjunto C. Lo rayado es la solución.



⌖ Taller de Clase No 3

1. Para los siguientes conjuntos:

$U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$

$A = \{x / 2 \leq P \leq 12; \text{P número par}\}$

$B = \{x / 1 \leq I < 12; I \text{ es impar}\}$

$C = \{1,3,4,6,7,9\}$

Realizar las siguientes operaciones:

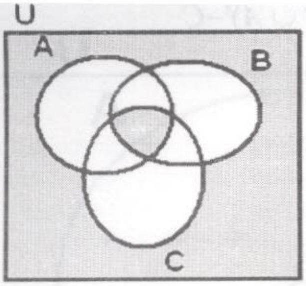
$a)\ A' - (B \cap C) \quad b)\ (B - A) \cup (A - C)' \quad c)\ [(A - B)' \cap (B \cap C)]^C$

2. Sombrear la parte correspondiente a:

$a)\ (A \cap B) \cap C'$

$b) (C - B)' \cup C$

3. Indicar los conjuntos representados por la parte sombreada en la siguiente figura.



4. Los estudiantes de radiología hicieron una investigación sobre la aceptación de la toma de rayos X con tres equipos especiales A, B y C. En total se entrevistaron a 150 personas y se obtuvieron los siguientes resultados:

40 personas prefieren el equipo A
50 prefieren el equipo B
60 prefieren el equipo C
15 personas prefieren A y B
15 personas prefieren A y C
15 personas prefieren B y C
5 los tres equipos.
Se pregunta:

a) ¿Cuántas personas prefieren al menos uno de los tres equipos?
b) ¿Cuántos no prefieren ningún equipo?
c) ¿Cuántos prefieren solo el equipo A?
d) ¿Cuántos prefieren B si y solo si no prefieren A y C?

TALLER No1

1. Sean los conjuntos:

$A = \{x / x \text{ es una persona que usa lentes estéticos color miel}\}$

$B = \{x / x \text{ es una persona que usa lentes estéticos color azul claro}\}$

$C = \{x / x \text{ es una persona que usa lentes estéticos}\}$

Realizar paso a paso utilizando los diagramas de Venn e interpretar el resultado de:

$$\{[(B - A) \cap A^c] - (A^c \cup B)^c\}^c$$

2. Se hizo una encuesta en 12 familias sobre problemas visuales presentadas en ellas, dando como resultado:

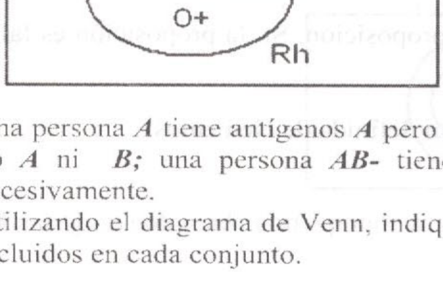
Familia	Astigmatismo	Presbicia	Hipermetropía	Miopía
1	x		x	x
2		x		
3	x	x	x	x
4		x	x	x
5			x	x
6	x			
7		x		
8	x			
9	x	x	x	x
10		x	x	
11	x			x
12			x	

a) Realizar el diagrama de Venn respectivo.
b) Hallar el porcentaje de cada problema visual: i) únicamente, ii) de alguna manera relativamente.
3. Dados los conjuntos:

$$U = \{x / x \text{ es una letra del alfabeto}\}$$
$$A = \{a,b,c,g,t,r,s,u,z\} \quad B = \{b,e,t,u,x,y,z\}, \quad C = \{a,e,i,o,u\}$$

Hallar:
$$a)(A \cap B)' \quad b)\left[A \cup (B - C)\right]^c \quad c)\left[A' \cap (C \cup B)^c\right]^C$$

4. Cuando se recibe una transfusión de sangre, un recipiente debe tener todos los antígenos del donador. Una persona puede tener uno o más de los tres antígenos del donador ***A***, ***B*** y ***Rh***, o ninguno de ellos. Son posibles ocho tipos de sangre, como indica el diagrama de Venn, donde ***U*** es el conjunto de todas las personas bajo consideración:
Grupos Sanguíneos: A- , A+, B-, B+, AB-, AB+, O-, O+



Una persona ***A*** tiene antígenos ***A*** pero no ***B o Rh,*** una persona ***O*** + tiene ***Rh*** pero no ***A*** ni ***B;*** una persona ***AB-*** tiene antígenos ***A*** y ***B*** pero no ***Rh***; y así sucesivamente.
Utilizando el diagrama de Venn, indique cuáles de los ocho tipos de sangre están incluidos en cada conjunto.

$a) A \cap Rh$

$b) A \cup B$

$c) A' \cap B$

$d) Rh' \cap A$

$e) (A \cup B \cup Rh)'$

5. La facultad de Ciencias de la Salud realizó En una población Risaraldense una brigada de salud y se encontraron los siguientes problemas sobre problemas visuales, nutrición y rendimiento académico. El resultado de tal investigación se concretó en las siguientes cifras:
25 niños los tres tipos de problemas; 18 tienen problemas visuales y de rendimiento académico solamente; 60 tienen únicamente problemas visuales; 24 tienen problemas visuales y de nutrición solamente; 50 tienen problemas de nutrición y de rendimiento académico exclusivamente; 90 solo tienen problemas de rendimiento académico y 150 no tienen ninguno de estos problemas.

a) ¿Cuántos niños se examinaron?
b) ¿Cuántos niños tienen problemas visuales?
c) ¿Cuantos niños no tienen problemas de nutrición?
d) ¿Cuántos niños tienen problemas de nutrición pero no de rendimiento?

6. Un laboratorio de rayos X ha tenido gran acogida con sus nuevos equipos digitales A y B. Se realizó una encuesta con un grupo de personas y se obtuvo la siguiente información:
85 personas por lo menos uno de los dos equipos; 50 utilizaron el equipo A; 40 utilizan el B; 50 no utilizan el equipo A. Se desea saber la siguiente información:

a) El número de personas que han utilizado ambos equipos
b) El número de personas a las que se realizó la encuesta
c) El número de personas que utilizan ninguno de dos equipos
d) El número de personas que sólo utilizan el A.

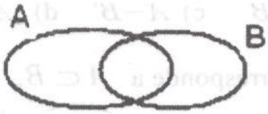
REPASO DE CONCEPTOS

1. Defina con sus palabras el significado de:

a) Conjunto b) Conjunto propio c) Unión d) Diferencia.

8. Indique la veracidad o falsedad de cada proposición. Si la proposición es falsa cámbiela por una verdadera.

a) ______ Un conjunto es una colección bien definida de elementos.

b) _______ En el siguiente diagrama 

A está contenido en *B*.

c) _______ $n(\phi)=0$

d) _______ Si $A \cap B = \phi \Rightarrow n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

2. Complete las siguientes igualdades:

a) $A \cup A =$ c) $A \cap U =$

b) $A \cap \phi =$ d) $U - A =$

3. Si se define la siguiente operación: $A * B = (A \cap B) \cup A'$ Hallar:

$a)(A \cup B) * C$

$b)\phi * A$

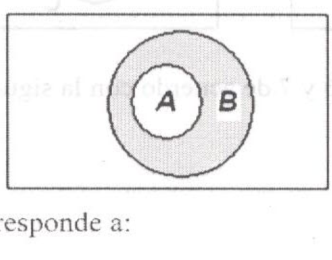
4. En una investigación realizada por un grupo de enfermeras sobre tres enfermedades que se presentan en la región se encuesto a 100 personas y encontraron la siguiente información:

8 tienen las enfermedades ***A*** y ***B***, 10 tienen ***A*** y ***C***; 5 tienen las enfermedades ***B*** y ***C***; 3 tienen las tres.
40 tienen ***A***; 45 tienen ***B*** y 35 tienen ***C***.
Se pide calcular:

a) ¿Cuántos tienen solo la enfermedad ***A***?
b) ¿Cuántos tienen ***A*** y ***C*** pero no ***B***?
c) ¿Cuántos tienen solo la enfermedad ***C***?

Evaluando competencias

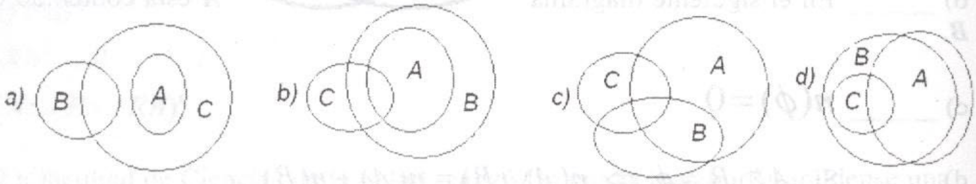
Para el siguiente diagrama



1. La región coloreada corresponde a:

a) $A'-B$ b) $A'\cap B$ c) $A'-B'$ d) $A-B'$

2. El diagrama que corresponde a $A \subset B,\ C \not\subset B,\ A \cap C \neq \phi$



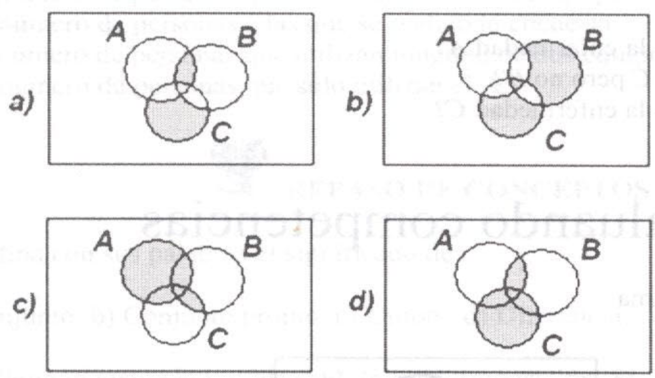
3. Los estudiantes de enfermería hicieron una encuesta sobre tres enfermedades A, B y C en total entrevistaron a 150 personas obtuvieron la siguiente información:
40 personas padecían la enfermedad A.
50 personas padecían la enfermedad B.
60 personas padecían la enfermedad C
15 personas padecían las enfermedades A y B.
15 personas padecían las enfermedades A y C.
15 personas padecían las enfermedades B y C.
5 personas padecían las tres enfermedades.
El número de personas que padecían solo la enfermedad A era:

a) 15 b) 18 c) 25 d) 30 e) 40.

4. Con respecto al problema anterior, el número de personas que padecían las enfermedades B y C eran:

a) 15 b) 25 c) 30 d) 10 e) ninguna de las anteriores.

5. La gráfica que mejor representa la operación $A \cup (B \cap C)$ es.



Conteste las preguntas 6 y 7 de acuerdo con la siguiente información

Dados los conjuntos:

$$A = \{x / x \in \mathrm{N}, \wedge, 1 \leq x \leq 10\}$$
$$B = \{x / x \in N, \wedge; 1 \leq x < 7\} \text{ y}$$
$$\mathrm{C} = \{x / x \in N, \wedge, x < 10, \wedge, x \text{ número impar}\}$$

6. $A \cap B$ es igual a:

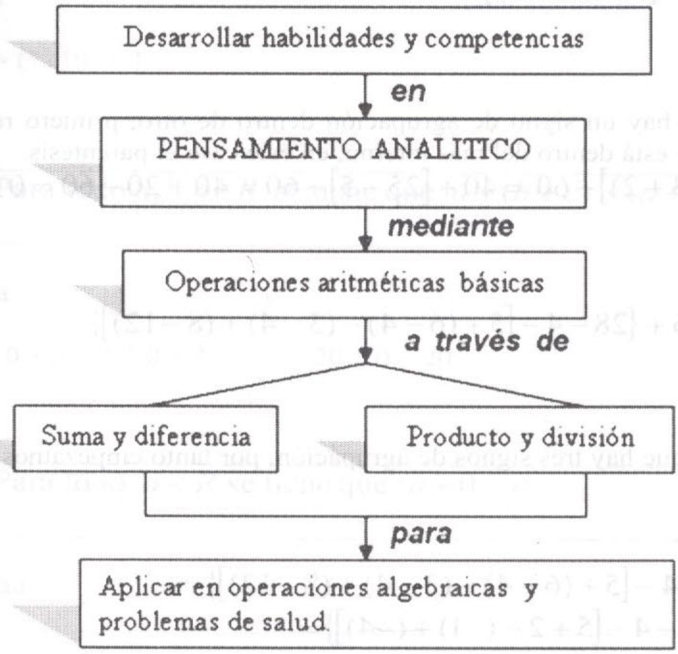
a) $\{1,2,3,4,5,6\}$ b) $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ c) $\{2,3,5,7\}$ d) $\{2,3,4,5,6\}$

7. $A \cup (B - C)$ es igual a:

a) $\{2,4,6\}$ b) ϕ c) $\{1,3,5\}$ d) $\{1,3,5,7\}$

CAPÍTULO 2
UN POCO DE ARITMÉTICA

MAPA CONCEPTUAL



PRELIMINARES

❖ 2. OPERACIONES INDICADAS DE SUMA Y RESTA.

Signos de agrupación.

Las operaciones de suma y resta con signos de agrupación son de gran importancia para tomar habilidad en el manejo algebraico posterior.
Para realizar operaciones de suma y resta con signos de agrupación, primero, realizamos las operaciones encerradas dentro de paréntesis, hasta convertirlas en un solo número y finalmente efectuamos las operaciones restantes.

Ejemplo11.

Efectuar $(8-4)+(6-3)-(3-1)$

Solución:

Primero efectuamos las operaciones dentro de los paréntesis.
$(8-4)+(6-3)-(3-1)=4+3-2=5$

Ejemplo 12:

Efectuar $40+[25-(3+2)]-60$

Solución:

Como vemos hay un signo de agrupación dentro de otro, primero realizamos la operación que está dentro del más interno, en este caso el paréntesis.
$40+[25-(3+2)]-60=40+[25-5]-60=40+20-60=0$

Ejemplo13:

Efectuar $956+\{28-4-[5+(6-4)-(3-4)+(8-12)]\}$

Solución:

Observamos que hay tres signos de agrupación, por tanto empezamos con los más internos.

$$
\begin{aligned}
&956+\{28-4-[5+(6-4)-(3-4)+(8-12)]\}= \\
&=956+\{28-4-[5+2-(-1)+(-4)]\}= \\
&=956+\{28-4-[7+1-4]\}=\{28-4-[4]\}= \\
&=956+28-4-4= \\
&=956+20 \\
&=976
\end{aligned}
$$

⊕ Taller de Clase No 4

Efectuar:

$a)\ 60+[(4+3)-7]-57$
$b)500-\{6+[5-(8-7)+(-4+3)-2]\}$
$c)856+\{19-3-[6+(5-3)-(2+1)+(5-3)]\}-864$
$d)256-[(5+3)-(4-2)+3]+\{15-[(7+4)-(13-10)]\}-234$
$e)7+[10-\{5-(6+4)\}]-[15+(4-3)+(18-2)]-29$

❖ Propiedades de la adición

a) Conmutativa

Se sabe que: $3 + 5 = 5 + 3$ $\quad 8 + 4 = 4 + 8 \quad 10 + 2 = 2 + 10$
Es decir el orden de ios sumandos no altera la suma.

En general:

Para todo $a, b \in R$ se tiene que $a + b = b + a$

b) Asociativa

$7 + (10 + 1) = (7+10) + 1$

En general:

Para todo $a, b, c \in R$ se tiene que $a + (b + c) = (a + b) + c$

c) Modulativa

Se sabe que: $0 + 3 = 3 + 0 = 3 \qquad 20 + 0 = 20$

En general:

Para todo $a \in R$ se tiene que : $a + 0 = a.$

d) Uniformidad

Para todo $a, b, c \in R$, si $a = b$ entonces $a + c = b + c$

⊕ **Taller de Clase No 5**

1. Escribir la propiedad o propiedades que ilustran cada ejemplo:

a) $6 + 8 = 8 + 6$ ____________________

b) $3 + (15 + 5) = (3 + 15) + 5$ ____________________

c) $7 + 0 = 0 + 7 = 7$ ____________________

2. En los espacios nombrar la propiedad que justifica cada paso de los ejercicios:

$a)\ 24+(12+2)=24+(2+12)$
$=(24+2)+12$
$=26+12$
$=38$

b) Para todo $u,v,w\in R$

$$u+(v+w)=u+(w+v)$$
$$=(u+w)+v$$
$$=(w+u)+v$$

c) Hallar tres números cuya suma sea:

a) 85 b) 173 c) 54 d) 121 e) 845

d) Escribir la suma $a+b+c$ de 6 formas diferentes aplicando las propiedades conmutativa y asociativa.

Producto (Multiplicación)

Si $a,b\in R$ entonces a la suma $b+b+b+\ldots+b$, en donde hay a sumandos, se le llama producto de a y b. Se escribe $a\,x\,b=(ab)$

Así:

$$\boxed{\underbrace{b+b+b+\ldots+b}_{a \text{ sumandos}}=a\,x\,b}$$

A los números a y b se les llama factores del producto $a\,x\,b$.

Al procedimiento que se sigue para determinar el producto $a\ x\ b$ se llama multiplicación.

Propiedades de la multiplicación.

a) Conmutativa

Se sabe que: $4\ x\ 3=3\ x\ 4$

En general:

$$\boxed{\text{Para todo } a,b\in R \text{ se tiene que } a\,x\,b=b\,x\,a.}$$

b) Asociativa

$8\ x\ (5\ x\ 3)=(8\ x\ 5)\ x\ 3$

En general:

$$\text{Para todo } a,b,c \in R \text{ se tiene que}: a\,x(b\,x\,c)=(a\,x\,b)\,x\,c$$

c) Modulativa

Se sabe que: $1x5=5x1=5$ $27x1=1x27=27$

En general:

$$\text{Para todo } a\in R \text{ se tiene que } a\times 1=1\times a=a$$

d) Uniformidad

Hay una propiedad que relaciona la multiplicación y la igualdad de números reales

$$\text{Para todo } a,b,c\in R, \text{ si } a=b \text{ entonces } a\,x\,c=b\,x\,c$$

⊕ **Taller de Clase No 6**

1. Escribir la propiedad o propiedades que ilustra cada ejemplo:

$a)7\,x\,3=3\,x\,7$

$b)8\,x(5\,x\,6)=(8\,x\,5)\,x\,6$

$c)7\,x(9\,x\,4)=(9\,x\,4)\,x\,7$

2. Nombrar la propiedad que justifica cada paso.

$$\begin{aligned} a)8\,x(5\,x\,3)&=8\,x(3\,x\,5)\\ &=(8\,x\,3)\,x\,5\\ &=24\,x\,5\\ &=120 \end{aligned}$$

$b)$ Para todo $a,b,c\in R$

$$\begin{aligned} (a+b)c&=c(a+b)\\ &=(ca)+(bc)\\ &=(ac)+(bc) \end{aligned}$$

Luego de tratar las propiedades de la suma y el producto de números reales, nos dedicaremos al trabajo con números racionales.

Recordemos.

2.1 Números racionales (Q)

Días atrás, escuchamos en las noticias lo siguiente:

La UVR se cotizó hoy a $2,742.35

La devaluación anual en Colombia en 2004 fue del orden del 21%

Las $\frac{3}{4}$ partes de la población mundial sufren de Gripe.

Ahora cuando una enfermera dice le colocaré a este paciente unos 3/5 de la dosis, necesaria para hoy. Todos los datos expresados anteriormente corresponden a conjuntos numéricos de las racionales.

> Se llaman números racionales a aquellos números que pueden representarse en la forma $\frac{a}{b}$. Siendo a y $b \in Z$ y $b \neq 0$. Al conjunto de números racionales, lo representamos por $\boldsymbol{Q}$.
> $Q = \{a/b, / : a \in Z, b \in Z, \text{y}, b \neq 0\}$

Comparación

Toda fracción positiva es mayor que cualquier fracción negativa.
Si las fracciones tienen igual denominador será mayor aquella cuyo numerador sea mayor.

Si las fracciones tienen distinto denominador se comparan las fracciones equivalentes a las dadas con igual denominador.

Ejemplo 14:

Dadas las fracciones $\frac{4}{7}$ y $\frac{3}{5}$ para encontrar fracciones equivalentes a las dadas y que tengan igual denominador, lo más natural es considerar dos fracciones con denominador igual al producto de los denominadores.
En este ejemplo es conveniente elegir

$\frac{20}{35}$ y $\frac{21}{35}$ Como fracciones equivalentes a las dadas.

Comparando $\frac{20}{35}<\frac{21}{35}$ luego $\frac{4}{7}<\frac{3}{5}$

❖ Suma y resta

Para sumar y restar fracciones de igual denominador se procede de una manera muy sencilla. El resultado tendrá por numerador a la suma ó resta de los numeradores y su denominador será igual.

Ejemplo 15:

$$\frac{1}{5}-\frac{3}{5}+\frac{9}{5}=\frac{1-3+9}{5}=\frac{7}{5}$$

Cuando las fracciones no tienen el mismo denominador, se sustituyen por fracciones equivalentes, con igual denominador. Luego se opera de la misma manera que en ejemplo 15; es decir, utilizamos un denominador común.

Ejemplo 16:

$$\frac{1}{4}+\frac{6}{5}-\frac{1}{2}=\frac{5}{20}+\frac{24}{20}-\frac{10}{20}=\frac{5+24-10}{20}=\frac{19}{20}$$

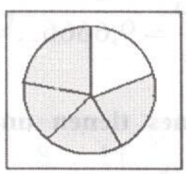
Es decir utilizamos un denominador común.

❖ Producto

Supongamos que tenemos un tarro con 4/5 de una vitamina en tres porciones iguales.

Si ahora debo compartirla con cuatro amigos ¿qué parte de la vitamina me tocará?

Luego de pensar por algún tiempo lo más conveniente es: dividir cada uno de los quintos en cinco porciones y cada uno comerá 4 porciones. Es decir dividiremos la vitamina en 25 porciones y de ellas le corresponde a cada uno, 4.



Luego: $\frac{1}{5}\frac{4}{5}=\frac{4}{25}$

Definición

Inverso multiplicativo.

Dado el número racional $\frac{a}{b}$; $b \neq 0$ el inverso multiplicativo es el número tal que multiplicado por $\frac{a}{b}$ da como resultado uno (1). Este número es $\frac{b}{a}$.

❖ **Cociente**

El cociente de dos números fraccionarios es igual al producto del dividendo y el inverso del divisor.

$$\frac{3}{7} \div \frac{5}{4} = \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{5} = \frac{12}{35}$$

Simplificación

Simplificar una fracción es sustituirla por la fracción equivalente cuyo denominador es el menor posible.

$$\frac{4}{28} = \frac{2 \cdot 2}{4 \cdot 7} = \frac{1}{7}$$

❖ **2.2 Expresión decimal de los números racionales.**

Si queremos escribir un fraccionario en forma decimal, bastará con dividir el numerador por el denominador.

Ejemplo 17:

$$\frac{108}{6} = 18; \quad \frac{5}{2} = 2{,}5; \quad \frac{29}{3} = 9{,}6666... = 9{,}\widehat{6}$$

Vemos que estas fracciones tienen una expresión decimal finita ó bien periódica.

Los números decimales exactos o periódicos pueden escribirse como cociente de enteros.

Si el número es decimal exacto, es decir, que tiene una expresión decimal finita, puede expresarse como un número racional con denominador igual a la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales.

Ejemplo 18:

$$2{,}5=\frac{25}{10}=\frac{5}{2} \qquad 3{,}938=\frac{3938}{1000}$$

En el caso de los decimales periódicos no es tan fácil:

Ejemplo 19:

¿A que número racional n es igual a $0{,}55\overline{5}$?

Solución:

$$n = 0{,}555\ldots$$

$$10n = 5{,}555\ldots$$

$$\text{Luego}: \quad \begin{array}{r} 10\cdot n = 5{,}555\ldots \\ 1\cdot n = 0{,}555\ldots \\ \hline 9\cdot n = 5 \end{array}$$

$$\therefore \quad n=\frac{5}{9}$$

Ejemplo 20:

¿Qué numero racional n es igual a $0{,}67\overline{67}$?

Solución:

$$\begin{array}{r} n = 0{,}676767\ldots \\ 100n = 67{,}6767\ldots \\ \hline 99n = 67 \end{array}$$

$$\therefore \quad n=\frac{67}{99}$$

⊕ Taller de Clase No 7

1. Efectuar las operaciones indicadas

$a)\frac{5}{6}+\frac{2}{15} \quad b)\frac{-8}{105}+\left(\frac{-5}{63}\right) \quad c)\frac{7}{5}+\frac{8}{15}+\frac{11}{60} \quad d)\frac{3}{21}+\frac{1}{2}+\frac{2}{49}$

$e)7\frac{1}{8}+3\frac{5}{24} \quad f)\frac{5}{6}-\frac{1}{90}+\frac{4}{7} \quad g)4+\frac{5}{3}$

2. ¿Qué número racional es igual a $6{,}891616$?

- **Operaciones con fraccionarios mediante el mínimo común denominador.**

Se simplifican los fraccionarios dados. Hecho esto, hallamos el común múltiplo de los denominadores y éste será el denominador común.
Para hallar los numeradores dividimos el m.c.m. entre cada denominador y el cociente se multiplica por el numerador respectivo.

Ejemplo 21:

Hallar el mínimo común denominador de $\frac{2}{3}, \frac{35}{60}$ y $\frac{5}{180}$

Solución:

Simplificamos cada fracción: $\frac{2}{3}, \frac{7}{12}$ y $\frac{1}{36}$

Para hallar el común denominador calculamos el m.c.m y recordemos que los descomponemos en factores primos y tomamos de cada descomposición los comunes y no comunes con su mayor potencia.

$3 = 3 \cdot 1$

$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$

$36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$

Observemos que tanto **2** como **3** son comunes pero se repite con mayor frecuencia 2 veces en **36.**

Tomamos $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 3^2 2^2 = 36$

$36 \div 3 = 12 \Rightarrow \quad \frac{2(12)}{36} = \frac{24}{36}$

$36 \div 12 = 3 \Rightarrow \quad \frac{7(3)}{36} = \frac{21}{36}$

$36 \div 36 = 1 \Rightarrow \quad \frac{1(1)}{36} = \frac{1}{36}$

Apliquemos lo anterior al siguiente ejemplo:

Ejemplo 22:

$$\frac{7}{15} - \frac{2}{45} + \frac{11}{60}$$

Solución:

Primero hallamos el común denominador.

$15 = 3 \cdot 5$

$45 = 3 \cdot 3 \cdot 5 = 3^2 \cdot 5$

$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$

Luego el denominador común es: $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = \mathit{180}$

$$\frac{7}{15} - \frac{2}{45} + \frac{11}{60} = \frac{7(12) - 2(4) + 11(3)}{180} = \frac{84 - 8 + 33}{180} = \frac{109}{180}$$

❖ 2.3 Fracciones complejas

Es aquella fracción en cuyo numerador o denominador, o en ambos, hay operaciones indicadas.

Ejemplo 23:

Las fracciones: $\dfrac{\frac{1}{5} + \frac{3}{4}}{\frac{2}{7} - \frac{1}{3}}$; $\dfrac{\left(\frac{1}{5} + 9\right) \div 7}{\frac{2}{3/4}}$ son complejas

Simplificación de fracciones complejas.

Para simplificar fracciones complejas realizamos las operaciones del numerador y denominador hasta convertirlos en una sola fracción, y se efectúa la división de estas fracciones.

Ejemplo 24:

Simplificar hasta su mínima expresión:

$$\frac{\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{9} - \frac{1}{12}\right) x \frac{6}{7}}{8 \div \frac{1}{\frac{1}{4}}}$$

Solución:

$$\frac{\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{9}-\frac{1}{12}\right)x\frac{6}{7}}{8\div\frac{1}{\frac{1}{4}}}=\frac{\left(\frac{1(6)+1(4)-1(3)}{36}\right)x\frac{6}{7}}{8\div4}=\frac{\frac{7}{36}x\frac{6}{7}}{2}=\frac{\frac{1}{6}}{2}=\frac{1}{12}$$

Ejemplo 25:

Simplificar hasta su mínima expresión:

$$\left(3+\frac{1}{3+\frac{1}{1-\frac{1}{3}}}\right)\div3\tfrac{2}{9}$$

Solución:

$$\left(3+\frac{1}{3+\frac{1}{1-\frac{1}{3}}}\right)\div3\tfrac{2}{9}=\left(3+\frac{1}{3+\frac{1}{\frac{3-1}{3}}}\right)\div3\frac{2}{9}=\left(3+\frac{1}{3+\frac{3}{2}}\right)\div\frac{29}{9}$$

$$=\left(3+\frac{1}{\frac{6+3}{2}}\right)\div\frac{29}{9}=\left(3+\frac{2}{9}\right)\div\frac{29}{9}=\frac{29}{9}\cdot\frac{9}{29}=1$$

❖ 2.4 Potenciación y Radicación de números reales.

Definimos la potencia de un número real, así:

Sea n un número natural diferente de cero y a un número real, entonces:

$$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot a\ldots a}_{n\text{ veces}}$$

Propiedades:

1. $a^n a^m = a^{n+m}$

2. $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

3. $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m};\ a \neq 0$

4. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

5. $(a^n)^m = a^{nm}$

Ahora si $n = 0 \Rightarrow a^0 = 1$

Ejemplo 26:

$a)\ 3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$

$b)\ \left(-\dfrac{3}{2}\right)^3 = \left(-\dfrac{3}{2}\right)\left(-\dfrac{3}{2}\right)\left(-\dfrac{3}{2}\right) = -\dfrac{3 \cdot 3 \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 2} = -\dfrac{27}{8}$

$c)\ \left(\dfrac{1}{4}\right)^{-3} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{4}\right)^3} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{64}} = 64$

$d)\ (3 \cdot 4)^2 = 3^2 \cdot 4^2 = 9 \cdot 16 = 144$

$e)\ \left(3^2\right)^3 = 3^6 = 729$

Nota: Cuando tenemos la expresión: $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n}$ basta con invertir el numerador y denominador, es decir: $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n$

Radicación

Dados $a \in R, n \in N, n > 1$ definimos:

$$c^n = a$$

a es el radicando n el índice y c la raíz.

Propiedades

$a)\sqrt[n]{a\cdot b}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\;\; n\in N$

$b)\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\;\; n\in N;\;\; b\neq 0$

¿Cuándo es posible el cálculo de raíces enésimas?

Puede calcularse la $\sqrt[n]{a}$ si a es un número real cualquiera y n es **impar,** o bien, si n es *par* y a es no **negativo.**

Es muy útil escribir las raíces enésimas como exponente fraccionario:

$$\sqrt[n]{a}=(a)^{1/n}$$

Ejemplo 27:

$$a)\sqrt{\frac{12}{8}}=\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$b)\left(\sqrt[5]{2}\right)^{15}=2^{15/5}=2^{3}=8$$

$$c)\ \sqrt[3]{\sqrt[4]{4096}}=\sqrt[3\cdot 4]{4096}=\sqrt[12]{4096}=\sqrt[12]{2^{12}}=2^{12/12}=2$$

$$d)\sqrt[6]{(-8)^{2}}=(-8)^{2/6}=(-8)^{1/3}=\left((-2)^{3}\right)^{1/3}=(-2)^{1}=-2$$

2.5 Racionalización de Denominadores

Algunas veces nos aparecen expresiones como $\dfrac{a}{\sqrt[n]{b}}$ con $b\neq 0$ donde $\sqrt[n]{b}$ es un número racional. En ocasiones necesitamos simplificar los cálculos, por ello debemos expresar la fracción dada por otra equivalente con denominador entero. El procedimiento empleado se denomina **racionalización de denominadores.**

Caso I

Cuando se presenta la forma $\dfrac{a}{\sqrt[n]{b}}$.

Ejemplo 28:

Racionalizar el denominador de: $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$.

Solución:

Multiplicamos por $\sqrt{5}$ numerador y denominador:

$$\frac{3}{\sqrt{5}}\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5^2}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$$

Ejemplo 29:

Racionalizar el denominador de: $\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$

Solución:

En este caso debemos multiplicar por la raíz cúbica de un número tal que multiplicado por la raíz cúbica de 9 nos devuelva un número con raíz cúbica exacta. Para este caso multiplicamos por $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{9}}\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3}}=\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{27}}=\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3^3}}=\frac{\sqrt[3]{3}}{3}$$

Caso II

2.6 Expresiones conjugadas.

Cuando en el denominador se presentan expresiones de la forma:

$$\frac{a}{c+\sqrt{b}} \quad \text{ó} \quad \frac{a}{c-\sqrt{b}}$$

Ejemplo 30:

Racionalizar el denominador de: $\frac{2}{4+\sqrt{3}}$

Solución:

Multiplicamos denominador y numerador por la expresión conjugada de $4+\sqrt{3}$ que es la misma pero con signo intermedio negativo: $4-\sqrt{3}$.

$$\frac{2\left(4-\sqrt{3}\right)}{\left(4+\sqrt{3}\right)\left(4-\sqrt{3}\right)}=\frac{2\left(4-\sqrt{3}\right)}{4^2-4\sqrt{3}+4\sqrt{3}-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{2\left(4-\sqrt{3}\right)}{4^2-3}=\frac{2\left(4-\sqrt{3}\right)}{13}$$

Ejemplo 31:

Racionalizar el denominador de: $\dfrac{1}{2-\sqrt{5}}$

Solución:

$$\frac{1(2+\sqrt{5})}{(2-\sqrt{5})(2+\sqrt{5})}=\frac{2+\sqrt{5}}{4+2\sqrt{5}-2\sqrt{5}-(\sqrt{5})^2}=\frac{2+\sqrt{5}}{4-5}=-\frac{2+\sqrt{5}}{1}=-(2+\sqrt{5})$$

⊕ Taller de clase No 8

1. Simplificar hasta su mínima expresión

$$a)\,5+\cfrac{2}{1+\cfrac{1/2}{2-\cfrac{1}{4}}}\qquad b)\,\frac{\dfrac{2-2/5}{4/5}+\dfrac{1-1/3}{1/3}}{\dfrac{4-1/4}{1/2}+\dfrac{5-1/5}{24}}x\left(\frac{7}{20}x\frac{11}{2}\right)$$

2. Demostrar que:

$$\frac{\left[\left(9\div\dfrac{1}{1/3}\right)\times\dfrac{4}{5}\right]\times\dfrac{5}{12}}{6\div\dfrac{1}{1/12}}\times 3=1$$

Taller No 2

1. Efectuar:

$a)\ 34-\{2-[4+(5-7)+(8-5)+13]\}$

$b)(7-5)4+3(4-2)+(8-2)5-2(11-10)-42$

$c)900+\{30-5x4+5[19-(5-3)2+(4-2)2]\}-856$

$d)250-[(6+4)-(3-1)+2]+\{16-[(8+3)-(12-10)]\}-244$

$e)8+[9-\{6-(5-4)\}]+14-\{11-[7-(3-2)]\}-20$

2. Realizar las operaciones indicadas (hallando previamente el m.c.d)

$$a)\frac{1}{6}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\right) \quad b)25-\frac{7}{30}+4\frac{1}{20}-\frac{1}{50}-\frac{1}{6}-3-25\frac{63}{100}$$

$$c)-\frac{5}{12}+\frac{7}{24}+\left(\frac{-25}{36}\right)+\frac{17}{48} \quad d)\ \frac{1945}{5670}-\frac{237}{1470}-\frac{5147}{2940}$$

3. Simplificar hasta su mínima expresión.

$$a)\frac{\frac{\frac{1}{1}}{3}-\frac{\frac{1}{1}}{2}}{\frac{\frac{2}{1}}{5}+\frac{\frac{4}{1}}{10}} \quad b)\frac{\frac{2-\frac{1}{3}}{8}+\frac{\frac{5}{6}}{3}}{\left(5\div\frac{1}{8}\right)x\left(\frac{1}{5}\div\frac{1}{10}\right)}$$

$$c)\frac{\frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{6}}+\frac{5\frac{2}{3}}{\frac{1}{12}}}{6+\left(8-\frac{1}{4}\right)}+3 \quad d)\frac{\frac{\frac{8}{1}}{4}+2-\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}}{3\div\left(\frac{5}{3}x\frac{6}{5}\right)} \quad e)\frac{\frac{\frac{2}{3}}{5}+\frac{\frac{4}{6}}{7}}{\frac{\frac{1}{1}}{5}-\frac{\frac{1}{1}}{3}}$$

$$f)\left[\frac{\frac{1}{1-1/5}+\frac{1}{1-1/6}}{\frac{1}{1-1/3}-\frac{1}{1-1/8}}x\left(\frac{1}{7}+\frac{2}{49}-\frac{62}{343}\right)-\frac{49}{50}\right]\div\frac{25}{24}$$

$$g)\left(\frac{3}{2+\frac{1/5}{3-\frac{1}{4}}}\right)-1\frac{17}{38} \qquad h)\ \frac{\frac{1-1/2}{3-1/4}}{5+\frac{\frac{2/3-1/6}{1-1/4}}{3+5/8}}$$

4. Calcular

$a)\sqrt{3}\sqrt{3}-\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{4}$

$b)\left(1+\sqrt{3}\right)^{2}-\sqrt{20}$

$c)\ \sqrt[4]{48}-\sqrt[4]{3}\left(1+\sqrt[4]{81}\right)$

5. Racionalizar el denominador de:

$a)\dfrac{3}{\sqrt{7}}\quad b)\dfrac{2}{1-\sqrt{2}}\quad c)\ \dfrac{2}{\sqrt[3]{4}}\quad d)\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{27}}{\sqrt{3}-\sqrt{27}}\quad e)\dfrac{3}{3+\sqrt{3}}\quad f)\dfrac{3}{\sqrt{8}}\quad i)\dfrac{2-\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}$

REPASO DE CONCEPTOS

1. Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, si es falsa, cámbiela por una verdadera.

a. ______ $\pi \in N$

b. ______ $-\sqrt{25}\in Z$

c. ______ Al racionalizar el denominador de $\dfrac{5+2\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}}$ se obtiene $2+\sqrt{3}$

d. ______ Al simplificar $4\dfrac{1}{2}+\left(\dfrac{3}{5}-\dfrac{1}{6}\right)$ se obtiene $\dfrac{64}{15}$

e. ______ $\left(-2\right)^{-4}=1/4$

2. Cada uno de los siguientes ítems tiene cuatro respuestas de las cuales sólo una es correcta. Indique en el casillero correspondiente el ítem que considere correcto.

2.1 $\left[\sqrt[3]{\left(-3+2\right)}+5\right]\div\left(0,\overline{4}-1\right)$ es igual a:

a) -10 b) -8 c) $-\dfrac{9}{25}$ d) Ninguna anterior.

2.2 $360-\left[(6+4)-(8+12)+15\right]+\left\{25-\left[(9+2)-(-13+8)\right]\right\}-364$ es igual a:

a) 0 b) -1 c) 364 d) 365 e) Ninguna anterior.

2.3 $3 \div (-6+9-15)$ es igual a:

$a) -\frac{11}{30}$ $b) -\frac{1}{4}$ $c) \frac{1}{4}$ $d) \frac{1}{2}$ $e)$ Ninguna anterior

2.4 $3\sqrt[3]{3} + 2\sqrt[3]{3}$ es igual a:

$a) 5\sqrt[3]{3}$ $b) 5\sqrt[3]{6}$ $c) 5\sqrt[6]{3}$ d) Ninguna anterior

2.5 La expresión $\frac{1}{2\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ es igual a:

$a) \frac{1}{18}\left(2\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)$ $b) \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{9}$ $c) \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{19}$ $d)$ Ninguna anterior

3. Simplificar hasta su mínima expresión:

$$\left[\frac{36}{3+\frac{3}{5}}\right]^2 x \left[\left(-3+\frac{5}{2}\right)^2\right]^3 x \left[\frac{\sqrt[4]{2+\frac{1}{4}}}{-1-\frac{3}{2}}\right]^2$$

4. Expresar como números racionales:

$a) -0,09\overline{09}$ $b) 0,09$ $c) -0,\overline{123123}$ $d) 10,045\overline{45}$

5. Hallar el valor de A en la expresión:

$A = br^2 - 0,043t$ siendo $b = 1,25;$ $r = 0,32;$ $t = 2,1$

6. Hallar C en la expresión:

$$C = \frac{a-1}{3} + 0,32r \text{ siendo } a = 2,53 \quad r = 0,22$$

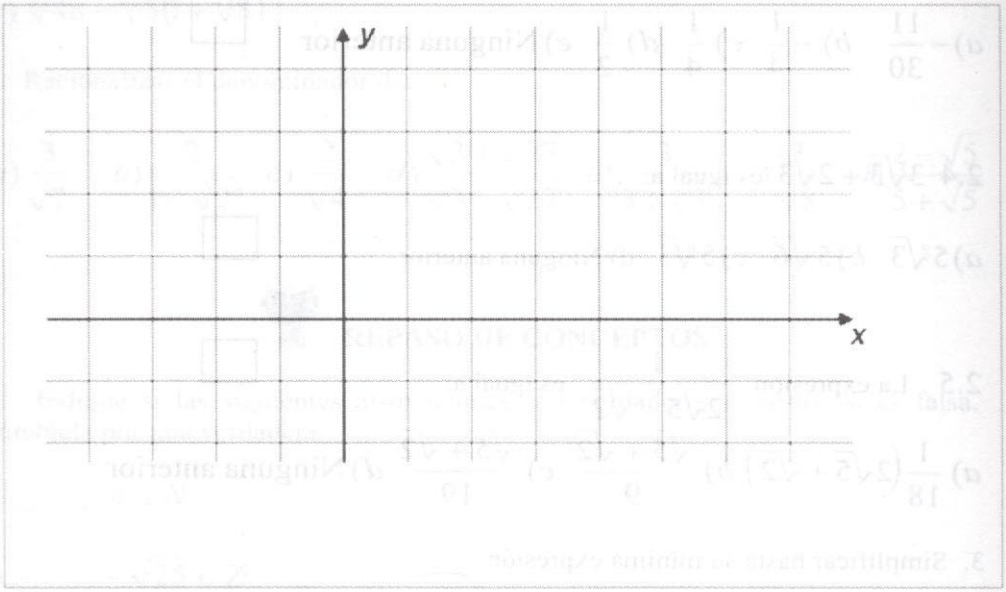
7. Hallar **B** en la expresión:

$B = K\left(1+TR\right)$ siendo $K = 1,001$ $T = 0,000002$ $R = 13,2$

8. Calcular:

$$\frac{(8{,}3-0{,}05)-(4{,}25-3{,}15)}{(0{,}4\div 0{,}4)+(0{,}006\div 0{,}6)+7{,}04}$$

9. En el siguiente plano coordenado



Ubicar las siguientes parejas:

$$a)(-3,7)\quad b)\left(-\frac{3}{2},\,6\right)\quad c)\left(3\frac{1}{4},\,\frac{5}{3}\right)\quad d)\left(-2,\,\frac{9}{4}\right)\quad e)(-4{,}0{,}25)\quad f)\,(3{,}56{,}5{,}24)$$

10. Ubique en la recta real los siguientes números:

$$a)\pi^2\quad b)e^3\quad c)\,1-\frac{\pi}{3}\quad d)(3+2\pi-4e)^2\quad e)8-\frac{1}{5}$$

Recuerde: $\pi \cong 3{,}1416\ \ y\ \ e \cong 2{,}71828..$

Evaluando competencias

1. Al simplificar la fracción $3+\dfrac{1-\dfrac{2}{5}}{6}$ obtenemos:

a) 3/10 b) 5/31 c) 2/31 d) 1/31

2. El número racional n que corresponde a $0{,}7777\overline{7}$ es:

a) 7/8 b) 7/9 c) 9/7 d) 6/7

3. La expresión $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ es igual:

a) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ b) $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ c) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ d) $\sqrt{3}+2$

4. Al simplificar la expresión $\dfrac{3}{2+\left(\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{2}}\right)}$ se obtiene:

a) 15/21 b) 31/21 c) 12/21 d) 30/21

5. Al simplificar $\left(\dfrac{1}{0.1}+\dfrac{1}{0.01}+\dfrac{1}{0.001}\right)\times 0.3$ se obtiene:

a) 444 b) 555 c) 333 d) 3,333

6. La fracción que corresponde al número mixto $4\frac{5}{3}$ es:

a) 17/3 b) 14/3 c) 19/3 d) 16/3

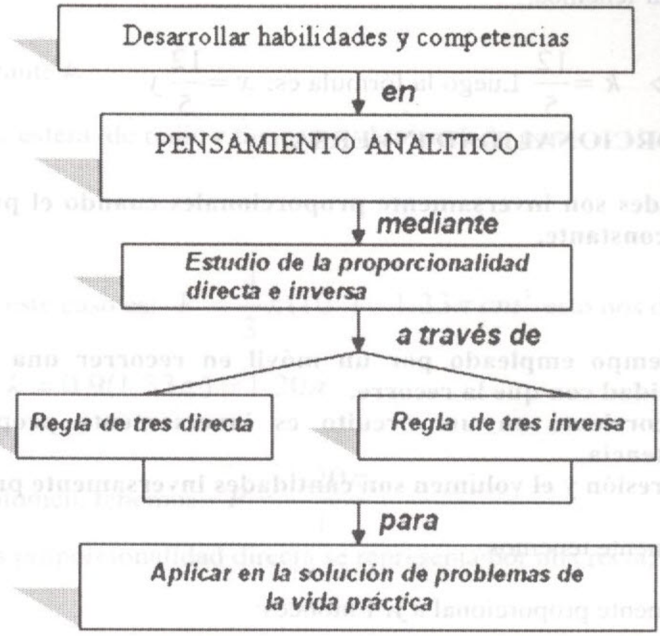
7. Al efectuar $\sqrt{\sqrt[3]{256}}$ se obtiene:

a) $\sqrt[6]{4}$ b) $\sqrt[6]{5}$ c) $2\sqrt[3]{256}$ d) $\sqrt[6]{256}$

8. Al racionalizar $1/\sqrt[3]{3}$ se obtiene:

a) $\sqrt[3]{9}$ b) $\sqrt[3]{3}$ c) $\sqrt[3]{2}$ d) $\sqrt[3]{8}$

CAPÍTULO 3
PROPORCIONALIDAD DIRECTA E INVERSA



PRELIMINARES

❖ 3. PROPORCIONALIDAD DIRECTA.

Se dice que dos magnitudes A y B son directamente proporcionales cuando la razón de sus medidas es constante.

Ejemplo 32:

- La fuerza de una persona y el peso que puede levantar.
- El volumen de un gas y su temperatura.
- El trabajo realizado por una persona y el tiempo trabajado.
- La fuerza es directamente proporcional al producto de la masa por su aceleración.

Matemáticamente tenemos:

Si x es directamente proporcional a y. Entonces:

$$x = k\,y$$

k es una constante de proporcionalidad.

Ejemplo 33:

Si $x = 12$ cuando $y = 5$. Hallar la constante de proporcionalidad.

Solución:
Al reemplazar tenemos:

$$12 = k5 \implies k = \frac{12}{5} \text{ Luego la fórmula es: } x = \frac{12}{5}y$$

3.1 PROPORCIONALIDAD INVERSA.

Dos cantidades son inversamente proporcionales cuando el producto de sus medidas es constante.

Ejemplo 34:

- **El tiempo empleado por un móvil en recorrer una distancia y la velocidad con que la recorre.**
- **La corriente en un circuito es inversamente proporcional a la resistencia.**
- **La presión y el volumen son cantidades inversamente proporcionales.**

Matemáticamente tenemos:

x es inversamente proporcional a y. Entonces:

$$x = \frac{k}{y}$$

k Constante de proporcionalidad.

Ejemplo 35:

Si $x = 6$ y $y = 14$. hallar k.

Solución:

$$6 = k14 \implies k = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}$$

Por tanto:

$$x = \frac{3}{7y}$$

Ejemplo 36:

Si la temperatura permanece constante, la presión de un gas confinado es inversamente proporcional al volumen. La presión de cierto gas dentro de un globo esférico de ***10 cm.*** de radio es $0{,}9\ g./cm^2$. Si el radio del globo aumenta a ***12cm***, calcular la nueva presión del gas.

Solución:

Sea P la presión *(g/cm ^{2})* y el volumen por V *(cm ^{3})*, puesto que P es inversamente proporcional a V. Por tanto:

$$P = \frac{k}{V}$$

Para alguna constante k.

Sabemos que una esfera de radio r tiene un volumen dado por:

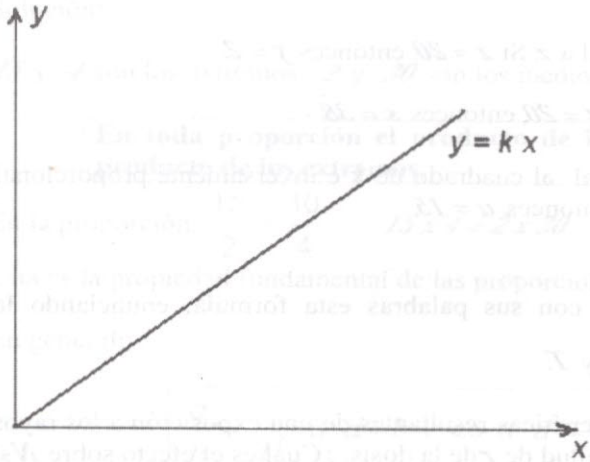
$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

El volumen para este caso es: $V = \frac{4}{3}\pi(10^3) = 1.33\pi\, cm^3$ esto nos conduce a:

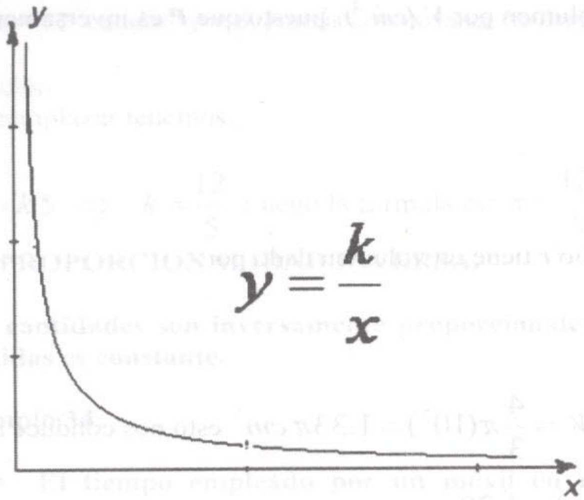
$$0.9 = \frac{k}{1.33\pi} \therefore k = 0.9(1.33\pi) = 1.20\pi$$

Para cualquier volumen, tenemos: $P = \dfrac{1.20\pi}{V}$

Gráficamente una proporcionalidad directa se representa por una recta, así:



La proporcionalidad inversa se representa por una curva. Así:



⊕ Taller de clase No 9

1. En los siguientes ejercicios exprese el enunciado mediante una fórmula matemática donde intervengan las variables dadas y una constante de proporcionalidad k, y luego encuentre el valor de k a partir de las condiciones que se dan.

a) y es directamente proporcional a z. Si $z=20$, entonces $y=2$.

b) t varía directamente con s. Si $t=20$, entonces $s=38$.

c) w es directamente proporcional al cuadrado de **x** e inversamente proporcional al cubo de u. Si $w=3$ y $x=5$, entonces $u=15$.

2. Si $w=k\dfrac{Lm^2}{T}$ exprese con sus palabras esta formula, enunciando la proporcionalidad de w con L, m y T.

3. El número N de mutaciones genéticas resultantes de una exposición a los rayos x varía directamente con la magnitud de r de la dosis. ¿Cuál es el efecto sobre N si r se cuadriplica?

4. La ley de Poiseuille indica que la rapidez de la circulación sanguínea *F(en l/min.)*, que hay en una arteria principal, es directamente proporcional al producto de la cuarta potencia del radio r y la presión sanguínea P.

a) Encuentre a F en términos de P, r y una constante de proporcionalidad k.

❖ 3.2 PROPORCIONES

Dos fracciones o razones que son iguales como $\frac{30}{2}=\frac{60}{4}$ y $\frac{15}{2}=\frac{30}{4}$ se dice que forman una proporción.

En general:

La igualdad de dos razones forman una proporción

La proporción $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ se lee *a* es *b* como *c* es *d*.

A, b, c y d son respectivamente el **1º, 2º, 3º y 4º.** Términos de la proporción. *a* y *c* se llaman antecedentes. *b* y *d* se llaman consecuentes. A los términos **1º y 4º** se les denomina **extremos.** En este caso los extremos son *a* y *d*.
A los términos **2º** y **3º** se les denomina **medios.** En este caso los medios son *b* y *c*.

Ejemplo 37:

Indicar los extremos y los medios de: $\frac{15}{2}=\frac{30}{4}$.

Solución:

15 y *4* son los extremos *2* y *30* son los medios.

En toda proporción el producto de los medios es igual al producto de los extremos.

En la proporción: $\frac{15}{2}=\frac{30}{4}$ $\quad 15 x 4 = 2 x 30$

Esta es la propiedad fundamental de las proporciones.

En general:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d};\ a\cdot d=b\cdot c \Leftrightarrow a\cdot d=b\cdot c$$

Ejemplo 38:

Encontrar la razón que forme proporción con $\frac{2}{7}$.

Solución:

Debemos buscar una razón que con $\frac{2}{7}$ cumpla con la propiedad fundamental.

Una razón puede ser $\dfrac{8}{28}$.

$$\frac{2}{7}=\frac{8}{28}, \text{ porque } 28(2)=7(8)$$

Ejemplo 39:

Encontrar una serie de cinco razones iguales a partir de $\dfrac{4}{9}$.

Solución:

Debemos buscar razones que con $\dfrac{4}{9}$ cumplan la propiedad fundamental.

$$\frac{4}{9}=\frac{8}{18}=\frac{12}{27}=\frac{16}{36}=\frac{20}{45}$$

Ejemplo 40:

Hallar x en la siguiente proporción: $\dfrac{7}{3}=\dfrac{21}{x}$.

Solución:

Aplicamos la propiedad fundamental:

$$7x=21(3)$$
$$7x=63$$
$$x=\frac{63}{7}$$
$$x=9$$

El término x se llama la cuarta proporcional de *7, 3* y *21.*

⊕ Taller de Clase No 10

1. Encontrar una razón que forme proporción con $\dfrac{3}{4}$.

2. Formar una serie de cinco razones a partir de $\dfrac{3}{5}$.

3. Hallar x en las siguientes proporciones:

$a)\frac{x}{5}=\frac{4}{10}$ $\quad b)\ \frac{9}{x}=\frac{3}{2}$ $\quad c)\frac{4}{5}=\frac{24}{x}$ $\quad d)\frac{8}{x}=\frac{x}{32}$

4. Halle un número que sea media proporcional entre:

$a)$ 5 y 45. $\quad b)$ 6 y 96.

5. Encontrar la cuarta proporcional para:

a) **3, 8, 5**

b) **2, 7, 4**

❖ 3.3 Regla de Tres Simple

A un adulto de 65 kg de peso se le coloca una dosis de cierto medicamento equivalente a 650mg por día, ¿cuánto deberá aplicarse le a un niño cuyo peso es de 20kg?

Solución:

A un adulto se le aplica la dosis del medicamento de acuerdo a su peso, por tanto si el adulto pesa 65 kg la dosis es de 650mg día. Para conocer cuanto se le aplica a un niño cuyo peso es de 20kg, debemos aplicar la siguiente relación:

$$\frac{65kg}{20kg}=\frac{650\,mg}{x}\Rightarrow x(65)=\frac{650(20)}{1}\Rightarrow x=\frac{650(20)mg}{65}=200mg$$

Por tanto a un niño cuyo peso es de 20 kg deberá colocársele una dosis de 200 mg día.

La regla de tres simple directa es un método para solucionar problemas en los que intervienen dos magnitudes directamente proporcionales.

Ejemplo 41:

Un carro lleva una velocidad constante. En 6 horas ha recorrido 360 km. ¿Cuántas horas tardará en recorrer 270 km?

Solución:

$$\frac{6}{360}=\frac{x}{270}$$
$$270(6)=360\cdot x$$
$$\frac{270(6)}{360}=x$$
$$4{,}5=x$$
$$x=4{,}5 \text{ horas}$$

Otra forma de resolverlo es la siguiente:

Kilómetros ***Horas***

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{360} & & \mathbf{6} \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ \mathbf{270} & & \mathbf{x} \end{array}$$

Proporción:

$$\frac{360}{270}=\frac{6}{x} \quad \text{luego: } 360(x)=270(6)$$
$$x=\frac{270(6)}{360}=4{,}5 \text{ horas o } 3h\ 30'$$

⊕ Taller de Clase No 11

1. Si una tonelada tiene 2000 libras, ¿Cuántas libras hay en $3\frac{1}{3}$ toneladas?

2. Si un poste proyecta una sombra de 190,5 cm. de largo y al mismo tiempo un hombre de 1,54 cm. de estatura proyecta una sombra de 1,06 cm. de largo, ¿Qué altura tiene la torre?

3. Los $\frac{3}{7}$ de la capacidad de un tanque son 8,136 litros. Hallar la capacidad del tanque.

❖ 3.4 Regla de Tres Simple Inversa

Para cercar un lote se necesitan 15 rollos de alambre de 0,45m de largo. ¿Cuántos rollos se necesitan si el largo fuera de 0,75m?

Solución:

Si el alambre es más largo se necesitan menos rollos para cercar el lote.
Luego las magnitudes son inversamente proporcionales.

Planteamiento:

Kilómetros ***Horas***

0,45 ***15***

0,75 ***x***

Y se forma la proporción como indican las flechas:

$$\frac{0{,}75}{0{,}45} = \frac{15}{x}$$

Aplicando ahora la propiedad fundamental de las proporciones, tenemos:

$$0{,}75 \cdot x = 0{,}45(15)$$

$$x = \frac{0{,}45(15)}{0{,}75} = 9$$

Luego se necesitan 9 rollos de alambre.

La regla de tres simple inversa es un método para solucionar problemas en los que intervienen dos magnitudes inversamente proporcionales.

Ejemplo 42:

A razón de 70 km. por hora un automovilista emplea 2 horas, 30 minutos para recorrer cierta distancia. ¿Qué tiempo empleará para recorrer la misma distancia a razón de
50 km. por hora?

Solución:

Si disminuye la velocidad, se demora más tiempo para recorrer la distancia. Luego las magnitudes son inversamente proporcionales. Así:

Velocidad	tiempo
70 km./h	*2h, 30 minutos*
50 Km./h	*x*

Hacemos el cambio a minutos y tenemos:

Velocidad ***Tiempo***

70 Km/h ***150`***

50 Km/h ***x***

Luego formamos la proporción:

$$\frac{50}{70}=\frac{150}{x}$$

$$50(x)=70(150)$$

$$x=\frac{80(150)}{50}=210$$

$$x=210 \text{ minutos} = 3 \text{ h } 30'$$

⊕ Taller de Clase No 12

1. Con un grifo que tiene un caudal de 14 litros por minuto, se han empleado 48 horas en llenar un depósito, ¿cuánto tiempo se emplearía si su caudal fuera de 32 litros por minuto?

2. 4 enfermeros realizan turnos de urgencia en 12 días. ¿En cuántos días podrían hacer los mismos turnos 7 enfermeros?

3. Un ciclista emplea 18 minutos en recorrer un circulo llevando una velocidad media de 60 Km./h, ¿qué velocidad debería llevar para efectuar el mismo recorrido en 12 minutos?

4. Un terapeuta respiratorio tiene 36 pacientes y medicamentos para nebulización por un término de 28 días. Con 20 pacientes más, sin disminuir la ración diaria de medicamento y sin agregar más medicamento, ¿durante cuántos días podrá aplicar la terapia respiratoria?

5. Una lente para anteojos puede ser hecha por 2 trabajadores en 15 días. Si el plazo para entregarla es sólo de 10 días, ¿Cuántos trabajadores deberán aumentarse?

❖ 3.5 Regla de tres compuesta

Ejemplo 43:

Un terapeuta respiratorio ha comprado para el consumo de 15 pacientes durante 45 días, 21 litros de cierto medicamento para pruebas de respiración. Al cabo de 20 días llegan 6 pacientes más. ¿Cuántos litros más tendrá que comprar?

Solución:

Mediante una figura veamos la solución:

Personas	Días	Litros
15	45	21
6	25	x

Este problema puede descomponerse en dos problemas de regla de tres simple directas encadenadas así:

Primero se considera constante el número de días y se hace variar el número de personas.

Personas Litros

$$\begin{array}{ll} 15 \downarrow & \nearrow 21 \downarrow \\ 6 & x_1 \end{array}$$

Obtenemos la siguiente proporción:

$$\frac{15}{6}=\frac{21\mathrm{F}}{x} \quad (1)$$

En segundo lugar se considera constante el número de personas y se hace variar el número de días.

Días Litros

$$\begin{array}{ll} 45 \downarrow & \nearrow x_1 \downarrow \\ 25 & x \end{array}$$

Tenemos la siguiente proporción:

$$\frac{45}{25}=\frac{x_1}{x} \quad (2)$$

Multiplicando miembro a miembro las dos proporciones (1) y (2) tenemos:

$$\frac{15}{6}\cdot\frac{45}{25}=\frac{12}{x_1}\frac{x_1}{x}$$

$$\frac{15}{6}\cdot\frac{45}{25}=\frac{21}{x}$$

$$\frac{9}{2}=\frac{21}{x} \quad \therefore\ x=\frac{2(21)}{9}=4\frac{2}{3}\text{ Litros}$$

Debe comprar $4\frac{2}{3}$ Litros más del medicamento.

Ejemplo 44:

3 radiólogos trabajando 8 horas diarias han practicado exámenes a 80 trabajadores de una empresa Pereirana en 10 días. ¿Cuántos días necesitarán 5 radiólogos, trabajando 6 horas diarias para atender 60 personas de la misma empresa?

Solución:

Primero descomponemos la regla de tres compuesta en reglas de tres simples y luego multiplicamos ordenadamente las proporciones formadas.

3 radiólogos atienden las personas en 10 días
5 radiólogos los atenderán en x días

A más hombres, menos días; luego son inversamente proporcionales:

$$\frac{5}{3}=\frac{10}{x} \quad (1)$$

Se emplean x días atendiendo 8 horas diarias
Se emplean x_1 días atendiendo 6 horas diarias

A más días, menos horas diarias; luego; son inversamente proporcionales:

$$\frac{6}{8}=\frac{x}{x_1} \quad (2)$$

Se emplean x_1 días para atender 80 trabajadores de a empresa
Se emplean x_2 días para atender 60 trabajadores de la empresa

A más días, más Trabajadores, luego son directamente proporcionales:

$$\frac{80}{60}=\frac{x_1}{x_2} \quad (3)$$

Multiplicando término a término (1), (2) y (3) tenemos:

$$\frac{5\cdot 6\cdot 80}{3\cdot 8\cdot 60}=\frac{10\cdot x\cdot x_1}{x\cdot x_1\cdot x_2}$$

$$\frac{5}{3}=\frac{10}{x}\ \therefore\ x=\frac{10\cdot 3}{5}=6 \text{ días.}$$

⊕ Taller de Clase 13

1. Para construir dos habitaciones se emplearon 20000 ladrillos de 25 cm. por 9 cm.
¿Cuántos ladrillos de 18 cm. por 3 cm. se emplearan para construir 3 habitaciones de las mismas dimensiones de las anteriores?

2. Un atleta marchando a 12 Km./h recorre en varias etapas un camino, empleando 9 días a razón de 7 horas por día. ¿A qué velocidad tendrá que ir si desea emplear sólo 6 días a razón de 9 horas?

3. Una torre de 25.05 m da una sombra de 33.40 m ¿Cuál será, a la misma hora, la sombra de una persona cuya estatura es 1.80 m?

4. Los 2/5 de capacidad de un estanque son 500 litros. ¿Cuál será la capacidad de los 3/8 del mismo estanque?

Taller No 3

1. Una fuente da 120 litros de agua en 15 minutos. ¿Cuántos litros más dará en $13\frac{1}{13}$ minutos?

2. La tabla muestra la correspondencia entre el diámetro ***D*** y la longitud de la circunferencia ***C***.

D(cm)	*C(cm)*	$\frac{C}{D}$
2	6,28	
4	12,56	
6	18,8	
8	25,1	
10	31,4	
12	37,7	
14	44,0	
16	50,2	

a) ¿Cuál es la razón **C/D** en cada caso?

b) Elabore un gráfico de **D vs C. ¿qué concluye?**

3. Para los datos de la siguiente tabla:

D(cm)	**C(cm)**	$\frac{A}{D}$	$D^2\ (cm^2)$	$\frac{A}{D^2}$
2	3,14			
4	12,56			
6	28,26			
8	50,24			
10	78,5			
12	113,04			
14	153,86			
16	200,96			

a) completar la tabla

b) Trazar las gráficas de: ***A vs D*** ^{2} ***y A vs D.***

c) ¿Es el área ***A*** directamente proporcional al diámetro ***D***?

d) ¿Es el área ***A*** directamente proporcional a D^2?

4. Hallar un número que sea proporcional entre:

$a)\dfrac{1}{5}$ y $\dfrac{1}{8}$

$b)56$ y 35

5. Encontrar la cuarta proporcional para:

$a)\dfrac{6}{5}; \dfrac{1}{2}$ y $\dfrac{3}{2}$

$b)$ 2,6; 6,5; 4,5

6. Encontrar x y y en cada caso:

$a)\ \dfrac{x}{y}=\dfrac{4}{3}$ y $x+y=12$

$b)\dfrac{8}{3}=\dfrac{x}{y}$ y $x-y=25$

$c)\dfrac{x}{y}=\dfrac{7}{8}$ y $x-y=14$

7. Una farmacia es fundada por una persona con un capital de \$ 100 000 000 a los tres años entra un socio que aporta 60 000 000. Al cabo de 0cho años desde que se fundo la farmacia, los beneficios obtenidos fueron de 70 000 000. ¿Cuánto le corresponde a cada socio?

8. Un medicamento es suministrado en una dosis de 2mg/ml por cada 60 kg de peso.¿cuánto medicamento le deben colocar a un niño de 8 años de edad y 30kg de peso?

9. Un paciente es inyectado con un medicamento de 500 cm^3 de solución al 20% para uso intravenoso con una dosis de 200mg/kg en 3 minutos ¿cuál será la dosis para 5 minutos?

10. Una pastilla de 20 g está compuesta de vitamina C, de hidratos de carbono, proteínas y sales minerales en una proporción 3,5,2,1 respectivamente. ¿Qué cantidad contiene cada componente?

REPASO DE CONCEPTOS

1. ¿Qué son cantidades directamente proporcionales? Explique con sus propias palabras y mediante un ejemplo.

2. Se determinó un punto P en el interior de la circunferencia y se trazan varias cuerdas que pasan por P. La tabla muestra las medidas x y y para cada cuerda.

x *(cm)*	y *(cm)*	$\frac{1}{x}$	$\frac{y}{x}$	$\frac{y}{\frac{1}{x}} = y \cdot x$
1	3.0			
2	1.5			
3	1			
4	0.75			
5	0.6			
6	0.5			

a) Completar la tabla
b) Trazar las gráficas*: i) y v.s x ii) y v.s 1/x*

c) ¿Es y directamente proporcional a x? ¿Por qué?

d) ¿Es y directamente proporcional a $\frac{1}{x}$? ¿Por qué?

e) ¿Qué relación existe entre las magnitudes x y y?
f) Completar: $y \cdot x = ?$

3. ¿Cuál es la diferencia entre regla de tres simple directa e inversa?

4. $\sqrt{6}$ es la media proporcional entre:
$a)\,2 \;\; y?$ $\quad b)\,6 \;\; y\,?$ $\quad c)\,12 \; y\,?$ $\quad d)\,4 \; y?$

5. Un medicamento de 30g está compuesta de vitamina D, de hidratos de carbono, de proteínas y de sales minerales en la proporción 3, 5, 2, 1 respectivamente. ¿Qué cantidad contiene de cada componente?

6. Si la temperatura permanece constante., la presión de un gas confinado es inversamente proporcional al volumen. La presión de cierto gas dentro de un globo esférico de 12 cm. es 30 kg/cm^2. Si el radio del globo aumenta a 15 cm, calcular la nueva presión del gas.(recuerde $P = \frac{k}{v}$)

7. Una variable Z varía directamente con el producto de r y u e inversamente con el cuadrado de g.
a) Si $Z = 30$ cuando $r = 3$, $u = 6$ y $g = 2$, encuentre la constante de variación.
b) Hallar el valor de Z cuando $r = 8$, $u = 5$ y $g = 2$.

8. La ley de Poseuilli indica que la rapidez de la circulación sanguínea V (en L/min), que hay en una arteria principal, es directamente proporcional al producto de la cuarta potencia del radio r y la presión sanguínea P.

a) Encontrar V en términos de P, r y una constante de proporcionalidad k.

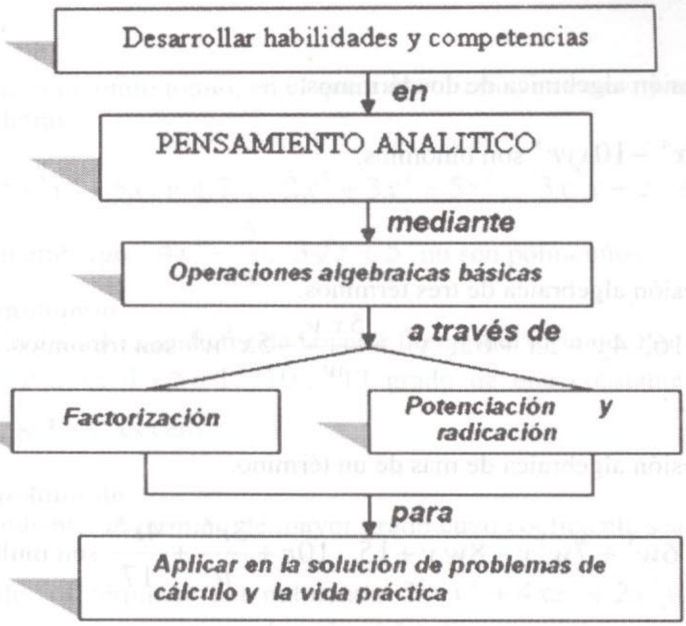
b) Durante el ejercicio fuerte, la rapidez normal de la circulación sanguínea a veces se triplica. Si el radio de una arteria importante aumenta 10%, ¿Cuánto más rápido debe bombear el corazón?

9. El número M de mutaciones genéticas resultantes de una exposición a los rayos x varía directamente con la magnitud d de la dosis. ¿Cuál es el efecto sobre M si d se cuadriplica?

10. (Ley de Henry) Si la temperatura T es constante, la cantidad de Gas G que se disuelve en un líquido, varía directamente con la presión del Gas que se encuentra sobre el líquido. Escriba una ecuación que la represente.

CAPÍTULO 4

ALGEBRA



PRELIMINARES

❖ 4. OPERACIONES FUNDAMENTALES CON EXPRESIONES ALGEBRAICAS.

4.1 Expresión algebraica

Es una combinación de números y de letras que representan números cualesquiera.

$4x^2 - 6xy + 32x^3$, $4a^2r^6$, $5b^5z^4$, $\dfrac{6ab + 3w}{2r^3 - c^2}$ son ejemplos de expresiones algebraicas.

Término.

Es una expresión que solo contiene productos y cocientes de números y de letras.

$5x^2y^3$, $\dfrac{7x}{5y^5}$, $-2r^3$, son términos de una expresión algebraica.

Sin embargo, $8x^2 + 12xy$ es una expresión algebraica que consta de dos términos.

Monomio.

Es una expresión algebraica de un solo término.

$4x^5y^4$, $5rzw^3$, $\dfrac{5y^2}{x}$ son monomios.

Binomio.

Es una expresión algebraica de dos términos.

$3x+5y,\ 5x^4-10xyr^3$ son binomios.

Trinomio.

Es una expresión algebraica de tres términos.

$5x^2-4x+16,\ 4y-5x+6z,\ y^3+\dfrac{5xy}{w}-5x^2w^8$ son trinomios.

Multinomio.

Es una expresión algebraica de más de un término.

$8x+16y,\ \ 6w^3+7w^2y-8wy+15,\ 10r+\dfrac{3r^4}{u}+\dfrac{4r^4}{17}$ son multinomios.

Coeficiente.

Cualquier factor de un término se llama **coeficiente** del resto de todo el término.
$12x^2t^3$, *12* es el coeficiente de x^2t^3.

Términos semejantes.

Son aquellos que solo se diferencian en su coeficiente numérico.

$13xy$ y $-7xy$ son términos semejantes; $15w^2y^5$ y $-\frac{1}{4}w^2y^5$ son términos semejantes; pero $-5x^3y^2$ y $-4x^3y^4$ no son términos semejantes.

Podemos reducir términos semejantes a uno solo: $-3xy^2+4xy^2+2xy^2$ este se puede reducir a $3xy^2$.

Un término es entero y racional
Con respecto a ciertas letras (que representan a números cualesquiera), si está formado por:
a) Potencias enteras y positivas de letras multiplicadas por un factor numérico.
b) Un número.

Por ejemplo, los términos $3x^2y^3, -2x^4, 7, -3x, \sqrt{5}x^3y^7$, son enteros y racionales con respecto a las letras que figuran en ellos. Sin embargo, $4\sqrt{x}$ no es racional con respecto a x y $\frac{5}{x}$ no es entero con respecto a x.

4.2 Polinomio

Es un monomio, o un multinomio, en el que cada término es entero y racional con respecto a las letras.

Por ejemplo: $5x^3y^2 - 5x^2y + 7$, $2x^3 + 3x^4 + 5x^5$, $3x^2y + z^2 + 3x^2$, son polinomios. Sin embargo $4x^3 - \frac{5}{x}$, $3\sqrt{z} + 5$ no son polinomios.

Grado de un monomio

Es la suma de todos los exponentes de la parte literal del término. Por ejemplo, el grado de $3x^4y^5z$ es $4+5+1=10$. El grado de una constante como por ejemplo, 5, 0, $\sqrt{3}$, π es cero.

Grado de un polinomio

Es el correspondiente al término de mayor grado cuyo coeficiente sea distinto de cero.
Los grados de los términos del polinomio $3x^3y^2 + 4xz^5 + 2x^3y$ son 5,6,4, respectivamente; por consiguiente, el grado del polinomio es 6.

4.3 Símbolos de agrupación.

Son los paréntesis ( ), los corchetes [ ] o las llaves { }; se emplean para indicar que los términos encerrados en ellos se consideran como una sola cantidad.

Por ejemplo, la suma de las dos expresiones algebraicas, $4x^2 - 4x - y$ y $4x - 3y$, se pueden representar por $(4x^2 - 4x - y) + (4x - 3y)$, su diferencia por $(4x^2 - 4x - y) - (4x - 3y)$, y su producto $(4x^2 - 4x - y)(4x - 3y)$.
Algunas veces se emplea como símbolo de agrupamiento una barra encima de los términos a asociar. Por ejemplo, $\overline{5x-2z}$ es lo mismo que escribir $(5x - 2z)$.

Supresión de los símbolos de agrupación.

Está regida por las normas siguientes:

1. Si un signo + precede al símbolo de agrupamiento, dicho símbolo se puede suprimir sin modificar los términos que contiene. Por ejemplo,
$(2x + 5y) + (6xy - 5x^5) = 2x + 5y + 6xy + 5x^2$

2. Si un signo – precede al símbolo de agrupamiento, dichos símbolo se puede suprimir cambiando el signo de cada uno de los términos que contiene.

Por ejemplo, $(3xy-4x^2)-(5xy^2+2x)=3xy-4x^2-5xy^2-2x$.

3. Si en una expresión figura más de un símbolo de agrupamiento, para suprimirlos se comienza por los interiores. Por ejemplo:

$$2x-\{7x^4-(2x^2+3y)\}=2x-\{7x^4-2x^2-3y\}=2x-7x^4+2x^2+3y$$

⊕ Taller de Clase 14

1. Hallar el valor de las expresiones algebraicas siguientes siendo $x=2,\ y=-2,\ z=5,\ a=1,\ b=3,\ c=\dfrac{1}{2}$

a) $3x^2-4yz$

b) $5a^2-4ab+6c$

c) $\dfrac{5xy+2z}{2a^3-c^3}$

d) $\dfrac{6x^2y(z-1)}{a+b-4c}$

2. Clasificar las expresiones algebraicas siguientes según las categorías: término o monomio, binomio trinomio multinomio, polinomio.

a) x^3+3y^3z

b) $4m^2+3m-5\sqrt{z}$

c) $6x^4+\dfrac{4}{z}$

d) $\dfrac{4x^2yz}{t}$

e) $b^4+a^4+b^3-2abc$

3. Hallar el grado de los siguientes polinomios:

a) $3x^3y+6xyz^5$

b) x^3+5x^4+2

c) $yz^4+3xy^2z^2$

d) z^5+4^3

4. Suprimir los símbolos de agrupación en cada una de las expresiones siguientes y simplificar los resultados reduciendo los términos semejantes:

a) $5x^2+(y^3-4z)-(3x-4y^3+6z)$

b) $4(8xy+6z)+6(2x-4xy)-8(2z-4xy)$

c) $2x-6-4\{4-6(2x-2y)\}$

d) $8x^2-\{6x^2-4[2y-6(2x^2-2y)]+8\}$

❖ 4.4 OPERACIONES CON EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Suma de Expresiones Algebraicas.

Se realiza agrupando los términos semejantes. Para llevar a cabo la suma se pueden disponer las expresiones en filas, con los términos semejantes en la misma columna, y, a continuación, se suman los términos de cada columna.

Sumar: $8x+4x^3-5xy,\ 6x-2x^3+9xy,\ y\ \ 3xy-5x-2y^2$

Solución:

$$\begin{array}{lll} 8x & 6x^3 & -5xy \\ 6x & -2x^3 & 9xy \\ -5x & -2x^3 & 3xy \\ \hline 9x & 2x^3 & 7xy \end{array}$$

Luego el resultado es: $9x+2x^3+7xy$

Resta de Expresiones Algebraicas.

Se realiza efectuando la suma de la expresión minuendo con la opuesta del sustraendo, la cual se obtiene cambiando el signo de todos los términos.

Restar $5x^2-4xw+10w^2$ de $7x^2-5xw-8w^2$

Solución:

$$\begin{array}{l} 7x^2-5xw-8w^2 \\ -5x^2-4xw-10w^2 \\ \hline 2x^2-xw-18w^2 \end{array}$$

Multiplicación de Expresiones Algebraicas.

Para multiplicar expresiones, se efectúa multiplicando todos y cada uno de los términos de uno de ellos por todos y cada uno de los términos del otro, sumando luego los productos obtenidos. Es recomendable ordenar las potencias de las expresiones algebraicas de mayor a menor. (o viceversa)

Multiplicar: $-5x+10+2x^2$ por $4-x$

Solución:

Ordenamos de mayor a menor las potencias de x.

$$
\begin{array}{r}
2x^2 - 5x + 10 \\
-x + 4 \\
\hline
-2x^3 + 10x^2 - 10x \qquad \\
8x^2 - 20x + 40 \\
\hline
-2x^3 + 18x^2 - 30x + 40
\end{array}
$$

División de expresiones algebraicas.

Utilizaremos solo la división de polinomios.

Se deben seguir los siguientes pasos:

1. ordenamos los términos de ambos polinomios según las potencias crecientes(o decrecientes) de una de las letras comunes a los dos polinomios.
2. Dividimos el primer término del dividendo por el primero del divisor, con lo que resulta el primer termino del cociente.
3. Multiplicamos el primer término del cociente por el divisor y se resta del dividendo, para obtener un nuevo dividendo.
4. Con el dividendo de 3), repetimos las operaciones 2) y 3) hasta que se obtengamos un resto igual a cero o de grado menor que el dividendo.
5. El resultado que obtenemos se debe escribir así:

$$\frac{\text{Dividendo}}{\text{Divisor}} = \text{Cociente} + \frac{\text{Residuo}}{\text{Divisor}}$$

Dividir: $4x^4 + 2x^3 - 12x^2 + 35x - 25$ entre $2x^2 + 4x - 5$

Solución:

Lo primero que debemos hacer es organizar (ordenar) los polinomios con respecto a una misma literal (en forma decreciente de las potencias), y se dispone la operación de la siguiente manera:

$$
\begin{array}{r|l}
\textit{Dividendo}\ 4x^2 + 2x^3 - 12x^2 + 35x - 25 & 2x^2 + 4x - 5\ \textit{Divisor} \\ \cline{2-2}
-4x^4 - 8x^3 + 10x^2 \qquad\qquad & 2x^2 - 3x + 5\ \textit{Cociente} \\ \cline{1-1}
-6x^3 - 2x^2 + 36x - 25 & \\
+6x^3 + 12x^2 - 15x \qquad & \\ \cline{1-1}
+10x^2 + 20x - 25 & \\
-10x^2 - 20x + 25 & \\ \cline{1-1}
\textit{Residuo}\quad 0 \qquad &
\end{array}
$$

Luego: $\dfrac{4x^4 + 2x^3 - 12x^2 + 35x - 25}{2x^2 + 4x - 5} = 2x^2 - 3x + 5 + \dfrac{0}{2x^2 + 4x - 5}$

Ejemplo 45

Dividir $2x^3 - 8ax^2 + 4a^2x - 10a^3$ entre $x - a$

Solución:

$$
\begin{array}{r|l}
2x^3 - 8ax^2 + 4a^2x - 10a^3 & x - a \\ \cline{2-2}
-2x^3 + 2ax^2 \qquad\qquad\qquad & 2x^2 - 6ax - 2a^2 \\ \cline{1-1}
-6ax^2 + 4a^2x - 10a^3 & \\
+6ax^2 - 6a^2x \qquad\quad & \\ \cline{1-1}
-2a^2x - 10a^3 & \\
+2a^2x - 2a^3 & \\ \cline{1-1}
-12a^3 &
\end{array}
$$

Prueba de la división

Puede hacerse la prueba de la división multiplicando el cociente por el divisor, y añadiendo al producto el residuo, si lo hay; si el resultado es igual al dividendo, la operación está bien hecha.

⊕ Taller de Clase No 15

1. Determinar el grado de los polinomios siguientes:

$a)\ 3x^5 + 10x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x - 12$

$b)\ \sqrt{2}xyz + 13 \quad c)\ w^3 + 3w^2 - 12w + 17$

2. Efectuar las operaciones indicadas

$a)(5x^2w^4)(-3x^3w)$ $b)$ $(r^3t+2r^2t^2-4t)(3r^2t^3)$

$c)3x^2+2xy-5\ +\ 4x^2-5xy+12$ $d)$ $(-3x+2y-6)-(4x+3y-7)$

3. Efectuar las divisiones, y escribir el resultado en la forma:

$$\frac{\text{Dividendo}}{\text{Divisor}}=\text{Cociente}+\frac{\text{Resto}}{\text{Divisor}}$$

$a)3y^3+5y^2-2y+4\div(2y+4)$ $b)$ $w^4+3w^3-2w^2-10w+15\div(w^2-2w+3)$

$c)\dfrac{t^4+tr^3+t^3r+2t^2r^2+r^4}{tr+t^2+r^2}$ $d)\dfrac{1-s^2+s^4}{1-s}$

$e)10y^2+1-5y-10y^3+5y^4-y^5\div(y^2-2y+1)$

❖ 4.5 DESCOMPOSICIÓN FACTORIAL

Los factores de una expresión algebraica son dos o más expresiones algebraicas que al multiplicarlas entre si originan la primera.
Si tenemos la expresión: $x^2+2x-15$ se puede escribir como el producto de los factores $(x-3)(x+5)$.

También, $3x^2+5xy-2y^2=(3x-y)(x+2y)$

En general: Descomponer una expresión algebraica en factores, es hallar dos o más factores cuyo producto es igual a la expresión propuesta.

❖ 4.5.1 PROCEDIMIENTO PARA DESCOMPONER EN FACTORES.

La descomposición en factores, se aplica generalmente, a polinomios de coeficientes enteros. Por ello se necesita que los factores sean también polinomios de coeficientes enteros. Mientras no se indique lo contrario, supondremos estas condiciones.

Si tenemos por ejemplo: *(w -2)* no lo consideramos descompuesto en los factores $\left(w+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{w}-\sqrt{2}\right)$ púes estos no son polinomios. Igualmente, $\left(2x^2-5y^2\right)$ no lo consideramos descompuesto en los factores $\left(\sqrt{2}x-\sqrt{5}y\right)\left(\sqrt{2}x+\sqrt{5}y\right)$, no son polinomios de coeficientes enteros, asimismo, $7x+15z$ se puede expresar como $7\left(x+\dfrac{15}{7}z\right)$, no es un polinomio de coeficientes enteros.

Polinomio primo.

Un polinomio de coeficientes enteros es **primo** cuando no se puede descomponer en factores . Por ejemplo,

$x^2+2x-15=(x-3)(x+5)$ está expresado como producto de los factores primos

$x-3$ y $x+5$.

Un polinomio se puede descomponer todo en factores cuando todos ellos se pueden expresar como producto de factores primos.

Algunas veces es importante cambiar los signos y la posición de los factores, así: $(x-6)(x-8)=(6-x)(8-x)$.

Un polinomio es primo cuando no admite más factores(o divisores) que él mismo, con signo más o menos, y la unidad, ± 1.

Es importante en la descomposición de factores los siguientes productos:

1. $x(y+z)=xy+xz$
2. $(x+y)(x-y)=x^2-y^2$
3. $(x+y)(x+y)=(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$
4. $(x-y)(x-y)=(x-y)^2=x^2-xy+y^2$
5. $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$
6. $(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$
7. $(a+b)(c+d)=ac+bc+ad+bd$
8. $(x+y)(x+y)(x+y)=(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$
9. $(x-y)(x-y)(x-y)=(x-y)^3=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$
10. $(x-y)(x^2+xy+y^2)=x^3-y^3$
11. $(x+y)(x^2-xy+y^2)=x^3+y^3$
12. $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz$
13. $(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+...+xy^{n-2}+y^{n-1})=x^n-y^n$
14. $(x+y)(x^{n-1}-x^{n-2}y+x^{n-3}y^2-...-xy^{n-2}+y^{n-1})=x^n+y^n$

Con n un entero positivo impar(1,3, 5, 7,…).Solo para 14.

A) Factor común (monomio) de la forma $xy+xw=x(y+w)$

Aplicamos la ley distributiva de la multiplicación:

$a)\ 8x^2y-4x^3=4x^2(2y-x)$

$b)\ 5m^3n-10mn^2+15m^2n=5mn(m^2-2n+3m)$

El procedimiento consiste en sacar la literal menor y el número menor (si es posible) que se encuentre en toda la expresión y las demás expresiones se dividen

entre este factor común, los resultados de las divisiones son los que aparecen en el paréntesis.
Ejemplo: si tomamos el caso b) el factor común es 5mn (pues es el término menor)y dividimos cada expresión entre el para obtener:

$$\frac{5m^3n}{5mn}=m^2;\quad \frac{-10mn^2}{5mn}=-2n;\quad \frac{15m^2n}{5mn}=3m$$

Por tanto el factor común *5mn* queda multiplicando los cocientes de cada división dentro de un paréntesis: $5m^3n-10mn^2+15m^2n=5mn(m^2-2n+3m)$.

B) **Diferencia de cuadrados**

Por multiplicación se tiene: $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$ o inversamente se puede escribir: $(x-y)(x+y)=x^2-y^2=(x-y)(x+y)$.
La diferencia de los cuadrados de dos expresiones algebraicas es igual al producto de la suma de dichas expresiones por su diferencia.

$$9m^2-16n^2=(3m)^2-(4n)^2=(3m-4n)(3m+4n)$$

$$(m+n)^2-s^2=[(m+n)-s][(m+n)+s]=(m+n-s)(m+n+s)$$

$$\begin{aligned}(7x+3)^2-(5x-4)^2&=[(7x+3)-(5x-4)][(7x+3)+(5x-4)]\\&=(7x+3-5x+4)(7x+3+5x-4)=(2x+7)(12x-1).\end{aligned}$$

C) **Trinomio cuadrado perfecto.**

Por multiplicación tenemos: $(x+y)(x+y)=(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$ o inversamente:

$$x^2+2xy+y^2=(x+y)^2$$

Un trinomio es cuadrado perfecto si dos términos son cuadrados perfectos y el tercero es igual al doble de la raíz cuadrada del producto de aquéllos.

Para factorizar un trinomio cuadrado perfecto debemos sacar la raíz cuadrada a los términos primero y tercero. Luego a estas raíces las multiplicamos por dos, si este producto es exactamente igual al término central se dice que es un trinomio cuadrado perfecto y lo que hacemos es dentro de un paréntesis escribir la raíz del primer término y el tercero separados por el signo del término central y elevar este paréntesis al cuadrado.

Factorizar: $a^2 + 6a + 9$

$\sqrt{a^2} = a$ $\qquad\qquad$ $\sqrt{9} = 3$

$$2(a \cdot 3) = 6a$$

Podemos observar que el doble producto de las raíces es igual al término central, por tanto es un trinomio cuadrado perfecto. Finalmente lo factorizamos, así:
$a^2 + 6a + 9 = (a+3)^2$

Factorizar: $9m^2 - 12mn + 4n^2 = (9m - 2n)^2$ ¿Por qué?

C) **Suma de cubos.**

Por multiplicación tenemos: $(x+y)(x^2 - xy + y^2) = x^3 + y^3$ lo inverso también se cumple: $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$
La suma de los cubos de dos términos algebraicos puede descomponerse en el producto de los factores, uno de los cuales es la suma de dichos términos, y el otro es la suma de sus cuadrados disminuida del producto de los términos.

Factorizar:
$$8m^3 + 27n^3 = (2m)^3 + (3n)^3 = (2m+3n)(4m^2 - 6mn + 9n^2)$$
$$8a^3 + 64b^3 = (2a+4b)(4a^2 - 8ab + 16b^2)$$

D) **Diferencia de cubos.**

Por multiplicación tenemos: $(x-y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 + y^3$ lo inverso también se cumple: $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$
La diferencia de los cubos de dos términos algebraicos puede descomponerse en el producto de los factores, uno de los cuales es la diferencia de dichos términos, y el otro es la suma de sus cuadrados aumentada del producto de los términos.

Factorizar:
$$8m^3 - 27n^3 = (2m)^3 - (3n)^3 = (2m - 3n)(4m^2 + 6mn + 9n^2)$$
$$8a^3 + 64b^3 = (2a - 4b)(4a^2 + 8ab + 16b^2)$$

E) **Trinomio de la forma** $x^2 + bx + c$

Teniendo presente que el producto de dos binomios, tales como $(x+m)(x+n)$, es:

$(x+m)(x+n)=x^2+(m+n)x+mn$, si se reemplaza $m+n$ por b y mn por c, se puede escribir: $x^2+bx+c=(x+b)(x+c)$.

Un trinomio de la forma x^2+bx+c, se descompone en el producto de dos binomios cuyo primer término es x, y los segundos términos son tales que dan por suma el coeficiente de x y por producto el término independiente de x.

Factorizar: $m^2+7m+12$

Buscamos dos números cuyo producto nos de 12 y la suma sea 7.

Si se nos hace difícil encontrar estos números debemos descomponer en factores primos a 12 y combinamos estos factores hasta encontrar lo solicitado (es decir $a.c = 12$ y $a + c = 7$)

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

Combinamos hasta obtener los números: $2\cdot 2\cdot 3=12$

$4\cdot 3=12$ y $4+3=7$.

Por tanto: $m^2+7m+12=(m+4)(m+3)$.

Factorizar: $x^2+5x-24=(x+8)(x-3)$

F) **Trinomio de la forma** ax^2+bx+c.

Los trinomios de la forma ax^2+bx+c, provienen de la multiplicación de dos binomios, como se ve en los ejemplos que siguen:

$$\begin{array}{r} 3x+5 \\ \underline{2x+2} \\ 6x^2+10x \\ \underline{+6x+10} \\ 6x^2+16x+10 \end{array}$$

Examinando este producto, podemos ver:

1. El primer término del trinomio es igual al producto de los primeros términos de cada factor.
2. El segundo término es igual a la suma algebraica de los productos del primer término de cada binomio por el segundo término del otro.
3. El tercer término es igual al producto de los segundos términos de los dos binomios.

Factorizar: $6x^2+7x-20$

Solución:

$$6x^2+7x-20=\frac{(6x+15)(6x-8)}{6}=(2x+5)(3x-4)$$

En general para factorizar un trinomio de la forma ax^2+bx+c multiplicamos el término independiente por a y dividimos entre este mismo número a. Es decir:

$ax^2+bx+c = \dfrac{ax^2+(a+c)x+ac}{a}=\dfrac{(ax+\ \ )(ax+\ \ )}{a}$ buscamos dos números que multiplicados nos de ***a c*** y sumados ***a + c***. Así como en el ejemplo.

Factorizar: $8x^2+14x+3$

Solución: buscamos dos números que multiplicados nos de $(8)(3)=24$ y sumados 14.

24	**2**
12	**2**
6	**2**
3	**3**
1	

Las combinaciones que dan 24 son: (8,3), (12,2), (6,4) pero la que necesitamos es (12,2), pues: $12(2)=24$ y $12+2=14$.

Por tanto:

$$\frac{(8x+12)(8x+2)}{8}=\frac{(\cancel{8x+12})(8x+2)}{8=\cancel{4}\cdot 2}=\frac{(2x+3)(\cancel{8x+2})}{\cancel{2}}=(2x+3)(4x+1)$$

Factorizar:

$$12x^2+13xy-4y^2=\frac{(12x+16y)(12x-3y)}{12=4\cdot 3}=(3x+4y)(4x-y)\ \text{¿Por qué?}$$

⊕ Taller de Clase No 16

1. Factorizar hasta donde sea posible.

$a)\ 9x^2+42x+49\quad b)\ x^2-10x+25\quad c)\ x^4+22x^2+121\quad d)\ 64m^2-48m+9$

$e)\ 9m^2-49n^2\quad f)\ 25x^2-121\quad g)\ \frac{1}{9}c^2-\frac{1}{100}\quad h)\ 1{,}44x^4-0.01\quad i)\ x^2+6x-7$

$j)\ m^2+7m+12\quad k)\ 20x^2+19x+3\quad l)\ 6x^2+7x-20\quad m)\ 30m^2+13m-10$

$n)\ 21n^2+11n-2\quad o)\ 6y^4+5y^2-6\quad p)\ 4x^2+x-33\quad q)\ 27m^3-n^3\quad r)\ 8y^3+z^3$

$s)\ m^3n^6-216n^9\quad t)\ (x-2)^3+(x-3)^3\quad u)\ a^3-b^3+a^2-2ab+b^2$

$x)\ m^2+(1+n)m+n$

❖ Mínimo común múltiplo

Definición: El mínimo común múltiplo de dos expresiones algebraicas A y B es otra expresión algebraica M que cumple las siguientes propiedades:

1. **A** y **B** dividen a **M**.
2. Si **S** es una expresión algebraica tal que **A** y **B** dividen a **S**, entonces **M** divide a **S**.

El mínimo común múltiplo de dos expresiones algebraicas, es en un sentido más libre, la expresión mas simple que puede ser dividida por **A** y **B**; o la más simple que contiene a ambos, **A** y **B** como factores.

Si tenemos: $A = 3m^2n$ y $B = 4m^2n^2$ luego $M = 12m^2n^2$ que corresponde al mínimo común múltiplo de **A** y **B**. Pues $3m^2n$ divide a M, cuyo cociente es $4n$, y $4m^2n^2$ divide a M, dando como cociente 3.
El mínimo común múltiplo corresponde a expresiones comunes y no comunes con su mayor potencia.

Ejemplo 46:

Hallar el mínimo común múltiplo de $A = x^2 + 2x - 3 \quad B = x^2 + 8x + 16$
Solución:
Factorizamos las expresiones A y B.

$A = x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1)$

$B = x^2 + 8x + 16 = (x+4)^2$ Luego el mcm $= (x+3)(x-1)(x+4)^2$

⊕ Taller de Clase No 17

1. Hallar el mínimo común múltiplo de:

$a)\ A = (r-1)^2(r-4) \quad B = (r-1)(r-4)(r+3)$

$b)\ A = x^2 - 4x - 21 \quad B = x^2 + 11x + 24 \quad C = x^2 - 6x + 9$

$c)\ A = 2x^2 - 7x - 15 \quad B = 3x^2 - 14x - 5$

❖ 4.6 FRACCIONES ALGEBRAICAS.

Definición: se llama **fracción o quebrado** el cociente indicado de dos expresiones algebraicas cualesquiera; por ejemplo la expresión $\frac{x}{y}$ es una expresión algebraica, y se lee x entre y. a la expresión x se le llama **numerador** y a la expresión y se le denomina **denominador.**

Igualdad: Dos fracciones $\frac{x}{y}$ y $\frac{w}{z}$ son iguales si y solo si $xz = yw$ por ejemplo las fracciones: $\frac{3m-2}{4m+5}$ y $\frac{12m-8}{16m+20}$ son iguales, pues:

$$(3m-2)(16m+20)=(12m-8)(4m+5)$$
$$48m^2+28m-40=48m^2+28m-40$$

❖ 4.6.1 Simplificación de Fracciones.

Existe un principio fundamental en las fracciones: si los términos de una fracción se multiplican o se dividen por una misma expresión algebraica, se obtiene así una fracción equivalente a la primera.

Ejemplo 47:

Simplificar hasta donde sea posible: $\dfrac{2x^2-7x-4}{3x^2-7x-20}$

Solución:

Factorizamos las expresiones del numerador y denominador y cancelamos las similares.

$$\frac{(2x+1)\cancel{(x-4)}}{(3x+5)\cancel{(x-4)}}=\frac{2x+1}{3x+5}$$

Recordemos:
Solo podemos cancelar términos cuando estén como factores(es decir multiplicando o dividiendo) no podemos hacer lo siguiente:

$\dfrac{\cancel{3x+4}-5x+8}{\cancel{3x+4}}=-5x+8$ Lo cual es falso **(¡no lo haga!);** pero si tuviéramos:

$\dfrac{\cancel{(3x+4)}(5x+8)}{\cancel{3x+4}}=5x+8$ Correcto.

Ejemplo 48:

Simplificar:

$$A=\frac{x^2+5x-24}{x^2+6x-16}\cdot\frac{4b^2x^2-25b^2}{(2x-5)(b^2x^2-b^2)}\cdot\frac{x+1}{2x+5}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{x}\right)\div\frac{(x-3)}{4x^2-4x}$$

Solución:
Debemos factorizar todas las expresiones y realizar la diferencia de fraccionarios del último término.

$$A=\frac{(x-3)(x+8)}{(x+8)(x-2)}\cdot\frac{b^2(4x-25)}{(2x-5)b^2(x^2-1)}\cdot\frac{x+1}{2x+5}\left(\frac{x-2}{2x}\right)\cdot\frac{4x(x-1)}{x-3}$$

$$A=\frac{(2x+5)(2x-5)}{(2x-5)(x-1)(x+1)}\cdot\frac{x+1}{2x+5}\cdot\frac{4x(x-1)}{2x}$$

$$A=2$$

Ejemplo 49:

Simplificar hasta su mínima expresión:

$$A=\frac{5x^2-2xy}{2x^2-xy-y^2}+\frac{6xy}{4x^2-y^2}-\frac{2x-y}{x-y}$$

Solución:

Descomponemos en factores los denominadores; es decir:

$$2x^2-xy-y^2=\frac{(2x-2y)(2x+y)}{2}=(x-y)(2x+y)$$

$$4x^2-y^2=(2x-y)(2x+y)$$

$$(x-y)=x-y$$

El denominador común corresponde a los comunes y no comunes con su mayor potencia.

$$(x-y)(2x+y)(2x-y)$$

$$A=\frac{(5x^2-2xy)}{(x-y)(2x+y)}+\frac{6xy}{4x^2-y^2}-\frac{2x-y}{x-y}$$

El denominador común lo dividimos entre cada denominador de la fracción y el resultado (cociente) lo multiplicamos por el numerador de cada fracción:

$$A=\frac{(5x^2-2xy)(2x-y)+6xy(x-y)-(2x-y)(4x^2-y^2)}{(x-y)(2x+y)(2x-y)}$$

$$A=\frac{10x^3-5x^2y-4x^2y+2xy^2+6x^2y-6xy^2-(8x^3-2xy^2-4x^2y+y^3)}{(x-y)(2x+y)(2x-y)}$$

$$A=\frac{10x^3-8x^3-5x^2y-4x^2y+6x^2y+4x^2y+2xy^2-6xy^2+2xy^2+y^3}{(x-y)(2x+y)(2x-y)}$$

Simplificamos términos semejantes y obtenemos:

$$A=\frac{2x^3+x^2y-2xy^2-y^3}{(x-y)(2x+y)(2x-y)}$$

$$A=\frac{2x^3-2xy^2+x^2y-y^3}{(x-y)(2x+y)(2x-y)}=\frac{2x(x^2-y^2)+y(x^2-y^2)}{(x-y)(2x+y)(2x-y)}$$

$$A=\frac{(x^2-y^2)(2x+y)}{(x-y)(2x+y)(2x-y)}=\frac{(x-y)(x+y)(2x+y)}{(x-y)(2x+y)(2x-y)}$$

$$A=\frac{x+y}{2x-y}$$

Ejemplo 50:

Simplificar hasta su mínima expresión:

$$\frac{m-1}{m+2-\dfrac{m^2+2}{m-\dfrac{m-2}{m+1}}}$$

Solución:

Iniciamos por la parte inferior: $m-\dfrac{m-2}{m+1}=\dfrac{(m^2+m)-(m-2)}{m+1}$

Por tanto:

$$=\frac{m-1}{m+2-\dfrac{m^2+2}{m-\dfrac{m-2}{m+1}}}=\frac{m-1}{m+2-\dfrac{m^2+2}{\dfrac{m^2+m-m+2}{m+1}}}$$

$$=\frac{m-1}{m+2-\dfrac{(m^2+2)(m+1)}{m^2+2}}$$

$$=\frac{m-1}{m+2-m-1}=m-1$$

⊕ Taller de Clase No 18

1. simplificar hasta su mínima expresión

$$a)\left[\frac{a^3-b^3}{(a-b)^3}\cdot\frac{a-b}{a^2+ab+b^2}\right]\div\frac{a^3+b^3}{a-b}$$

$$b)\left\{\frac{m^4-n^4}{m^2+n^2}\left[\frac{1}{m^2+n^2}-\frac{1}{m^2-n^2}\right]\right\}\div\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)$$

$$c)\frac{\dfrac{x-1}{x+1}-\dfrac{x+1}{x-1}}{\dfrac{x-1}{x+1}+\dfrac{x+1}{x-1}}$$

$$d)\frac{(x^3-y^3)(x^2+x-2)}{(x^2-xy-x+y)}\cdot\frac{(x^2-16)(3x-2)}{(x-4)(4x^3+4x^2y+4xy^2)(x+2)}\div\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{x}\right)$$

$$e)\left[\frac{\left(1-\dfrac{x^2-2x-2}{x^2-2x+1}\right)\cdot x^2}{\dfrac{x+1}{x-1}+\dfrac{1}{(x-1)^2}}\right]\div 3$$

❖ 4.7 EXPONENTES.

Potencia de un exponente positivo.

Sea n un entero positivo, a^n representa el producto de n factores iguales a a. Así, por ejemplo: $a^5 = a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a$.

$$\textit{base} \longleftarrow a^{n} \longrightarrow \textit{exponente}$$

n es la enésima potencia de ***a***.

Propiedades:

1. $a^0 = 1$

2. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

3. $\left(a^n\right)^m = a^{n\,m}$

4. $\dfrac{a^n}{b^m} = a^{n-m} \quad a \neq 0 \ \text{ y } \ n > m$

5. $(a \cdot b)^n = a^n b^n$

6. $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

7. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$; con $b \neq 0$

Ejemplo 51:

A) Simplificar:

$$(7x^4y^3w)(5x^3y^2)$$

Solución:

$$(7x^4y^3w)(5x^3y^2) = 35x^4x^3\,y^3y^2\,w = 35x^7y^5w$$

B) simplificar:

$$\left(\frac{3a^4b^4z^2}{15b^2a^3z}\right)^5 = \left(\frac{1}{5}a^4a^{-3}b^4b^{-2}z^2z^{-1}\right)^5 = \left(\frac{1}{5}a^1b^2z\right)^5 = \frac{a^5\,b^{10}z^5}{5^5}$$

C) Simplificar

$$\left[\left(x^{a+1}x^{2-a}\right)\left(\frac{x^{a-1}}{x^{a+1}}\right)\left(x^{a+1}\right)^{a-1}\right]^{\frac{1}{a}}$$

Solución:

$$=\left[x^{a+1+2-a}x^{a-1-a-1}x^{(a+1)(a-1)}\right]^{\frac{1}{a}}=(x^{3-2+a^2-1})^{\frac{1}{a}}=$$

$$=(x^{3-3+a^2})^{\frac{1}{a}}=x^{\frac{a^2}{a}}=x^a$$

Ejemplo 52:

Simplificar:

$$\frac{16^{m+1}+2^{2m+3}+8\sqrt{2}}{2\cdot 2^{4m}+4^m+\sqrt{2}}$$

Solución:
Llevamos la expresión a la menor base y aplicamos las propiedades de los exponentes.

$$=\frac{2^{4(m+1)}+2^{2m}2^3+2^3\sqrt{2}}{2\cdot 2^{4m}+2^{2m}+\sqrt{2}}=\frac{2^{4m+4}+2^{2m}2^3+2^3\sqrt{2}}{2\cdot 2^{4m}+2^{2m}+\sqrt{2}}$$

Observemos que el factor común en el numerador es 2^3

$$=\frac{2^3(2\cdot 2^{4m}+2^{2m}+\sqrt{2})}{2\cdot 2^{4m}+2^{2m}+\sqrt{2}}=2^3=8$$

⊕ Taller de Clase No 19

1. Simplificar utilizando las propiedades de exponentes hasta donde sea posible, dar la respuesta como un exponente positivo.

a) $\left(\dfrac{20x^5y^{-4}w^3}{10x^6y^{-5}w^2}\right)^3$ $\quad b)\dfrac{4m^5}{5n^4}\div\dfrac{8m^5}{15n^3}$ $\quad c)\left(\dfrac{2^{-4}x^{-1}y^2}{4^{-1}x^{-2}y^{-1}}\right)^2$

$d)\dfrac{m^{-1}+n^{-1}}{n^{-1}-m^{-1}}$ $\quad e)\ \dfrac{m^{-2}+3n^{-1}m^{-1}+2n^{-2}}{m^{-1}n^{-2}+n^{-2}m^{-1}}$ $\quad f)\dfrac{2^{n+3}-2^n+7}{2^{n+1}-2^n+1}$

$$g)\ \left[\left(\frac{x}{x^{a}}\right)^{a}\cdot\left(\frac{x^{2a}}{x^{a+1}}\right)\left(\frac{x^{a}}{x^{-1}}\right)^{a+1}\right]^{\frac{1}{a}}$$

❖ 4.8 RADICALES

Radical.

Es una expresión de la forma $\sqrt[n]{a}$ que representa la raíz enésima principal de a. n es un entero positivo y se denomina índice del radical, a se conoce como cantidad subradical.

índice $\longleftarrow \sqrt[n]{a} \longrightarrow$ *Cantidad subradical*

Los radicales $\sqrt{3x}$, $\sqrt[3]{6x^2+2y}$ y $\sqrt[5]{x-12}$ tienen índices **2, 3** y **5** respectivamente.

Propiedades.

$$1.\ \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

$$2.\left(\sqrt[n]{a}\right)^{n} = a$$

$$3.\ \sqrt[n]{a\cdot b} = \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$$

$$4.\ \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$5.\ \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a} = a^{\frac{1}{mn}}$$

Nota: (¡Cuidado!)

$$a)\ \sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}$$

$$b)\ \sqrt[n]{a^2+b^2} \neq a+b$$

Aplicaciones de las propiedades.

$$1.\sqrt[3]{54}=\sqrt[3]{27(2)}=\sqrt[3]{27}\cdot\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{3^3}\cdot\sqrt[3]{2}=3\cdot\sqrt[3]{2}$$

$$2.\sqrt[3]{\sqrt{(a^8\cdot b^4)^2}}=\sqrt[6]{a^{16}\cdot b^8}=a^{\frac{16}{6}}\cdot b^{\frac{8}{6}}=a^{\frac{8}{3}}\cdot b^{\frac{4}{3}}=\sqrt[3]{a^8\cdot b^4}$$

$$3.\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt{3}=5^{\frac{1}{3}}\cdot 3^{\frac{1}{2}}=5^{\frac{2}{6}}\cdot 3^{\frac{3}{6}}=\sqrt[6]{5^2\cdot 3^3}=\sqrt[6]{25(27)}=\sqrt[6]{675}$$

Ejemplo 53:

Simplificar hasta su mínima expresión:

$$\sqrt[n]{\frac{3^{2n}\cdot 36}{27^{2n+1}+9^{3n+1}}}$$

Solución:

Para simplificar esta expresión debemos llevar a una misma base las cantidades que allí aparecen. Luego aplicamos las propiedades de los exponentes.

$$\sqrt[n]{\frac{3^{2n}\cdot 36}{3^{3(2n+1)}+3^{2(3n+1)}}}=\sqrt[n]{\frac{3^{2n}\cdot 36}{3^{6n+3}+3^{6n+2}}}=\sqrt[n]{\frac{3^{2n}\cdot 36}{3^{6n}\cdot 3^3+3^{6n}\cdot 3^2}}$$

$$=\sqrt[n]{\frac{3^{2n}\cdot 36}{3^{6n}(3^3+3^2)}}=\sqrt[n]{\frac{3^{2n}\cdot 36}{3^{6n}\cdot 36}}=\sqrt[n]{\frac{3^{2n}}{3^{6n}}}$$

$$=\sqrt[n]{3^{2n-6n}}=\sqrt[n]{3^{-4n}}=3^{-4}=\frac{1}{81}$$

❖ **Suma y diferencia de radicales**

Radicales semejantes.

Dos o más radicales son semejantes cuando, reducidos a su forma más simple, tienen el mismo índice y la misma cantidad subradical.

Ejemplo 54:

Cuales de los siguiente radicales son semejantes.

$\sqrt{32}$, $\sqrt{8}$

Solución:

Para saber si son semejantes debemos descomponer en factores las cantidades subradicales.

$$\sqrt{32}=\sqrt{8(4)}=\sqrt{2^3 2^2}=\sqrt{2^2\cdot 2^2\cdot 2}=2\cdot 2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$$

$$\sqrt{8}=\sqrt{2^3}=\sqrt{2\cdot 2^2}=2\sqrt{2}$$

Por tanto tienen el mismo índice y la misma cantidad subradical son semejantes.

Suma.

Para sumar algebraicamente dos o más radicales se reducen a su forma más simple y se combinan los términos que tienen radicales semejantes.

Ejemplo 55:

Simplificar hasta su mínima expresión:

$$A)\sqrt{50}+\sqrt{18}-\sqrt{72}=\sqrt{5^2\cdot 2}+\sqrt{3^2\cdot 2}-\sqrt{3^2\cdot 2^2\cdot 2}$$
$$=5\sqrt{2}+3\sqrt{2}-6\sqrt{2}$$
$$=2\sqrt{2}$$

$$B.2x\sqrt[3]{27m^3n}+3y\sqrt[3]{8m^3n}-6z\sqrt[3]{m^3n}=2x\cdot 3m\sqrt[3]{n}+3y\cdot 2m\sqrt[3]{n}-6zm\sqrt[3]{n}$$
$$=\sqrt[3]{n}(6xm+6my-6mz)$$

$$C)a\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}-b\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}+\frac{a^2-3b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

Solución:

Aplicamos las propiedades de radicales y hallamos el común denominador, para así obtener expresiones semejantes y luego simplificar.

$$= \frac{a\sqrt{a+b}}{\sqrt{a-b}} - \frac{b\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}} + \frac{a^2-3b^2}{\sqrt{(a+b)(a-b)}}$$

$$= \frac{a\sqrt{a+b}\sqrt{a+b} - b\sqrt{a-b}\sqrt{a-b} + a^2 - 3b^2}{\sqrt{a-b}\sqrt{a+b}}$$

$$= \frac{a\sqrt{(a+b)^2} - b\sqrt{(a-b)^2} + a^2 - 3b^2}{\sqrt{a+b}\sqrt{a-b}}$$

$$= \frac{a(a+b) - b(a-b) + a^2 - 3b^2}{\sqrt{a+b}\sqrt{a-b}} = \frac{a^2 + ab - ab + b^2 + a^2 - 3b^2}{\sqrt{a+b}\sqrt{a-b}}$$

Ahora agrupamos términos semejantes y multiplicamos numerador y denominador por

$\sqrt{a^2-b^2}$

$$= \frac{2a^2-2b^2}{\sqrt{a^2-b^2}} = \frac{2(a^2-b^2)\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2-b^2}\sqrt{a^2-b^2}} = \frac{2(a^2-b^2)\sqrt{a^2-b^2}}{(a^2-b^2)} = 2\sqrt{a^2-b^2}$$

❖ **Racionalización.**

Una de las operaciones más importantes en el trabajo con radicales es la racionalización, pues tiene aplicaciones en diferentes áreas de las matemáticas y física.

Para la racionalización de denominadores es importante tener en cuenta lo siguiente:

1. **El denominador es un monomio con raíz cuadrada.**
2. **El denominador es un monomio con raíz enésima.**
3. **El denominador es un binomio de la forma** $a\sqrt{x} \pm b\sqrt{y}$
4. **El denominador es un binomio de la forma** $\sqrt[3]{x} \pm \sqrt[3]{y}$

Veamos caso por caso.

Ejemplo 56:

Caso 1 A. Racionalizar el denominador de:

$$\frac{x}{\sqrt{a}}$$

Solución:

Queremos eliminar el radical del denominador. En primer lugar, recordemos que $\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}=\sqrt{a^2}=a$ Por tanto, si multiplicamos el numerador y denominador de la expresión inicial por $\sqrt{a}$ obtenemos:

$$\frac{x}{\sqrt{a}}\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}}=\frac{x\sqrt{a}}{\sqrt{a^2}}=\frac{x\sqrt{a}}{a}$$

B. Racionalizar el denominador de:

$$\frac{m^3-mn+n^2}{\sqrt{m^3+n^3}}$$

Solución:

$$=\frac{(m^3-mn+n^2)\sqrt{m^3+n^3}}{\sqrt{m^3+n^3}\cdot\sqrt{m^3+n^3}}=\frac{(m^3-mn+n^2)\sqrt{m^3+n^3}}{\sqrt{(m^3+n^3)^2}}=$$

$$=\frac{(m^3-mn+n^2)\sqrt{m^3+n^3}}{m^3+n^3}$$

$$=\frac{(m^3-mn+n^2)\sqrt{m^3+n^3}}{(m+n)(m^3-mn+n^2)}=\frac{\sqrt{m^3+n^3}}{m+n}$$

Caso 2. El denominador es un monomio con raíz enésima.

Observemos lo siguiente:

a) ¿Cuál es la raíz por la que debemos multiplicar a $\sqrt[3]{x^2}$ para eliminar la misma?

$$\sqrt[3]{x^2}\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{x^2x}=\sqrt[3]{x^3}=x$$

b) ¿Cuál es la raíz por la que debemos multiplicar a $\sqrt[5]{x}$ para eliminar la misma?

$$\sqrt[5]{x}\sqrt[5]{x^4}=\sqrt[5]{x\,x^4}=\sqrt[5]{x^5}=x$$

En general:

Para racionalizar un denominador con un monomio se multiplican el numerador y el denominador por una cantidad radical del mismo índice, que al multiplicarlo por éste nos devuelva el valor exacto.

Ejemplo 57:

Racionalizar el denominador de: $\dfrac{3}{\sqrt[3]{9x}}$

Solución:

$$\frac{3}{\sqrt[3]{9x}}\cdot\frac{\sqrt[3]{3x^2}}{\sqrt[3]{3x^2}}=\frac{3\cdot\sqrt[3]{3x^2}}{\sqrt[3]{27x^3}}=\frac{3\cdot\sqrt[3]{3x^2}}{3x}=\frac{\sqrt[3]{3x^2}}{x}$$

Caso 3 El denominador es un binomio de la forma $a\sqrt{x}\pm b\sqrt{y}$

Observemos:

$a)\ (\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2)$
$b)\ (\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})$

Vemos que las expresiones corresponden a un producto de suma por diferencia, por tanto: (recordemos la diferencia de cuadrados)

$a)\ (\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2)=(\sqrt{3})^2-2^2=3-4=-1$
$b)\ (\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})=(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2=a-b$

Expresiones (o binomios) como las anteriores por ejemplo: $(\sqrt{3}+2)$ y $(\sqrt{3}-2)$ se denominan **expresiones conjugadas.**

En general:

$a\sqrt{x}+b\sqrt{y}$ y $a\sqrt{x}-b\sqrt{y}$ Se denominan expresiones conjugadas una de la otra, con $a,b,x,y\in Q$.
Veamos ahora como racionalizar el denominador de dichas expresiones.

Ejemplo 58:

Racionalizar el denominador de:

$A)\ \dfrac{5}{\sqrt{5}-1}$

Solución:

$$\frac{5}{\sqrt{5}-1}\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1}=\frac{5(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5})^2-1^2}=\frac{5(\sqrt{5}+1)}{5-1}=\frac{5(\sqrt{5}+1)}{4}$$

$$B)\ \frac{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}$$

Solución:

$$=\frac{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}=\frac{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}\cdot\frac{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}\right)^2}{\left(\sqrt{x+y}\right)^2-\left(\sqrt{x-y}\right)^2}=\frac{\left(\sqrt{x+y}\right)^2-2\sqrt{(x+y)(x-y)}+\left(\sqrt{x-y}\right)^2}{x+y-(x-y)}$$

$$=\frac{x+y-2\sqrt{(x+y)(x-y)}+x-y}{x+y-x+y}=\frac{2x-2\sqrt{(x+y)(x-y)}}{2y}$$

$$=\frac{2\left(x-\sqrt{(x+y)(x-y)}\right)}{2y}=\frac{x-\sqrt{(x+y)(x-y)}}{y}$$

$$=\frac{x-\sqrt{x^2-y^2}}{y}$$

$$C)\ \frac{m+n+2\sqrt{mn}}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}$$

Solución:

$$=\frac{m+n+2\sqrt{mn}}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}\cdot\frac{\sqrt{m}-\sqrt{n}}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}=\frac{\left(m+n+2\sqrt{mn}\right)\left(\sqrt{m}-\sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{m}\right)^2-\left(\sqrt{n}\right)^2}$$

$$=\frac{\left(m+n+2\sqrt{mn}\right)\left(\sqrt{m}-\sqrt{n}\right)}{m-n}$$

Observemos que la expresión:

$\left(m+n+2\sqrt{mn}\right)=m+2\sqrt{mn}+n=\left(\sqrt{m}+\sqrt{n}\right)^2$ pues:

$$\left(\sqrt{m}+\sqrt{n}\right)^2=\left(\sqrt{m}\right)^2+2\sqrt{m}\sqrt{n}+\left(\sqrt{n}\right)^2=m+2\sqrt{mn}+n$$

Por tanto podemos escribir la expresión:

$$\left(a+b+2\sqrt{mn}\right)=\left(\sqrt{m}+\sqrt{n}\right)^2$$

$$=\frac{\left(\sqrt{m}+\sqrt{n}\right)^2\left(\sqrt{m}-\sqrt{n}\right)}{m-n}=\frac{\left(\sqrt{m}+\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{m}+\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{m}-\sqrt{n}\right)}{m-n}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{m}+\sqrt{n}\right)(m-n)}{m-n}$$

$$=\sqrt{m}+\sqrt{n}$$

Caso 4. El denominador es un binomio de la forma $\sqrt[3]{x} \pm \sqrt[3]{y}$

Para racionalizar denominadores de este tipo debemos recordar, las siguientes expresiones:

1. $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$
2. $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$

Podemos comprobar que:

$$x + y = \left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}\right)\left(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{y^2}\right)$$
$$x - y = \left(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}\right)\left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{y^2}\right)$$

Podemos decir que la racionalización de un denominador que tiene expresiones como $\sqrt[3]{x} \pm \sqrt[3]{y}$ se fundamenta en la factorización de una suma o resta de cubos.

Ejemplo 59:

Racionalizar el denominador de:

$$\frac{7xy(x+y)}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}}$$

Solución:

$$\frac{7xy(x+y)}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}} \cdot \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}} = \frac{7xy(x+y)\left(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}\right)}{(x+y)}$$
$$= 7xy\left(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}\right)$$

Taller de Clase No 20

1. Realizar las operaciones indicadas y simplificar hasta donde sea posible

$a) 3\sqrt{45} - \sqrt{20} + 8\sqrt{5}$

$b) 3\sqrt{14} \cdot \sqrt{21}$

$c) 5\sqrt[4]{162} - 8\sqrt[4]{32} + 2\sqrt[4]{1250}$

$d) \dfrac{4}{x-y}\sqrt{\dfrac{2a}{x-y}} \div \sqrt{\dfrac{18a^3}{(x-y)^5}}$

$e) \sqrt[n]{\dfrac{5 \cdot 4^{n+1}}{4^{n+2} + 2^{2n+2}}}$ $\quad f) \sqrt[n]{\left(\dfrac{x^n}{x}\right)^{n+1} \cdot (x^{-1})^{n-1}}$

2. Racionalizar el denominador de:

$a)\ \dfrac{4}{\sqrt{xy}}$

$b)\ \dfrac{3}{\sqrt[3]{x^2}}$

$c)\ \dfrac{a+b}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}$

$d)\ \dfrac{2-\sqrt{3}}{7-4\sqrt{3}}$

$e)\ \dfrac{1}{x\sqrt[3]{y}-1}$

Taller No 4

1. Factorizar hasta donde sea posible.

$a)\ a^4-81 \quad b)\ a^3-a^2-ab-b^3-b^2 \quad c)\ T_1^2R_1^2-N_1^2$

$d)\ a^{2x}+2a^{x+1}+a^2 \quad e)\ x^2+xy-yz-z^2 \quad f)\ 27w^3-3wr^2$

$g)\ 64+y^3 \quad h)\ 25w^2-64z^2 \quad i)\ x^6-16x^2y^4 \quad j)\ 9x^2-24x+16$

$k)\ 4r^2-12r+9 \quad l)\ x^2+6x+9 \quad m)\ 4y^2+4y+1 \quad n)\ 21n^2+11n-2$

$o)\ 20x^2-7x-40 \quad p)\ 30y^2+13y-10$

$r)\ x-6+15x^2 \quad s)\ 15t^4-11t-12$

$t)\ 1-\dfrac{4}{9}x^8 \quad u)\ w^3+8t^3y^3 \quad w)\ 4m^3-m-4m^2+1 \quad x)\ 9s^3-s$

$y)\ y^4+5y^2+4 \quad z)\ r_0^2-5r_1^2+5r_0r_1$

2. Simplificar hasta su mínima expresión

$$a)\left(\frac{m^2-9}{m^2-m-12}\div\frac{m-3}{m^2+3m}\right)\times\frac{x^2m^2-16x^2}{2m^2+7m+3}\times\left(\frac{2}{x^2m}+\frac{1}{x^2m^2}\right)$$

$$b)\ \frac{\dfrac{m+1}{m-1}-\dfrac{m-1}{m+1}}{\dfrac{m-1}{m+1}+\dfrac{m+1}{m-1}}\times\frac{m^2+1}{2w^2-2z}\div\frac{2m}{w^2-z} \qquad c)\ \frac{\dfrac{a+x}{1-ax}+\dfrac{a-x}{1+ax}}{1-\dfrac{a^2-x^2}{1-a^2x^2}}$$

$$d)\ \frac{1}{x^2-(a+b)x+ab}+\frac{1}{x^2-(a+c)x+ac}+\frac{1}{x^2-(b+c)x+bc}$$

$$e)\ \frac{a+b}{bc-ab-c^2+ac}+\frac{b+c}{ac-bc-a^2+ab}+\frac{c+a}{ab-ac-b^2+bc}$$

3. Realizar las operaciones indicadas y simplificar

$$a)\ \frac{1}{7}\sqrt{147}-\frac{1}{5}\sqrt{700}+\frac{1}{10}\sqrt{28}+\frac{1}{3}\sqrt{2187}$$

$$b)\ \sqrt{80}+3\sqrt{405}-3\sqrt{500}-2\sqrt{252}$$

$$c)\ (m-n)\sqrt{\frac{m+n}{m-n}}-(m+n)\sqrt{\frac{m-n}{m+n}}+(2m-2n)\sqrt{\frac{1}{m-n}}$$

$$d)\ \sqrt{x^2y^{-1}-18xy^{-1}+81y^{-1}}+\sqrt{x-18+81x^{-1}}$$

$$e)\ \sqrt{2mn}+\sqrt[6]{8m^3n^3}+\sqrt{4m^2n^2}$$

4. Racionalizar el denominador de:

$$a)\ \frac{1}{5x\sqrt[4]{25y^3}}\qquad b)\ \frac{19}{5\sqrt{2}-4\sqrt{3}}\qquad c)\ \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$$

$$d)\ \frac{\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{10}}\qquad e)\ \frac{2}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}}\qquad f)\ \frac{x+2y}{\sqrt{x}+\sqrt{2y}}$$

REPASO DE CONCEPTOS

1. Encierre en un círculo la respuesta correcta.

a) V F La raíz cuadrada de un número siempre es positiva.
b) V F La raíz cúbica de un numero negativo es un número real.
c) V F Si $x=\sqrt[n]{a}$, entonces $x^n=a$.
d) V F La raíz de un producto es igual al producto de las raíces.
e) V F La raíz de una fracción es igual a la raíz del numerador dividida por el denominador.
f) $\sqrt{a^2+b^2}=a+b$
g) $\sqrt{(m+n)^{-1}}=\dfrac{1}{\sqrt{m+n}}$

2. Señale la respuesta correcta.

A) Un radical con radicando negativo tiene valor real cuando.

a) El índice es par
b) El índice es impar
c) El radicando es un número impar
d) Nunca

B) Al simplificar la expresión $\dfrac{a^{-1/2} \cdot b^{1/4}}{a^{-2/3} \cdot b^{-3}}$ obtenemos:

a) $a^{1/5}b^{11/4}$
b) $a^{2/5}b^{11/4}$
c) $a^{1/6}b^{11/4}$
d) Ninguna anterior

C) Al factorizar la expresión $4x^2y^2 - 25y^2$ obtenemos:

a) $(2xy-5)(2x-y-5)$
b) $y^2(2x-5)(2x-5)$
c) $y^2(2x+5)(2x-5)$
d) Ninguna anterior.

3. Responda cuál de preguntas A, B, C y D es cierta de acuerdo a la siguiente información.

$$A = \frac{m-2n}{mn} + \frac{3n-a}{an} - \frac{3m-2a}{am}$$

A) La fracción A no se puede simplificar por que no existen términos comunes

B) La fracción A tiene como denominador común a amn y al simplificarla se obtiene

La fracción $\dfrac{2}{amn}$.

C) La fracción A tiene como denominador común amn y su resultado al simplificarla es 0.

D) La fracción A tiene como resultado después de simplificarla $\dfrac{1}{amn}$.

4. De acuerdo a l siguiente procedimiento de factorización

$$\begin{aligned} x^5+x^4-4x^3-4x^2+4x+4 &= x^4(x+1)-(4x^3+4x^2-4x+4) \\ &= x^4(x+1)-\left[4x^2(x+1)-4(x+1)\right] \\ &= (x+1)x^4-(x+1)(4x^2-4) \\ &= (x+1)(x^4-4x^2+4) \\ &= (x+1)(x^2-1)^2 \end{aligned}$$

Seleccione la respuesta correcta.

A) Es falso pues no es cierto que el término $(x+1)$ es factor común.

B) Es cierto pues al multiplicar $(x+1)(x^2-1)^2$ se obtiene la expresión inicial.

C) No es cierto ya que x^4-4x^2+4 no es un trinomio cuadrado perfecto.

5. Seleccione la respuesta correcta.

A) factorizar un polinomio significa convertirlo en:

a) Un producto de factores
b) Un producto de tres factores
c) Un producto de cuatro factores
d) Ninguna anterior.

B) Una sola de las siguientes afirmaciones es correcta

a) Una suma al cubo equivale a una suma de cubos
b) El factor común es siempre un monomio o un binomio
c) Una diferencia de cubos no equivale a una diferencia al cubo.
d) Una diferencia al cuadrado equivale a x^2-y^2.

C) Si multiplicamos la suma de las raíces cuadradas de dos expresiones algebraicas por la diferencia de las mismas, obtenemos:

a) Un trinomio cuadrado perfecto
b) Una diferencia al cuadrado
c) Una suma al cuadrado
d) Una diferencia de cuadrados.

6. Simplificar la fracción:

$$\left[\left(\frac{1}{x+\frac{1}{1+\frac{1+x}{1-x}}}\right)^{-1}\right]^{-1} \div \left(\frac{x+1}{2}\right)$$

7. Simplificar hasta su mínima expresión.

$$\left[3-\frac{m+3}{m-\frac{2}{m-1}}\right]\cdot\left[\frac{m-\frac{2}{m-1}}{2m-3\left(\frac{m+1}{m-1}\right)}\right]$$

8. Calcular.

$a)\ \sqrt{\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}}}}}}$ $\qquad c)\ \left(\sqrt{a^3\sqrt[3]{b^2}}+\sqrt[3]{b^3\sqrt{a^2}}\right)\div\sqrt[3]{ab}$

$b)\ \sqrt[3]{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt[3]{4}}}}$ $\qquad d)\ \sqrt{1+\sqrt{6+\sqrt{5+\sqrt{16}}}}$

Evaluando competencias

1. Al racionalizar el denominador de $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ se obtiene:

a) $\dfrac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{x-y}$ b) $\dfrac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}{x+y}$ c) $\dfrac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2}{x-y}$ d) $\dfrac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2}{x-y}$

2. Al factorizar la expresión $\dfrac{x^3}{81}-1-\left(\dfrac{a^2x^3}{32}\right)+\left(\dfrac{a^2}{4}\right)$ se obtiene:

a) $\left(1-\dfrac{a^2}{4}\right)\left(\dfrac{x}{2}-1\right)\left(\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{x^2}{2}+1\right)$ b) $(1-a/2)(1-x^3/2)$

c) $\left(1-\frac{a}{2}\right)^2\left(1-\frac{x^3}{2}\right)$ d) $\left(1-\frac{a}{2}\right)\left(\frac{x^3}{2}-1\right)$

3. Al simplificar la expresión $\frac{1-1/a}{1+1/a}$ se obtiene:

a) $\frac{a+1}{a-1}$ b) $\frac{a-1}{a+1}$ c) $\frac{2a-1}{a-1}$ d) $\frac{a+1}{2a+1}$

4. Al efectuar $\frac{\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{xy}}}}{\sqrt[12]{x^5y^7}}$ se obtiene:

a) $\frac{\sqrt[3]{xy}}{2xy}$ b) $\frac{\sqrt[6]{x^4y^3}}{xy}$ c) $\frac{xy}{\sqrt[12]{xy}}$ d) $\frac{\sqrt[6]{x^4y}}{xy}$

5. Al factorizar $x^3-x^2+2ax-a^2-a^3$ se obtiene:

a) $(x-a)(x^2+xy+2axy)$ b) $(x-a)(x^2+ax+a^2-x+a)$
c) $(x-a)(x^2+ax+a^2-x^2+a)$ d) Ninguna anterior

6. Al dividir $4x^2+2x+1$ entre $\boldsymbol{x}$ **-1** se obtiene:

a) $4x+6+\frac{7}{x-1}$ b) $4x+6-\frac{7}{x-1}$ c) $5x+6+\frac{7}{x-1}$ d) $\boldsymbol{5x+6}$

7. El resultado de dividir $x^{2n}+2x^n+1$ entre x^n+1

a) x^n-1 b) $x-1$ c) x^n+1 d) $x^{2n}+1$

8. Al factorizar $5^{2x}-5^{x+1}+4$ se obtiene:

a) $(5^x-1)^2$ b) $(5^x+1)(5^x+4)$ c) $(5^x-1)(5^x-1)$ d) $(5^x-1)(5^x-4)$

9. Al factorizar $2^{3x}+2^{2x+1}+2^x$ se obtiene:

a) $2^x(2^x+1)^2$ b) $2^x(2^x+1)$ c) $(2^x-1)^2$ d) $2^x(2^x-1)^2$

CAPÍTULO 5

ECUACIONES

PRELIMINARES

5. DESPEJE DE FÓRMULAS

FÓRMULA.

Es la expresión de una ley o de un principio general por medio de símbolos o de letras. Por ejemplo en física la velocidad de la luz se define como el producto de la longitud de onda por la frecuencia, esta la podemos representar por la expresión algebraica:

$c = f \cdot \lambda$

Donde c es la velocidad de la luz f es la frecuencia y λ es la longitud de onda.

Para despejar una variable se debe tener en cuenta las siguientes reglas de igualdad.

a) Lo que suma pasa a restar y viceversa
b) Lo que multiplica pasa a dividir y viceversa.

Ejemplo 60:

Despejar la incógnita indicada en cada caso.

a) $V = i \cdot R;\ i$

b) $F = k\dfrac{q_1 \cdot q_2}{d^2};\ d$

c) $u = a + (n-1)r;\ a,\ n$

Solución:

El punto y coma nos indica cual incógnita despejar.

a) $V = i \cdot R;\ i$

Observamos que i está multiplicando y lo único que debemos hacer es enviar a R que multiplica i a dividir.

$V = i \cdot R \Rightarrow \dfrac{V}{R} = i$ que también podemos escribir como: $i = \dfrac{v}{R}$ (porque si $a = b$ entonces $b = a$).

b) $F = k\dfrac{q_1 \cdot q_2}{d^2}; d$

Solución:

$$F \cdot d^2 = k \cdot q_1 \cdot q_2 \Rightarrow d^2 = \frac{k \cdot q_1 \cdot q_2}{F} \therefore d = \sqrt{\frac{k \cdot qq}{F}}$$

Recordemos que si una incógnita esta elevada a una potencia, al despejarla debemos extraer a los dos lados de la igualdad la raíz correspondiente a dicha potencia. En este caso como ***d*** esta al cuadrado extraemos la raíz cuadrada.

c) $u = a + (n-1)r; a, n$

Solución:

i) En primera instancia despejamos ***a***

$$u = a + (n-1)r \Rightarrow u - (n-1)r = a \therefore a = u - (n-1)r$$

ii) Ahora como segundo ejercicio de este problema, vamos a despejar a ***n***.

$$u = a + (n-1)r \Rightarrow u - a = (n-1)r \Rightarrow \frac{u-a}{r} = n - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{u-a}{r} + 1 = n \therefore n = \frac{u-a}{r} + 1$$

Ejemplo 61:

Despejar la incógnita indicada.

$$\frac{1}{f}+\frac{h}{k}=\frac{T}{a};\ f;h$$

Solución:

i) $\dfrac{1}{f}=\dfrac{T}{a}-\dfrac{h}{k}\Rightarrow\dfrac{1}{f}=\dfrac{kT-ah}{ak}$ ahora invertimos los términos, con el único fin de despejar a f.

$$\frac{f}{1}=\frac{a\cdot k}{kT-ah}\quad\therefore\ f=\frac{a\cdot k}{kT-ah}$$

ii) $\dfrac{h}{k}=\dfrac{T}{a}-\dfrac{1}{f}\Rightarrow\dfrac{h}{k}=\dfrac{T\cdot f-a}{a\cdot f}\quad\therefore\ h=\dfrac{k\cdot(T\cdot f-a)}{a\cdot f}$

⊕ Taller de Clase No 21

1. Despejar la incógnita indicada.

$a)\ y=\frac{1}{2}gt^{2}+v_{0}t;g;v_{0}$

$b)\ F=m\cdot a;\ a$

$c)\ {}^{0}F=\frac{9}{5}{}^{o}c+32;\ c$

$d)\ D=\frac{m}{v};\ v$

$e)\ \frac{v_{1}}{T_{1}}=\frac{v_{2}}{T_{2}};v_{2};T_{2}$

$f)\ PV=nRT;\ R$

$g)\ P_{total}=P_{gas}+P_{vapor\ de\ agua};P_{gas}$

$h)\ \frac{1}{d_{o}}+\frac{1}{d_{i}}=\frac{1}{f};d_{o};d_{i}$

$i)\ \frac{1}{R_{T}}=\frac{1}{R_{1}}+\frac{1}{R_{2}};R_{1};R_{T}$

5.1 Ecuaciones.

Si x es una variable, expresiones como: $x+12=19$, $x^2+5x+6=0$ se denominan ecuaciones en x. Lo que nos indica una ecuación es lo siguiente: ai sustituir x por un número a se debe obtener un valor verdadero es decir, se debe cumplir la igualdad. El número a se denomina raíz de la ecuación.

Ecuaciones lineales.

Una ecuación lineal tiene la forma $ax+b=c$ con a, b y c números reales. Observemos que el grado de la ecuación es uno, que corresponde a la potencia d la incógnita en cuestión.

Ejemplo 62:

Hallar la solución de las ecuaciones:

$a)\ 4x-3=7$

$b)\ 5x-8=3x+10$

$c)\ 0.2(4-3x)+0.3x=2.6$

Solución:

$a)\ 4x-3=7 \quad \Rightarrow \quad 4x=7+3 \quad \therefore \quad x=\dfrac{10}{4}$

$b)\ 5x-3x=10+8 \ \Rightarrow \ 2x=18 \ \therefore \ x=\dfrac{18}{2}=9$

$c)\ 0.8-0.6x+0.3x=2.6 \quad \Rightarrow \quad (-1)-0.3x=(-1)\ 1.8$

$0.3x=-1.8 \quad \therefore \quad x=\dfrac{-1.8}{0.3}=-6$

Prueba:

Podemos conocer si la respuesta es correcta reemplazando el valor encontrado de x en la ecuación inicial y la igualdad debe cumplirse.

Para ello tomemos la primera ecuación.

$4\left(\dfrac{10}{4}\right)-3=7$

$10-3=7$

$7=7$

Como la igualdad se cumple, el valor de x encontrado es solución de la ecuación.

Ecuaciones literales.

Las ecuaciones literales son aquellas en las cuales el valor a encontrar es una letra o la combinación de una literal y un número real.

Ejemplo 63:

Hallar la solución de las ecuaciones:

a) $\dfrac{1}{x+n}+\dfrac{x^2}{n^2+nx}=\dfrac{x+n}{n}$

b) $a(b-x)-(a-b)(a+x)=b^2-\dfrac{1}{b}\left(2ab^2-3a^2b\right)$

Solución:

a) $\dfrac{1}{x+n}+\dfrac{x^2}{n^2+nx}=\dfrac{x+n}{n} \Rightarrow \dfrac{1}{x+n}+\dfrac{x^2}{n(n+x)}=\dfrac{x+n}{n}$

El denominador común es $n\,(n+x)$. Por tanto:

$$\frac{n+x^2}{n(n+x)}=\frac{x+n}{n} \Rightarrow n+x^2=(n+x)(x+n)$$

$$n+x^2=nx+n^2+x^2+nx$$

$$n-n^2=2nx \Rightarrow n(1-n)=2nx \quad \therefore \quad x=\frac{1-n}{2}$$

b) $a(b-x)-(a-b)(a+x)=b^2-\dfrac{1}{b}\left(2ab^2-3a^2b\right)$

$$ab-ax-(a^2+ax-ab-bx)=b^2-\frac{1}{b}b(2ab-3a^2)$$

$$ab-ax-a^2-ax+ab+bx=b^2-2ab+3a^2$$

$$-2ax+bx=b^2-2ab+3a^2+a^2-2ab$$

$$x(b-2a)=b^2-4ab+4a^2$$

$$x(b-2a)=(b-2a)^2$$

$$x=\frac{(b-2a)(b-2a)}{b-2a}=b-2a$$

⊕ Taller de Clase No 22

1. Resolver las siguientes ecuaciones.

$$a)\ 5x+7=3x-9 \quad b)\ 4x-\left[-2(x+5)-6x+8\right]-6x+10$$

$$c)\ \frac{x}{6}+5=\frac{1}{3}-x \quad d)\ \frac{x}{2}+2-\frac{x}{12}=\frac{x}{6}-\frac{5}{4} \quad e)\ x-(5x-1)-\frac{7-5x}{10}=1$$

$$f)\ 2x-\left(2x-\frac{3x-1}{8}\right)=\frac{2}{3}\left(\frac{x+2}{6}\right)-\frac{1}{4} \quad g)\ \frac{x+6}{x+2}-\frac{x+1}{x-3}=\frac{x-5}{x-1}-\frac{x}{x+4}$$

$$h)\ \frac{2(n+x)}{m}-\frac{3(m+x)}{n}=\frac{6(n^2-2m^2)}{mn} \quad i)\ \frac{n-x}{n}-\frac{m-x}{m}=\frac{2(n-m)}{mn}$$

$$j)\ \frac{3}{4}\left(\frac{x}{b}+\frac{x}{a}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{x}{b}-\frac{x}{a}\right)+\frac{5a+13b}{12a}$$

5.2 Ecuación de segundo grado (o cuadrática).

La ecuación $ax^2+bx+c=0$ se denomina de segundo grado o cuadrática. Esta ecuación tiene dos raíces y solamente dos, cuyos valores son:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad y \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Importante.

El carácter de las raíces depende del valor de la expresión: b^2-4ac conocida como <u>discriminante.</u>

Veamos porque:

1. Si b^2-4ac es una cantidad positiva. Las raíces son reales y distintas.
2. Si b^2-4ac es una cantidad negativa. Las raíces no son reales y se dice que son complejas.(lo cual no se tratará en este texto)
3. Si b^2-4ac es igual a cero. Hay una sola raíz y de multiplicidad dos; es decir, es la misma raíz pero dos veces. El valor obtenido para este caso es

$$x=\frac{-b}{2a}$$

Las solución de la ecuación puede ser por fórmula general, factorizando o completando el cuadrado.

Ejemplo 64:

Hallar el conjunto solución por:

a) Factorización
b) Completando el cuadrado
c) Fórmula general.

De la ecuación: $2x^2-5x-3=0$

Solución:

Recordemos que se trata de un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$

a) $2x^2 - 5x - 3 = 0 \Rightarrow \dfrac{(2x-6)(2x+1)}{2} = 0$

$(x-3)(2x+1) = 0 \ \therefore \ x = 3, \ o \ , \ x = \dfrac{-1}{2}$

Recordemos La propiedad de los reales $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0, o \ , b = 0.$

b) $2x^2 - 5x - 3 = 0 \Rightarrow 2\left(x^2 - \dfrac{5}{2}x - \dfrac{3}{2}\right) = 0$

Para completar el cuadrado factorizamos el termino que acompaña a x^2 en este caso 2 y nos ocupamos solo de la parte del paréntesis. Sumamos y restamos el término

$\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2$ Para nuestro caso (lo que esta dentro del paréntesis) $a = 1, \ b = \dfrac{5}{2}$ por tanto:

$$x^2 - \frac{5}{2}x + \left(\frac{5/2}{2(1)}\right)^2 - \frac{3}{2} - \frac{25}{16} = 0$$

$$x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{25}{16} = \frac{3}{2} + \frac{25}{16}$$

$$\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{49}{16}$$

$$x - \frac{5}{4} = \pm\sqrt{\frac{49}{16}}$$

$$x = \frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{49}{16}}$$

$$x = \frac{5}{4} \pm \frac{7}{4} \ \therefore \ x_1 = \frac{5}{4} + \frac{7}{4}, \ o \ x_2 = \frac{5}{4} - \frac{7}{4}$$

$$x_1 = \frac{12}{4} = 3, \ o \ x_2 = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

El conjunto solución es: $S = \left\{\dfrac{-1}{2}, 3\right\}$

Por fórmula. Par ello utilizamos la expresión

$c)\, x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ que se conoce como fórmula general de la ecuación de segundo grado.

$a = 2,\ b = -5,\ c = -3$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(2)(-3)}}{2(2)} = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{4}$$

$$x_1 = \frac{5+7}{4},\ o\ ,x_2 = \frac{5-7}{4}$$

$$S = \left\{-\frac{1}{2}, 3\right\}$$

⊕ Taller de Clase No 23

1. Resolver por factorización.

a) $x^2 + x - 12 = 0$

b) $4x^2 + 13x + 3$

c) $a^2x^2 - acx + abx - bc = 0$

2. Resolver completando el cuadrado

a) $x^2 - 8x - 1 = 0$

b) $6x^2 - 10x - 4 = 0$

3. Resolver mediante la fórmula general

a) $4x^2 + 2x = 3$

b) $x^2 - bx - 6n^2 = 0$

c) $5x^2 + 3xy - 4y^2 = 0$

❖ 5.3 Desigualdades de Números Reales.

Sean *a, b* dos números reales. Decimos que "*a* es menor que *b*" y escribimos a < b, si *(b-a)* es positivo.

Ejemplo 65:

$$a)\ 3 < 7 \Rightarrow (7-3) > 0$$
$$b)\ 3 < 11 \Rightarrow (11-3) > 0$$

También decimos que "a es mayor que b" y escribimos $\boldsymbol{a > b}$.

Propiedades.

1. Sean a, b, c números reales. Si $a < b$, entonces, $a + c > b + c$.

2. Sean a, b, c, números reales; si:

$a < b$ y $b < c$, entonces, $a < c$.

3. Sean a, b, c números reales; si $a < b$ y $c > 0$, entonces, $ac < bc$.

4. Sean a, b, c números reales, si $a < b$ y $c < 0$, entonces, $ac > bc$.

Intervalos.

Un intervalo es un conjunto de números reales, que cumplen una condición específica.

Existen dos clases de intervalos: Infinitos y finitos.

Intervalos Infinitos.

Sea a un número real fijo. Podemos establecer los siguientes conjuntos:

$$a)\ I_1 = \{x \in \Re / x > a\} = (a, \infty);\ a \notin I_1$$
$$b)\ I_2 = \{x \in \Re / x \geq a\} = [a, +\infty);\ a \in I_1$$
$$c)\ I_3 = \{x \in \Re / x < a\} = (-\infty, a);\ a \notin I_2$$
$$d)\ I_4 = \{x \in \Re / x \leq a\} = (-\infty, a];\ a \in I_2$$
$$e)\ I_5 = (-\infty, \infty);\ a \in I_1$$

Ejemplo 66:

Escribir los conjuntos dados en notación de intervalos.

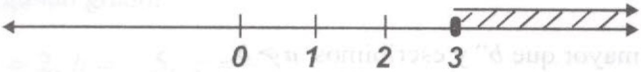
$$a)\ I = \{x \in \Re / x \geq 3\}\quad b)\ I = \{x \in \Re / x < 10\}$$

Solución:

$$a)\ I = \{x \in \Re / x \geq 3\} = [3, \infty)$$
$$b)\ I = \{x \in \Re / x < 10\} = (-\infty, 10)$$

Representar en la recta el intervalo a)

Solución:



Intervalos finitos.

Sean a, b números reales fijos tales que $a \leq b$. Se tiene que:

$$a)\ I_1 = \{x \in \Re / a < x < b\} = (a,b);\ a,b \notin I_1$$
$$b)\ I_2 = \{x \in \Re / a \leq x \leq b\} = [a,b];\ a,b \in I_1$$
$$c)\ I_3 = \{x \in \Re / a < x \leq b\} = (a,b];\ a \notin I_2,\ b \in I_2$$
$$d) I_4 = \{x \in \Re / a \leq x < b\} = [a,b);\ a \in I_2, b \notin I_2$$

La utilidad de los intervalos está en la solución de inecuaciones.

5.4 Inecuación.

Una expresión de la forma: $ax + b > c$ con cualquiera de los signos de desigualdad anteriores ($<, \leq, \geq$) se denomina inecuación o desigualdad lineal con una incógnita.

Solución de Inecuaciones.

Hallar el conjunto solución de:

$a)\ 3x < 5$

$b) 4x + 3 \geq 5x - 9$

$c)\ 2 < 5x + 10 \leq 12$

Solución:

Resolver una desigualdad es como resolver una ecuación solo que debemos respetar el signo de desigualdad.

$3x < 5 \ \therefore\ x < \dfrac{5}{2}$ La solución corresponde a $S = \left(-\infty, \dfrac{5}{2}\right)$

$b)\ 4x + 3 \geq 5x - 9 \ \Rightarrow\ 4x - 5x \geq -9 - 3 \ \Rightarrow - x \geq -12$

$(-1)(-x) \geq (-1)(-12) \ \therefore\ x \leq 12$

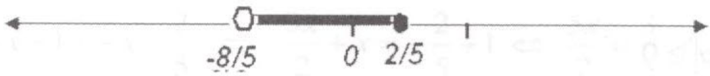
Cuya solución está dada por: $S = (-\infty, 12]$

$c)\ 2 < 5x + 10 \leq 12 \Rightarrow 2 - 10 < 5x + 10 - 10 \leq 12 - 10$

$$-8 < 5x \leq 2 \Rightarrow -8\left(\frac{1}{5}\right) < 5x\left(\frac{1}{5}\right) \leq 2\left(\frac{1}{5}\right) \Rightarrow -\frac{8}{5} < x \leq \frac{2}{5}$$

La solución es: $S = \left(-\frac{8}{5}, \frac{2}{5}\right]$

En la recta real corresponde a:



❖ 5.5 Valor Absoluto

Sea x un número real cualquiera; el valor absoluto de x notado por $|x|$ está definido por:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

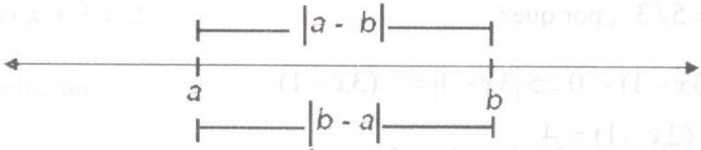
Ejemplo 67:

$a)\ |-13| = 13$

$b)\ |5| = 5$

$c)\ \left|-\frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4}$

Es decir el valor absoluto de un número real nunca es negativo. El valor absoluto denota una distancia entre dos puntos, y, por ello nunca una distancia es negativa (no hablamos que entre una pared y otra hay *-9* metros).



Ejemplo 68:

Calcular: $a)\ |5-9|\quad b)\ |12-(-4)|\quad c)\ |-7|+|13|\quad d)\ \left|\frac{-1}{2}\right| + \left|-\frac{2}{3}\right|$

Solución:

$a)\ |5-9|=|-4|=4$

$b)|12-(-4)|=|12+4|=16$

$c)|-7|+|13|=7+13=20$

$d)\left|-\dfrac{1}{2}\right|+\left|-\dfrac{2}{3}\right|=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}=\dfrac{3+4}{6}=\dfrac{7}{6}$

Propiedades.

1. Para todo $a\in R,\ |a|\geq 0$
2. Para todo $a\in R, a\leq |a|$
3. Para todo $a\in R,\ |a|^2=a^2$
4. Para todo $a,b\in R,\ |a\cdot b|=|a|\cdot|b|$
5. Para todo $a,b\in R,\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}$
6. Para todo $a,b\in R,|a+b|\leq |a|+|b|$ Desigualdad triangular.

Ecuaciones con valor absoluto.

Resolver: $|3x-1|=4$

Solución:
Por definición debemos considerar dos casos:

$$|3x-1|=4\Leftrightarrow\begin{cases}3x-1=4\\(3x-1)=-4\end{cases}$$

Para el primer caso: $x=5/3$ ¿por qué?

$$(3x-1)<0\Rightarrow|3x-1|=-(3x-1)$$

Para el segundo caso:

$$\begin{aligned}&-(3x-1)=4\\&-3x+1=4\\&-3x=4-1\end{aligned}$$

Hallar el conjunto solución de: $\left|\dfrac{3}{2}x-1\right|=\left|x+\dfrac{2}{5}\right|$

Solución:

$$\left|\frac{3}{2}x-1\right|=\left|x+\frac{2}{5}\right| \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{2}x-1=x+\frac{2}{5} \\ \frac{3}{2}x-1=-x-\frac{2}{5} \end{cases}$$

Resolviendo:

$$\frac{3}{2}x-1=x+\frac{2}{5} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3x}{2}-x=\frac{2}{5}+1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{2}=\frac{7}{5} \quad \therefore \quad x=\frac{14}{5}$$

$$\frac{3}{2}x-1=-x-\frac{2}{5} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3x}{2}+x=-\frac{2}{5}+1 \Leftrightarrow \frac{5x}{2}=\frac{3}{5} \therefore x=\frac{6}{25}$$

Luego la solución es: $S=\left\{\frac{6}{25},\frac{14}{5}\right\}$

Inecuaciones con valor absoluto.

Por lo general en la solución de desigualdades con valor absoluto se utilizan las siguientes propiedades:

7) $a \geq 0,\ |x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$

8) $|x| \geq a \Leftrightarrow -a \geq x,\ o\ , x \geq a$

9) Si $k>0$, entonces $|x-a|<k \Leftrightarrow a-k<x<a+k$, Para todo $a, x \in R$.

Ejemplo 69:

Hallar el conjunto solución de:

$a)\ |2x+1| \leq 5$

$b)\ |x+3|>2$

Solución:

$a)$ Por propiedad 7 tenemos: $\begin{aligned} & -5 \leq 2x+1 \leq 5 \Leftrightarrow -5-1 \leq 2x \leq 5-1 \\ & \Leftrightarrow -6 \leq 2x \leq 4 \ \therefore\ -3 \leq x \leq 2 \end{aligned}$

Luego el conjunto solución está dado por:
$S=\{x \in R / -3 \leq x \leq 2\}=[-3,2]$

$b)\ |x+3|>2 \Leftrightarrow x+3>2,\ o\ ,\ x+3<-2$

$x+3>2 \Leftrightarrow x>-1,\ o\ ,\ x+3<-2 \Leftrightarrow x<-5$

Por tanto la solución está dada por:

$S=(-\infty,-5)\cup(-1,\infty)$

Gráficamente tenemos:

⊕ Taller de Clase No 24

1. Resolver las desigualdades:

$a)\ 3x+8-x\geq 5x+14$

$b)-14<3x-1\leq 20$

$c)6x-9<13-4x-\{-[2x+4-(5x-2)]\}$

2. Hallar el conjunto solución gráfica y analíticamente de:

$a)|5x+7|\leq 17$

$b)|4x-5|>14$

3. Resolver las ecuaciones:

$a)\ |6x-5|=8$

$b)|3x-1|=|7x+6|$

$c)\left|\frac{x}{2}+\frac{1}{3}\right|=x-\frac{1}{5}$

❖ 5.6 Sistemas de Ecuaciones Lineales

Nos ocuparemos de sistemas solo de *2 x 2*. Es decir dos ecuaciones con dos incógnitas.

Un sistema de ecuaciones con dos incógnitas tiene la forma:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

La idea de resolver un sistema como el anterior es encontrar los valores de las incógnitas allí presentes. No siempre estos sistemas tienen solución.

Cuando el sistema tiene solución se dice que es **consistente**. Si no tiene solución se dice que es **inconsistente.** Cuando el conjunto solución de las ecuaciones son iguales se dice que son **dependientes.**

Solución de un sistema de ecuaciones con dos incógnitas.

Existen diferentes métodos, entre ellos tenemos: **igualación, sustitución, reducción y determinantes.**

Ejemplo 70:

Resolver por tres métodos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 3x + y = 2 \quad (I) \\ x - y = 10 \quad (II) \end{cases}$$

Solución:

Método de Igualación.

Despejamos cualquiera de las incógnitas: por ejemplo y en ambas ecuaciones.

$$y = 2 - 3x$$
$$y = x - 10$$

Ahora igualamos entre si los valores de y que obtuvimos:

$$2 - 3x = x - 10 \Rightarrow 2 + 10 = x + 3x \Rightarrow 12 = 4x \therefore x = 3$$

Sustituimos ahora este valor en cualquiera de las dos ecuaciones y encontramos a y.

Luego la solución es: $S = (3, -7)$

Método de sustitución.

Despejamos una de las incógnitas por ejemplo y en la primera (I). esta expresión la reemplazamos en (II) y encontramos x. Veamos:

$$y = 2 - 3x$$

$$x - (2 - 3x) = 10 \Rightarrow x - 2 + 3x = 10 \Rightarrow 4x = 12 \therefore x = 3$$

Sustituimos este valor en (II) y encontramos a y.

$$S = (3, -7)$$

Método de Reducción.

Para resolver este sistema por el método reducción o suma y resta, debemos igualar los coeficientes de una de las incógnitas, con el fin de eliminar esta y así encontrar el valor de la otra.
Para este caso vamos a eliminar a x, por tanto la ecuación II la multiplicamos por *3* y la I por uno *(1)*. Para obtener:

$$\begin{cases} 3x+y=2 \quad (I) \\ 3x-3y=30 \quad (II) \end{cases}$$

Ahora restamos de la ecuación (I) la (II).

$$\begin{array}{l} 3x+y \quad =2 \\ \underline{3x-3y=30} \\ 0+4y \quad =-28 \quad \therefore \quad y=-7 \end{array}$$

Con este valor de y reemplazamos en (I) o (II) y encontramos el valor de x.

$$3x+(-7)=2 \Leftrightarrow 3x=2+7 \Leftrightarrow 3x=9 \quad \therefore \quad x=3$$

El conjunto solución es: $S=(3,-7)$

Si queremos saber si este es el conjunto solución reemplazamos en I o II los valores de x y y y la igualdad se debe cumplir. Hagámoslo en I.

$$3(3)+(-7)=2$$
$$9-7=2$$
$$2=2$$

⊕ Taller de Clase No 25

1. Hallar el conjunto solución de los siguientes sistemas:

$$a)\begin{cases} x+2y=-1 \\ 2x-3y=4 \end{cases} \quad b)\begin{cases} x+3y=1 \\ -6x+9y=4 \end{cases}$$

$$c)\begin{cases} -3x-y=-5 \\ 6x-2y=10 \end{cases} \quad d)\begin{cases} 4x-2y-7=0 \\ x-\dfrac{1}{2}y=5 \end{cases}$$

$$e)\begin{cases} 3w-6z=-9 \\ -2w+4z=6 \end{cases} \quad f)\begin{cases} mx-ny=m^2+n^2 \\ nx+my=m^2+n^2 \end{cases}$$

✦ 5.7 Aplicaciones de las ecuaciones y sistemas de ecuaciones.

En esta parte nos dedicaremos a aplicaciones en: física, química, biología y ciencias de la salud.

1. Osmosis

Es el flujo de agua a través de una membrana semipermeable causado por diferencias de concentración de soluto.
Osmolaridad.
La osmolaridad de una solución es la concentración de sus partículas osmóticamente activas.

$$\text{Osmolaridad} = g \cdot C$$

Donde:
Osmolaridad = concentración de partículas (mosm/L)
g = número de partículas por mol en solución (osm/mol)
C = concentración (mM/L)

Si dos soluciones tienen la misma osmolaridad calculada se les denomina **isoosmóticas**. Si poseen diferentes osmolaridades calculadas, la solución con mayor osmolaridad se llama **hiperosmótica** y la de menor **hipoosmótica**.

La solución A es 2mM/L de urea y la solución B es 1 mM/L de NaCL. Asumiendo que $g_{NaCl} = 1.85$ ¿Son isoosmóticas las dos soluciones?
Solución:

La solución A tiene urea, que no se disocia en solución. La B contiene NaCl, que en solución se disocia parcial pero no completamente. Por tanto:

$$\text{Osmolaridad}_A = 1\ \text{osm/mol} \times 2\text{mM/L} = 2\text{mosm/L}$$
$$\text{Osmolaridad}_B = 1.85\ \text{osm/mol} \times \text{mM/L} = 1.85\ \text{mosm/L}$$

Luego no tienen la misma osmolaridad calculada y por tanto no son sioosmóticas. La solución A es hiperosmótica y la B es hipoosmótica.

2. Velocidad del flujo sanguíneo.

La velocidad del flujo sanguíneo se define como la tasa de desplazamiento de sangre por unidad de tiempo. Los vasos sanguíneos del sistema cardiovascular varían en términos de diámetro y área de la sección transversal. Estas diferencias en diámetro y área, por su parte, tienen efectos profundos sobre la velocidad de flujo. La relación está dada por:

$$v = \frac{Q}{A}$$

Donde:
v = **Velocidad de flujo sanguíneo (cm/s)**

Es una velocidad lineal y se refiere a la tasa de desplazamiento de la sangre por unidad de tiempo.

***Q* = Flujo (ml/s)**
Es el flujo de volumen por unidad de tiempo y se expresa en unidades de volumen por unidad de tiempo, es decir: **ml/s**

***A* = Área de sección transversal (cm^2)**
Es el área de sección transversal de un vaso sanguíneo ejemplo la aorta o un grupo de vasos sanguíneos ejemplo todos los capilares. El área se calcula como $A = \pi \cdot r^2$ donde r es el radio de un solo vaso sanguíneo (la aorta) o el radio total de un grupo de vasos sanguíneos, ejemplo todos los capilares.

Un hombre presenta un gasto cardiaco de 5.5 L/min. El diámetro de la aorta para este paciente es 18mm y el área total de la superficie de sus capilares sistémicos de 2400 cm^2.
¿Cuál es la velocidad del flujo sanguíneo en la aorta respecto de la velocidad del flujo sanguíneo en los capilares?
Solución:

Debemos comparar la velocidad del flujo sanguíneo en la aorta y en los capilares. Para ello se requieren dos valores para cada tipo de vaso sanguíneo. En el contenido del problema conocemos el área total de los capilares y el área de la sección transversal de la aorta la debemos calcular a partir del radio dado.

Recordemos que el diámetro es dos veces el radio por tanto: $r = 9\,\text{mm}$

$$A = 3.14 \times (9\text{ mm})^2 = 254{,}34\text{ mm}^2 = 2.{,}5434\text{ cm}^2.$$

$$V_{\text{capilares}} = \frac{Q}{A} = \frac{5.5L/\min}{2400\text{ cm}^2} = \frac{5500\text{ cm}^3/\min}{2400\text{cm}^2} = 2.29\text{ cm/min}.$$

$$V_{\text{aorta}} = \frac{Q}{A} = \frac{5500\text{ cm}^3/\min}{2.82\text{ cm}^2} = 1950{,}35$$

Luego la velocidad de la aorta es casí *900* veces mayor que en los capilares (*1950.35* en la aorta en comparación con *2.29* en los capilares).
La velocidad de flujo sanguíneo debe ser menor en los vasos con área de sección transversal mayor (capilares) y mayor en vasos con área de sección transversal total más pequeña (aorta).

3. Ecuación de Poiseuille

Los factores que determinan la resistencia de un vaso sanguíneo al flujo de la sangre se expresan en la ecuación de Poiseuille:

$$R = \frac{8 \cdot \eta \cdot l}{\pi \cdot r^4}$$

Donde:

R = resistencia

η = viscocidad de la sangre

l = longitud del vaso sanguíneo

r^4 = radio del vaso sanguíneo elevado a la cuarta potencia

Hallar el radio de la carótida si la resistencia es de 0.18 mmHg/ml/min, la viscosidad está dada por: $4\times10^{-3}\ \mathrm{N\cdot s/m^2}$ la longitud es de 1mm de longitud.

Solución:

Despejamos el radio:

$$r=\sqrt[4]{\frac{8\cdot\eta\cdot l}{\pi\cdot R}}=\sqrt[4]{\frac{8(4\times10^{-3}\cdot\mathrm{N\cdot s/m^2}\cdot 1\cdot10^{-3}\,\mathrm{m})}{3.14(23{,}94\mathrm{N/m^2}/0.001\mathrm{m^3}/60\mathrm{s}}}=1.63\times10^{-3}\ \mathrm{m}$$

4. ¿Cuál es la resistencia total del sistema circulatorio? Si un adulto normal $p_1-p_2=1.2\times10^4\,\mathrm{N/m^2}$ y $Q=0.83\times10^{-4}\,\mathrm{m^3}/s$.

$$R=\frac{p_1-p_2}{Q}=\frac{1.2\times10^4\,N/m^2}{0.83\times10^{-4}\,m^3/s}=1.44\times10^8\ \mathrm{N\text{-}s/m^5}$$

Si la resistencia total del cuerpo crece de manera anormal, la presión sanguínea debe aumentar para mantener normal el flujo de sangre.

El efecto de la presión sanguínea alta es hacer que el corazón trabaje más que en condiciones normales. La potencia del corazón sobre la aorta multiplicada por la sección transversal de la aorta es: $P=p\cdot A=p\cdot A\overline{v}=p\cdot Q$

¿Cuál es la potencia del corazón de un adulto normal en reposo?

Solución:

La presión media y el flujo sanguíneo medio en un adulto normal en reposo valen $p=100\ \mathrm{mm\ Hg}=1.3\times10^{-4}\ \mathrm{N/m^2}$ y $Q=0.83\times10^{-4}\ \mathrm{m^3}/s$ por tanto:

$$P=pQ=(1.3\times10^4\,\mathrm{N/m^2})(0.83\times10^{-4}\mathrm{m^3}/s)=1.1\ \mathrm{W}\ \text{(vatios)}$$

5. Un hipermétrope (no puede ver con nitidez de cerca) sólo puede leer una revista a 50 cm. de distancia de sus ojos. Que lente debe usar para leer a 25 cm?

Solución:

La fórmula para el cálculo de distancias está dada por:

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{d_i}+\frac{1}{d_o}\quad \text{donde:}$$

f = Distancia focal

d_i = Distancia entre la imagen y lalente

d_o = Distancia entre el objeto y lalente.

Por tanto:

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{d_i}+\frac{1}{d_o}=\frac{1}{0.25}+\frac{1}{-0.5}=\frac{1}{0.5}=2 \text{ Dioptrias.}$$

6. La molaridad se define por:

$$\text{Molaridad(M)}=\frac{\text{Cantidad de moles de soluto}}{\text{Volumen de la solución en litros}}$$

¿Cuál es la molaridad de una solución preparada disolviendo 44.86g de NaCl en agua, y diluyendo a 250.0 ml?.

Solución:
El problema menciona la cantidad de NaCl en gramos, y el volumen de la solución que debe prepararse en mililitros. Para aplicar la definición de molaridad y calcularla, primero debemos convertir la cantidad de NaCl en moles y el volumen en litros.

$$44.86\text{NaCl}\left(\frac{1\text{ mol NaCl}}{58.44\text{ g NaCl}}\right)=0.7676\text{ mol NaCl}$$

$$250.0\text{ ml solución}\left(\frac{1\text{l solución}}{1000\text{ ml solución}}\right)=02500\text{ l solución}$$

$$\text{M}=\frac{0.7676\text{ mol de NaCl}}{0.2500\text{ l solución}}=3.070\text{ M.}$$

8. La ecuación de un gas ideal está dada por: $PV=nRT$
¿Cuál es el volumen de 0.683 mol de nitrógeno gaseoso a 25.2°C y 767.3 mm Hg?

Solución:
Primero debemos convertir los grados Celsius en Kelvin.
25.2+273.2 = 298.4 k.

$$V=\frac{nRT}{P}=\frac{763.4\,\text{mm Hg}\,(62.36\,\text{mm Hg})\cdot 1\cdot \text{mol}^{-1}\cdot K^{-1}(298.4K)}{767.3\,\text{mm Hg}}$$

9. Para que un medicamento tenga efecto benéfico, su concentración sanguínea debe ser mayor que cierto valor, que se llama nivel terapéutico mínimo. Suponga que la concentración c (mg/l) de un fármaco en particular, t horas después de su ingestión, está dada por:

$$c=\frac{20t}{t^2+4}$$

¿Cuándo el nivel mínimo es igual a 4?

Solución:

Para saber cuando el nivel es igual a cuatro igualamos la concentración a 4.

$$c=\frac{20t}{t^2+4}=4 \Rightarrow 20t=4t^2+16$$

$4t^2-20t+16=0$ Por fórmula cuadrática tenemos:

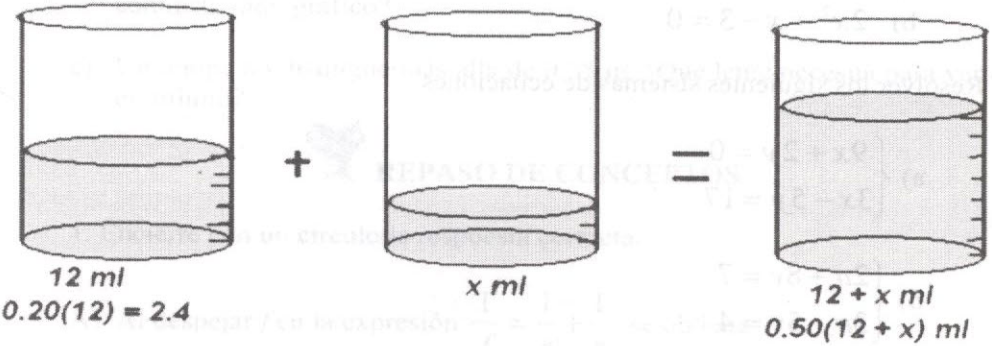
$$t=\frac{20\pm\sqrt{20^2-4(4)(16)}}{2(4)}=\frac{20\pm\sqrt{144}}{20}=\frac{20\pm12}{20}$$

$$t_1=\frac{20+12}{8}=4,\ o\ ,\ t_2=\frac{20-12}{8}=1$$

El nivel mínimo es cuatro cuando t toma los valores de *1* o *4*.

10. Un químico tiene 12 ml de una solución que contiene un acido a 20% de concentración. ¿Cuántos mililitros de acido puro han de agregarse para aumentar la concentración al 50%?

Solución:
En un gráfico representemos la situación.



Dado que puede representarse la cantidad de ácido puro de la solución final como $2.4+x=0.50(12+x)$

$$2.4+x=6+0.50x \Rightarrow x-0.5x=6-2.4\ \therefore\ x=3.6$$

Hay que agregar 3.6 ml de acido a la solución original.

⊕ Taller de Clase No 26

1. Se va a conservar una mezcla química entre 68° y 77° Fahrenheit. ¿Cuál es el rango de temperatura en grados Celsius? $\left(F=\frac{9}{5}C+32\right)$.
2. ¿Cuántos litros de una mezcla que contiene 90% de alcohol se deben agregar a 5 litros de una solución al 30% para obtener una solución al 40%?

3. Un laboratorio químico tiene una solución ácida al 80% y otra al 30%. ¿Cuántos centilitros se deben tomar de cada una para obtener 15 centilitros de solución?

Taller No 5

1. Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $-\{-[-\{\{3x+8-[-15+6x-(-3x+2)-((5x+4)]\}-29\}]\}=-5$

b) $2x+(-x)-[5+3x-\{5x-(6+x)\}]=-3$

c) $\dfrac{c}{x}-\dfrac{1}{c}=\dfrac{2}{c}$

d) $\dfrac{5x+b}{3x+a}=\dfrac{5x-a}{3x-b}$

e) $12x-7x^2+64=0$

f) $5n^2-7x-90=0$

2. Resolver completando el cuadrado

a) $3x^2-5x+2=0$

b) $2x^2+x-3=0$

3. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones

a) $\begin{cases} 9x+2y=0 \\ 3x-5y=17 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2u+8v=7 \\ 3u-5v=4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 12m+5n=-6 \\ \dfrac{5m}{3}-\dfrac{7n}{6}=-12 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x-y=mn(m-n) \\ \dfrac{x}{m^2}+\dfrac{y}{n^2}=n+m \end{cases}$

4. Resolver los siguientes problemas

a) Un farmacéutico debe preparar 15ml de gotas para los ojos para un paciente con glaucoma. La solución ha de tener un ingrediente activo a 3%, pero el farmacéutico sólo tiene en existencia soluciones a 12 y 2%. ¿cuánto de cada tipo requiere la elaboración de la fórmula o receta?

b) La frecuencia de precisión, es decir, la rapidez del movimiento de precesión, depende exclusivamente de la fuerza del campo magnético externo y del tipo de núcleo implicado la relación se expresa como: $w = \lambda B_0$. Donde w es la frecuencia de precesión en megahertzios (MHz) y B_0 es la fuerza del campo magnético externo medido en teslas (T). λ es una constante conocida como giromagnetica. Halle el valor de λ.

c) La energía de un fotón de rayos X es igual al producto de la frecuencia del fotón por la constante de Planck (h): Para calcular la longitud de onda se utiliza la ecuación: $\lambda = \dfrac{h \cdot c}{E}$. Tanto h como c son constantes $(h = 4.14 \cdot 10^{-15} eV;\ c = 3 \cdot 10^{8}\ m/s)$ Si $E = 1 kVp$. ¿Cuál es el valor de la longitud de onda?

d) El contraste radiográfico está dado por: $cr = Cp \cdot Cs$ Donde cr es el contraste radiográfico, C_p contraste de la película y C_s contraste del sujeto.
Se usa una película de exposición directa con gradiente medio de 3,1 para radiografiar un hueso largo con contraste de sujeto de 4.5 ¿Cuál será el contraste radiográfico?

e) Un miope no distingue más allá de 0.25 m. ¿Qué lente necesita para ver en el infinito?

REPASO DE CONCEPTOS

1. Encierre con un círculo la respuesta correcta.

A) Al despejar f en la expresión $\dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{r}$ se obtiene:

$a)\ f = \dfrac{1+s}{r \cdot s}$ $b)\ f = \dfrac{r \cdot s}{1+s}$ $c)\ f = \dfrac{r \cdot s}{r+s}$ $d)$ ninguna anterior

B) Una ecuación es:

a. Una igualdad que solo se cumple para unos valores de las incógnitas.
b. Una ecuación es valida para todos los números reales
c. Una ecuación es una igualdad que se verifica solo para los enteros.
d. Ninguna anterior.

2. Contraste las preguntas a y b de acuerdo con la siguiente información.

Al resolver para n, $I = \dfrac{nE}{(R + nr)}$

a) La solución esta dada por:

i)

$i)\, n=\dfrac{R\cdot I}{r\cdot I+E}$ $\quad ii)\; n=\dfrac{-RI}{r\cdot I-E}$ $\quad iii)\; n=\dfrac{-RI}{rI+E}$ $\quad iv)$ Ninguna anterior.

b) Existe una relación:

i) Directa entre n y R ii) una relación inversa entre n y R.

iii) No hay relación entre n y R iv) La relación directa es con E.

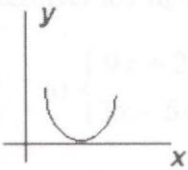
3. Cuantos litros de una solución de acido sulfúrico al 60% deben añadirse a 10 litros de una solución al 30% para obtener una solución al 50%?

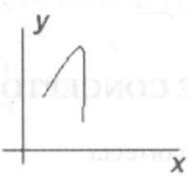
4. Resolver completando el cuadrado y por fórmula general:

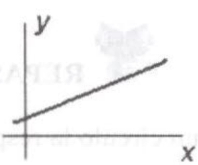
$$2x^2-x-3=0$$

5. Preguntas de selección múltiple. Seleccione la respuesta correcta.

A. La gráfica que mejor representa una ecuación lineal es:

a) 

b) 

c) 

d) Ninguna anterior

B. La solución del sistema de ecuaciones $\begin{cases} nx+my=n^2+m^2 \\ mx+ny=2nm \end{cases}$ es:

a) $x=n\;\; y=m$ b) $x=m\;\; y=n$ c) $x=1\;\; y=n$ d) Ninguna anterior.

C. La diferencia entre dos números es 15 y 1/3 de su suma es 11. Los números son:

a) *29* y *13* b) *29* y *15* c) *29* y *14* d) *29* y *16*

6. El factor de ampliación de una placa radiográfica viene dado por la ecuación:

$$FA=\frac{DFI}{DFO}$$

Donde FA es el factor de ampliación, DFI es la distancia fuente receptor de imagen y DFO es la distancia fuente objeto.

Una radiografía ampliada de la silla turca se toma a 100 cm de DFI, con objeto colocado a 25 cm. de la película. Si la imagen de la silla turca mide 16 mm, ¿Cuál será el tamaño real?

c) Si el calor especifico de una sustancia esta dada por al ecuación: $c=\dfrac{Q}{m\cdot\Delta t}\left(\dfrac{\text{cal}}{^\circ\text{C}\cdot\text{g}}\right)$ Hallar el valor de Δt.

7. La concentración promedio de un fármaco en estado de equilibrio se puede calcular de acuerdo con la siguiente ecuación: $\overline{C}=\dfrac{F\cdot D}{CL_p\cdot t}$

$\overline{C}$ = concentración promedio en el equilibrio. F = biodisponibilidad (Fracción Absorbida)
D = Dosis administrada t = intervalo de tiempo entre dosis CL_p = depuración plasmática. Calcular la concentración plasmática promedio de un fármaco administrado por vía oral a una dosis de 250 mg cada 6 horas. La depuración plasmática es 1.54 litros/Hora (l / h) La biodisponibilidad es 1.

8. Un nutricionista, en un experimento sobre nutrición, quiere preparar una dieta especial para unos pacientes especiales. El requiere una comida formada por una mezcla que contenga entre otras cosas, 22 onzas de proteínas y 8 onzas de grasa. El encuentra la comida preparada pero con las siguientes composiciones:

	Proteínas (%)	Grasa (%)
Mezcla A	30	4
Mezcla B	20	8

¿Cuántas onzas de cada mezcla deberá usar para preparar su mezcla? Resolver geométrica y algebraicamente.

9. La presión para el gas húmedo se determina corrigiendo la presión barométrica por la presión de vapor de agua. Así:

$$P_x=(P_B-PH_2O)\times F$$

Donde

P_x = presión parcial del gas (mmHg)

P_B = presión barométrica

PH_2O = presión del vapor de agua a 37°C (47 mmHg)

F = concentración fraccional del gas (sin unidades)

Calcular la presión parcial de O_2 (PO_2) en el aire inspirado seco y comparar ese valor con la Po_2 en el aire traqueal húmedo a 37° C. La concentración fraccional de O_2 en el aire inspirado es 0.22.

10. Por definición, la **depuración renal** es el volumen de plasma liberado por completo de una sustancia en los riñones por unidad de tiempo. La ecuación para la depuración renal está dada por:

$$C = \frac{U_x \times \dot{V}}{P_x}$$

Donde:
C = depuración (ml/min.)
U = concentración en orina (mg/ml)
$\dot{V}$ = tasa de flujo urinario por minuto (ml/min.)
P = concentración en plasma (mg/ml)
X = Cualquier sustancia.
Halle el valor de P.

11. La relación de de depuración está dada por:

$$\text{Relación de depuración} = \frac{C_x}{C_{inulina}}$$

La inulina es un marcador glomerular.
En un período de 24 horas se recolecta 1.44L de orina de un hombre a quien se administra inulina por venoclisis. En la orina, la inulina es 150 mg/ml y la Na^+ de 200 meq/L. En el plasma, la inulina es 1mg/ml y la Na^+ de 40 meq/L. ¿Cuál es la relación de depuración para Na^+ y que significa este valor?

12. La eficacia de los ventrículos para expulsar sangre se puede describir mediante la fracción de expulsión, que es la fracción del volumen al final de la diástole que es expulsada en un volumen latido. La ecuación está dada por:

$$\text{Fracción de expulsión} = \frac{\text{Volumen Latido}}{\text{volumen al final de la diástole}} = F_E = \frac{V_L}{V_{FD}}$$

El gasto cardiaco se define como el volumen total de sangre expulsada por unidad de tiempo es el gasto cardiaco, que depende del volumen expulsado en un solo latido (volumen latido) y el número de latidos por minuto (frecuencia cardiaca).

$$\text{gasto cardiaco} = \text{Volumen latido} \times \text{frecuencia cardiaca} = \text{GC} = \text{V}_\text{L} \times f_C$$

Un hombre tiene un volumen diastólico final de 140 ml, un volumen sistólico final de 70 ml y una frecuencia cardiaca de 75 latidos/min. ¿Cuál es su volumen latido, gasto cardiaco y fracción de expulsión?

CAPÍTULO 6

ALGUNAS FUNCIONES DE IMPORTANCIA EN SALUD

PRELIMINARES

❖ 6. FUNCIONES

Un principio básico en las matemáticas es el concepto de función, tiene aplicaciones en ingeniería, contaduría, administración, economía, medicina, matemáticas, biología, química, etc.

En matemáticas utilizamos este nombre para denotar cierta clase de asociación entre los elementos de dos conjuntos. Estos conjuntos pueden ser de números o de otros objetos cualesquiera. Por ejemplo si en un almacén a cada artículo de le asocia un precio, entonces se tiene una función entre artículos y precios.

Cuando vamos a la cafetería de la universidad para comprar algo, siempre pensamos en cuanto dinero tenemos disponible para la compra. En este momento estamos en función del dinero, también aquí hemos hablado de función. Si y es la compra y X el dinero, tenemos que la cantidad y depende de la magnitud X.

El éxito en el aprendizaje de una asignatura es función entre otras del tiempo que se dedique a ella para estudiarla.

❖ 6.1 DEFINICIÓN DE FUNCIÓN

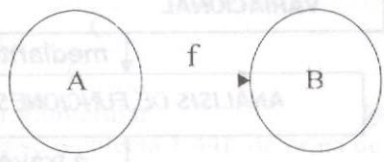
Sean *A,B* conjuntos no vacíos, sea R una relación de *A x B*; si para todo $x \in$ A, existe un único y $\in$ B tal que $(x,y) \in$R. Se dice que R es una relación funcional o simplemente que R es una función de A en B.

Notación

Una función de A en B se nota así:

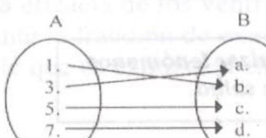
$$A \xrightarrow{f} B$$

$$f: A \to B$$



Ejemplo 71:

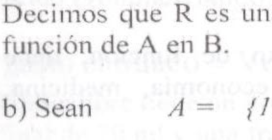
a) Sean $A = \{1, 3, 5, 7\}$ B= $\{a, b, c, d\}$



$R = \ (1,b),(3,a),(5,c),(7,d)$

Decimos que R es una relación funcional de *A* en *B*, o simplemente que es una función de A en B.

b) Sean $A = \ \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $B = \ \{u, v, x, y, z\}$



$R=\{(1,u), (1,y), (3,u), (4,x), (4,y), (5,z)\}$

R no es una relación funcional porque a un mismo elemento de A le hacen corresponder dos elementos diferentes de B, ya que (1,u), (1,y) pertenecen a R. además a 2 no se hace corresponder ningún elemento de B.

Como hemos visto, una función envuelve dos conjuntos, al conjunto de partida lo denominamos **dominio** y al de llegada **codominio**, para denotar las funciones se utilizan diferencias letras, pero las más utilizadas son *f, g, h*.

Si x representa un elemento en el conjunto de partida de una función f, utilizaremos el símbolo f(x) que se lee "f de x " (no confundir esto con el producto de f por x). Esta notación la utilizó en muchas ocasiones Euler, pero el origen de ésta se debe a Clairaut.

Dominio, Codominio y Rango de Funciones de Variable Real.

A. Dominio de una Función (Df)

B. Rango o Recorrido (Rf)

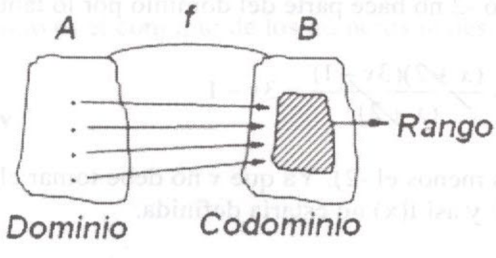
Si f es una función de X en Y, el subconjunto de X para el cual f asigna una única $y \in Y$ se denomina el **Dominio** de la función f.

Es el subconjunto de y formado por los elementos de y que están asociados con el dominio de f.

C. Codominio (Cf)

El codominio de una función f es el conjunto de llegada.

Mediante un gráfico veamos los conceptos tratados (en forma intuitiva). Sean A y B dos conjuntos los cuales forman una función; es decir:



Ejemplo 72:

a) Hallar el dominio y rango de $f(x) = 5x - 3$.

Solución:

Dominio de $f = Df$ = Reales (R); pues cualquier valor que tome X en 5x - 3 siempre es real.

Rango de $f = Rf$ = Reales (R); pues cualquier valor que tome y siempre es real.

b) Hallar el dominio y rango de $f(x) = \sqrt{x+1}$

Solución:

Para hallar el dominio debemos analizar la cantidad subradical, la cual debe ser positiva o 0, para ello despejamos a X así:

$$x+1\geq 0 \quad \therefore \quad x\geq -1$$

$$Df=[-1,\infty)$$

Recuerde que la raíz par de un número negativo no existe en R.

Rango:

Despejamos x. $\quad y=\sqrt{x+1}\rightarrow y^2=\left(\sqrt{x+1}\right)^2\rightarrow y^2=x+1$

$$\therefore \quad x=y^2+1$$

Observe que cualquier valor que tome y es real, pero como se trata de una función y estamos utilizando la raíz positiva para X, el rango es igual: $R^+\cup\{0\}=[0,\infty)$.

c) Hallar el dominio y rango de:

$$f(x)=\frac{3x^2+5x-2}{x+2}$$

Solución:

Debemos factorizar la expresión del numerador y luego simplificar teniendo presente que el número -2 no hace parte del dominio por lo tanto:

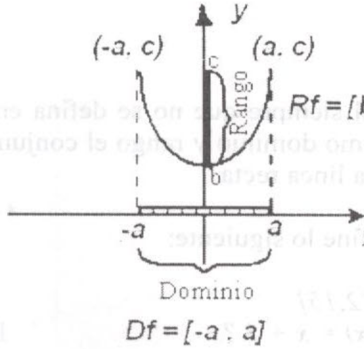
$$f(x)=\frac{3x^2+5x-2}{x+2}=\frac{\cancel{(x+2)}(3x-1)}{\cancel{(x+2)}}=3x-1$$

$DF = R - (-2)$. (Reales menos el -2). Ya que x no debe tomar el valor de -2 pues el denominador valdría 0 y así f(x) no estaría definida.

El rango de f consiste de todos los números reales excepto -7 que se obtiene al reemplazar X por -2 en $f(x) = 3x - 1$. Por tanto:
$Rf = R-\{-7\}$. El punto $(-2,-7)$ lo suprimimos en la gráfica colocando allí un agujero (o).

6.2 REPRESENTACION GRÁFICA DE FUNCIONES.

Al definir una función se puede tomar como un conjunto de parejas ordenadas (x,y), luego si $y = f(x)$ es una función real (en dominio y rango reales). La función $Y = f(x)$ se define por:
$\{(x,y)/\ x\in R,\ y\in R,\ y=f(x)\}$. La representación geométrica no es más que el conjunto de parejas (x,y) en el plano cartesiano. La pareja (x,y) se obtiene al darle valores reales a x, obteniendo así el de y.
Supongamos que tenemos el gráfico de una función $y = f(x)$ así:



Recuerde: El dominio está sobre el eje x.
El rango sobre el eje y.

EJEMPLO 73:

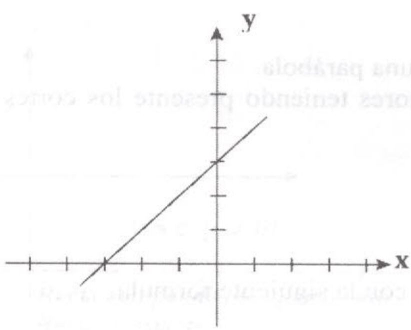
a) Hallar el dominio, rango y trazar el gráfico de:

$y = f(x) = x + 3.$
Solución:

Dominio:
En este caso el dominio consiste en el conjunto de los números reales pues cualquier valor que tome x es real.

Rango:
Al igual que el dominio es el conjunto de los números reales.

Gráfico:



La ecuación que nos han dado es lineal por tanto su gráfico es una línea recta como lo veremos.
Para el gráfico hallamos los cortes (interceptos) con los ejes coordenados. Con $x = 0$ encontramos el corte con y, haciendo $y = 0$ encontramos el corte con el eje x así:

$x = 0 \rightarrow y = 3$
$y = 0 \rightarrow x = -3$ resumiendo en una tabla tenemos:

x	0	-3
y	3	0

Nota: toda ecuación lineal siempre que no se defina entre intervalos o sistemas numéricos, tiene como dominio y rango el conjunto de los números reales, y su gráfica será una línea recta.

Qué ocurre si se define lo siguiente:

$f: [-5,-2]$ ---------$[12,15]$
x ----------- $f(x) = x + 3$?
Cuál es dominio y rango?
Cómo es su gráfica? (ejercicio).

b) Hallar el dominio, rango y trazar el gráfico de:

$y = f(x) = x^2 - 1$

Dominio:
Consiste en todos los números reales, ya que todo valor que tome X es real.
Rango:
Debemos despejar a X así:

$$y = x^2 - 1 \rightarrow y + 1 = x^2 \rightarrow \sqrt{y+1} = x \quad \text{luego} \quad x = \sqrt{y+1}$$

Ahora debemos analizar la cantidad subradical teniendo presente que esta cantidad debe ser positiva o cero por tanto:

$y + 1 \geq 0 \quad y \geq -1$, así que el rango consiste en todos los números reales mayores o iguales a -1. $R_f = [-1, \infty)$.

Gráfica:
La ecuación es cuadrática por tanto su dibujo es una parábola.
Para facilitar más el gráfico damos algunos valores teniendo presente los cortes (interceptos) con los ejes coordenados.
Con $X = 0$ conseguimos los cortes con y así:
si $x = 0 \qquad y = -1$.

Si $y = 0 \qquad x = -1 \;\; x = 1$ ¿por qué?
Busquemos ahora el punto de máxima o mínima con la siguiente formula:

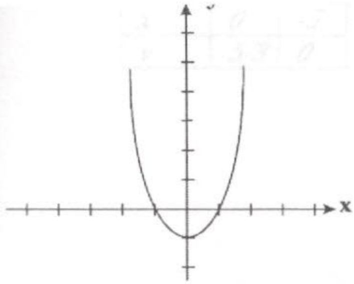
$$\left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a} \right)$$

Para nuestro caso tenemos:

$$\left(0, \frac{4(1)(-1)}{4(1)} \right) = (0,1)$$

Lo anterior lo podemos resumir en la siguiente tabla:

x	0	1	-1
y	-1	0	0

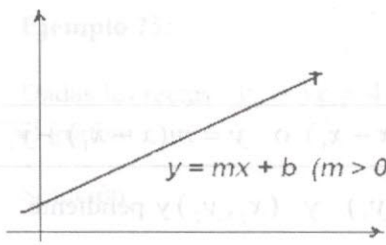


❖ 6.3 La Función Lineal

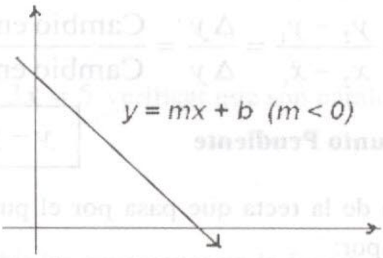
La función $\begin{array}{l} f : R \to R \\ x \to f(x) = mx + b \end{array}$

Donde *m, b* son números reales fijos, se denomina **Función Lineal**.
El dominio corresponde al igual que el rango al conjunto de números reales.
La gráfica es una línea recta.

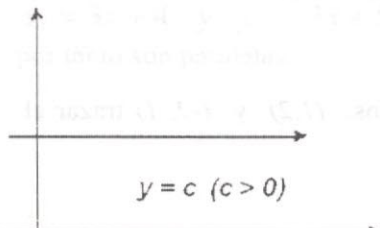
Gráficos:



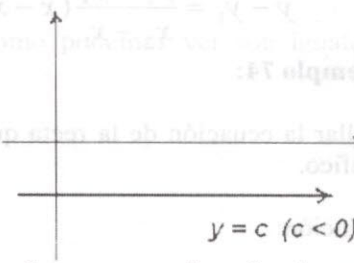
Recta con pendiente positiva



Recta con pendiente negativa

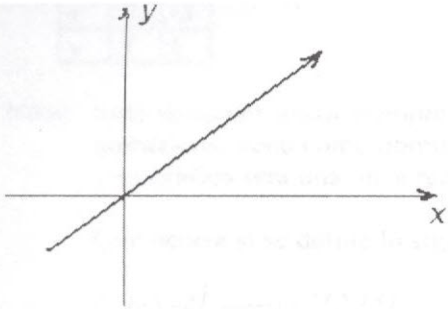


Recta con pendiente igual a cero
Recta constante



Recta con pendiente igual a cero.
Recta constante

Existe dentro de la familia de la función lineal una función llamada **idéntica.** Su forma es: $y = mx$ si $m = 1$ la grafica pasa por el origen a formando un ángulo de 45° con la horizontal.



$y = mx$. con $m = 1$

❖ 6.3.1 Ecuaciones de la Recta

Primero vamos a definir que es la pendiente.
1. Pendiente

La pendiente de la $y = mx + b$ que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) recta está dada por:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta y} = \frac{\text{Cambio en } y}{\text{Cambio en } x}$$

Ecuación Punto Pendiente $\boxed{y - y_1 = m(x - x_1) \text{ o } y = m(x - x_1) + y_1}$

La ecuación de la recta que pasa por el punto (x_1, y_1) y (x_2, y_2) y pendiente m está dada por:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \text{ o } y = m(x - x_1) + y_1$$

Ejemplo 74:

Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos: *(1,2)* y *(-2, 1)* trazar el gráfico.

Solución:

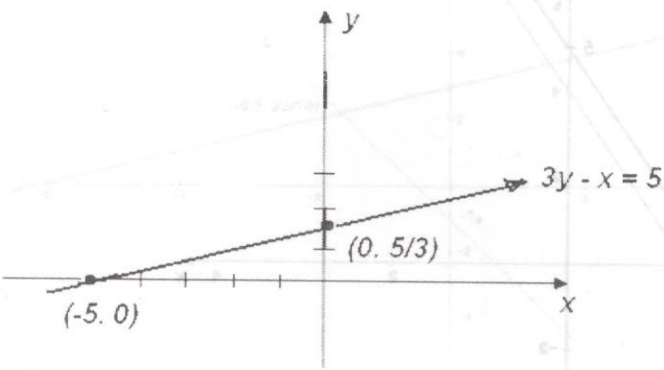
Con los puntos podemos calcular la pendiente y luego utilizamos la ecuación punto pendiente:

$$m = \frac{1-2}{-2-1} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$$

Ahora hallamos la ecuación: $y = \frac{1}{3}(x-1) + 2 \therefore y = \frac{x}{3} + \frac{5}{3}$ que podemos t escribir como: $3y - x = 5$

Para trazar el gráfico utilizamos solo los cortes con los ejes.

y	5/3	0



Rectas Paralelas.

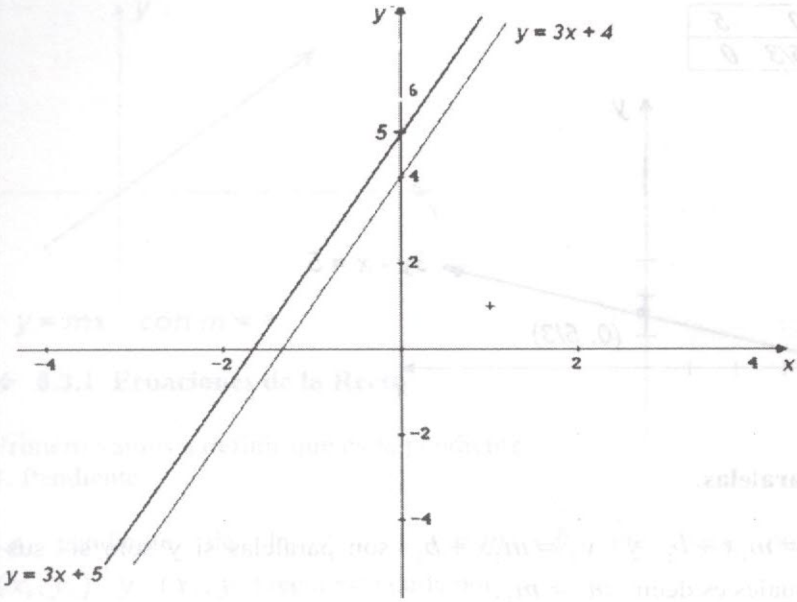
Dos rectas $y_1 = m_1 x + b_1$ y $y_2 = m_2 x + b_2$ son paralelas si y solo si sus pendientes son iguales es decir: $m_1 = m_2$.

Ejemplo 75:

Dadas las rectas $y_1 - 3x = 4$ y $y_2 - 3x = 5$ verificar que son paralelas y trazar el gráfico.

Solución:

Lo primero que debemos hacer es escribir las ecuaciones en la forma $y = mx + b$ para así identificar la pendiente.
$y_1 = 3x + 4$ y $y_2 = 3x + 5$ las pendientes como podemos ver son iguales, por tanto son paralelas.



Rectas Perpendiculares.

Dos rectas $y_1 = m_1 x + b_1$ y $y_2 = m_2 x + b_2$ son perpendiculares si y solo si producto de sus pendientes es igual a menos uno. $m_1 \cdot m_2 = -1$.

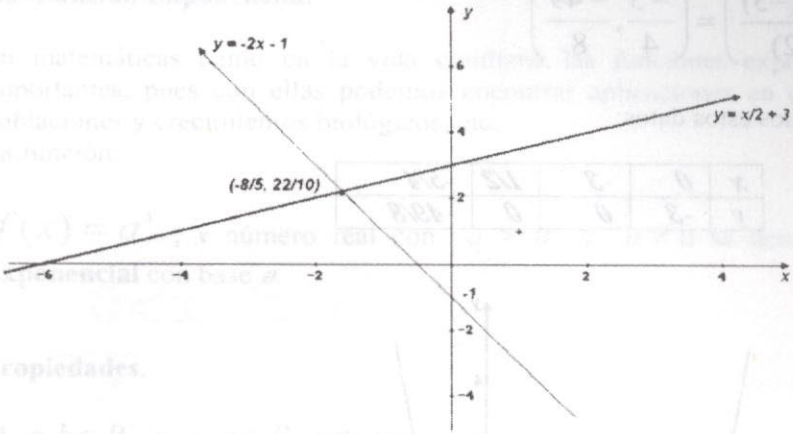
Ejemplo 76:

Dadas las rectas $y = -2x - 1$ y $y = \frac{x}{2} + 3$ verificar si son perpendiculares y trazar el gráfico.

Solución:

Como podemos observar las rectas tienen pendientes $m_1 = -2$ y $m_2 = \frac{1}{2}$ al realizar el producto: $(-2)\left(\frac{1}{2}\right) = -1$ como el producto es igual a *-1* las rectas son perpendiculares.

Gráfico:



6.4 Función Cuadrática.

La función definida como:

$$f : R \rightarrow R$$
$$x \rightarrow f(x) = ax^2 + bx + c$$

Donde *a, b, c* son números reales fijos se denomina **función cuadrática**.
La gráfica es una parábola. Si $a > 0$ la parábola abre hacia arriba si $a < 0$ la parábola abre hacia abajo. El vértice de la parábola corresponde al punto $\left(\dfrac{-b}{2a}, \dfrac{4ac - b^2}{4a}\right)$ que también puede ser un máximo o un mínimo.

Ejemplo 77:

Trazar el gráfico de $y = f(x) = 2x^2 + 5x - 3$
Solución:

Como vemos el valor de $a = 2 > 0$ luego la parábola abre hacia arriba.

Cortes con los ejes.

El corte con el eje *x* se logra haciendo $y = 0$ y el corte con el eje *y* se logra con $x = 0$.
Si $x = 0 \rightarrow y = -3$
Si $y = 0$ debemos resolver la ecuación:

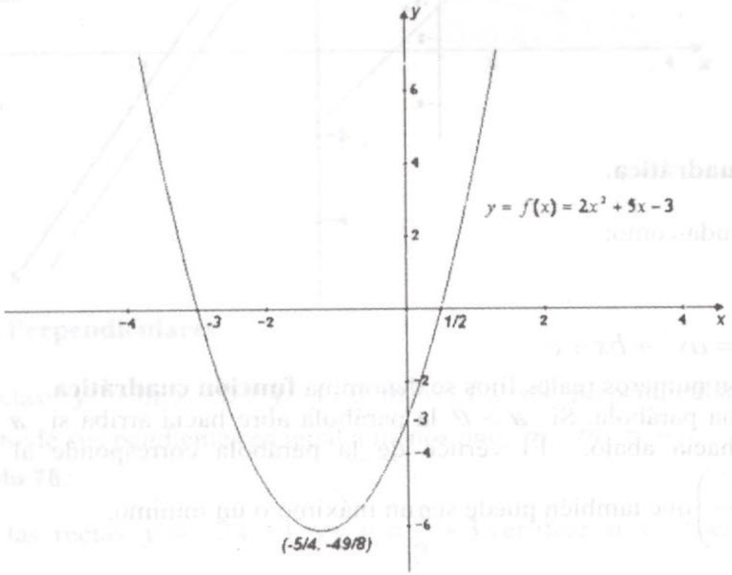
$0 = 2x^2 + 5x - 3$ Por fórmula o factorización Obtenemos: $x = 1/2,\ o\ ,x = -3$
Punto de mínima puesto que $a > 0$ está dado por:

$$\left(\frac{-5}{2(2)}, \frac{4(2)(-3)}{4(2)}\right) = \left(\frac{-5}{4}, \frac{-49}{8}\right)$$

Tabulamos todos estos datos:

x	*0*	*-3*	*1/2*	*-5/4*
y	*-3*	*0*	*0*	*-49/8*

Gráfico:



⊕ Taller de Clase No 27

1. Trazar el gráfico de las funciones:

$a)\ f(x) = 3x - 2 \quad b)\ g(x) = 5x + 4 \quad c)\ g(x) = 2x^2 - 9x - 5$

$d)\ f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x + 3} \quad e)\ h(x) = 6x^2 - 14x + 4 \quad f)\ y = x^2 + 2x - 3$

$g)\ f(x) = 12x^2 - 9x - 30 \quad h)\ g(x) = -7x^2 + 20x + 3$

$i)\ h(x) = -3x^2 - 14x + 5 \quad j)\ f(x) = 5x^2 + 11x - 12$

2. Hallar la ecuación de la recta que: (Trace el gráfico en cada caso)

a. Tiene pendiente -2 y pasa por lo puntos $(4,3)$ y $(5,-3)$
b. Pasa por los puntos: $(3,2)$ y $(4,-2)$.
c. Es paralela a $y = 3x + 4$ y pasa por el punto $(1,2)$.
d. Es perpendicular a $\dfrac{3x + y}{2} = 3$ y pasa por el punto $(-2, 1)$.

6.5 Función Exponencial.

En matemáticas como en la vida cotidiana las funciones exponenciales son importantes, pues con ellas podemos encontrar aplicaciones en crecimiento de poblaciones y crecimientos biológicos, etc.
La función:

$f(x) = a^x$, x número real con $a > 0$ y $a \neq 0$ se denomina función **Exponencial** con base *a*.

Propiedades.

Si $a, b \in R^+$ y $x, y \in R$, **entonces:**

$$a) a^0 = 1$$

$$b) a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$c) (a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

$$d) \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \ (a \neq 0)$$

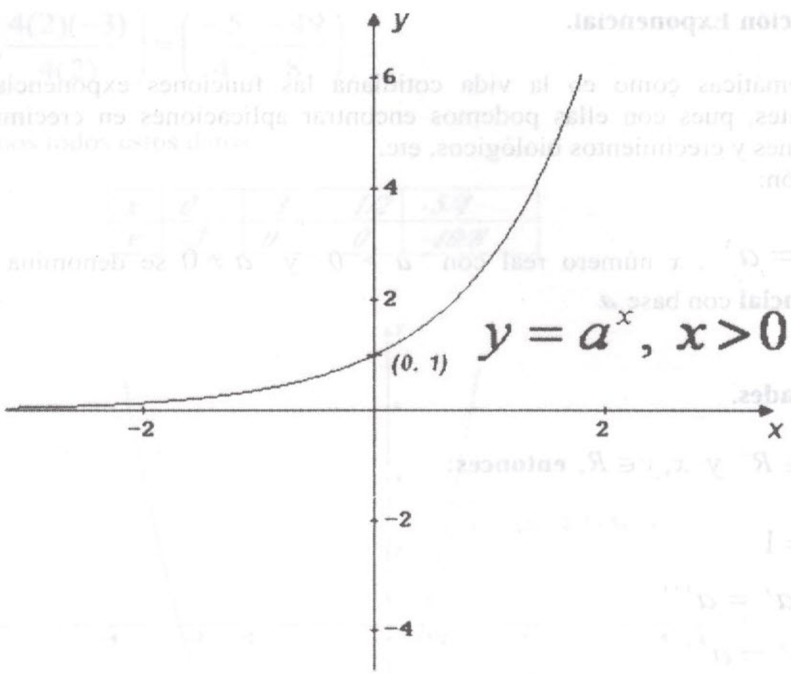
$$e) (a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$$

$$f) \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x} (b \neq 0)$$

$$g) \text{Si } a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$$

$$h) \text{Si } a^x = b^x \Leftrightarrow a = b$$

Gráficos de la función exponencial con base *a*.



Características.

a. Su dominio corresponde a todos los números reales.
b. El rango está dado por: $(0,+\infty)$
c. Es creciente.
d. Su corte con el eje y es el punto *(0, 1)*.
No toca el eje x. Se dice que es una curva asintótica

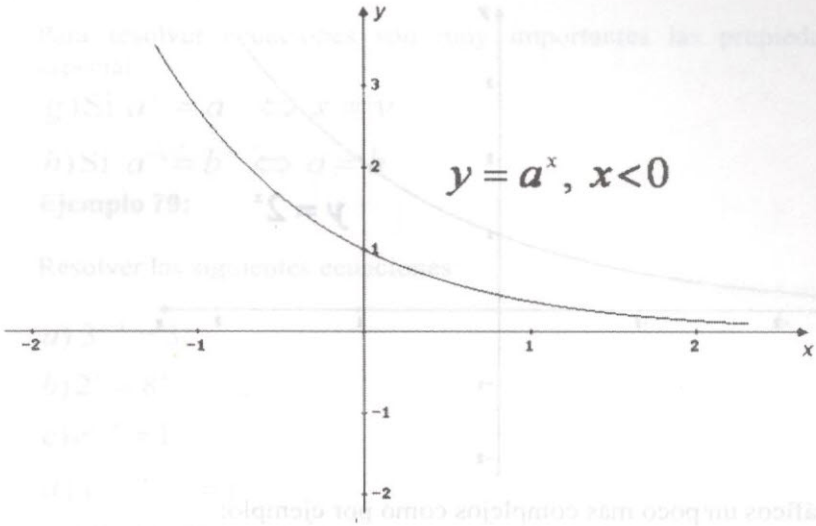
Para la segunda forma de la curva cuando x es negativo ella tiene las siguientes características:

Características.

e. Su dominio corresponde a todos los números reales.
f. El rango está dado por: $(0,+\infty)$
g. Es decreciente.
h. Su corte con el eje y es el punto *(0,1)*.

No toca el eje x. Se dice que es una curva asintótica.

El gráfico es el siguiente:



Dentro de la función exponencial aparece una muy importante que cumple con las mismas características y gráficos, la diferencia la hace la base *e*.

$$f(x) = e^x$$

Recordemos que el número *e* tiene un valor aproximado de *2.718281828462...*

Ejemplo 78:

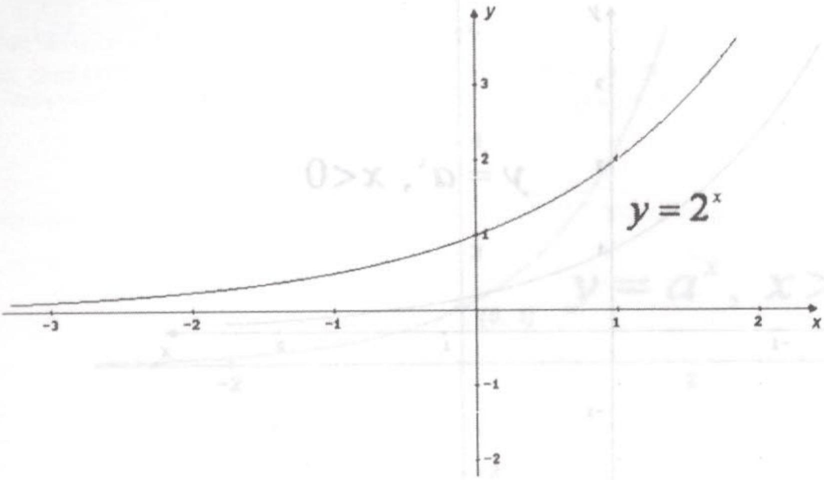
Trazar el gráfico de: $y = 2^x$

Solución:

Hacemos una pequeña tabulación:

x	*0*	*1*	*2*	*3*	*-1*	*-2*	*-3*
y	*1*	*2*	*4*	*8*	*1/2*	*1/4*	*1/8*

Grafico:

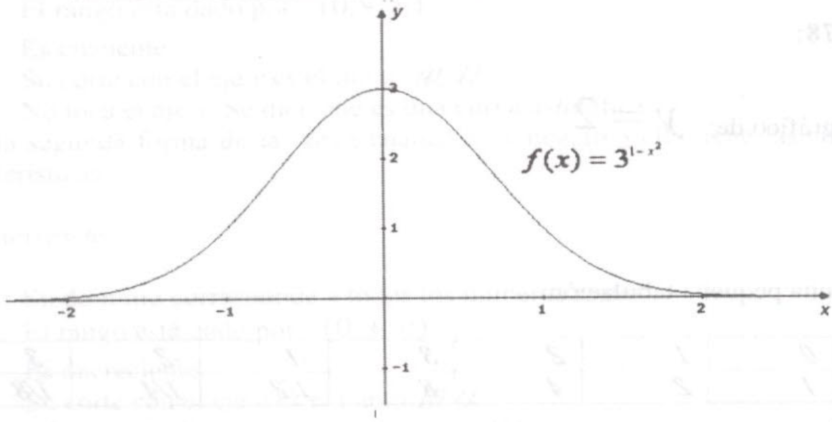


Existen gráficos un poco más complejos como por ejemplo:

$$f(x) = 3^{1-x^2}$$

Hacemos una tabulación:

x	*0*	*1*	*2*	*-1*	*-2*
y	*3*	*1*	*1/27*	*1*	*1/27*



Esta curva es similar a la famosa campana de Gauss y que en estadística se conoce como distribución normal.

6.6 Ecuaciones exponenciales.

Para resolver ecuaciones son muy importantes las propiedades pero en especial

$g)$ Si $a^{x} = a^{y} \Leftrightarrow x = y$

$h)$ Si $a^{x} = b^{x} \Leftrightarrow a = b$

Ejemplo 79:

Resolver las siguientes ecuaciones:

$a)\ 3^{x+1} = 3^{2}$

$b)\ 2^{x} = 8^{x+2}$

$c)\ e^{x+2} = 1$

$d)\ y^{y^2-10y+16} = 1$

$e)\ (3x+1)^{x} = (x+7)^{x}$

$f)\ \sqrt[3]{2^{2x+1}} = \dfrac{1}{32}$

Solución:

$a)\ 3^{x+1} = 3^{2} \Rightarrow x+1 = 2 \ \therefore\ x = 1$ utilizamos la propiedad *g)*.

$b)\ 2^{x} = 8^{x+2} \Rightarrow 2^{x} = 2^{3(x+2)} \Leftrightarrow x = 3(x+2) \Rightarrow x = 3x+6 \ \therefore\ x = -3$

$c)\ e^{x+2} = 1 = e^{0} \Leftrightarrow x+2 = 0 \ \therefore\ x = -2$

$d)\ y^{y^2-10y+16} = 1 = y^{0} \Leftrightarrow y^{2} - 10y + 16 = 0 \Leftrightarrow (y-8)(y-2) = 0$

$\therefore\ y = 8,\ o\ , y = 2$

$e)\ (3x+1)^{x} = (x+7)^{x} \Leftrightarrow 3x+1 = x+7 \Rightarrow 3x - x = 7 - 1$

$2x = 6 \ \therefore\ x = 3$

Utilizamos la propiedad *h)*.

$$f)\ \sqrt[3]{2^{2x+1}} = \frac{1}{32} = \frac{1}{2^5} = 2^{-5} \Rightarrow (2^{2x+1})^{\frac{1}{3}} = 2^{-5}$$

$$2^{\frac{2x+1}{3}} = 2^{-5} \Leftrightarrow \frac{2x+1}{3} = -5 \Rightarrow 2x+1 = -15 \Rightarrow 2x = -16$$

$$\therefore\ x = -8$$

❖ 6.7 Función Logarítmica

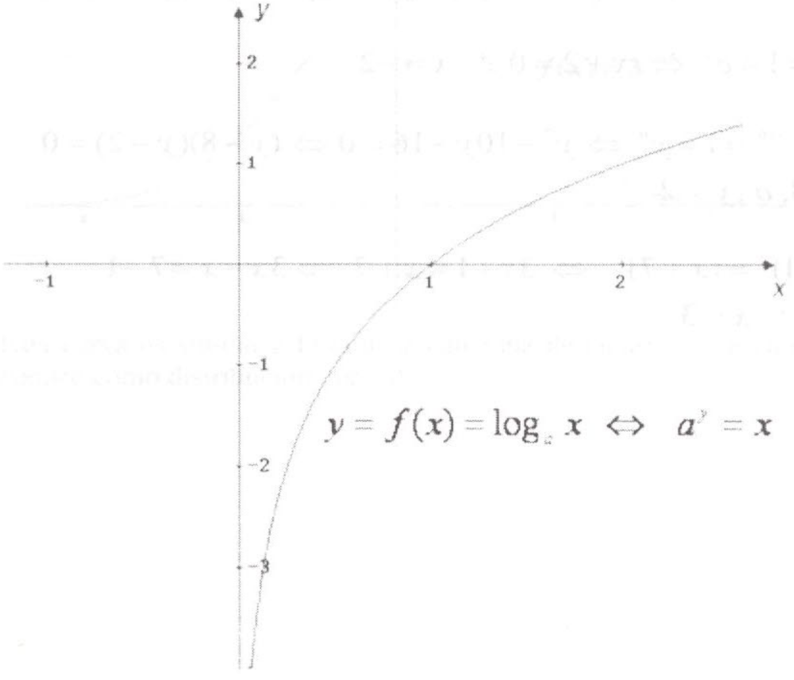
La función:

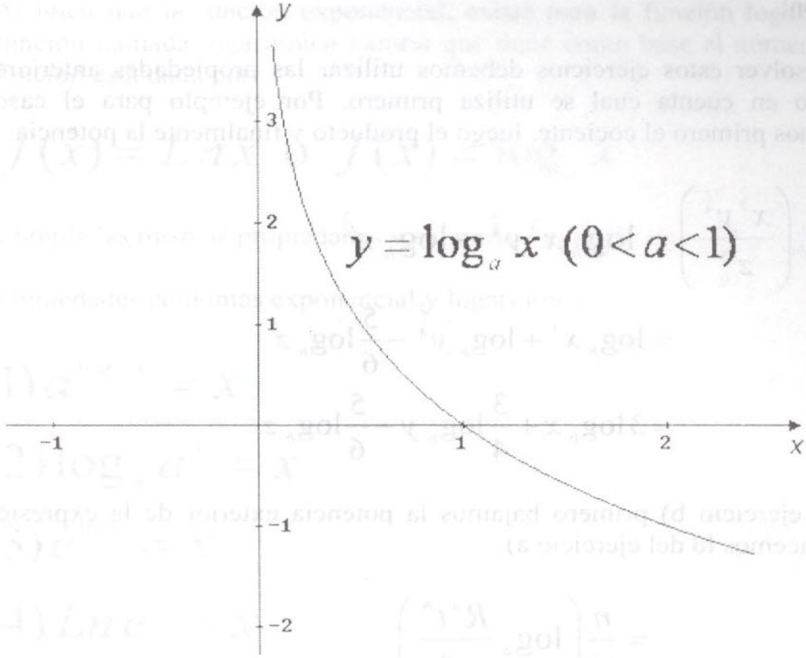
$$y = f(x) = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$$

Se denomina función logarítmica de base a.
La función logarítmica y la exponencial son funciones inversas.
El logaritmo es la potencia a la cual a debe elevarse y para obtener x.

Características.

El dominio corresponde a los números reales positivos $(0, +\infty)$
El rango es el conjunto de los números reales.
Si $a > 1$ la gráfica de la función es creciente en todo su dominio.
Si $0 < a < 1$, la gráfica es decreciente.
El corte con el eje x es en el punto $(1, 0)$.
Gráficos:





Propiedades.

$a)\ \log_a x \cdot y = \log_a x + \log_a y$ (propiedad del producto)

$b)\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$ (propiedad del cociente)

$c)\log_a x^n = n\log_a x$ (propiedad de la potencia)

$d)\log_a a = 1$

$e)\log_a 1 = 0$

Aplicación de las propiedades.

Ejemplo 80:

Escribir como suma o diferencia.

$$a)\log_b\left(\frac{x^3 y^{\frac{3}{4}}}{z^{\frac{5}{6}}}\right)$$

$$b)\log_4\left(\frac{R^w t^b}{u^a}\right)^{\frac{n}{m}}$$

Solución:

Para resolver estos ejercicios debemos utilizar las propiedades anteriores y teniendo en cuenta cual se utiliza primero. Por ejemplo para el caso a) utilizamos primero el cociente, luego el producto y finalmente la potencia.

$$a)\log_b\left(\frac{x^3 y^{\frac{3}{4}}}{z^{\frac{5}{6}}}\right) = \log_b x^3 y^{\frac{3}{4}} - \log_b z^{\frac{5}{6}}$$

$$= \log_b x^3 + \log_b y^{\frac{3}{4}} - \frac{5}{6}\log_b z$$

$$= 3\log_b x + \frac{3}{4}\log_b y - \frac{5}{6}\log_b z$$

Para el ejercicio b) primero bajamos la potencia exterior de la expresión y luego hacemos lo del ejercicio a).

$$b)\log_4\left(\frac{R^w t^b}{u^a}\right)^{\frac{n}{m}} = \frac{n}{m}\left(\log_4\frac{R^w t^b}{u^a}\right)$$

$$= \frac{n}{m}\left(\log_4 R^w \cdot t^b - \log_4 u^a\right)$$

$$= \frac{n}{m}\left(w\log_4 R + b\log_4 t - a\log_4 u\right)$$

$$\frac{n\cdot w}{m}\log_4 R + \frac{n\cdot R}{m}\log_4 t - \frac{n\cdot a}{m}\log_4 u$$

Hagamos ahora el caso contrario.

Escribir como un solo logaritmo.

$$3\log_a(x-5) + \frac{1}{5}\log_a x - 12\log_a w$$

Solución:

$$= \log_a(x-5)^3 + \log_a x^{\frac{1}{5}} - \log_a w^{12}$$

$$= \log(x-5)^3 \cdot x^{\frac{1}{5}} - \log_a w^{12}$$

$$= \log_a\left(\frac{(x-5)^3 \cdot x^{\frac{1}{5}}}{w^{12}}\right)$$

Al igual que la función exponencial, existe para la función logarítmica una función llamada logarítmica natural que tiene como base el número e. Dicha función está dada por:

$$f(x) = Ln\,x \text{ o } f(x) = \log_e x$$

Cumple las mismas propiedades y su gráfico es igual.

Propiedades conjuntas exponencial y logarítmica.

$$1)\,a^{\log_a x} = x$$

$$2)\log_a a^x = x$$

$$3)\,e^{\ln x} = x$$

$$4)\,Ln\,e^x = x$$

6.8 Ecuaciones exponencial y logarítmica.

Para resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas utilizamos las propiedades de ambas funciones y la definición de logaritmo.

Ejemplo 80:

Resolver las ecuaciones:

$a)\log_{10}(7x-2)-\log_{10}(x-2)=1$

$b)\log_2(x+1)+\log_2(3x-5)=\log_2(5x-3)+2$

Solución:

$a)\log_{10}(7x-2)-\log_{10}(x-2)=1$

$$\log_{10}\left(\frac{7x-2}{x-2}\right)=1 \Leftrightarrow \left(\frac{7x-2}{x-2}\right)=10^1 \Rightarrow 7x-2=10x-20$$

$$7x-10x=-20+2 \Rightarrow -3x=-18 \;\therefore\; x=6$$

$b)\log_2(x+1)+\log_2(3x-5)=\log_2(5x-3)+2$

$$= \log_2 (x+1)(3x-5) - \log_2 (5x-3) = 2$$

$$= \log_2 \left(\frac{(x+1)(3x-5)}{(5x-3)} \right) = 2 \Leftrightarrow \left(\frac{(x+1)(3x-5)}{(5x-3)} \right) = 2^2 \text{ por definición}$$

$$\frac{3x^2 - 2x - 5}{5x-3} = 4 \Rightarrow 3x^2 - 2x - 5 = 20x - 12$$

$$3x^2 - 22x + 7 = 0 \therefore x = 7, o \ , x = 1/3$$

$$c) x^{\log_{10} x} = 1000x^2$$

Solución:
Tomamos logaritmos con base 10 en ambos lados.

$$\log_{10} x^{\log_{10} x} = \log_{10} 1000x^2$$
$$\log_{10} x \cdot \log_{10} x = \log_{10} 10^3 + \log_{10} x^2$$
$$(\log_{10} x)^2 = 3\log_{10} 10 + 2\log_{10} x$$
$$\log_{10}{}^2 x - 2\log_{10} x - 3 = 0$$

Si observamos con cuidado la última expresión es una ecuación cuadrática.
Hacemos un cambio de variable para ver mejor la expresión:

$$u = \log_{10} x$$
$$u^2 - 2u - 3 = 0$$
$$u = 3, \ \text{o} \ , u = -1$$

Rechazamos la solución negativa, puesto que no existe solución para logaritmos negativos.
Recuperando la variable tenemos: $\log_{10} x = 3 \therefore x = 10^3 = 1000$

⊕ Taller de Clase No 28

1. Escribir como suma o diferencia

$$a) \log_3 \frac{x^4 \cdot y^7}{z^2 \cdot w^3} \quad b) \log_{10} \left(\frac{w^{\frac{1}{4}} \cdot E^2}{A^{\frac{3}{2}}} \right)^{\frac{1}{4}}$$

2. Resolver las siguientes ecuaciones.

$$a)\ \log_{10}\sqrt{\frac{3x+4}{x}}=0$$

$$b)\ 15^{3x+7}=77\left(5^{4x}\right)$$

$$c)(0.9)^{3x-6}=13.8^{2x-3}$$

$$d)\log_8(x+4)+\log_8 2=\log_8 x^2$$

$$e)9^x+4\cdot 3^x=12$$

3. escribir como un solo logaritmo.

$$a)\ \log_c(x+7)+\log_c(2x-1)-\log_c x$$

$$b)\log_b x-3\log_b y+\frac{1}{4}\log_b W^{\frac{1}{3}}$$

❖ 6.8.1 Aplicaciones de las funciones exponencial y logarítmica.

Es muy común encontrar aplicaciones en biología, química, medicina y física.

1. El número de bacterias en un cierto cultivo de bacterias después de t horas, está dado por $Q(t)=Q_0e^{0.01t}$ Si hay 400 bacterias inicialmente, ¿cuántas bacterias estarán presentes después de tres días?

Solución:
Para t = 0 tenemos

$$400=Q_0e^{0.01(0)}\quad\Rightarrow\quad 400=Q_0$$

En tres días habrá:

$$Q(72)=400e^{0.01(72)}=400(2{,}05443321064)=821{,}77$$

Hay crecimiento de las bacterias.

2. Se cree que muchas clases de bacterias tienen un crecimiento exponencial dado por:

$$P=f(t)=P_0e^{kt}$$

Donde P es la población en el tiempo t, P_0 indica la población cuando t = 0 y k es la constante de crecimiento (tasa porcentual de crecimiento). Determinar el período para que una población duplique su tamaño.

Solución:

Si se duplica una población inicial, $\frac{P}{P_0}=2$

Luego: $\frac{P}{P_0}=e^{kt}$ la población se duplicará cuando: $e^{k\cdot t}=2$ Tomando logaritmos a ambos lados tenemos: $k\cdot t=\ln 2\ \therefore\ t=\frac{\ln 2}{k}$.

Si la constante de crecimiento de determinada bacteria es 0.4 y t se expresa en horas, el tiempo que tarda la población en duplicarse será:

$$t=\frac{\ln 2}{0.4}=1.733 \text{ horas.}$$

3. Vida media.

Una función de decaimiento exponencial tiene la forma general $V=V_0\cdot e^{-k\cdot t}$

Donde V es el valor de la función en el tiempo t, V_0 indica el valor de la fundón cuando t = 0 y k es la constante de decaimiento (tasa porcentual de decaimiento).

Muchos procesos naturales se caracterizan por el comportamiento de deterioro exponencial. Uno de los más utilizados es el de desintegración de algunas sustancias radiactivas. Una de las medidas utilizadas es la vida media. Es el tiempo que una cantidad de sustancia tarda en ser reducida por un factor de ½.

Supongamos que la cantidad de una sustancia radiactiva se calcula por medio de la ecuación $V=V_0\cdot e^{-k\cdot t}$. La cantidad de sustancia se reducirá a la mitad cuando:

$$\frac{V}{V_0}=0.5$$

$$e^{-k\cdot t}=0.5$$

Tomando logaritmos a ambos lados tenemos:

$$-k\cdot t=Ln\ 0.5$$

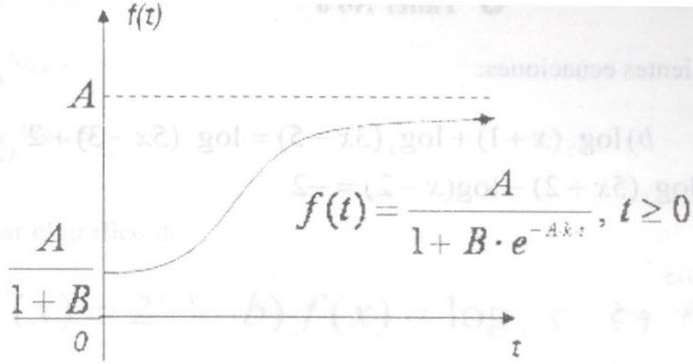
$$t=\frac{\ln 0.5}{-k}$$

La constante de desintegración de un elemento químico es $k=0.0244$, donde t se mide en años. Una cantidad de este elemento se reducirá a la mitad de su tamaño si:

$$t=\frac{\ln 0.5}{-0.0244}=28.40\text{años.}$$

4. Una de las funciones importantes en epidemiología es la función logística la cual esta dada por: $f(t)=\frac{A}{1+B\cdot e^{-A\cdot k\cdot t}},\ t\geq 0$

Su gráfico es:



5. En la comunidad de un barrio de Pereira la diseminación de un cierto virus de la gripe fue tal que t semanas después de su brote $f(t)$ personas se habían contagiado, donde:

$$f(t)=\frac{500}{1+15e^{-0.9\cdot t}}$$

Cuantas personas tenían gripe a) en el brote, b) después de 3 semanas, c) después de 10 semanas.
Solución:

$$a)\, f(0)=\frac{400}{1+15e^{-0.9\cdot(0)}}=25$$

$$b)\, f(3)=\frac{400}{1+15e^{-0.9\cdot(3)}}\approx 200$$

$$c)\, f(10)=\frac{400}{1+15e^{-0.9\cdot(10)}}\approx 399$$

¿Qué ocurre si continúa indefinidamente?

Solución:
Al decir indefinidamente quiere decir infinito por tanto(simbólicamente) tomamos una cantidad muy grande que simbolizamos por: ∞

$$f(\infty)=\frac{400}{1+15e^{-0.9\cdot(\infty)}}=\frac{400}{1+0}=400$$

Quiere decir que si no se toman medidas epidemiológicas continuarían 400 personas infectadas por el virus de la gripe.

Taller No 6

1. Resolver las siguientes ecuaciones:

$a) 2\cdot 5^{x+2} = 3^{2x+1}$ $\quad b) \log_2(x+1) + \log_2(3x-5) = \log_2(5x-3) + 2$

$c) \log_3(2x-1) - \log_3(5x+2) - \log(x-2) = -2$

$d) 8^{3x-1} = 16^{x-1}$

$e) \left(\dfrac{25}{8}\right)^{x+1} = \left(\dfrac{4}{5}\right)^{x+2} = 5$

2. Dad la ecuación:

$$w = 1000\left(\frac{1}{2}\right)^{0.8^x}$$

Demuestre que:

$$x = \frac{\log_{10}\left(\dfrac{3-\log_{10} w}{\log_{10} 2}\right)}{3\log_{10} 2 - 1},\ o\ ,\ x = \frac{\log_{10}\left(\dfrac{3\ln 10 - \ln w}{\ln 2}\right)}{3\log_{10} 2 - 1}$$

3. Resolver las ecuaciones.

$a) 5^{2x-1} = 18$

$b) (a+3)^t = (2a-5)^t$

$c) \log_{2x} 27 = \log_3 27$

4. Escribir como suma o diferencia.

$a) \ln\left(\dfrac{3^5 A^{2w} H^4}{Q^2 \cdot e^{2R}}\right)$

$b) \log_5 \sqrt[5]{\dfrac{T^{-3} \cdot H^3}{W^6}}$

5. Escribir como un solo logaritmo.

$a) \ln 3x + \dfrac{3}{2}\ln w - 7\ln(Z-1)$

$b) 3\ln(x-2) - \dfrac{1}{5}\ln(x+4) - \ln c$

5. Simplificar.

$$a)\ 6^{\log_6 x}$$

$$b)\ 36^{\log_{36} 6}$$

6. Trazar el gráfico de:

$$a)\ f(x)=2^{1-x} \quad b)\ f(x)=\log_3 x \quad c)\ f(x)=\log_{1/2} x$$

$$d)\ y=3-e^{x} \quad e)\ y=10\cdot e^{0.1\cdot x} \quad f)\ y=4^{x^2-1}$$

7. Una sola bacteria gástrica se divide cada media hora para producir dos bacterias completas. Si se empieza con una colonia de 6000 bacterias, después de t horas habrá

$B = 6000 \cdot 2^{2\cdot t}$ bacterias.

¿Cuánto tiempo pasará para que $B = 1000\ 000$?

8. La absorción de rayos x se calcula mediante la ecuación:

$$x=-\left(\frac{1}{k}\right)\cdot Ln\left(\frac{I}{I_o}\right)$$

Hallar el valor de I

9. Si $\left[H^{+1}\right]=3.0\times10^{-3}$ ¿Cuál es el pH?

10. En un barrio de Pereira una epidemia de sarampión se disemina de manera que $f(t)$ personas se han contagiado t semanas después de su brote, donde

$$f(t)=\frac{30}{1+10e^{-0.8t}}$$

¿Cuántas personas contrajeron sarampión a) inicialmente?, b) después de 7 semanas?, c) después de 14 semanas?, Si es indefinidamente cuantas se contagiaron?.

10. Cierta sustancia decae siguiendo la fórmula $Q=Q_0e^{-0.05t}$ donde t está medido en años. Cuál es la vida media?

11. Una población de bacterias crece de manera que su tiempo de duplicación es de 40 horas. Si la población consta hoy de un millón, ¿cuál será la población en 160 horas?

12. Cierta sustancia radioactiva tiene vida media 3 ¿Qué fracción de una cantidad inicial quedará después de 243 días?

13. Trazar el gráfico de.

$$a)\, y=\frac{3}{4}x-5 \quad b)\ y=3x \quad c)\ y=3x+7$$

$$d)\, y=5x^2+9x-2 \quad c)\ y=6x^2-10x-4$$

14. Un medicamento inyectado por vía intramuscular a un adulto de 37 años sigue la ley $f(t)=3t^2-5t-2$. Donde t en milésimas de segundo es el tiempo de llegada de la sustancia al torrente sanguíneo. ¿Cuál es el tiempo mínimo de llegada de la sustancia al torrente sanguíneo? Trace el gráfico y explique.

REPASO DE CONCEPTOS

1. Señale la respuesta correcta.

a) Una función es una regla que asigna a cada número del conjunto de partida una y sola una imagen en el conjunto de llegada.
b) Una función es una regla que asigna más de un valor en el conjunto de llegada.
c) Una función asigna como mínimo dos valores del conjunto de partida al conjunto de llegada.
d) Ninguna anterior.

2. La solución del sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x+2y-8=0 \\ 2x+4y+4=0 \end{cases}$ está dado por:

a) *(3, -2)* b) *(3, -5)* c) *(3,-1)* d) Vacío.

3. Un laboratorio de productos químicos desea surtir un pedido de 500 litros de una solución ácida al 25%. Si se tienen disponibles en el almacén soluciones al 30% y al 18%, ¿Cuántos litros de cada uno de ellas se deben mezclar para cumplir con el pedido?

4. ¿Cuál es la definición de logaritmo?

5. Un modelo depredador presa está dado por $D=k(1-e^{-rx})$,

Donde x es la densidad de la población de presas, D es el número de presas atacadas y k y r son constantes. Compruebe que:

$$xr=\ln\left(\frac{k}{k-D}\right)$$

6. La pendiente de una recta esta definida por un ____________ en y sobre un ___________ en ___.

7. Señale la respuesta correcta.

Una función en la cual todos los elementos del conjunto de partida están asociados con un único electo en el conjunto de llegada se denomina:

a) Función constante porque no sobran elementos en el conjunto de llegada.

b) Función constante porque sobran elementos en el conjunto de llegada.

c) Función constante porque cada elemento del conjunto de partida tiene una sola imagen.

d) Función constante porque la imagen es la misma para todos los elementos del dominio.

8. Si $f(x) = 5 - 3x$, el valor de $f(a+1)$ está dado por:

$a)\, 2-3a \quad b)\, 5-3a \quad c)\, 3a-2 \quad d)\, 4-3a$

9. El modelo de blanco único, impacto único de la letalidad inducida por radiación, está dado por la ecuación: $S = \dfrac{N}{N_0} = e^{\frac{-D}{D_{37}}}$, Donde S es la fracción superviviente, N el número de células que sobreviven a una dosis D, N_0 el número inicial de células y D_{37} una dosis constante relacionada con la radiosensibilidad celular. Hallar el valor de D.

10. Determinar y recetar fármacos son aspectos sumamente importantes para la profesión médica.

Con frecuencia se debe tener precaución debido al lado posiblemente adverso a los efectos tóxicos de las medicinas. Las ecuaciones:

$$R = P(1 - e^{-dkI}),\ \text{y},\ T = \frac{P(1 - e^{-kdI})}{e^{kI} - 1}$$

Donde T es el nivel terapéutico en términos de la dosis P, I significa los intervalos de la d dosis y $k = \dfrac{\ln 2}{w}$, w es la semivida. R es la dosis resumida.

La teofilina es un fármaco que se utiliza para tratar el asma bronquial y tiene una semivida de 8 horas en el sistema de un paciente relativamente saludable, que no fuma.

Supóngase que cuando se administran 1oo mg cada 4 horas. Aquí, d = 3. debido a su toxicidad, debe reducirse la dosis después. Al miligramo más próximo, determine a) el nivel terapéutico b) la dosis reducida.

11. La ley de Galton de la herencia establece que la influencia de los ancestros de un individuc es como sigue: Cada padre ½ , cada abuelo $(1/2)^2$, cad᠁ bisabuelo $(1/2)^3$, etc. Que tanta influencia tendría un ancestro de hace 20 generaciones? (aproximadamente 600 años.)

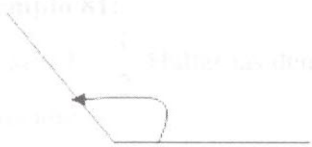
12. Para cada generación, el número de nuestros ancestros directos (padres, abuelos, etc.) se dobla. Si pensamos en 40 años para una generación, ¿cuántos ancestros tendría hace 700 años? ¿1990? (Observe que en el tiempo de cristo la población de la tierra se estima en 3.5×10^8 personas.

APENDICE

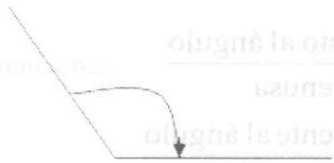
Funciones trigonométricas (una introducción)

Ángulos.

Un ángulo se forma cuando un segmento de recta en el plano gira con respecto a otro alrededor de su extremo común.



Ángulo Positivo



Ángulo Negativo

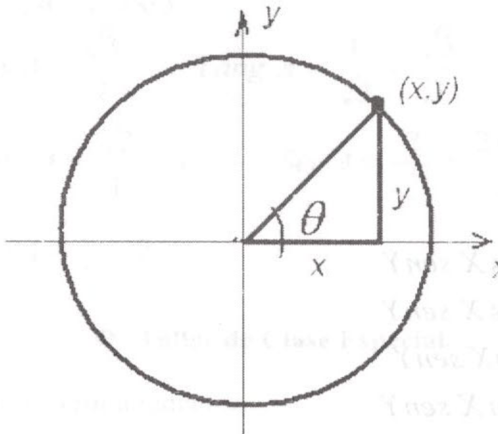
Un grado es la cantidad que debe girar un segmento de recta para que su extremo libre trace $\frac{1}{360}$ de un círculo.

Fórmula de conversión $\quad \dfrac{\text{Grados}}{180} = \dfrac{\text{radianes}}{\pi}$

Convertir 45° a radianes.

$\dfrac{45°}{180} = \dfrac{\text{radianes}}{\pi}$ simplificando tenemos: $45° = \dfrac{\pi}{4}\text{radianes}$.

Algunas funciones Trigonométricas.



Para cualquier ángulo:

$Sen\,\theta = y$

$Cos\,\theta = x$

Si tomamos un círculo de radio igual a uno tenemos.

$$x^2 + y^2 = 1$$

De acuerdo que $\begin{matrix} Sen\,\theta = y \\ Cos\,\theta = x \end{matrix}$:

$$sen^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$sen\,\theta = \frac{\text{Lado opuesto al ángulo}}{\text{hipotenusa}}$$

$$Cos\,\theta = \frac{\text{lado adyacente al ángulo}}{\text{hipotenusa}}$$

$$Tang\,\theta = \frac{\text{Lado opuesto}}{\text{Lado adyacente}}$$

Identidades:

$$1.\ Sen^2\theta = 1 - \cos^2\theta$$

$$2.\ Cos^2\theta = 1 - sen^2\theta$$

$$3.\ Tang\,\theta = \frac{sen\,\theta}{\cos\theta}$$

$$4.\ Co\tan g\,\theta = \frac{\cos\theta}{sen\,\theta}$$

$$5.\ Sec\,\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

$$6.\ Cosc\,\theta = \frac{1}{sen\,\theta}$$

Suma y diferencia de ángulos

$$1.\ sen(X+Y) = sen\,X\cos Y + \cos X\, sen\,Y$$

$$2.\ sen(X-Y) = sen\,X\cos Y - \cos X\, sen\,Y$$

$$3.\ \cos(X+Y) = \cos X\cos Y - senX\, sen\,Y$$

$$4.\ \cos(X-Y) = \cos X\cos Y + sen\,X\, sen\,Y$$

$$5.\ \tan(X+Y) = \frac{\tan X + \tan Y}{1 - \tan X\tan Y}$$

$$6.\ \tan(X-Y) = \frac{\tan X - \tan Y}{1 + \tan X\tan Y}$$

Ángulos dobles

$i) sen 2x = 2sen x \cdot \cos x$

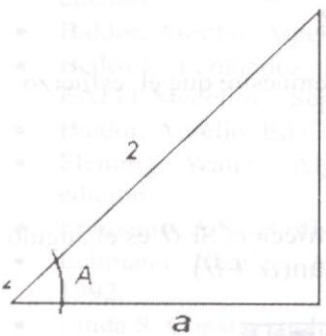
$.ii) \cos 2x = \cos^2 x - sen^2 x$

$iii). \tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

Ejemplo 81:

Si $senA = \dfrac{1}{2}$ Hallar las demás funciones.

Solución:



Utilizamos el teorema de Pitágoras para hallar el lado adyacente (o faltante).

$a^2 = 2^2 - 1^2$

$a = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$

$Cos\ A = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad Tang\ A = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$Cotg\ A = \dfrac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$ $\qquad Sec\ A = \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

$Csc\ A = \dfrac{2}{1} = 2$

⊕ Taller de Clase Especial.

1. Convertir a radianes:

$a) 30° \quad b)\ 60° \quad c)\ 270° \quad d)\ 90° \quad e) 150°$

2. Si $sen\,\alpha = \dfrac{-4}{5}$ Hallar las demás funciones trigonométricas.

3. Dado que $Cos\ X = \dfrac{a^2 - n^2}{a^2 + b^2}$ Hallar las otras funciones.

4. Dado $Cos\,\alpha = \dfrac{(a+b)\sqrt{2(a^2+b^2)}}{2(a^2+b^2)}$ Encontrar las otras funciones.

5. Probar que: $\dfrac{1}{1-sen\,A} + \dfrac{1}{1+sen\,A} = 2\sec^2 A$

6. Probar que: $\dfrac{1-\cos 2A + sen 2A}{1+\cos 2A + sen 2A} = tgA$

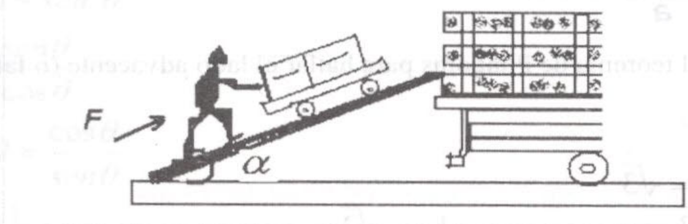
7. Demostrar que: $\dfrac{2sen\theta\cos\theta - \cos\theta}{1 - sen\theta + sen^2\theta - \cos^2\theta} = ctg\theta$

8. Demostrar que: $ctg^2\theta\dfrac{\sec\theta - 1}{1+sen\theta} + \sec^2\theta\dfrac{sen\theta - 1}{1+\sec\theta} = 0$

9. El robot de la figura, esta haciendo un esfuerzo F. Demuestre que el esfuerzo F para mantener la carreta en la rampa, está dado por:

$$F = \frac{W(sen\alpha + \mu\cos\alpha)}{\cos\alpha - \mu\, sen\alpha}$$

Donde W es el peso de la caja y μ es el coeficiente de fricción. Si θ es el ángulo de inclinación y $\mu = \tan\theta$, demuestre que $F = W\tan(\alpha+\theta)$



10. Trace los gráficos de:

$a)\, f(x) = \cos x \quad b)\, f(x) = senx \quad c)\, f(x) = \tan x \quad d)\, sen(2x+3x)$

Bibliografía.

- Ayres, Frank JR. Fundamentos de Matemáticas superiores-Ed McGraw Hill-
- Barnett, Algebra y trigonometría – Editorial Mc Graw Hill – segunda edición
- Baldor, Aurelio. Algebra -Ed Compañía cultural editora.
- Bedoya, Fernández Hernando. Algebra y trigonometría- Universidad EAFIT Medellín – Séptima Edición.
- Baldor, Aurelio. Ed Compañía cultural editora.
- Fleming, Walter. Algebra y trigonometría. Ed. Prentice Hall-Tercera edición
- Frumento, A.S –Biofísica Mosby –Tercera edición.
- Lehmann, Charles. Algebra. Ed Limusa. Vigésima quinta reimpresión. 1992.
- Linda S, Constanzo. Fisiología –Ed Mc Graw-Hill –Primera edición.2000
- Palmer, Claude I.Collage Algebra- Ed McGrawHill- Segunda edición 1956
- Sánchez, Darío- Algebra y Trigonometría – U nacional –Segunda edición.
- Spiegel, Murria R. Algebra Superior – Ed Schaum-McGraww Hill.
- Swokowski, Algebra y trigonometría con geometría analítica- Ed Thomson-Décima edición.

Este libro se termino de imprimir en el mes de Diciembre de 2006
en los talleres de Postergraph S.A. en Pereira

La edición consta de 100 ejemplares