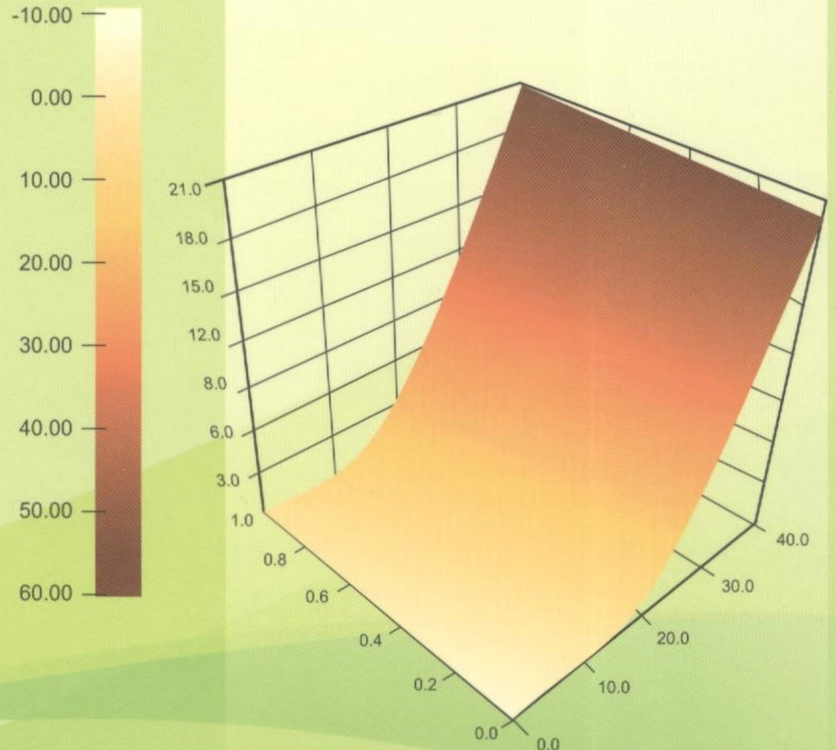
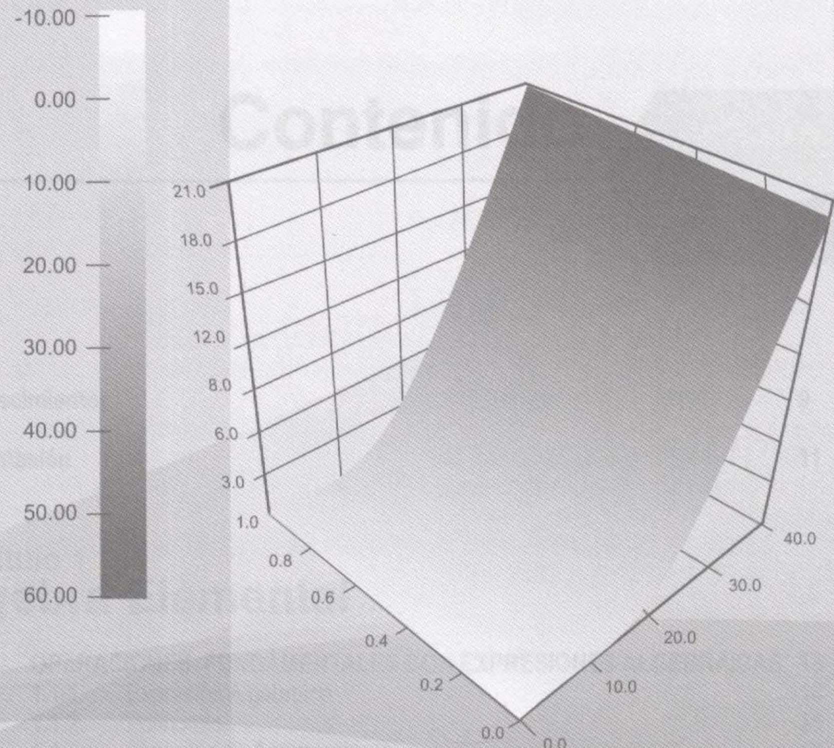


FUNCIONES BÁSICAS CON APLICACIONES EN ECONOMÍA, NEGOCIOS Y MERCADEO

ISBN 978-958-98048-3-4

FUNDACION UNIVERSITARIA DEL AREA ANDINA
SECCIONAL PEREIRA

LUZ MARÍA ROJAS DUQUE
JOSÉ GERARDO CARDONA TORO



FUNCIONES BÁSICAS CON APLICACIONES EN ECONOMÍA, NEGOCIOS Y MERCADEO

ISBN 978-958-98048-3-4

LUZ MARÍA ROJAS DUQUE
Docente Fundación Universitaria del Área Andina Pereira
Docente Universidad Tecnológica de Pereira

JOSÉ GERARDO CARDONA TORO
Docente Universidad Tecnológica de Pereira

FUNCIONES BÁSICAS CON APLICACIONES
EN ECONOMÍA NEGOCIOS Y MERCADEO

Autores
Luz María Rojas Duque
José Gerardo Cardona Toro

ISBN: 978-958-98048-3-4

Editor
Fundación Universitaria del Área Andina
Calle 24 No. 8-55 Pereira

Diseño, diagramación e impresión
Postergraph S.A.
Cra. 9 No. 7-03 Bod 1 La Badea - Dosquebradas

Contenido

Capítulo 2
Funciones

Agradecimientos

Los autores agradecen a los Doctores: Carlos Pátricio Eastman Vélez Rector, Uriel Giraldo Gallón Vicerrector Académico y Carlos Ernesto Meyer Faber vice-rector Administrativo, por su apoyo y por brindar el espacio para que la academia progrese.

Presentación

El Departamento de Ciencias Básicas de La Fundación Universitaria del Área Andina y el grupo de investigación GIEE han diseñado una política para que sus docentes escriban y publiquen una serie de textos que sirvan de guía para las clases de cada una de las asignaturas que el departamento brinda a las diferentes facultades.

En la actualidad los estudiantes que llegan a las universidades colombianas al primer semestre tienen grandes dificultades para comprender e interpretar textos no saben incluso consultar en biblioteca.Por ello se hizo necesario el que los docentes adscritos a este departamento escriban textos con buen fundamento pedagógico y didáctica para así ayudar a los estudiantes en sus dificultades, y con las política de créditos académicos el estudiante debe trabajar en su tiempo libre, lo que hace del texto una ayuda y guía para estar siempre ocupado.

En cada capítulo tiene un mapa conceptual el cual orienta al estudiante para donde van los conceptos dados en él.

Los talleres propuestos tienen buena cantidad de ejercicios y planeados para trabajar dentro y fuera de clase. Los talleres de aula de clase deben ser resueltos en ella y con la supervisión del docente.

Probando nuestras competencias. Recordemos que una competencia es una actuación con idoneidad y con ética. Es de decir como es una actuación se apropia del saber conocer mediante procedimientos y técnicas (saber hacer) reflejando actitudes y valores (el saber ser). Con este espacio se busca que el estudiante se prepare con calidad para enfrentar las pruebas del Ministerio de Educación de Colombia y PISA.

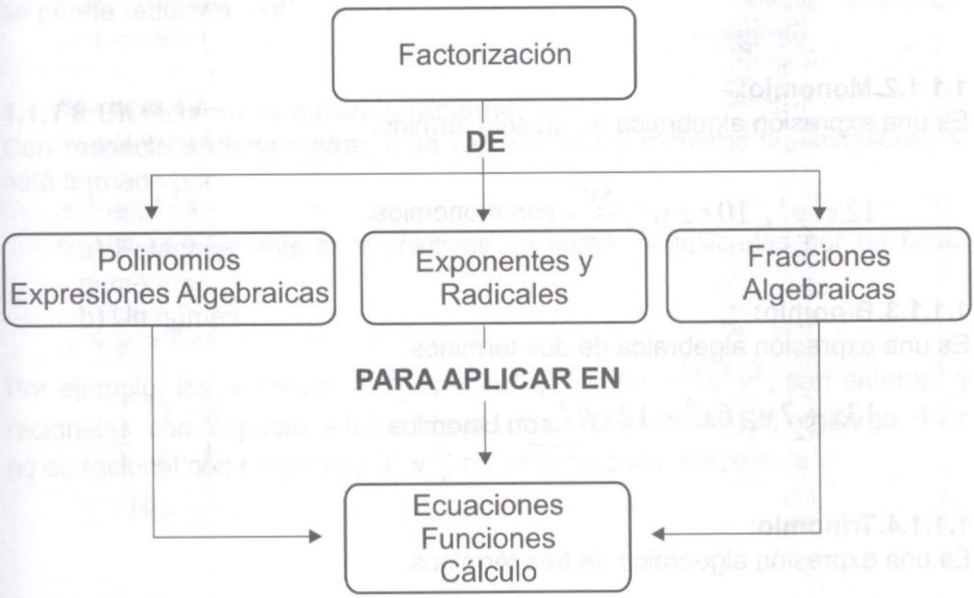
En el capitulo 1 hacemos un trabajo grande sobre algebra básica con todo lo que sabemos les hace falta a nuestros estudiantes “primiparos”.

En el capitulo 2 abordamos el tema de ecuaciones y sus aplicaciones y finalmente en el capítulo 3 el tema más importante que son las funciones y sus aplicaciones el cual será de vital importancia en el estudio del cálculo. Este material puede ser adoptado como guía en el primer semestre de carreras como administración de negocios, mercadeo, economía y administración de empresas.

Agradecemos a quienes nos corrijan y critique pues de ellos sacaremos cosas buenas, por ello les pedimos nos escriban a: gerardo7@utp.edu.co

Algebra Elemental

Capítulo 1



1.1. OPERACIONES FUNDAMENTALES CON EXPRESIONES ALGEBRAICAS

1.1.1. Expresión Algebraica

Es una combinación de números y de letras que representan números cualesquiera.

$$5x^2 - 12xy + 32x^3,\ \ 7a^2r^6,\ \ 4b^5z^4,\ \frac{3ab + 10w}{8r^3 - c^2}$$

son ejemplos de expresiones algebraicas.

1.1.1.1. Término:
Es una expresión que solo contiene productos y cocientes de números y de letras.

$15x^2y^3$, $\dfrac{17x}{3y^5}$, $-4r^3$, son términos de una expresión algebraica.

Sin embargo, $9x^2+13xy$ es una expresión algebraica que consta de dos términos.

1.1.1.2. Monomio:
Es una expresión algebraica de un solo término.

$12x^5y^4,\ 10\,r\,z\,w^3, \dfrac{3y^2}{x}$ son monomios.

1.1.1.3. Binomio:
Es una expresión algebraica de dos términos.

$13x+7y,\ 6x^4-12xyr^3$ son binomios.

1.1.1.4. Trinomio:
Es una expresión algebraica de tres términos.

$15x^2-3x+15,\ 3y-4x+6z,\ y^3+\dfrac{8x\,y}{w}-3x^2w^8$ son trinomios.

1.1.1.5. Multinomio:
Es una expresión algebraica de más de un término.

$8x+16y,\ \ 6w^3+7w^2y-8w\,y+15,\ 10r+\dfrac{3r^4}{u}+\dfrac{4r^4}{17}$
son multinomios.

1.1.1.6. Coeficiente:
Cualquier factor de un término se llama **coeficiente** del resto de todo el término.

$12x^2t^3$, *12* es el coeficiente de $x^2\,t^3$.

1.1.1.7. Términos semejantes:
Son aquellos que solo se diferencian en su coeficiente numérico.

$13xy$ y $-7xy$ son términos semejantes; $15w^2y^5$ y $-\frac{1}{4}w^2y^5$ son términos semejantes; pero $-5x^3y^2$ y $-4x^3y^4$ no son términos semejantes.

Podemos reducir términos semejantes a uno solo: $-3xy^2+4xy^2+2xy^2$ este se puede reducir a $3xy^2$.

1.1.1.8 Un término es entero y racional:
Con respecto a ciertas letras (que representan a números cualesquiera), si está formado por:

a) Potencias enteras y positivas de letras multiplicadas por un factor numérico.
b) Un número.

Por ejemplo, los términos $3x^2y^3, -2x^4, 7, -3x; \sqrt{5}x^3y^7$, son enteros y racionales con respecto a las letras que figuran en ellos. Sin embargo, $4\sqrt{x}$ no es racional con respecto a x y $\frac{5}{x}$ no es entero con respecto a x.

1.1.2. Polinomio

Es un monomio, o un multinomio, en el que cada término es entero y racional con respecto a las letras.

Por ejemplo: $5x^3y^2-5x^2y+7$, $2x^3+3x^4+5x^5$, $3x^2y+z^2+3x^2$, son polinomios. Sin embargo $4x^3-\frac{5}{x}, 3\sqrt{z}+5$ no son polinomios.

1.1.2.1. Grado de un monomio:
Es la suma de todos los exponentes de la parte literal del término. Por ejemplo, el grado de $3x^4y^5z$ es $4+5+1=10$. El grado de una constante como por ejemplo, 5, 0, $\sqrt{3}$, π es cero.

1.1.2.2. Grado de un polinomio
Es el correspondiente al término de mayor grado cuyo coeficiente sea distinto de cero.

Los grados de los términos del polinomio $3x^3y^2+4xz^5+2x^3y$ son 5,6,4, respectivamente; por consiguiente, el grado del polinomio es 6.

1.1.3. Símbolos de Agrupación

Son los paréntesis ( ), los corchetes [ ] o las llaves { }; se emplean para indicar que los términos encerrados en ellos se consideran como una sola cantidad.

Por ejemplo, la suma de las dos expresiones algebraicas, $4x^2-4x-y$ y $4x-3y$, se pueden representar por $(4x^2-4x-y)+(4x-3y)$, su diferencia por $(4x^2-4x-y)-(4x-3y)$, y su producto $(4x^2-4x-y)(4x-3y)$.

Algunas veces se emplea como símbolo de agrupamiento una barra encima de los términos a asociar. Por ejemplo, $\overline{5x-2z}$ es lo mismo que escribir $(5x-2z)$.

1.1.3.1. Supresión de los símbolos de agrupación:

Está regida por las normas siguientes:

a) Si un signo **+ (más)** precede al símbolo de agrupamiento, dicho símbolo se puede suprimir sin modificar los términos que contiene. Por ejemplo:

$$(2x+5y)+(6xy-5x^5)=2x+5y+6xy+5x^2$$

b) Si un signo **– (Menos)** precede al símbolo de agrupamiento, dichos símbolo se puede suprimir cambiando el signo de cada uno de los términos que contiene.Por ejemplo:

$$(3xy-4x^2)-(5xy^2+2x)=3xy-4x^2-5xy^2-2x$$

c) Si en una expresión figura más de un símbolo de agrupamiento, para suprimirlos se comienza por los interiores. Por ejemplo:

$$2x-\{7x^4-(2x^2+3y)\}=2x-\{7x^4-2x^2-3y\}=2x-7x^4+2x^2+3y$$

TALLER EN EL AULA DE CLASE No. 1

1. Hallar el valor de las expresiones algebraicas siguientes siendo:

$$x=2,\ y=-2,\ z=5,\ a=1,\ b=3,\ c=\frac{1}{2}$$

a) $3x^2-4yz$
b) $5a^2-4ab+6c$

c) $\dfrac{5xy+2z}{2a^3-c^3}$

d) $\dfrac{6x^2y(z-1)}{a+b-4c}$

2. Clasificar las expresiones algebraicas siguientes según las categorías: término o monomio, binomio trinomio multinomio, polinomio.

a) x^3+3y^3z
b) $4m^2+3m-5\sqrt{z}$

c) $6x^4+\dfrac{4}{z}$

d) $\dfrac{4x^2yz}{t}$

e) $b^4+a^4+b^3-2abc$

3. Hallar el grado de los siguientes polinomios:

a) $3x^3y+6xyz^5$
b) x^3+5x^4+2
c) $yz^4+3xy^2z^2$
d) z^5+4^3

4. Suprimir los símbolos de agrupación en cada una de las expresiones siguientes y simplificar los resultados reduciendo los términos semejantes:

a) $5x^2+(y^3-4z)-(3x-4y^3+6z)$
b) $4(8xy+6z)+6(2x-4xy)-8(2z-4xy)$
c) $2x-6-4\{4-6(2x-2y)\}$
d) $8x^2-\{6x^2-4[2y-6(2x^2-2y)]+8\}$

1.2. OPERACIONES CON EXPRESIONES ALGEBRAICAS

1.2.1. Suma de Expresiones Algebraicas

Se realiza agrupando los términos semejantes. Para llevar a cabo la suma se puede disponer las expresiones en filas, con los términos semejantes en la misma columna, y, a continuación, se suman los términos de cada columna.

Ejemplo 1
Sumar: $8x+4x^3-5xy,\ 6x-2x^3+9xy,\ y\ 3xy-5x-2y^2$

Solución:

$$\begin{array}{lll} 8x & 6x^3 & -5xy \\ 6x & -2x^3 & 9xy \\ -5x & -2x^3 & 3xy \\ \hline 9x & 2x^3 & 7xy \end{array}$$

Luego el resultado es: $9x+2x^3+7xy$

1.2.2. Resta de Expresiones Algebraicas

Se realiza efectuando la suma de la expresión minuendo con la opuesta del sustraendo, la cual se obtiene cambiando el signo de todos los términos.

Ejemplo 2
Restar $5x^2-4xw+10w^2$ de $7x^2-5xw-8w^2$

Solución:

$$\begin{array}{r} 7x^2-5xw-8w^2 \\ -5x^2-4xw-10w^2 \\ \hline 2x^2-xw-18w^2 \end{array}$$

1.2.3. Multiplicación de Expresiones Algebraicas

Para multiplicar expresiones, se efectúa multiplicando todos y cada uno de los términos de uno de ellos por todos y cada uno de los términos del otro, sumando luego los productos obtenidos. Es recomendable ordenar las potencias de las expresiones algebraicas de mayor a menor. (o viceversa)

Ejemplo 3
Multiplicar: $-5x+10+2x^2$ por $4-x$

Solución:
Ordenamos de mayor a menor las potencias de *x*.

$$\begin{array}{r} 2x^2-5x+10 \\ -x+4 \\ \hline -2x^3+10x^2-10x \\ 8x^2-20x+40 \\ \hline -2x^3+18x^2-30x+40 \end{array}$$

1.2.4. División de Expresiones Algebraicas

Utilizaremos solo la división de polinomios.

Se deben seguir los siguientes pasos:

- ordenamos los términos de ambos polinomios según las potencias crecientes(o decrecientes) de una de las letras comunes a los dos polinomios.
- Dividimos el primer término del dividendo por el primero del divisor, con lo que resulta el primer termino del cociente.

- Multiplicamos el primer término del cociente por el divisor y se resta del dividendo, para obtener un nuevo dividendo.
- Con el dividendo de 3), repetimos las operaciones 2) y 3) hasta que se obtengamos un resto igual a cero o de grado menor que el dividendo.
- El resultado que obtenemos se debe escribir así:

$$\frac{\text{Dividendo}}{\text{Divisor}} = \text{Cociente} + \frac{\text{Residuo}}{\text{Divisor}}$$

Ejemplo 4
Dividir: $2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$ entre $x^2 - x - 2$

Solución:
Lo primero que debemos hacer es organizar (ordenar) los polinomios con respecto a una misma literal (en forma decreciente de las potencias), y se dispone la operación de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ll}
Dividendo\, 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 & x^2 - x - 2\, Divisor \\
\qquad -2x^3 + 2x^2 + 4x & 2x - 1\, Cociente \\
\qquad\quad -x^2 + x + 2 & \\
\qquad\quad x^2 - x - 2 & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

Luego $\dfrac{2x^3 - 3x^2 - 3x + 2}{x^2 - x - 2} = 2x - 1 + 0$

Ejemplo 5
Dividir $2x^3 - 8ax^2 + 4a^2x - 10a^3$ entre $x - a$

Solución:

$$\begin{array}{l|l}
2x^3 - 8ax^2 + 4a^2x - 10a^3 & x - a \\
\cline{2-2}
-2x^3 + 2ax^2 & 2x^2 - 6ax - 2a^2 \\
\hline
\quad -6ax^2 + 4a^2x - 10a^3 & \\
\quad +6ax^2 - 6a^2x & \\
\hline
\qquad -2a^2x - 10a^3 & \\
\qquad +2a^2x - 2a^3 & \\
\qquad\quad -12a^3 &
\end{array}$$

Prueba de la división
Puede hacerse la prueba de la división multiplicando el cociente por el divisor, y añadiendo al producto el residuo, si lo hay; si el resultado es igual al dividendo, la operación está bien hecha.

TALLER EN EL AULA DE CLASE No. 2

1. Determinar el grado de los polinomios siguientes:

a) $3x^5 + 10x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x - 12$
b) $\sqrt{2}xyz + 13$
c) $w^3 + 3w^2 - 12w + 17$

2. Efectuar las operaciones indicadas:

a) $(5x^2w^4)(-3x^3w)$
b) $(r^3t + 2r^2t^2 - 4t)(3r^2t^3)$
c) $3x^2 + 2xy - 5 + 4x^2 - 5xy + 12$
d) $(-3x + 2y - 6) - (4x + 3y - 7)$

3. Efectuar las divisiones, y escribir el resultado en la forma:

$$\frac{\text{Dividendo}}{\text{Divisor}} = \text{Cociente} + \frac{\text{Resto}}{\text{Divisor}}$$

a) $3y^3 + 5y^2 - 2y + 4 \div (2y + 4)$
b) $w^4 + 3w^3 - 2w^2 - 10w + 15 \div (w^2 - 2w + 3)$
c) $\dfrac{t^4 + tr^3 + t^3r + 2t^2r^2 + r^4}{tr + t^2 + r^2}$
d) $\dfrac{1 - s^2 + s^4}{1 - s}$
e) $10y^2 + 1 - 5y - 10y^3 + 5y^4 - y^5 \div (y^2 - 2y + 1)$

1.3. DESCOMPOSICIÓN FACTORIAL

Los factores de una expresión algebraica son dos o más expresiones algebraicas que al multiplicarlas entre si originan la primera.

Si tenemos la expresión: $x^2+2x-15$ se puede escribir como el producto de los factores $(x-3)(x+5)$.
También, $3x^2+5xy-2y^2=(3x-y)(x+2y)$

En general: Descomponer una expresión algebraica en factores, es hallar dos o más factores cuyo producto es igual a la expresión propuesta.

1.4. DESCOMPOSICIÓN EN FACTORES

La descomposición en factores, se aplica generalmente, a polinomios de coeficientes enteros. Por ello se necesita que los factores sean también polinomios de coeficientes enteros. Mientras no se indique lo contrario, supondremos estas condiciones.

Si tenemos por ejemplo: *(w-2)* no lo consideramos descompuesto en los factores $\left(w+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{w}-\sqrt{2}\right)$ púes estos no son polinomios. Igualmente, $\left(2x^2-5y^2\right)$ no lo consideramos descompuesto en los factores $\left(\sqrt{2}x-\sqrt{5}y\right)\left(\sqrt{2}x+\sqrt{5}y\right)$ no son polinomios de coeficientes enteros, asimismo, $7x+15z$ se puede expresar como $7\left(x+\frac{15}{7}z\right)$, no es un polinomio de coeficientes enteros.

1.4.1. Polinomio Primo

Un polinomio de coeficientes enteros es **primo** cuando no se puede descomponer en factores. Por ejemplo:

$x^2+2x-15=(x-3)(x+5)$ está expresado como producto de los factores primos $x-3$ y $x+5$.

Un polinomio se puede descomponer todo en factores cuando todos ellos se pueden expresar como producto de factores primos.

Algunas veces es importante cambiar los signos y la posición de los factores, así:

$(x-6)(x-8)=(6-x)(8-x)$.

Un polinomio es primo cuando no admite más factores(o divisores) que él mismo, con signo más o menos, y la unidad, ± 1.

Es importante en la descomposición de factores los siguientes productos:

1. $x(y+z)=xy+xz$
2. $(x+y)(x-y)=x^2-y^2$
3. $(x+y)(x+y)=(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$
4. $(x-y)(x-y)=(x-y)^2=x^2-xy+y^2$
5. $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$
6. $(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$
7. $(a+b)(c+d)=ac+bc+ad+bd$
8. $(x+y)(x+y)(x+y)=(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$
9. $(x-y)(x-y)(x-y)=(x-y)^3=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$
10. $(x-y)(x^2+xy+y^2)=x^3-y^3$
11. $(x+y)(x^2-xy+y^2)=x^3+y^3$
12. $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz$
13. $(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\ldots+xy^{n-2}+y^{n-1})=x^n-y^n$
14. $(x+y)(x^{n-1}-x^{n-2}y+x^{n-3}y^2-\ldots-xy^{n-2}+y^{n-1})=x^n+y^n$

Con n un entero positivo impar$(1,3,5,7,\ldots)$.Solo para 14.

1.4.2. Factor Común (monomio) de la forma $xy+xw=x(y+w)$

Aplicamos la ley distributiva de la multiplicación:

a) $8x^2y-4x^3=4x^2(2y-x)$
b) $5m^3n-10mn^2+15m^2n=5mn(m^2-2n+3m)$

El procedimiento consiste en sacar la literal menor y el número menor (si es posible) que se encuentre en toda la expresión y las demás expresiones se dividen entre este factor común, los resultados de las divisiones son los que aparecen en el paréntesis.

Ejemplo: si tomamos el caso b) el factor común es 5mn (pues es el término menor)y dividimos cada expresión entre el para obtener:

$$\frac{5m^3n}{5mn}=m^2;\quad \frac{-10mn^2}{5mn}=-2n;\quad \frac{15m^2n}{5mn}=3m$$

Por tanto el factor común *5mn* queda multiplicando los cocientes de cada división dentro de un paréntesis: $5m^3n-10mn^2+15m^2n=5mn(m^2-2n+3m)$.

1.4.3. Diferencia de Cuadrados

Por multiplicación se tiene: $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$ o inversamente se puede escribir: $(x-y)(x+y)=x^2-y^2=(x-y)(x+y)$.

La diferencia de los cuadrados de dos expresiones algebraicas es igual al producto de la suma de dichas expresiones por su diferencia.

$$9m^2-16n^2=(3m)^2-(4n)^2=(3m-4n)(3m+4n)$$

$$(m+n)^2-s^2=[(m+n)-s][(m+n)+s]=(m+n-s)(m+n+s)$$

$$(7x+3)^2-(5x-4)^2=[(7x+3)-(5x-4)][(7x+3)+(5x-4)]$$

$$=(7x+3-5x+4)(7x+3+5x-4)=(2x+7)(12x-1).$$

1.4.4. Trinomio Cuadrado Perfecto

Por multiplicación tenemos: $(x+y)(x+y)=(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$ o inversamente:

$$x^2+2xy+y^2=(x+y)^2$$

Un trinomio es cuadrado perfecto si dos términos son cuadrados perfectos y el tercero es igual al doble de la raíz cuadrada del producto de aquéllos.

Para factorizar un trinomio cuadrado perfecto debemos sacar la raíz cuadrada a los términos primero y tercero. Luego a estas raíces las multiplicamos por dos, si este producto es exactamente igual al término central se dice que es un trinomio cuadrado perfecto y lo que hacemos es dentro de un paréntesis escribir la raíz del primer término y el tercero separados por el signo del término central y elevar este paréntesis al cuadrado.

Factorizar: a^2+6a+9

$\sqrt{a^2}=a$ $\qquad$ $\sqrt{9}=3$

$$2(a\cdot 3)=6a$$

Podemos observar que el doble producto de las raíces es igual al término central, por tanto es un trinomio cuadrado perfecto. Finalmente lo factorizamos, así:

$$a^2+6a+9=(a+3)^2$$

Factorizar: $16t^2-16tw+4w^2=(4t-2w)^2$ ¿Por qué?

1.4.5. Suma de Cubos

Por multiplicación tenemos: $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$ lo inverso también se cumple: $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

La suma de los cubos de dos términos algebraicos puede descomponerse en el producto de los factores, uno de los cuales es la suma de dichos términos, y el otro es la suma de sus cuadrados disminuida del producto de los términos.

Factorizar:

$$8m^3+27n^3=(2m)^3+(3n)^3=(2m+3n)(4m^2-6mn+9n^2)$$

$$8a^3+64b^3=(2a+4b)(4a^2-8ab+16b^2)$$

1.4.6. Diferencia de Cubos

Por multiplicación tenemos: $(x-y)(x^2+xy+y^2)=x^3+y^3$ lo inverso también se cumple: $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$

La diferencia de los cubos de dos términos algebraicos puede descomponerse en el producto de los factores, uno de los cuales es la diferencia de dichos términos, y el otro es la suma de sus cuadrados aumentada del producto de los términos.

Factorizar:

$$8m^3-27n^3=(2m)^3-(3n)^3=(2m-3n)(4m^2+6mn+9n^2)$$

$$8a^3+64b^3=(2a-4b)(4a^2+8ab+16b^2)$$

1.4.7. Trinomio de la Forma x^2+bx+c

Teniendo presente que el producto de dos binomios, tales como $(x+m)(x+n)$ es:
$(x+m)(x+n)=x^2+(m+n)x+mn$, si se reemplaza $m+n$ por b y mn por c, se puede escribir: $x^2+bx+c=(x+b)(x+c)$.

Un trinomio de la forma x^2+bx+c, se descompone en el producto de dos binomios cuyo primer término es x, y los segundos términos son tales que dan por suma el coeficiente de *x* y por producto el término independiente de *x*.

Factorizar: $m^2+7m+12$
Buscamos dos números cuyo producto nos de 12 y la suma sea 7.

Si se nos hace difícil encontrar estos números debemos descomponer en factores primos a 12 y combinamos estos factores hasta encontrar lo solicitado. (es decir *a.c = 12 y a + c = 7).*

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

Combinamos hasta obtener los números: $2\cdot2\cdot3=12$
$4\cdot3=12 \quad \text{y} \quad 4+3=7$.

Por tanto: $m^2+7m+12=(m+4)(m+3)$.
Factorizar: $x^2+5x-24=(x+8)(x-3)$

1.4.8. Trinomio de la Forma ax^2+bx+c.

Los trinomios de la forma ax^2+bx+c, provienen de la multiplicación de dos binomios, como se ve en los ejemplos que siguen:

$$\begin{array}{l} 3x+5 \\ \underline{2x+2} \\ 6x^2+10x \\ \underline{\qquad +6x+10} \\ 6x^2+16x+10 \end{array}$$

Examinando este producto, podemos ver:

- El primer término del trinomio es igual al producto de los primeros términos de cada factor.
- El segundo término es igual a la suma algebraica de los productos del primer término de cada binomio por el segundo término del otro.
- El tercer término es igual al producto de los segundos términos de los dos binomios.

Ejemplo 6
Factorizar: $6x^2+7x-20$

Solución:
$$6x^2+7x-20=\frac{(6x+15)(6x-8)}{6}=(2x+5)(3x-4)$$

En general para factorizar un trinomio de la forma ax^2+bx+c multiplicamos el término independiente por *a* y dividimos entre este mismo número *a*. Es decir:

$$ax^2+bx+c = \frac{ax^2+(a+c)x+ac}{a}=\frac{(ax+\quad)(ax+\quad)}{a}$$ buscamos dos números que multiplicados nos de ***a c*** y sumados ***a + c.*** Así como en el ejemplo.

Factorizar: $8x^2+14x+3$

Solución: buscamos dos números que multiplicados nos de (8)(3) = 24 y sumados 14.

$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

Las combinaciones que dan 24 son: (8,3), (12,2), (6,4) pero la que necesitamos es (12,2), pues: 12(2) = 24 y 12+2 = 14.

Por tanto:

$$\frac{(8x+12)(8x+2)}{8}=\frac{(\cancel{8x}+\cancel{12})(8x+2)}{8=\cancel{4}\cdot 2}=\frac{(2x+3)(\cancel{8x}+\cancel{2})}{\cancel{2}}=(2x+3)(4x+1)$$

Factorizar:
$$12x^2+13xy-4y^2=\frac{(12x+16y)(12x-3y)}{12=4\cdot 3}=(3x+4y)(4x-y)$$ ¿Por qué?

TALLER EN EL AULA DE CLASE No. 3

1. Factorizar hasta donde sea posible.

a) $9x^2+42x+49$ b) $x^2-10x+25$
c) x^4+22x^2+121 d) $64m^2-48m+9$
e) $9m^2-49n^2$ f) $25x^2-121$
g) $\frac{1}{9}c^2-\frac{1}{100}$ h) $1{,}44x^4-0.01$

i) x^2+6x-7 j) $m^2+7m+12$
k) $20x^2+19x+3$ l) $6x^2+7x-20$
m) $30m^2+13m-10$ n) $21n^2+11n-2$
o) $6y^4+5y^2-6$ p) $4x^2+x-33$
q) $27m^3-n^3$ r) $8y^3+z^3$
s) $m^3n^6-216n^9$ t) $(x-2)^3+(x-3)^3$
u) $a^3-b^3+a^2-2ab+b^2$ x) $m^2+(1+n)m+n$
y) $\frac{y^3}{8}-1-\left(\frac{x^2w^3}{32}\right)+\frac{x^2}{4}$ z) $2^{3y}+2^{2y+1}+2^y$

1.5. MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO

Definición: El mínimo común múltiplo de dos expresiones algebraicas A y B es otra expresión algebraica M que cumple las siguientes propiedades:

- **A** y **B** dividen a **M**.
- Si **S** es una expresión algebraica tal que **A** y **B** dividen a **S**, entonces **M** divide a **S**.

El mínimo común múltiplo de dos expresiones algebraicas, es en un sentido más libre, la expresión mas simple que puede ser dividida por **A** y **B**; o la más simple que contiene a ambos, **A** y **B** como factores.

Si tenemos: $A=3m^2n$ y $B=4m^2n^2$ luego $M=12m^2n^2$ que corresponde al mínimo común múltiplo de **A** y **B.** Pues $3m^2n$ divide a M, cuyo cociente es *4n*, y $4m^2n^2$ divide a M, dando como cociente *3*.

El mínimo común múltiplo corresponde a expresiones comunes y no comunes con su mayor potencia.

Ejemplo 7
Hallar el mínimo común múltiplo de $A = x^2 + 2x - 3 \quad B = x^2 + 8x + 16$

Solución:
Factorizamos las expresiones A y B.
$A = x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1)$

$B = x^2 + 8x + 16 = (x+4)^2$ Luego el $\text{mcm} = (x+3)(x-1)(x+4)^2$

TALLER EN EL AULA DE CLASE No. 4

1. Hallar el mínimo común múltiplo de:

a) $A = (r-1)^2(r-4) \quad B = (r-1)(r-4)(r+3)$
b) $A = x^2 - 4x - 21 \quad B = x^2 + 11x + 24 \quad C = x^2 - 6x + 9$
c) $A = 2x^2 - 7x - 15 \quad B = 3x^2 - 14x - 5$

1.6. FRACCIONES ALGEBRAICAS

Definición: se llama **fracción o quebrado** el cociente indicado de dos expresiones algebraicas cualesquiera; por ejemplo la expresión $\dfrac{x}{y}$ es una expresión algebraica, y se lee x entre y. a la expresión x se le llama **numerador** y a la expresión y se le denomina **denominador.**

Igualdad: Dos fracciones $\dfrac{x}{y}$ y $\dfrac{w}{z}$ son iguales si y solo si $xz = yw$ por ejemplo
las fracciones: $\dfrac{3m-2}{4m+5}$ y $\dfrac{12m-8}{16m+20}$ son iguales, pues:

$(3m-2)(16m+20) = (12m-8)(4m+5)$

$48m^2 + 28m - 40 = 48m^2 + 28m - 40$

1.6.1. Simplificación de Fracciones

Existe un principio fundamental en las fracciones: si los términos de una fracción se multiplican o se dividen por una misma expresión algebraica, se obtiene así una fracción equivalente a la primera.

Ejemplo 8

Simplificar hasta donde sea posible: $\dfrac{2x^2-7x-4}{3x^2-7x-20}$

Solución:

Factorizamos las expresiones del numerador y denominador y cancelamos las similares.

$$\frac{(2x+1)\cancel{(x-4)}}{(3x+5)\cancel{(x-4)}}=\frac{2x+1}{3x+5}$$

Recordemos:

Solo podemos cancelar términos cuando estén como factores(es decir multiplicando o dividiendo) no podemos hacer lo siguiente:

$\dfrac{\cancel{3x+4}-5x+8}{\cancel{3x+4}}=-5x+8$ Lo cual es falso **(¡no lo haga!);** pero si tuviéramos:

$\dfrac{\cancel{(3x+4)}(5x+8)}{\cancel{3x+4}}=5x+8$ Correcto.

Ejemplo 9

Simplificar:

$$A=\frac{x^2+5x-24}{x^2+6x-16}\cdot\frac{4b^2x^2-25b^2}{(2x-5)(b^2x^2-b^2)}\cdot\frac{x+1}{2x+5}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{x}\right)\div\frac{(x-3)}{4x^2-4x}$$

Solución:

Debemos factorizar todas las expresiones y realizar la diferencia de fraccionarios del último término.

$$A=\frac{(x-3)(x+8)}{(x+8)(x-2)}\cdot\frac{b^2(4x-25)}{(2x-5)b^2(x^2-1)}\cdot\frac{x+1}{2x+5}\left(\frac{x-2}{2x}\right)\cdot\frac{4x(x-1)}{x-3}$$

$$A=\frac{(2x+5)(2x-5)}{(2x-5)(x-1)(x+1)}\cdot\frac{x+1}{2x+5}\cdot\frac{4x(x-1)}{2x}$$

$$A=2$$

Ejemplo 10

Simplificar hasta su mínima expresión:

$$A=\frac{5x^2-2xy}{2x^2-xy-y^2}+\frac{6xy}{4x^2-y^2}-\frac{2x-y}{x-y}$$

Solución:
Descomponemos en factores los denominadores; es decir:

$$2x^2-xy-y^2=\frac{(2x-2y)(2x+y)}{2}=(x-y)(2x+y)$$
$$4x^2-y^2=(2x-y)(2x+y)$$
$$(x-y)=x-y$$

El denominador común corresponde a los comunes y no comunes con su mayor potencia.

$$(x-y)(2x+y)(2x-y)$$
$$A=\frac{(5x^2-2xy)}{(x-y)(2x+y)}+\frac{6xy}{4x^2-y^2}-\frac{2x-y}{x-y}$$

El denominador común lo dividimos entre cada denominador de la fracción y el resultado (cociente) lo multiplicamos por el numerador de cada fracción:

$$A=\frac{(5x^2-2xy)(2x-y)+6xy(x-y)-(2x-y)(4x^2-y^2)}{(x-y)(2x+y)(2x-y)}$$
$$A=\frac{10x^3-5x^2y-4x^2y+2xy^2+6x^2y-6xy^2-(8x^3-2xy^2-4x^2y+y^3)}{(x-y)(2x+y)(2x-y)}$$
$$A=\frac{10x^3-8x^3-5x^2y-4x^2y+6x^2y+4x^2y+2xy^2-6xy^2+2xy^2+y^3}{(x-y)(2x+y)(2x-y)}$$

Simplificamos términos semejantes y obtenemos:

$$A=\frac{2x^3+x^2y-2xy^2-y^3}{(x-y)(2x+y)(2x-y)}$$
$$A=\frac{2x^3-2xy^2+x^2y-y^3}{(x-y)(2x+y)(2x-y)}=\frac{2x(x^2-y^2)+y(x^2-y^2)}{(x-y)(2x+y)(2x-y)}$$

$$A=\frac{(x^2-y^2)(2x+y)}{(x-y)(2x+y)(2x-y)}=\frac{(x-y)(x+y)(2x+y)}{(x-y)(2x+y)(2x-y)}$$

$$A=\frac{x+y}{2x-y}$$

Ejemplo 11

Simplificar hasta su mínima expresión:

$$\frac{a-1}{a+2-\dfrac{a^2+2}{a-\dfrac{a-2}{a+1}}}$$

Solución:

Iniciamos por la parte inferior: $a-\dfrac{a-2}{a+1}=\dfrac{(a^2+a)-(a-2)}{a+1}$

Por tanto:

$$=\frac{a-1}{a+2-\dfrac{a^2+2}{a-\dfrac{a-2}{a+1}}}=\frac{a-1}{a+2-\dfrac{a^2+2}{\dfrac{a^2+a-a+2}{a+1}}}$$

$$=\frac{a-1}{a+2-\dfrac{(a^2+2)(a+1)}{a^2+2}}$$

$$=\frac{a-1}{a+2-a-1}=a-1$$

TALLER EN EL AULA DE CLASE No. 5

1. simplificar hasta su mínima expresión:

a) $\left[\dfrac{m^3-n^3}{(m-n)^3}\cdot\dfrac{m-n}{m^2+mn+n^2}\right]\div\dfrac{m^3+n^3}{m-n}$

b) $\left\{\dfrac{m^4-n^4}{m^2+n^2}\left[\dfrac{1}{m^2+n^2}-\dfrac{1}{m^2-n^2}\right]\right\}\div\left(\dfrac{1}{m^2}+\dfrac{1}{n^2}\right)$

c) $$\frac{\dfrac{x-1}{x+1}-\dfrac{x+1}{x-1}}{\dfrac{x-1}{x+1}+\dfrac{x+1}{x-1}}$$

d) $$\frac{(x^3-y^3)(x^2+x-2)}{(x^2-xy-x+y)}\cdot\frac{(x^2-16)(3x-2)}{(x-4)(4x^3+4x^2y+4xy^2)(x+2)}\div\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{x}\right)$$

e) $$\left[\frac{\left(1-\dfrac{x^2-2x-2}{x^2-2x+1}\right)\cdot x^2}{\dfrac{x+1}{x-1}+\dfrac{1}{(x-1)^2}}\right]\div 3$$

1.7. EXPONENTES

Potencia de un exponente positivo.
Sea n un entero positivo, a^n representa el producto de n factores iguales a a.Así, por ejemplo: $a^5 = a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a$.

$$\textbf{\textit{base}} \longleftarrow a^{n \longrightarrow \textbf{\textit{exponente}}}$$

n es la enésima potencia de **a**.

Propiedades:

1. $a^0 = 1$
2. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
3. $\left(a^n\right)^m = a^{n\,m}$
4. $\dfrac{a^n}{b^m} = a^{n-m}\quad a \neq 0 \text{ y } n > m$
5. $(a\cdot b)^n = a^n b^n$
6. $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$
7. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n};\ \text{con } b \neq 0$

Ejemplo
A) Simplificar:
$(7x^4y^3w)(5x^3y^2)$

Solución:
$(7x^4y^3w)(5x^3y^2) = 35x^4x^3\,y^3\,y^2\,w = 35x^7\,y^5\,w$

B) simplificar:
$$\left(\frac{3a^4b^4z^2}{15b^2a^3z}\right)^5 = \left(\frac{1}{5}a^4a^{-3}b^4b^{-2}z^2z^{-1}\right)^5 = \left(\frac{1}{5}a^1b^2z\right)^5 = \frac{a^5\,b^{10}z^5}{5^5}$$

C) Simplificar
$$\left[\left(w^{a+1}x^{2-a}\right)\left(\frac{w^{a-1}}{w^{a+1}}\right)\left(w^{a+1}\right)^{a-1}\right]^{\frac{1}{a}}$$

Solución:
$$=\left[w^{a+1+2-a}\,w^{a-1-a-1}\,w^{(a+1)(a-1)}\right]^{\frac{1}{a}} = (w^{3-2+a^2-1})^{\frac{1}{a}} =$$
$$=(w^{3-3+a^2})^{\frac{1}{a}} = w^{\frac{a^2}{a}} = w^a$$

Ejemplo 12
Simplificar:
$$\frac{16^{n+1}+2^{2n+3}+8\sqrt{2}}{2\cdot 2^{4n}+4^n+\sqrt{2}}$$

Solución:
Llevamos la expresión a la menor base y aplicamos las propiedades de los exponentes.
$$=\frac{2^{4(n+1)}+2^{2n}2^3+2^3\sqrt{2}}{2\cdot 2^{4n}+2^{2n}+\sqrt{2}} = \frac{2^{4n+4}+2^{2n}2^3+2^3\sqrt{2}}{2\cdot 2^{4n}+2^{2n}+\sqrt{2}}$$

Observemos que el factor común en el numerador es 2^3

$$=\frac{2^3(2\cdot 2^{4n}+2^{2n}+\sqrt{2})}{2\cdot 2^{4n}+2^{2n}+\sqrt{2}}=2^3=8$$

TALLER EN EL AULA DE CLASE No. 6

1. Simplificar utilizando las propiedades de exponentes hasta donde sea posible, dar la respuesta como un exponente positivo.

a) $\left(\dfrac{20x^5y^{-4}w^3}{10x^6y^{-5}w^2}\right)^3$ b) $\dfrac{4m^5}{5n^4}\div\dfrac{8m^5}{15n^3}$

c) $\left(\dfrac{2^{-4}x^{-1}y^2}{4^{-1}x^{-2}y^{-1}}\right)^2$ d) $\dfrac{m^{-1}+n^{-1}}{n^{-1}-m^{-1}}$

e) $\dfrac{m^{-2}+3n^{-1}m^{-1}+2n^{-2}}{m^{-1}n^{-2}+n^{-2}m^{-1}}$ f) $\dfrac{2^{n+3}-2^n+7}{2^{n+1}-2^n+1}$

g) $\left[\left(\dfrac{x}{x^a}\right)^a\cdot\left(\dfrac{x^{2a}}{x^{a+1}}\right)\left(\dfrac{x^a}{x^{-1}}\right)^{a+1}\right]^{\frac{1}{a}}$

h) $\left(\dfrac{(a^x+a^{-x})^2-(a^x-a^{-x})^2}{(a^x+a^{-x})^2\sqrt{1-\left(\dfrac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}\right)^2}}\right)\div\dfrac{2a^x}{a^{2x}+1}$

1.8. RADICALES

Radical es una expresión de la forma $\sqrt[n]{a}$ que representa la raíz enésima principal de ***a***. ***n*** es un entero positivo y se denomina índice del radical, ***a*** se conoce como cantidad subradical.

$$\textit{índice} \longleftarrow \sqrt[n]{a} \longrightarrow \textit{cantidad subradical}$$

Los radicales $\sqrt{3x}$, $\sqrt[3]{6x^2+2y}$ y $\sqrt[5]{x-12}$ tienen índices **2, 3** y **5** respectivamente.

Propiedades.

1. $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$
2. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$
3. $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
4. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
5. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a} = a^{\frac{1}{mn}}$

Nota: (¡Cuidado!)

a) $\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$

b) $\sqrt{a^2+b^2} \neq a+b$

Aplicaciones de las propiedades

$$3.\ \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt{3} = 5^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{2}{6}} \cdot 3^{\frac{3}{6}} = \sqrt[6]{5^2 \cdot 3^3} = \sqrt[6]{25(27)} = \sqrt[6]{675}$$

Ejemplo 13
Simplificar hasta su mínima expresión:

$$\sqrt[n]{\frac{4^{7n} \cdot 80}{64^{2n+1} + 16^{3n+1}}}$$

Solución:
Para simplificar esta expresión debemos llevar a una misma base las cantidades que allí aparecen. Luego aplicamos las propiedades de los exponentes.

$$\sqrt[n]{\frac{4^{7n}\cdot 80}{4^{3(2n+1)}+4^{2(3n+1)}}}=\sqrt[n]{\frac{4^{7n}\cdot 80}{4^{6n+3}+4^{6n+2}}}=\sqrt[n]{\frac{3^{7n}\cdot 80}{4^{6n}\cdot 4^{3}+4^{6n}\cdot 4^{2}}}$$

$$=\sqrt[n]{\frac{4^{7n}\cdot 80}{4^{6n}(4^{3}+4^{2})}}=\sqrt[n]{\frac{4^{7n}\cdot 80}{4^{6n}\cdot 80}}=\sqrt[n]{\frac{4^{7n}}{3^{6n}}}$$

$$=\sqrt[n]{4^{7n-6n}}=\sqrt[n]{4^{n}}=4^{1}=4$$

1.8.1. Suma y Diferencia de Radicales

1.8.1.1. Radicales semejantes:

Dos o más radicales son semejantes cuando, reducidos a su forma más simple, tienen el mismo índice y la misma cantidad subradical.

Ejemplo 14

Cuales de los siguiente radicales son semejantes.

$\sqrt{32}$, $\sqrt{8}$

Solución:

Para saber si son semejantes debemos descomponer en factores las cantidades subradicales.

$$\sqrt{32}=\sqrt{8(4)}=\sqrt{2^{3}2^{2}}=\sqrt{2^{2}\cdot 2^{2}\cdot 2}=2\cdot 2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$$

$$\sqrt{8}=\sqrt{2^{3}}=\sqrt{2\cdot 2^{2}}=2\sqrt{2}$$

Por lo tanto tienen el mismo índice y la misma cantidad subradical son semejantes

1.8.1.2. Suma:

Para sumar algebraicamente dos o más radicales se reducen a su forma más simple y se combinan los términos que tienen radicales semejantes.

Ejemplo 15

Simplificar hasta su mínima expresión:

a) $\sqrt{50}+\sqrt{18}-\sqrt{72}=\sqrt{5^2\cdot 2}+\sqrt{3^2\cdot 2}-\sqrt{3^2\cdot 2^2\cdot 2}$

$$=5\sqrt{2}+3\sqrt{2}-6\sqrt{2}$$

$$=2\sqrt{2}$$

b) $2x\sqrt[3]{27m^3n}+3y\sqrt[3]{8m^3n}-6z\sqrt[3]{m^3n}=2x\cdot 3m\sqrt[3]{n}+3y\cdot 2m\sqrt[3]{n}-6zm\sqrt[3]{n}$

$$=\sqrt[3]{n}(6xm+6my-6mz)$$

c) $a\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}-b\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}+\dfrac{a^2-3b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$

Solución:
Aplicamos las propiedades de radicales y hallamos el común denominador, para así obtener expresiones semejantes y luego simplificar.

$$=\frac{a\sqrt{a+b}}{\sqrt{a-b}}-\frac{b\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}}+\frac{a^2-3b^2}{\sqrt{(a+b)(a-b)}}$$

$$=\frac{a\sqrt{a+b}\sqrt{a+b}-b\sqrt{a-b}\sqrt{a-b}+a^2-3b^2}{\sqrt{a-b}\sqrt{a+b}}$$

$$=\frac{a\sqrt{(a+b)^2}-b\sqrt{(a-b)^2}+a^2-3b^2}{\sqrt{a+b}\sqrt{a-b}}$$

$$=\frac{a(a+b)-b(a-b)+a^2-3b^2}{\sqrt{a+b}\sqrt{a-b}}=\frac{a^2+ab-ab+b^2+a^2-3b^2}{\sqrt{a+b}\sqrt{a-b}}$$

Ahora agrupamos términos semejantes y multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt{a^2-b^2}$.

$$=\frac{2a^2-2b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}=\frac{2(a^2-b^2)\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2-b^2}\sqrt{a^2-b^2}}=\frac{2(a^2-b^2)\sqrt{a^2-b^2}}{(a^2-b^2)}=2\sqrt{a^2-b^2}$$

1.8.1.3. Racionalización:

Una de las operaciones más importantes en el trabajo con radicales es la racionalización, pues tiene aplicaciones en diferentes áreas de las matemáticas y física.

Para la racionalización de denominadores es importante tener en cuenta lo siguiente:

- **El denominador es un monomio con raíz cuadrada.**
- **El denominador es un monomio con raíz enésima.**
- **El denominador es un binomio de la forma** $a\sqrt{x} \pm b\sqrt{y}$
- **El denominador es un binomio de la forma** $\sqrt[3]{x} \pm \sqrt[3]{y}$

Veamos caso por caso.

Ejemplo 16

<u>**Caso 1**</u>

a) Racionalizar el denominador de:

$$\frac{x}{\sqrt{a}}$$

Solución:

Queremos eliminar el radical del denominador. En primer lugar, recordemos que $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = \sqrt{a^2} = a$ Por tanto, si multiplicamos el numerador y denominador de la expresión inicial por $\sqrt{a}$ obtenemos:

$$\frac{x}{\sqrt{a}}\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{x\sqrt{a}}{\sqrt{a^2}} = \frac{x\sqrt{a}}{a}$$

b) Racionalizar el denominador de:

$$\frac{m^3 - mn + n^2}{\sqrt{m^3 + n^3}}$$

Solución:

$$=\frac{(m^3-mn+n^2)\sqrt{m^3+n^3}}{\sqrt{m^3+n^3}\cdot\sqrt{m^3+n^3}}=\frac{(m^3-mn+n^2)\sqrt{m^3+n^3}}{\sqrt{(m^3+n^3)^2}}=$$

$$=\frac{(m^3-mn+n^2)\sqrt{m^3+n^3}}{m^3+n^3}$$

$$=\frac{(m^3-mn+n^2)\sqrt{m^3+n^3}}{(m+n)(m^3-mn+n^2)}=\frac{\sqrt{m^3+n^3}}{m+n}$$

Caso 2. El denominador es un monomio con raíz enésima.
Observemos lo siguiente:

a) ¿Cuál es la raíz por la que debemos multiplicar a $\sqrt[3]{x^2}$ para eliminar la misma?

$$\sqrt[3]{x^2}\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{x^2x}=\sqrt[3]{x^3}=x$$

b) ¿Cuál es la raíz por la que debemos multiplicar a $\sqrt[5]{x}$ para eliminar la misma?

$$\sqrt[5]{x}\sqrt[5]{x^4}=\sqrt[5]{xx^4}=\sqrt[5]{x^5}=x$$

En general:
Para racionalizar un denominador con un monomio se multiplican el numerador y el denominador por una cantidad radical del mismo índice, que al multiplicarlo por éste nos devuelva el valor exacto.

Ejemplo

Racionalizar el denominador de: $\dfrac{3}{\sqrt[3]{9x}}$

Solución:

$$\frac{3}{\sqrt[3]{9x}}\cdot\frac{\sqrt[3]{3x^2}}{\sqrt[3]{3x^2}}=\frac{3\cdot\sqrt[3]{3x^2}}{\sqrt[3]{27x^3}}=\frac{3\cdot\sqrt[3]{3x^2}}{3x}=\frac{\sqrt[3]{3x^2}}{x}$$

Caso 3 El denominador es un binomio de la forma $a\sqrt{x}\pm b\sqrt{y}$
Observemos:

a) $(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2)$
b) $(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})$

Vemos que las expresiones corresponden a un producto de suma por diferencia, por tanto: (recordemos la diferencia de cuadrados).

a) $(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2)=(\sqrt{3})^2-2^2=3-4=-1$
b) $(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})=(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2=a-b$

Expresiones (o binomios) como las anteriores por ejemplo: $(\sqrt{3}+2)$ y $(\sqrt{3}-2)$ se denominan **expresiones conjugadas.**

En general:
$a\sqrt{x}+b\sqrt{y}$ y $a\sqrt{x}-b\sqrt{y}$ Se denominan expresiones conjugadas una de la otra, con $a,b,x,y \in Q$.

Veamos ahora como racionalizar el denominador de dichas expresiones.

Ejemplo 17
Racionalizar el denominador de:

a) $\dfrac{5}{\sqrt{5}-1}$

Solución:
$$\frac{5}{\sqrt{5}-1}\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1}=\frac{5(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5})^2-1^2}=\frac{5(\sqrt{5}+1)}{5-1}=\frac{5(\sqrt{5}+1)}{4}$$

b) $\dfrac{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}$

Solución:

$$=\frac{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}=\frac{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}\cdot\frac{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}\right)^2}{\left(\sqrt{x+y}\right)^2-\left(\sqrt{x-y}\right)^2}=\frac{\left(\sqrt{x+y}\right)^2-2\sqrt{(x+y)(x-y)}+\left(\sqrt{x-y}\right)^2}{x+y-(x-y)}$$

$$=\frac{x+y-2\sqrt{(x+y)(x-y)}+x-y}{x+y-x+y}=\frac{2x-2\sqrt{(x+y)(x-y)}}{2y}$$

$$=\frac{2\left(x-\sqrt{(x+y)(x-y)}\right)}{2y}=\frac{x-\sqrt{(x+y)(x-y)}}{y}$$

$$=\frac{x-\sqrt{x^2-y^2}}{y}$$

c) $\dfrac{m+n+2\sqrt{mn}}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}$

Solución:

$$=\frac{m+n+2\sqrt{mn}}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}\cdot\frac{\sqrt{m}-\sqrt{n}}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}=\frac{\left(m+n+2\sqrt{mn}\right)\left(\sqrt{m}-\sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{m}\right)^2-\left(\sqrt{n}\right)^2}$$

$$=\frac{\left(m+n+2\sqrt{mn}\right)\left(\sqrt{m}-\sqrt{n}\right)}{m-n}$$

Observemos que la expresión

$\left(m+n+2\sqrt{mn}\right)=m+2\sqrt{mn}+n=\left(\sqrt{m}+\sqrt{n}\right)^2$ pues:

$$\left(\sqrt{m}+\sqrt{n}\right)^2=\left(\sqrt{m}\right)^2+2\sqrt{m}\sqrt{n}+\left(\sqrt{n}\right)^2=m+2\sqrt{mn}+n$$

Por tanto podemos escribir la expresión:

$\left(a+b+2\sqrt{mn}\right)=\left(\sqrt{m}+\sqrt{n}\right)^2$

$$=\frac{\left(\sqrt{m}+\sqrt{n}\right)^2\left(\sqrt{m}-\sqrt{n}\right)}{m-n}=\frac{\left(\sqrt{m}+\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{m}+\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{m}-\sqrt{n}\right)}{m-n}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{m}+\sqrt{n}\right)(m-n)}{m-n}$$

$$=\sqrt{m}+\sqrt{n}$$

Caso 4. El denominador es un binomio de la forma $\sqrt[3]{x} \pm \sqrt[3]{y}$
Para racionalizar denominadores de este tipo debemos recordar, las siguientes expresiones:

1. $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$
2. $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$

Podemos comprobar que:

$$x + y = \left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}\right)\left(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{y^2}\right)$$
$$x - y = \left(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}\right)\left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{y^2}\right)$$

Podemos decir que la racionalización de un denominador que tiene expresiones como $\sqrt[3]{x} \pm \sqrt[3]{y}$ se fundamenta en la factorización de una suma o resta de cubos.

Ejemplo 18
Racionalizar el denominador de:

$$\frac{7xy(x+y)}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}}$$

Solución:

$$\frac{7xy(x+y)}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}} \cdot \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}} = \frac{7xy(x+y)\left(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}\right)}{(x+y)}$$
$$= 7xy\left(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}\right)$$

TALLER EN EL AULA DE CLASE No. 7

1. Realizar las operaciones indicadas y simplificar hasta donde sea posible.

a) $3\sqrt{45} - \sqrt{20} + 8\sqrt{5}$
b) $3\sqrt{14}\cdot\sqrt{21}$
c) $5\sqrt[4]{162} - 8\sqrt[4]{32} + 2\sqrt[4]{1250}$

d) $\dfrac{4}{x-y}\sqrt{\dfrac{2a}{x-y}} \div \sqrt{\dfrac{18a^3}{(x-y)^5}}$

e) $\sqrt[n]{\dfrac{5\cdot 4^{n+1}}{4^{n+2}+2^{2n+2}}}$ f) $\sqrt[n]{\left(\dfrac{x^n}{x}\right)^{n+1}\cdot (x^{-1})^{n-1}}$

2. Racionalizar el denominador de:

a) $\dfrac{4}{\sqrt{xy}}$ b) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{x^2}}$

c) $\dfrac{a+b}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}$ d) $\dfrac{2-\sqrt{3}}{7-4\sqrt{3}}$

e) $\dfrac{1}{x\sqrt[3]{y}-1}$

MISCELÁNEA No. 1

1. Factorizar hasta donde sea posible.

a) a^4-81 b) $a^3-a^2-ab-b^3-b^2$
c) $T_1^2R_1^2-N_1^2$ d) $a^{2x}+2a^{x+1}+a^2$

e) $x^2+xy-yz-z^2$ f) $27w^3-3wr^2$
g) $64+y^3$ h) $25w^2-64z^2$
i) $x^6-16x^2y^4$ j) $9x^2-24x+16$
k) $4r^2-12r+9$ l) x^2+6x+9
m) $4y^2+4y+1$ n) $21n^2+11n-2$
o) $20x^2-7x-40$ p) $30y^2+13y-10$
r) $x-6+15x^2$ s) $15t^4-11t-12$

t) $1-\dfrac{4}{9}x^8$ $u)\ w^3+8t^3y^3$

w) $4m^3-m-4m^2+1$ x) $9s^3-s$
y) y^4+5y^2+4 z) $r_0^2-5r_1^2+5r_0\,r_1$

2. Simplificar hasta su mínima expresión:

a) $\left(\dfrac{m^2-9}{m^2-m-12}\div\dfrac{m-3}{m^2+3m}\right)\times\dfrac{x^2m^2-16x^2}{2m^2+7m+3}\times\left(\dfrac{2}{x^2m}+\dfrac{1}{x^2m^2}\right)$

b) $\dfrac{\dfrac{m+1}{m-1}-\dfrac{m-1}{m+1}}{\dfrac{m-1}{m+1}+\dfrac{m+1}{m-1}}\times\dfrac{m^2+1}{2w^2-2z}\div\dfrac{2m}{w^2-z}$

c) $\dfrac{\dfrac{a+x}{1-ax}+\dfrac{a-x}{1+ax}}{1-\dfrac{a^2-x^2}{1-a^2x^2}}$

d) $\dfrac{1}{x^2-(a+b)x+ab}+\dfrac{1}{x^2-(a+c)x+ac}+\dfrac{1}{x^2-(b+c)x+bc}$

e) $\dfrac{a+b}{bc-ab-c^2+ac}+\dfrac{b+c}{ac-bc-a^2+ab}+\dfrac{c+a}{ab-ac-b^2+bc}$

f) $\dfrac{x-y+\dfrac{x^2+y^2}{x+y}}{x+y-\dfrac{x^2-2y^2}{x-y}}\times\dfrac{y+\dfrac{y^2}{x}}{x-y}\times\dfrac{1}{1+\dfrac{2x-y}{y}}$

3. Realizar las operaciones indicadas y simplificar(racionalizar el denominador, si es el caso).

a) $\frac{1}{7}\sqrt{147}-\frac{1}{5}\sqrt{700}+\frac{1}{10}\sqrt{28}+\frac{1}{3}\sqrt{2187}$

b) $\sqrt{80}+3\sqrt{405}-3\sqrt{500}-2\sqrt{252}$

c) $(m-n)\sqrt{\dfrac{m+n}{m-n}}-(m+n)\sqrt{\dfrac{m-n}{m+n}}+(2m-2n)\sqrt{\dfrac{1}{m-n}}$

d) $\sqrt{x^2y^{-1}-18xy^{-1}+81y^{-1}}+\sqrt{x-18+81x^{-1}}$

e) $\sqrt{2mn}+\sqrt[6]{8m^3n^3}+\sqrt{4m^2n^2}$

f) $\sqrt[6]{\dfrac{64a^2b^2}{4w^2}}-2\sqrt[9]{\dfrac{512a^3b^3}{8w^3}}+\sqrt[12]{\dfrac{a^4b^4}{16w^4}}$

g) $\sqrt{\dfrac{25a}{2b}}+\dfrac{4}{3}\sqrt{\dfrac{2b}{a}}-3\sqrt{\dfrac{a}{2b}}-\sqrt{\dfrac{2b}{9a}}$

h) $\dfrac{2a-b+\sqrt{ab}}{2\sqrt{a}-\sqrt{b}}$

i) $\left(\dfrac{5}{x-y}-\dfrac{10}{x+y}-\dfrac{2}{x^2-y^2}\right)\div\left(\dfrac{4}{x-y}-\dfrac{5}{x^2-y^2}\right)$

j) $\left(\dfrac{w^2-25}{3z^2r}\div\dfrac{w^2-2w-35}{6zr}\right)+\left(\dfrac{6}{w^2-49}\times\dfrac{5w-35}{6z^2}\right)$

k) $\left[\left(\dfrac{x^{b+d}}{x^{b-d}}\right)^b\left(x^{b+d}\right)^{b-d}\left(\dfrac{x^d}{x^b}\right)^d\right]^{1/b}$

l) $\left(\dfrac{a^{b+1}}{a^{b^{2-1}}}\right)^{\frac{1}{b+1}}\left(\dfrac{a}{2}\right)^b\div\dfrac{a^2}{\sqrt[4]{16^b}}$

4. Racionalizar el denominador de:

a) $\dfrac{1}{5x\sqrt[4]{25y^3}}$

b) $\dfrac{14}{5\sqrt{2}-4\sqrt{3}}$

c) $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$

d) $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{10}}$

e) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}}$ f) $\dfrac{x+2y}{\sqrt{x}+\sqrt{2y}}$

RECAPITULACIÓN DE CONCEPTOS

1. Encierre en un círculo la respuesta correcta.

a) V F La raíz cuadrada de un número siempre es positiva.
b) V F La raíz cúbica de un numero negativo es un número real.
c) V F Si $x=\sqrt[n]{a}$, entonces $x^n=a$.
d) V F La raíz de un producto es igual al producto de las raíces.
e) V F La raíz de una fracción es igual a la raíz del numerador dividida por el denominador.
f) $\sqrt{a^2+b^2}=a+b$
g) $\sqrt{(m+n)^{-1}}=\dfrac{1}{\sqrt{m+n}}$

2. Señale la respuesta correcta.

A) Un radical con radicando negativo tiene valor real cuando.
a) El índice es par
b) El índice es impar
c) El radicando es un número impar
d) Nunca

B) Al simplificar la expresión $\dfrac{a^{-1/2}\cdot b^{1/4}}{a^{-2/3}\cdot b^{-3}}$ obtenemos:
a) $a^{1/5}b^{11/4}$
b) $a^{2/5}b^{11/4}$
c) $a^{1/6}b^{11/4}$
d) Ninguna anterior

C) Al factorizar la expresión $4x^2y^2-25y^2$ obtenemos:

a) $(2xy-5)(2x-y-5)$
b) $y^2(2x-5)(2x-5)$
c) $y^2(2x+5)(2x-5)$
d) Ninguna anterior

3. Responda cuál de preguntas A, B, C y D es cierta de acuerdo a la siguiente información.

$$A=\frac{m-2n}{mn}+\frac{3n-a}{an}-\frac{3m-2a}{am}$$

A) La fracción A no se puede simplificar por que no existen términos comunes.

B) La fracción A tiene como denominador común a *amn* y al simplificarla se obtiene la fracción $\frac{2}{amn}$.

C) La fracción A tiene como denominador común *amn* y su resultado al simplificarla es 0.

D) La fracción A tiene como resultado después de simplificarla $\frac{1}{amn}$.

4. De acuerdo a l siguiente procedimiento de factorización:

$$\begin{aligned} x^5+x^4-4x^3-4x^2+4x+4 &= x^4(x+1)-(4x^3+4x^2-4x+4) \\ &= x^4(x+1)-\left[4x^2(x+1)-4(x+1)\right] \\ &= (x+1)x^4-(x+1)(4x^2-4) \\ &= (x+1)(x^4-4x^2+4) \\ &= (x+1)(x^2-1)^2 \end{aligned}$$

Seleccione la respuesta correcta.

A) Es falso pues no es cierto que el término $(x+1)$ es factor común.

B) Es cierto pues al multiplicar $(x+1)(x^2-1)^2$ se obtiene la expresión inicial.

C) No es cierto ya que x^4-4x^2+4 no es un trinomio cuadrado perfecto.

5. Seleccione la respuesta correcta:

A) factorizar un polinomio significa convertirlo en:

a)Un producto de factores.
b)Un producto de tres factores.
c)Un producto de cuatro factores.
d)Ninguna anterior.

B) Una sola de las siguientes afirmaciones es correcta:

a)Una suma al cubo equivale a una suma de cubos.
b)El factor común es siempre un monomio o un binomio
c)Una diferencia de cubos no equivale a una diferencia al cubo.
d) Una diferencia al cuadrado equivale a $x^2 - y^2$.

C) Si multiplicamos la suma de las raíces cuadradas de dos expresiones algebraicas por la diferencia de las mismas, obtenemos:

a) Un trinomio cuadrado perfecto.
b) Una diferencia al cuadrado.
c) Una suma al cuadrado.
d) Una diferencia de cuadrados.

6. Simplificar la fracción:

$$\left[\left(\frac{1}{x+\dfrac{1}{1+\dfrac{1+x}{1-x}}}\right)^{-1}\right]^{-1} \div \left(\frac{x+1}{2}\right)$$

7. Simplificar hasta su mínima expresión:

$$\left[3-\frac{m+3}{m-\dfrac{2}{m-1}}\right]\cdot\left[\frac{m-\dfrac{2}{m-1}}{2m-3\left(\dfrac{m+1}{m-1}\right)}\right]$$

8. Calcular:

a) $\sqrt{\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}}}}}}$ b) $\sqrt[3]{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt[3]{4}}}}$

c) $\left(\sqrt{a^3\sqrt[3]{b^2}}+\sqrt[3]{b^3\sqrt{a^2}}\right)\div\sqrt[3]{ab}$

d) $\sqrt{1+\sqrt{6+\sqrt{5+\sqrt{16}}}}$

PROBANDO NUESTRAS COMPETENCIAS

1. Al racionalizar el denominador de $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ se obtiene:

a) $\dfrac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{x-y}$ b) $\dfrac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}{x+y}$

c) $\dfrac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2}{x-y}$ d) $\dfrac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2}{x-y}$

2. Al factorizar la expresión $\dfrac{x^3}{81}-1-\left(\dfrac{a^2x^3}{32}\right)+\left(\dfrac{a^2}{4}\right)$ se obtiene:

a) $\left(1-\dfrac{a^2}{4}\right)\left(\dfrac{x}{2}-1\right)\left(\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{x^2}{2}+1\right)$

b) $(1-a/2)(1-x^3/2)$

c) $\left(1-\dfrac{a}{2}\right)^2\left(1-\dfrac{x^3}{2}\right)$

d) $\left(1-\dfrac{a}{2}\right)\left(\dfrac{x^3}{2}-1\right)$

3. Al simplificar la expresión $\dfrac{1-1/a}{1+1/a}$ se obtiene:

a) $\dfrac{a+1}{a-1}$ b) $\dfrac{a-1}{a+1}$

c) $\dfrac{2a-1}{a-1}$ d) $\dfrac{a+1}{2a+1}$

4. Al efectuar $\dfrac{\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{xy}}}}{\sqrt[12]{x^5y^7}}$ se obtiene:

a) $\dfrac{\sqrt[3]{xy}}{2xy}$ b) $\dfrac{\sqrt[6]{x^4y^3}}{xy}$

c) $\dfrac{xy}{\sqrt[12]{xy}}$ d) $\dfrac{\sqrt[6]{x^4y}}{xy}$

5. Al factorizar $x^3-x^2+2ax-a^2-a^3$ se obtiene:

a) $(x-a)(x^2+xy+2axy)$ b) $(x-a)(x^2+ax+a^2-x+a)$
c) $(x-a)(x^2+ax+a^2-x^2+a)$
d) Ninguna anterior

6. Al dividir $4x^2+2x+1$ entre ***x -1*** se obtiene:

a) $4x+6+\dfrac{7}{x-1}$ b) $4x+6-\dfrac{7}{x-1}$

c) $5x+6+\dfrac{7}{x-1}$ d) ***5 x + 6***

7. El resultado de dividir $x^{2n}+2x^n+1$ entre x^n+1

a) $x^n - 1$ b) $x - 1$
c) $x^n + 1$ d) $x^{2n} + 1$

8. Al factorizar $5^{2x} - 5^{x+1} + 4$ se obtiene:

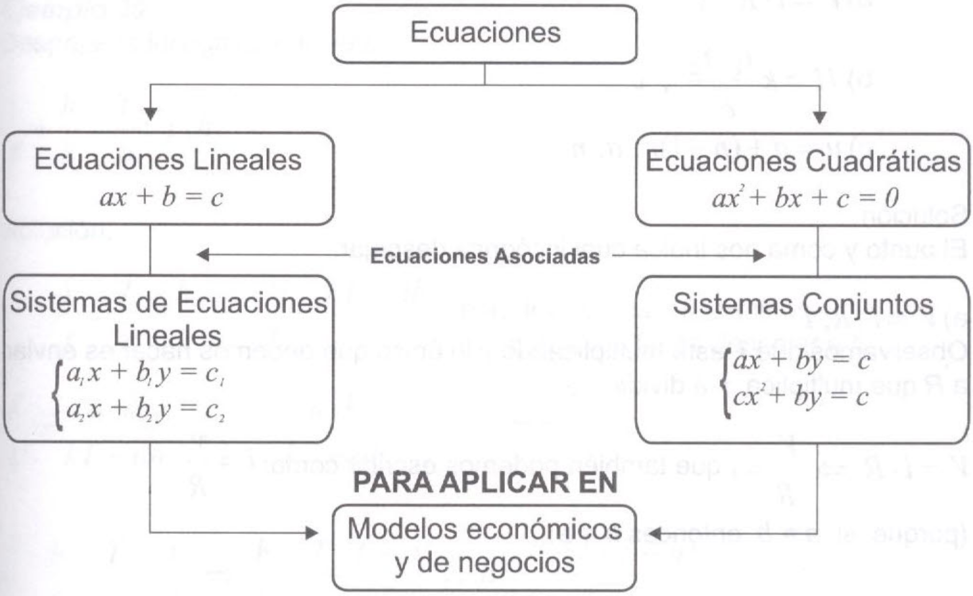
a) $(5^x - 1)^2$ b) $(5^x + 1)(5^x + 4)$
c) $(5^x - 1)(5^x - 1)$ d) $(5^x - 1)(5^x - 4)$

9. Al factorizar $2^{3x} + 2^{2x+1} + 2^x$ se obtiene:

a) $2^x(2^x + 1)^2$ b) $2^x(2^x + 1)$
c) $(2^x - 1)^2$ d) $2^x(2^x - 1)^2$

Ecuaciones

Capítulo 2



2.1. ANÁLISIS DE FÓRMULAS Y SU DESPEJE

2.1.1. Fórmula

Es la expresión de una ley o de un principio general por medio de símbolos o de letras. Por ejemplo en física la velocidad de la luz se define como el producto de la longitud de onda por la frecuencia, esta la podemos representar por la expresión algebraica:

$$C_T = C_F + C_V$$

Donde C es el costo total C_F costo fijo y C_V es el costo variable.

Para despejar una variable se debe tener en cuenta las siguientes reglas de igualdad.

a)Lo que suma pasa a restar y viceversa.
b)Lo que multiplica pasa a dividir y viceversa.

Ejemplo 19
Despejar la incógnita indicada en cada caso.

a) $V = i \cdot R;\ i$

b) $H = k\dfrac{t_1 \cdot t_2}{c^2}\ ;\ c$

c) $u = a + (n-1)r;\ a,\ n$

Solución:
El punto y coma nos indica cual incógnita despejar.

a) $V = i \cdot R; i$
Observamos que ***i*** está multiplicando y lo único que debemos hacer es enviar a *R* que multiplica *i* a dividir.

$V = i \cdot R \Rightarrow \dfrac{V}{R} = i$ que también podemos escribir como: $i = \dfrac{v}{R}$

(porque si *a* = *b* entonces *b* = *a*).

b) $H = k\dfrac{t_1 \cdot t_2}{c^2}; c$

Solución:

$$H \cdot c^2 = k \cdot t_1 \cdot t_2 \ \Rightarrow\ c^2 = \frac{k \cdot t_1 \cdot t_2}{H} \ \therefore\ c = \sqrt{\frac{k \cdot t_1 t_2}{H}}$$

Recordemos que si una incógnita esta elevada a una potencia, al despejarla debemos extraer a los dos lados de la igualdad la raíz correspondiente a dicha potencia. En este caso como ***d*** esta al cuadrado extraemos la raíz cuadrada.

c) $u = a + (n-1)r; a, n$

Solución:

- En primera instancia despejamos ***a***

$u = a + (n-1)r \Rightarrow u - (n-1)r = a \therefore a = u - (n-1)r$

- Ahora como segundo ejercicio de este problema, vamos a despejar a ***n***.

$$u = a + (n-1)r \Rightarrow u - a = (n-1)r \Rightarrow \frac{u-a}{r} = n - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{u-a}{r} + 1 = n \therefore n = \frac{u-a}{r} + 1$$

Ejemplo 20
Despejar la incógnita indicada.

$$\frac{1}{f} + \frac{h}{k} = \frac{T}{a}; f; h$$

Solución:

- $\frac{1}{f} = \frac{T}{a} - \frac{h}{k} \Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{kT - ah}{ak}$ ahora invertimos los términos, con el único fin de despejar a *f*.

$$\frac{f}{1} = \frac{a \cdot k}{kT - ah} \therefore f = \frac{a \cdot k}{kT - ah}$$

- $\frac{h}{k} = \frac{T}{a} - \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{h}{k} = \frac{T \cdot f - a}{a \cdot f} \therefore h = \frac{k \cdot (T \cdot f - a)}{a \cdot f}$

TALLER EN EL AULA DE CLASE No. 8

1. Despejar la incógnita indicada.

a) $C_c = C_0 + \frac{C}{i_p}; i_p; C$

b) $C = V_p C_p$

c) $C_c = C_0 + \frac{C}{(1 + i_a)^N - 1}; i_a; C$

d) $VF = VP(1 + i_p)^N; i_p$

e) $i_a = (1+i_p)^m - 1;\ i_p$

f) $PV = nRT;\ R$

g) $RT = \sqrt{\dfrac{a z^{1/2}}{k}};\ z,\ k$

h) $\dfrac{1}{d_o} + \dfrac{1}{d_i} = \dfrac{1}{f};d_o;d_i$

i) $i_{av} = \left(1 - \dfrac{i_{ma}}{m}\right)^{-m} - 1;\ i_{ma}$

j) $TIR = i_n + (i_p - i_n)\left[\dfrac{|R(i_n)|}{R(i_p) + |R(i_n)|}\right];R(i_p)$

2.2. ECUACIONES

Si x es una variable, expresiones como: $x+12=19,\ x^2+5x+6=0$ se denominan ecuaciones en x. Lo que nos indica una ecuación es lo siguiente: al sustituir x por un número ***a*** se debe obtener un valor verdadero es decir, se debe cumplir la igualdad. El número ***a*** se denomina raíz de la ecuación.

2.2.1. Ecuaciones Lineales

Una ecuación lineal tiene la forma $ax+b=c$ con a, b y c números reales. Observemos que el grado de la ecuación es uno, que corresponde a la potencia d la incógnita en cuestión.

Ejemplo 21
Hallar la solución de las ecuaciones:

a) $7x-3=8$
b) $15x-6=13x+20$
c) $0.2(4-3x)+0.3x=2.6$

Solución:

a) $7x-3=8 \quad \Rightarrow \quad 7x=8+3 \quad \therefore \quad x=\dfrac{11}{7}$

b) $15x-13x=20+6 \;\Rightarrow\; 2x=26 \quad \therefore \quad x=\dfrac{26}{2}=13$

c) $0.8-0.6x+0.3x=2.6 \quad \Rightarrow \quad (-1)-0.3x=(-1)\,1.8$

$0.3x=-1.8 \quad \therefore \quad x=\dfrac{-1.8}{0.3}=-6$

Prueba: Podemos conocer si la respuesta es correcta reemplazando el valor encontrado de *x* en la ecuación inicial y la igualdad debe cumplirse.

Para ello tomemos la primera ecuación.

$7\left(\dfrac{11}{7}\right)-3=8$

$11-3=8$

$8=8$

Como la igualdad se cumple, el valor de *x* encontrado es solución de la ecuación.

2.2.2. Ecuaciones Literales

Las ecuaciones literales son aquellas en las cuales el valor a encontrar es una letra o la combinación de una literal y un número real.

Ejemplo 22
Hallar la solución de las ecuaciones:

a) $\dfrac{1}{x+n}+\dfrac{x^2}{n^2+nx}=\dfrac{x+n}{n}$

b) $a(b-x)-(a-b)(a+x)=b^2-\dfrac{1}{b}\left(2ab^2-3a^2b\right)$

Solución:

a) $\dfrac{1}{x+n}+\dfrac{x^2}{n^2+nx}=\dfrac{x+n}{n} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{x+n}+\dfrac{x^2}{n(n+x)}=\dfrac{x+n}{n}$

El denominador común es *n (n+x)*. Por tanto:

$$\frac{n+x^2}{n(n+x)}=\frac{x+n}{n} \Rightarrow n+x^2=(n+x)(x+n)$$

$$n+x^2=nx+n^2+x^2+nx$$

$$n-n^2=2nx \Rightarrow n(1-n)=2nx \quad \therefore \quad x=\frac{1-n}{2}$$

b) $a(b-x)-(a-b)(a+x)=b^2-\frac{1}{b}\left(2ab^2-3a^2b\right)$

$$ab-ax-(a^2+ax-ab-bx)=b^2-\frac{1}{b}b(2ab-3a^2)$$

$$ab-ax-a^2-ax+ab+bx=b^2-2ab+3a^2$$

$$-2ax+bx=b^2-2ab+3a^2+a^2-2ab$$

$$x(b-2a)=b^2-4ab+4a^2$$

$$x(b-2a)=(b-2a)^2$$

$$x=\frac{(b-2a)(b-2a)}{b-2a}=b-2a$$

TALLER EN EL AULA DE CLASE No. 9

1. Resolver las siguientes ecuaciones.

a) $5x+7=3x-9$ b) $4x-[-2(x+5)-6x+8]-6x+10$

c) $\frac{x}{6}+5=\frac{1}{3}-x$ d) $\frac{x}{2}+2-\frac{x}{12}=\frac{x}{6}-\frac{5}{4}$

e) $x-(5x-1)-\frac{7-5x}{10}=1$

f) $2x-\left(2x-\frac{3x-1}{8}\right)=\frac{2}{3}\left(\frac{x+2}{6}\right)-\frac{1}{4}$

g) $\frac{x+6}{x+2}-\frac{x+1}{x-3}=\frac{x-5}{x-1}-\frac{x}{x+4}$

h) $\frac{2(n+x)}{m}-\frac{3(m+x)}{n}=\frac{6(n^2-2m^2)}{mn}$

i) $\frac{n-x}{n}-\frac{m-x}{m}=\frac{2(n-m)}{mn}$

j) $\frac{3}{4}\left(\frac{x}{b}+\frac{x}{a}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{x}{b}-\frac{x}{a}\right)+\frac{5a+13b}{12a}$

2.2.3. Ecuación de Segundo Grado (o Cuadrática).

La ecuación $ax^2+bx+c=0$ se denomina de segundo grado o cuadrática. Esta ecuación tiene dos raíces y solamente dos, cuyos valores son:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \;\; y \;\; x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

- Si b^2-4ac es una cantidad positiva. Las raíces son reales y distintas.
- Si b^2-4ac es una cantidad negativa. Las raíces no son reales y se dice que son complejas.(lo cual no se tratará en este texto).
- Si b^2-4ac es igual a cero. Hay una sola raíz y de multiplicidad dos; es decir, es la misma raíz pero dos veces. El valor obtenido para este caso es $x=\frac{-b}{2a}$

Las solución de la ecuación puede ser por fórmula general, factorizando o completando el cuadrado.

Ejemplo 23
Hallar el conjunto solución por:

a) Factorización.
b) Completando el cuadrado.
c) Fórmula general.

De la ecuación: $2x^2-5x-3=0$

Solución:
Recordemos que se trata de un trinomio de la forma ax^2+bx+c

a) $2x^2-5x-3=0 \Rightarrow \dfrac{(2x-6)(2x+1)}{2}=0$

$(x-3)(2x+1)=0 \ \therefore\ x=3,\ o\ ,\ x=\dfrac{-1}{2}$

Recordemos La propiedad de los reales $a\cdot b=0 \Leftrightarrow a=0,\ o\ ,b=0.$

b) $2x^2-5x-3=0 \Rightarrow 2\left(x^2-\dfrac{5}{2}x-\dfrac{3}{2}\right)=0$

Para completar el cuadrado factorizamos el termino que acompaña a x^2 en este caso 2 y nos ocupamos solo de la parte del paréntesis. Sumamos y restamos el término

$\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2$ Para nuestro caso (lo que esta dentro del paréntesis) $a=1,\ b=\dfrac{5}{2}$ por

tanto:

$$x^2-\frac{5}{2}x+\left(\frac{5/2}{2(1)}\right)^2-\frac{3}{2}-\frac{25}{16}=0$$

$$x^2-\frac{5}{2}x+\frac{25}{16}=\frac{3}{2}+\frac{25}{16}$$

$$\left(x-\frac{5}{4}\right)^2=\frac{49}{16}$$

$$x-\frac{5}{4}=\pm\sqrt{\frac{49}{16}}$$

$$x=\frac{5}{4}\pm\sqrt{\frac{49}{16}}$$

$$x=\frac{5}{4}\pm\frac{7}{4}\ \therefore\ x_1=\frac{5}{4}+\frac{7}{4},\ o\ x_2=\frac{5}{4}-\frac{7}{4}$$

$$x_1=\frac{12}{4}=3,\ o\ x_2=\frac{-2}{4}=\frac{-1}{2}$$

El conjunto solución es: $S = \left\{ \frac{-1}{2}, 3 \right\}$

Por fórmula. Par ello utilizamos la expresión

$c) x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ que se conoce como fórmula general de la ecuación de segundo grado.

$$a = 2, b = -5, \ c = -3$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(2)(-3)}}{2(2)} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{4}$$

$$x_1 = \frac{5+7}{4}, \ o \ , x_2 = \frac{5-7}{4}$$

$$S = \left\{ -\frac{1}{2}, 3 \right\}$$

2.2.4. Ecuación Incompleta

Caso I
$ax^2 + bx = 0$

Ejemplo 24
Resolver
$2x^2 + 3x = 0$

Solución
Factorizamos x

$$x(2x+3) = 0 \ \therefore \ \ x = 0, \vee, \ \ x = \frac{-3}{2}$$

Caso II
$ax^2 + c = 0$

Ejemplo 25
Resolver
$5x^2 - 25 = 0$

Solución
Despejamos x
$5x^2 = 25 \Rightarrow x^2 = 5 \quad \therefore \quad x = \pm\sqrt{5}$

TALLER EN EL AULA DE CLASE No. 10

1. Resolver por factorización.

a) $x^2 + x - 12 = 0$
b) $4x^2 + 13x + 3$
c) $a^2x^2 - acx + abx - bc = 0$
d) $3x^2 - 8x - 3 = 0$
e) $2a^2x^2 + 5ax - 3 = 0$
f) $x^2 + ax - 2a^2 = 0$

2. Resolver completando el cuadrado.

a) $x^2 - 8x - 1 = 0$
b) $6x^2 - 10x - 4 = 0$
c) $x^2 + 3x - 1 = 0$
d) $a^2x^2 - 2ax - 3 = 0$
e) $2x^2 - 6x + ax - 3a = 0$
f) $2x^2 - 3x = 0$

3. A. Resolver mediante la fórmula general.

a) $4x^2 + 2x = 3$
b) $x^2 - bx - 6n^2 = 0$
c) $5x^2 + 3xy - 4y^2 = 0$
d) $x^2 + x - 3 = 0$
e) $mx^2 + (m+1)x + 1 = 0$
f) $x^2 - ax - 6a^2 = 0$
g) $5x^2 - 3 = 0$
h) $7x^2 + 3x = 0$

i) $\dfrac{x^2}{4} + 2x = 0$

j) $8x^2 + 16a = 0, (a>0)$

C. Hallar la suma y el producto de las raíces de las siguientes ecuaciones.

a) $x^2 - 3x + 4 = 0$
b) $7 - x - x^2 = 0$
c) $15x^2 - 32mx - 7m^2 = 0$
d) $6x^2 - wx - 2w^2 = 0$

D. Determinar el valor de k de tal manera que satisfaga la condición dada.

a) $kx^2 + 2x + 2k + 3 = 0$ y el producto de las raíces sea igual a 3
b) $3kx^2 + 5x - 10 = 0$ y la suma de las raíces sea igual a -2
c) $5x^2 + 3x + 2k = 0$ y el producto de las raíces sea 4

E. Hallar la ecuación cuadrática cuyas raíces sean:

a) $2 \;\; y \, 3w$
b) $4 \;\; y \;\; 7$
c) $n + 2m \;\; y \;\; n - 2m$

F. Hallar la ecuación cuadrática sabiendo que la suma de las raíces es **– *3*** y el producto de ella es ***5***.

4. Determinar el valor de k de tal manera que cada ecuación tenga solución doble.

a) $-x^2 + 3kx - 7 = 0$
b) $x^2 + (k+2)x + 3 = 0$
c) $x^2 + kx - k + 3 = 0$
d) $x^2 + kx + 3 = 0$

2.2.5. Ecuaciones Irracionales

Una ecuación en que figura algún radical, se llama ecuación irracional.

Ejemplo 26

$\sqrt{x+4}=7$

$2\sqrt{x-5}=12$

$\sqrt{2x-7}=\sqrt{3x+17}+27$

Ejemplo 9

Resolver la ecuación: $\sqrt{5x-4}=12$

Solución

Elevamos al cuadrado y simplificamos:

$$\left(\sqrt{5x-4}\right)^2=12^2$$

$$5x-4=144$$

$$5x=144-4$$

$$x=\frac{140}{5}=28$$

Ejemplo 27

Resolver

$$\sqrt{x+2}+\sqrt{x+9}=7$$

Solución

Dejamos uno de los radicales en la izquierda de la igualdad y trasladamos el otro a la derecha:

$$\sqrt{x+2}+\sqrt{x+9}=7$$

$$\left(\sqrt{x+2}\right)^2=\left(-\sqrt{x+9}-7\right)^2$$

$$x+2=\left(-\sqrt{x+9}\right)^2+2\left(-\sqrt{x+9}\right)(-7)+49$$

$$x+2=x+9+14\sqrt{x+9}+49$$

$$x+2-58-x=14\sqrt{x+9}$$

$$-56=14\sqrt{x+9}$$

$$(-56)^2=\left(14\sqrt{x+9}\right)^2$$

$$3136 = 196(x+9)$$

$$\frac{3136}{196} = x+9 \Rightarrow x = 16-9 \quad \therefore x = 7$$

Ejemplo 28
Resolver
$x-5+2\sqrt{x-5} = 8$

Solución

$$2\sqrt{x-5} = 8-x+5$$

$$2\sqrt{x-5} = 13-x$$

$$\left(2\sqrt{x-5}\right)^2 = (13-x)^2$$

$$4(x-5) = 169-26x+x^2$$

$$4x-20 = 169-26x+x^2 \quad \text{simplificamos}$$

$$x^2-30x+189 = 0$$

Utilizamos la ecuación cuadrática

$$x = \frac{30 \pm \sqrt{900-4(1)(189)}}{2}$$

$$x = \frac{30 \pm \sqrt{144}}{2}$$

$$x_1 = \frac{30-12}{2} \quad \therefore \quad x_1 = 9$$

$$x_2 = \frac{30+12}{2} \quad \therefore \quad x_2 = 21$$

Ejemplo 29
Resolver

$$\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x} = \frac{12a}{5\sqrt{a+x}}$$

Solución
Transponemos el término $5\sqrt{a+x}$

$$5\sqrt{a+x}\left(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}\right)=12a$$
$$5\left(\sqrt{a+x}\right)^2+5\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)=12a$$
$$5(a+x)+5\sqrt{a^2-x^2}=12a$$
$$5\sqrt{a^2-x^2}=12a-5(a+x)$$
$$5\sqrt{a^2-x^2}=12a-5a-5x$$
$$5\sqrt{a^2-x^2}=7a-5x$$
$$\left(5\sqrt{a^2-x^2}\right)^2=(7a-5x)^2$$
$$25(a^2-x^2)=49a^2-70\,a\,x+25x^2$$
$$25a^2-25x^2=49a^2-70\,a\,x+25x^2$$
$$50x^2-70\,a\,x-24a^2=0$$

Dividimos entre 2
$$25x^2-35a\,x-12a^2=0$$

Factorizamos

$$\frac{(25x-20a)(25x-15a)}{25}=0$$

Simplificamos y obtenemos:

$$(5x-4a)(5x-3a)=0$$

$$x=\frac{4a}{5},\vee,x=\frac{3\,a}{5}$$

2.3. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Nos ocuparemos de sistemas solo de ***2 x 2.*** Es decir dos ecuaciones con dos incógnitas. Un sistema de ecuaciones con dos incógnitas tiene la forma:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

La idea de resolver un sistema como el anterior es encontrar los valores de las incógnitas allí presentes. No siempre estos sistemas tienen solución.

Cuando el sistema tiene solución se dice que es **consistente**. Si no tiene solución se dice que es **inconsistente.** Cuando el conjunto solución de las ecuaciones son iguales se dice que son **dependientes.**

2.3.1. Solución de un Sistema de Ecuaciones con dos Incógnitas

Existen diferentes métodos, entre ellos tenemos: **igualación, sustitución, reducción y determinantes.**

Ejemplo 30
Resolver por tres métodos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 3x+y=2 \quad (I) \\ x-y=10 \quad (II) \end{cases}$$

Solución:

2.3.1.1 Método de Igualación:

Despejamos cualquiera de las incógnitas: por ejemplo *y* en ambas ecuaciones.

$$y=2-3x$$

$$y=x-10$$

Ahora igualamos entre si los valores de *y* que obtuvimos:
$2-3x=x-10 \Rightarrow 2+10=x+3x \Rightarrow 12=4x \;\therefore\; x=3$

Sustituimos ahora este valor en cualquiera de las dos ecuaciones y encontramos a *y*.

Luego la solución es: $S=(3,-7)$

2.3.1.2. Método de Sustitución:

Despejamos una de las incógnitas por ejemplo y en la primera (I). esta expresión la reemplazamos en (II) y encontramos *x*. Veamos:

$$y = 2 - 3x$$

$$x - (2 - 3x) = 10 \Rightarrow x - 2 + 3x = 10 \Rightarrow 4x = 12 \therefore x = 3$$

Sustituimos este valor en (II) y encontramos a *y*.
$S = (3, -7)$

2.3.1.3 Método de Reducción:

Para resolver este sistema por el método reducción o suma y resta, debemos igualar los coeficientes de una de las incógnitas, con el fin de eliminar esta y así encontrar el valor de la otra.

Para este caso vamos a eliminar a *x*, por tanto la ecuación II la multiplicamos por *3* y la I por uno (***1***). Para obtener:

$$\begin{cases} 3x + y = 2 \quad (I) \\ 3x - 3y = 30 \quad (II) \end{cases}$$

Ahora restamos de la ecuación (I) la (II).

$$\begin{array}{l} 3x + y \;\; = 2 \\ \underline{3x - 3y = 30} \\ 0 + 4y \;\; = -28 \quad \therefore \quad y = -7 \end{array}$$

Con este valor de *y* reemplazamos en (I) o (II) y encontramos el valor de *x*.

$$3x + (-7) = 2 \Leftrightarrow 3x = 2 + 7 \Leftrightarrow 3x = 9 \quad \therefore \quad x = 3$$

El conjunto solución es: $S = (3, -7)$
Si queremos saber si este es el conjunto solución reemplazamos en I o II los valores de *x* y *y* y la igualdad se debe cumplir. Hagámoslo en I.

$$3(3) + (-7) = 2$$

$$9 - 7 = 2$$

$$2 = 2$$

2.3.2. Solución de un Sistema de Ecuaciones con Tres Incógnitas

Utilizando cualquiera de los métodos anteriores o los determinantes podemos resolver sistemas de ecuaciones.

Ejemplo

Resolver el sistema, por cualquier método y por determinantes.

$$\begin{cases} 2x+y-3z=-1 & (I) \\ x-3y-2z=-12 & (II) \\ 3x-2y-z=-5 & (III) \end{cases}$$

Solución

En primer lugar combinamos las ecuaciones (I) y (II) y luego (I) con (III), siempre debemos combinar una de las ecuaciones con las otras dos.

De (I) y (II), tenemos: multiplicamos (I) por (-1) y (II) por (2), para eliminar a x.

$$\begin{array}{ll} 2x+y-3z=-1 & (-1) \\ x-3y-2z=-12 & (2) \\ \hline -2\cancel{x}-y+2z=1 & \\ \cancel{2x}-6y-4z=-24 & \\ \hline -7y-z=-23 & (III) \end{array}$$

Ahora combinamos las ecuaciones (I) y (III). La (I) la multiplicamos por (-3) y la segunda por (2). Para eliminar a x.

Observemos que siempre, eliminamos la misma incógnita.

$$\begin{array}{ll} 2x+y-3z=-1 & (-3) \\ 3x-2y-z=-5 & (2) \\ \hline -6x-3y+9z=1 & \\ 6x-4y-2z=-10 & \\ \hline -7y-7z=-7 & (IV) \end{array}$$

Ahora, combinamos las ecuaciones (III) y (IV). Vamos a eliminar a y, para ello multiplicamos (III) por (-1) y (IV) por (1).

$$-7y - z = -23 \quad (-1)$$
$$-7y + 7z = -7 \quad (2)$$

$$7y + z = 23$$
$$-7y + 7z = -7$$

$$8z = 16 \quad \therefore \quad z = 2$$

Con este valor de $z = 2$ reemplazamos en (III) o (IV) y obtenemos y.
$$-7y - 2 = -23 \Rightarrow -7y = -23 + 2 \Rightarrow -7y = -21 \therefore y = 3$$

Con los valores de y y z. Reemplazamos en (I), (II) o (III) y obtenemos x. Hagámoslo en (II).
$$x - 3(3) - 2(2) = -12 \Rightarrow x - 9 - 4 = -12 \Rightarrow x = -12 + 13 \therefore x = 1$$

Luego la solución total es: $x = 1,\ y = 3,\ z = 2$

Prueba:
Reemplazamos en cualquiera de (I), (II) o (III) y se debe cumplir la igualdad.

En (II) $1 - 3(3) - 2(2) = -12 \Rightarrow 1 - 9 - 4 = -12 \therefore -12 = -12$

$$\mathbf{7x + 9 = 0 \Rightarrow 7x = -9 \therefore x = -\frac{9}{7}}$$

2.4. SISTEMAS DE ECUACIONES DE FORMA CUADRÁTICA

Ejemplo 31
Resolver el sistema

$$\begin{cases} 2x + y = 10 & (1) \\ x^2 + y^2 = 25 & (2) \end{cases}$$

Solución
Despejamos y en (1) y reemplazamos su valor en (2).

$$y = 10 - 2x$$
$$x^2 + (10 - 2x)^2 = 25$$

$x^2 + 100 - 40x + 4x^2 = 25$

$5x^2 - 40x - 75 = 0$

Dividimos entre 5

$x^2 - 8x + 15 = 0$

$(x-5)(x-3) = 0$

Al despejar, obtenemos:
$x = 5, \vee, x = 3$

Reemplazamos en (1) o (2) y obtenemos *y*.

En (1)

$x = 5$
$y = 10 - 2(5) = 0$
$x = 3$
$y = 10 - 2(3) = 4$

Las soluciones son: *(5, 0) y (3, 4).*

Gráficamente tenemos:

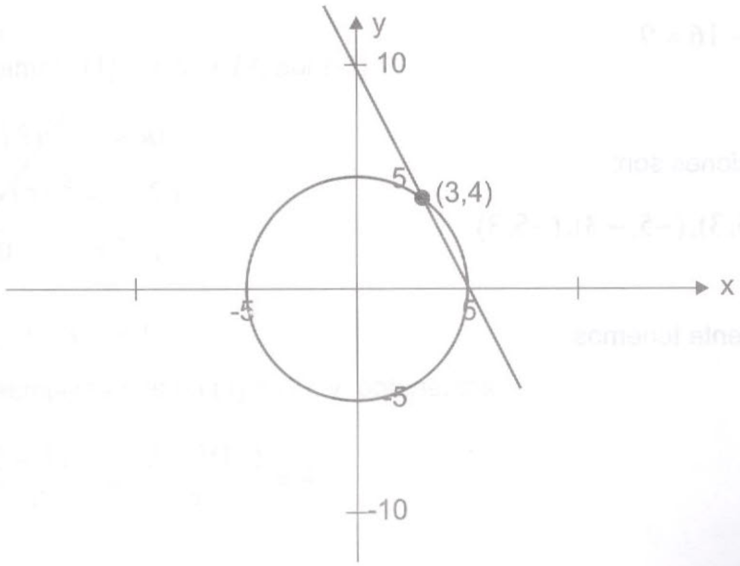


Figura 1

Ejemplo 32
Resolver

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 16 \ (1) \\ x^2 + y^2 = 34 \ (2) \end{cases}$$

Solución
Despejamos a y^2 en (1) y reemplazamos en (2)

$$y^2 = x^2 - 16$$

$$x^2 + (x^2 - 16) = 34$$

$$2x^2 = 50 \Rightarrow x^2 = \frac{50}{2} = 25$$

$$x = \pm 5$$

Reemplazamos en (1) o en (2)

$$x = 5$$

$$y^2 = 25 - 16 = 9$$

$$y = \pm 3$$

$$x = -5$$

$$y^2 = 25 - 16 = 9$$

$$y = \pm 3$$

Las soluciones son:

$$(5,-3), (5,3), (-5,-3), (-5,3)$$

Gráficamente tenemos:

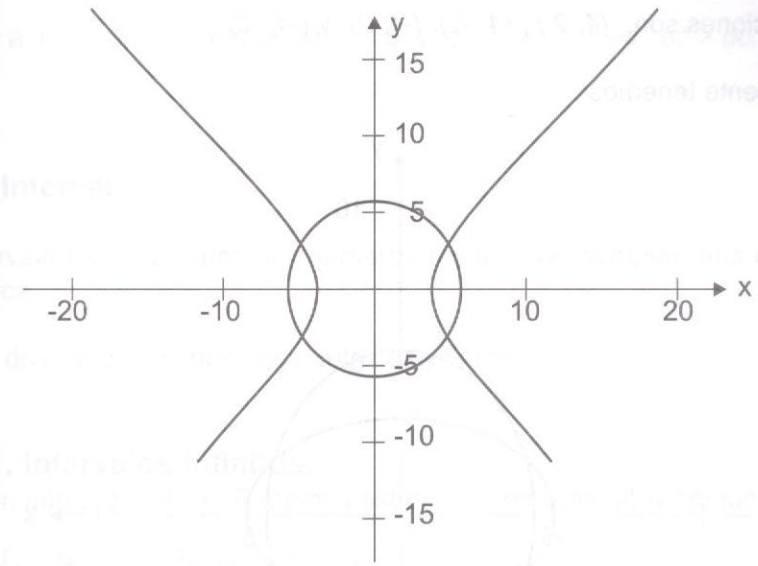


Figura 2

Ejemplo 33
Resolver el sistema

$$\begin{cases} 5x^2 + 3y^2 = 92 & (1) \\ 2x^2 + 5y^2 = 52 & (2) \end{cases}$$

Solución
Multiplicamos (1) por 5 y (2) por (-3)

$$\begin{array}{l} 25x^2 + \cancel{15y^2} = 460 \\ -6x^2 \cancel{-15y^2} = -156 \\ \hline 19x^2 + 0 \quad = 304 \end{array}$$

$$x^2 = 16 \quad \therefore \quad x = \pm 4$$

Ahora reemplazamos en (1) o (2) y obtenemos:

$$y^2 = \frac{92 - 3x^2}{3} = \frac{92 - 5(16)}{3} = 4$$

$$y = \pm 2$$

Las soluciones son: *(4, 2) , (4, -2), (-4, 2) y (-4, -2).*

Gráficamente tenemos:

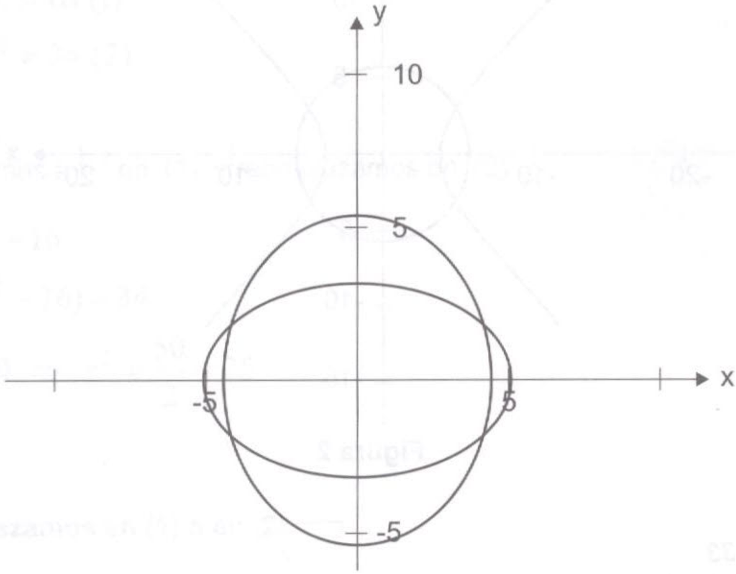


Figura 3

2.5. DESIGUALDADES DE NÚMEROS REALES

Sean *a, b* dos números reales. Decimos que "*a* es menor que *b*" y escribimos a < b, si *(b-a)* es positivo.

Ejemplo 34
a) $3<7 \Rightarrow (7-3)>0$
b) $3<11 \Rightarrow (11-3)>0$

También decimos que "*a* es mayor que *b*" y escribimos ***a > b***.

Propiedades

1. Sean *a, b, c* números reales. Si *a < b*, entonces, *a + c > b + c.*
2. Sean *a, b, c,* números reales; si:

a < b y *b < c,* entonces, *a < c.*

3. Sean *a, b, c* números reales; si *a < b* y c > 0, entonces, *ac < bc.*

4. Sean a, b, c números reales, si $a < b$ y $c < 0$, entonces, $ac > bc$.

2.5.1. Intervalos

Un intervalo es un conjunto de números reales, que cumplen una condición específica.

Existen dos clases de intervalos: Infinitos y finitos.

2.5.1.1. Intervalos Infinitos:

Sea *a* un número real fijo. Podemos establecer los siguientes conjuntos:

a) $I_1 = \{x \in \Re / x > a\} = (a, \infty)$; $a \notin I_1$
b) $I_2 = \{x \in \Re / x \geq a\} = [a, +\infty)$; $a \in I_1$
c) $I_3 = \{x \in \Re / x < a\} = (-\infty, a)$; $a \notin I_2$
d) $I_4 = \{x \in \Re / x \leq a\} = (-\infty, a]$; $a \in I_2$
e) $I_5 = (-\infty, \infty)$; $a \in I_1$

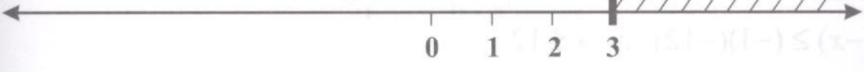
Ejemplo 35
Escribir los conjuntos dados en notación de intervalos.

a) $I = \{x \in \Re / x \geq 3\}$
b) $I = \{x \in \Re / x < 10\}$

Solución:
a) $I = \{x \in \Re / x \geq 3\} = [3, \infty)$
b) $I = \{x \in \Re / x < 10\} = (-\infty, 10)$

Representar en la recta el intervalo a)

Solución:



2.5.1.2. Intervalos Finitos:

Sean *a, b* números reales fijos tales que $a \leq b$. Se tiene que:

a) $I_1 = \{x \in \Re / a < x < b\} = (a, b)$; $a, b \notin I_1$

b) $I_2 = \{x \in \Re / a \le x \le b\} = [a,b]\,;\ a,b \in I_1$
c) $I_3 = \{x \in \Re / a < x \le b\} = (a,b]\,;\ a \notin I_2,\ b \in I_2$
d) $I_4 = \{x \in \Re / a \le x < b\} = [a,b)\,;\ a \in I_2, b \notin I_2$

La utilidad de los intervalos está en la solución de inecuaciones.

2.6. INECUACIÓN

Una expresión de la forma: $ax + b > c$ con cualquiera de los signos de desigualdad anteriores $(<, \le, \ge)$ se denomina inecuación o desigualdad lineal con una incógnita.

2.6.1. Solución de Inecuaciones

Ejemplo 36
Hallar el conjunto solución de:

a) $3x < 5$
b) $4x + 3 \ge 5x - 9$
c) $2 < 5x + 10 \le 12$

Solución:
Resolver una desigualdad es como resolver una ecuación solo que debemos respetar el signo de desigualdad.

a) $3x < 5 \;\therefore\; x < \dfrac{5}{2}$ La solución corresponde a $S = \left(-\infty, \dfrac{5}{2}\right)$

b) $4x + 3 \ge 5x - 9 \Rightarrow 4x - 5x \ge -9 - 3 \Rightarrow -x \ge -12$
$(-1)(-x) \ge (-1)(-12) \;\therefore\; x \le 12$

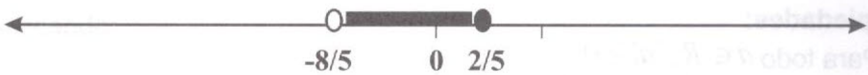
Cuya solución está dada por: $S = (-\infty, 12]$

c) $2 < 5x + 10 \le 12 \Rightarrow 2 - 10 < 5x + 10 - 10 \le 12 - 10$

$$-8 < 5x \le 2 \Rightarrow -8\left(\frac{1}{5}\right) < 5x\left(\frac{1}{5}\right) \le 2\left(\frac{1}{5}\right) \Rightarrow -\frac{8}{5} < x \le \frac{2}{5}$$

La solución es: $S=\left(-\frac{8}{5},\ \frac{2}{5}\right]$

En la recta real corresponde a:



2.7. VALOR ABSOLUTO

Sea *x* un número real cualquiera; el valor absoluto de *x* notado por $|x|$ está definido por:

$$|x|=\begin{cases} x & \text{si} \quad x\geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x<0 \end{cases}$$

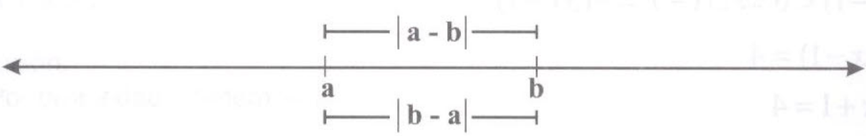
Ejemplo 37

a) $|-13|=13$

b) $|5|=5$

c) $\left|-\frac{1}{4}\right|=\frac{1}{4}$

Es decir el valor absoluto de un número real nunca es negativo. El valor absoluto denota una distancia entre dos puntos, y, por ello nunca una distancia es negativa (no hablamos que entre una pared y otra hay **-9** metros).



Ejemplo

Calcular:

a) $|5-9|$ b) $|12-(-4)|$ c) $|-7|+|13|$ d) $\left|\frac{-1}{2}\right|+\left|-\frac{2}{3}\right|$

Solución:

a) $|5-9|=|-4|=4$

b) $|12-(-4)|=|12+4|=16$

c) $|-7|+|13|=7+13=20$

d) $\left|-\frac{1}{2}\right|+\left|-\frac{2}{3}\right|=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{3+4}{6}=\frac{7}{6}$

Propiedades:

1. Para todo $a\in R,\ |a|\geq 0$
2. Para todo $a\in R, a\leq |a|$
3. Para todo $a\in R,\ |a|^{2}=a^{2}$
4. Para todo $a,b\in R, |a\cdot b|=|a|\cdot|b|$
5. Para todo $a,b\in R, \left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$
6. Para todo $a,b\in R, |a+b|\leq |a|+|b|$ Desigualdad triangular.

2.7.1. Ecuaciones con Valor Absoluto

Resolver: $|3x-1|=4$

Solución:
Por definición debemos considerar dos casos:

$$|3x-1|=4 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-1=4 \\ (3x-1)=-4 \end{cases}$$

Para el primer caso: $x=5/3$ ¿por qué?

Para el segundo caso:
$(3x-1)<0 \Rightarrow |3x-1|=-(3x-1)$

$-(3x-1)=4$

$-3x+1=4$

$-3x=4-1$

Hallar el conjunto solución de:

$$\left|\frac{3}{2}x-1\right|=\left|x+\frac{2}{5}\right|$$

Solución:

$$\left|\frac{3}{2}x-1\right|=\left|x+\frac{2}{5}\right| \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{3}{2}x-1=x+\frac{2}{5}\\ \frac{3}{2}x-1=-x-\frac{2}{5}\end{cases}$$

Resolviendo:

$$\frac{3}{2}x-1=x+\frac{2}{5} \Leftrightarrow \frac{3x}{2}-x=\frac{2}{5}+1 \Leftrightarrow \frac{x}{2}=\frac{7}{5} \therefore x=\frac{14}{5}$$

$$\frac{3}{2}x-1=-x-\frac{2}{5} \Leftrightarrow \frac{3x}{2}+x=-\frac{2}{5}+1 \Leftrightarrow \frac{5x}{2}=\frac{3}{5} \therefore x=\frac{6}{25}$$

Luego la solución es: $S=\left\{\frac{6}{25},\frac{14}{5}\right\}$

2.7.2. Inecuaciones con Valor Absoluto

Por lo general en la solución de desigualdades con valor absoluto se utilizan las siguientes propiedades:

7) $a\geq 0,\ |x|\leq a \Leftrightarrow -a\leq x\leq a$
8) $|x|\geq a \Leftrightarrow -a\geq x,\ o\ ,x\geq a$
9) $\text{Si } k>0, \text{entonces } |x-a|<k \Leftrightarrow a-k<x<a+k, \text{Para todo } a,x\in R.$

Ejemplo 38
Hallar el conjunto solución de:

a) $|2x+1|\leq 5$
b) $|x+3|>2$

Solución:
a) Por propiedad 7 tenemos:

$$-5\leq 2x+1\leq 5 \Leftrightarrow -5-1\leq 2x\leq 5-1$$

$$\Leftrightarrow -6\leq 2x\leq 4 \therefore -3\leq x\leq 2$$

Luego el conjunto solución está dado por:

$$S=\{x\in R/-3\leq x\leq 2\}=[-3,2]$$

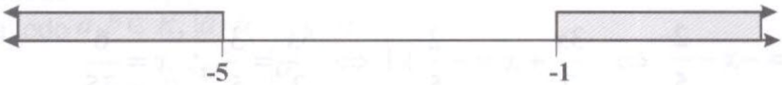
b) $|x+3|>2 \Leftrightarrow x+3>2,\ o\ ,\ x+3<-2$

$x+3>2 \Leftrightarrow x>-1,\ o\ ,\ x+3<-2 \Leftrightarrow x<-5$

Por tanto la solución está dada por:

$$S=(-\infty,-5)\cup(-1,\infty)$$

Gráficamente tenemos:



2.8. INECUACIONES CUADRÁTICAS

Ejemplo 39
Resolver: $4-x^2 \geq 0$

Solución
Factorizamos: $(2-x)(2+x)\geq 0$

$x+2 \therefore x\geq -2$

$2-x\geq 0 \Rightarrow -x\geq -2 \therefore x\leq 2$

Utilizamos el método de los signos:
El signo (+) indica hacia donde cumple la desiguldad, es decir donde es solución y el signo menos (-) indica que no cumple. Para la solución total debemos tener en cuenta el signo de la desigualdad inicial.

	-∞ … -2	-2 … 2	2 … ∞
$x \geq -2$	---------------	++++++++++++++++	++++++++++
$x \leq 2$	+++++++++++	++++++++++++++++	---------------
$(x+2)(2-x)\geq 0$	---------------	++++++++++++++++	---------------

La solución por tanto es: $[-2,2]$.

Ejemplo 40
Hallar el conjunto solución de: $4x^2+3x-1<0$

Solución:
Factorizamos y obtenemos:

$$(x+1)(4x-1)<0$$

$$x<-1, \quad \vee, \quad x<\frac{1}{4}$$

De nuevo utilizamos el método de los signos.

x < - 1	+++++++++	-1	---------------------		---------------------
x < 1/4	+++++++++		+++++++++++++++	1/4	-----------------
(x + 1)(4x - 1) < 0	+++++++++	-1	-----------------------	1/4	+++++++++++

=bservando el signo de la desigualdad inicial vemos que corresponde a los menores, por tanto, la solución es: $(-1,1/4)$.

2.9. APLICACIONES DE LAS ECUACIONES Y SISTEMAS DE ECUACIONES

Vamos a resolver problemas que involucren ecuaciones y desigualdades.

Ejemplo 41
a) Resolver el modelo de oferta y demanda (hallar el punto de equilibrio)

$$D: 19.5-2p$$
$$O: -18+3p$$

Solución
Para encontrar el punto de equilibrio igualamos las ecuaciones de Oferta y Demanda

$$19.5-2p=-18+3p \Rightarrow -2p-3p=-18-19.5 \Rightarrow -5p=-37.5 \therefore p=-7.5$$

Reemplazamos este valor en O o D y obtenemos el valor de Q.
$Q=-18+3(-7.5)=-18-22.5=-40.5$
Por tanto la solución es (p,Q) = (-7.5 , -40.5)

2.10. RESOLVER EL MODELO DE INGRESO NACIONAL

a) $Y = C + I + G$

$C = 10 + 0.75Y$

$I = 40;\ G = 10$

Solución
Utilizando la igualdad $Y = C + I + G$

Reemplazamos los valores de C, I, y G y obtenemos:

$$Y = 10 + 0.75Y + 40 + 10 = 0.75Y + 60 \Rightarrow Y - 0.75Y = 60 \therefore Y = 80$$

$$C = 10 + 0.75(80) = 70.$$

b) Los miembros de una empresa Pereirana desean invertir UM$3000000 (Unidades Monetarias) en dos tipos de seguros que pagan dividendos anuales del 9% y 6%, respectivamente.

¿Cuánto deberán invertir a cada tasa si el ingreso debe ser equivalente al que producirá al 8% la inversión total?

Solución
P = 3000000

$$I = P\left(\frac{R}{100}\right)$$

$$I = 3000000\left(\frac{8}{100}\right) = 240000$$

x = Cantidad a invertir al 9/100

$3000000 - x$ =Cantidad a invertir al *6/100*

Por tanto:

$$\frac{9}{100}x + \frac{6}{100}(3000000 - x) = 240000$$

Multiplicamos por 100 y obtenemos:

$$9x+18000000-6x=24000000$$

$$9x-6x=6000000$$

$$3x=6000000 \quad \therefore \quad x=2000000$$

Conclusión:
Se debe invertir:

UM$ 2000000 al 9% y UM$ 1000000 al 6%.

c) Un comerciante de la zona cafetera ofrece por el alquiler de su finca un 30% de descuento al precio normal y aún obtiene una utilidad del 10%. Si le cuesta $UM 110000 al comerciante, ¿Cuál debe ser el precio normal?

Solución:
Sea x = precio Normal

$\frac{30x}{100}$ = descuento

$110000+\frac{10}{100}(110000)=121000$ valor del artículo con utilidad. X

$$x-\frac{30x}{100}=121000$$

$$100x-30x=12100000$$

$$x=\frac{12100000}{70}=UM\$\,172857.14$$

Por tanto el precio normal es UM$ 172857.14.

d) La experiencia demuestra que si se fija una renta mensual de UM$ 1500000 por apartamento, todos ellos serán ocupados, pero por cada UM$ 30000 de incremento en la renta, un departamento quedará vacío.
Que renta deberá fijar con el objeto de obtener los mismos UM$ 90 000 000 de ingreso total que recaudaría con una renta de UM$ 1500000 y al mismo tiempo dejar algunos apartamentos vacíos?

Solución
$1500000+30000\,x$ valor de la renta en aumento
$60-x$ número de apartamentos a arrendar en aumento

Por tanto la renta a fijar es:

$1500000 + 30000(10) = UM\$1800000$ y permanecerán aún 10 apartamentos desocupados.

e) La compañía Automotor LM desea saber si le conviene fabricar sus propias bujías para el motor, que ha estado adquiriendo de proveedores externos a UM$ 2500 cada unidad. La fabricación de las bujías por la compañía incrementará sus costos fijos en UM$ 15000 al mes, pero sólo le costará UM$ 1700 fabricar cada bujía. ¿Cuántas bujías debe utilizar la empresa cada mes para justificar la fabricación de sus propias bujías?

Solución
$1700x$ valor de las bujías.
$15000 + 1700\,x$ costo de las bujías al fabricarlas.
$2500x$ costo de las bujías al comprarlas.

$$15000 + 1700x \leq 2500x$$

$$15000 \leq 800x$$

$$x \geq 18.75$$

Se debe utilizar más de 18.75 bujías para justificar fabricarlas.

Una editorial que publica una revista mensual que tiene costos de publicación de UM$ 60.5 por copia. El ingreso del representante de ventas es de UM$ 70 por ejemplar, y los ingresos obtenidos de las ventas que sobrepasan los 20 mil ejemplares.¿ Cuantos ejemplares deberá publicar y vender al mes para asegurar utilidades que sobrepasan los UM$ 4000?

Solución
$U = I - G$

$I - G > 400$

copias a piublicar y a vender
$70(20000 + x)$ Ingreso representante de ventas

$\frac{15}{100}(70)\,x$ Ingreso de publicidad

$60.5(20000 + x)$ gasto de publicación.
$I - G > 400$
$x + 2000 = 30500$

Se deben publicar y vender más de 30500 copias.

f) Dado el sistema de oferta y demanda

$$\begin{cases} D: 2p^2 + q = 8 \quad (I) \\ O: p - q = -5 \quad (II) \end{cases}$$

Hallar el punto de equilibrio y trazar el gráfico en el mismo sistema coordenado.

Solución

Utilizando el método de sustitución de I despejamos p y obtenemos:

$q = p + 5$ (III)

Reemplazamos en II, así:

$$2p^2 + p + 5 = 8$$

$$(2p+3)(p-1) = 0$$

Solo nos sirve el valor positivo: $q = 1 \quad (IV)$

Sustituimos este valor en (III) y obtenemos: $p = 6$

Por tanto el punto de equilibrio es (1, 6).

Gráfica

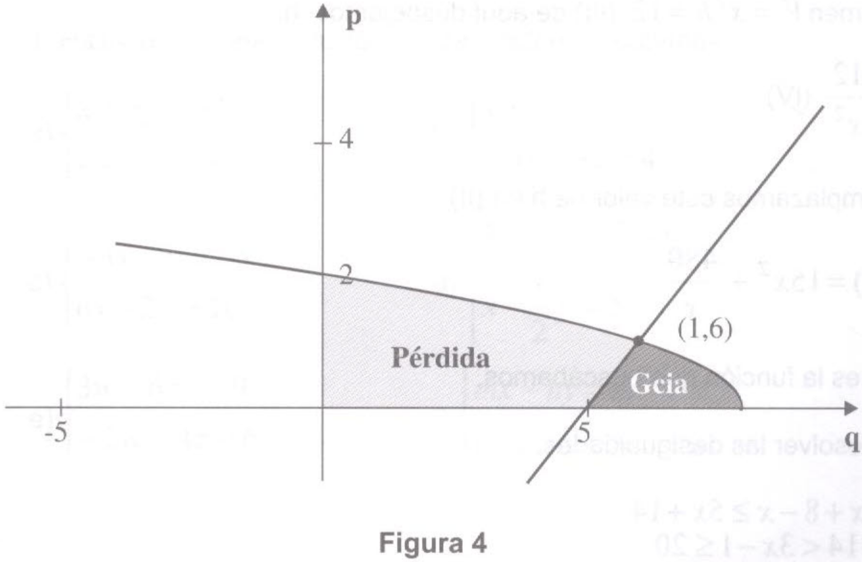


Figura 4

En las zonas sombreadas aparecen las regiones de pérdida y ganancia. Si la curva de demanda está por encima de la curva de oferta allí habrá una **pérdida**, si la oferta está por encima de la demanda hay **ganancia.**

g) Un exportador de dulces está diseñando una caja sin tapa y de fondo cuadrado de x cm por x cm para empacar turrones pequeños, se debe fabricar en madera con un costo de 10 UM(unidades monetarias) por cm^2 para los lados y 15 UM por cm^2 para el fondo. Si el volumen V de la caja es de 12 cm^3, expresar el costo total como una función de x.

Solución

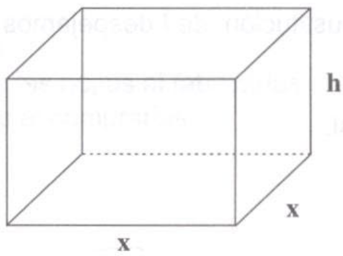


Figura 5

En relación con la figura 5 vemos que el área total A puede expresarse como el área de la base más las áreas de los cuatro lados, o sea:

$A = x^2 + 4hx$ (I) luego el costo total es: $C = 15x^2 + 40hx$ (II)
Volumen $V = x^2 h = 12$ (III) de aquí despejamos h:

$$h = \frac{12}{x^2} \text{ (IV)}$$

Reemplazamos este valor de h en (II)

$$C(x) = 15x^2 + \frac{480}{x}$$

que es la función que buscábamos.

1. Resolver las desigualdades:

a) $3x + 8 - x \geq 5x + 14$
b) $-14 < 3x - 1 \leq 20$

c) $6x-9<13-4x-\{-[2x+4-(5x-2)]\}$

2. Hallar el conjunto solución gráfica y analíticamente de:

a) $|5x+7|\leq 17$ b) $|4x-5|>14$

3. Hallar el conjunto solución de:

a) $|6x-5|=8$ b) $|3x-1|=|7x+6|$

c) $\left|\frac{x}{2}+\frac{1}{3}\right|=x-\frac{1}{5}$ d) $x^2+2x-15>0$

e) $x^2-3x+2>0$ f) $1-x-2x^2\geq 0$

g) $\frac{1}{x+1}<\frac{2}{3x-1}$ h) $\frac{1}{3x-7}\leq\frac{4}{3-2x}$

i) $|3x-4|<2$ j) $|4x+1\geq 2|$

TALLER EN EL AULA DE CLASE No. 11

1. Hallar el conjunto solución de los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x+2y=-1 \\ 2x-3y=4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+3y=1 \\ -6x+9y=4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -3x-y=-5 \\ 6x-2y=10 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 4x-2y-7=0 \\ x-\frac{1}{2}y=5 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3w-6z=-9 \\ -2w+4z=6 \end{cases}$ f) $\begin{cases} mx-ny=m^2+n^2 \\ nx+my=m^2+n^2 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 6x+3y+2z=12 \\ 9x-y+4z=37 \\ 10x+5y+3z=21 \end{cases}$ h) $\begin{cases} 2w+4t+3n=3 \\ 10w-8t-9n=0 \\ 4w+4t-3n=2 \end{cases}$

i) $\begin{cases} 7n-m+5g=-6 \\ 3n-2m+5g=38 \\ n+m-6g=-27 \end{cases}$

2. Hallar el conjunto solución de los siguientes sistemas de ecuaciones. Trazar el gráfico:

a) $\begin{cases} y+7x=25 \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2+y^2=40 \\ xy=12 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x^2+2y^2=7 \\ x^2-y^2=3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2+y^2=a^2 \\ x^2-y^2=b^2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}=7 \\ x-y=91 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 10(x+y)=11xy \\ x+y=11 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ xy=12 \end{cases}$ h) $\begin{cases} x^2-xy-12y^2=0 \\ x^2+xy-10y^2=20 \end{cases}$

i) $\begin{cases} 2/x^2-3/y^2=5 \\ 1/x^2+2/y^2=6 \end{cases}$ j) $\begin{cases} 9x^2+y^2=90 \\ x^2+9y^2=90 \end{cases}$

k) $\begin{cases} x+y+3\sqrt{x+y}=18 \\ x-y-2\sqrt{x-y}=15 \end{cases}$

l) $\begin{cases} x^3-y^3=28 \\ x-y=1 \end{cases}$

MISCELANEA No. 2

1. Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $-\{-[-\{\{3x+8-[-15+6x-(-3x+2)-((5x+4)]\}-29\}]\}=-5$
b) $2x+(-x)-[5+3x-\{5x-(6+x\}]=-3$

c) $\dfrac{c}{x}-\dfrac{1}{c}=\dfrac{2}{c}$

d) $\dfrac{5x+b}{3x+a}=\dfrac{5x-a}{3x-b}$

e) $12x-7x^2+64=0$
f) $5n^2-7x-90=0$

2. Resolver completando el cuadrado:

a) $3x^2-5x+2=0$
b) $2x^2+x-3=0$
c) $x^2-7x+12=0$
d) $9x^2-3x=2$
e) $8x^2=6x-1$
f) $5x^2+500=100x$
g) $2x^2=5x-2$
h) $x^2+3x=18$
i) $\sqrt{x+2}-\sqrt{16-x}=0$
j) $\sqrt{x-3}=\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x+4}$
k) $\sqrt{x+10}-\sqrt{x}-2=0$
l) $\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}=\dfrac{b}{\sqrt{x-a}}+\dfrac{a}{\sqrt{x-b}}$

m) $\dfrac{x}{\sqrt{x}+\sqrt{a-x}}+\dfrac{x}{\sqrt{x}-\sqrt{a-x}}=\dfrac{a}{\sqrt{x}}$

n) $\sqrt{x+14}-\sqrt{x-7}=\dfrac{6}{\sqrt{x-7}}$

o) $2\sqrt{x+6}-\sqrt{4x-3}=\dfrac{9}{\sqrt{4x-3}}$

p) $\sqrt{3x+1}+\sqrt{2x-6}=2\sqrt{2x-1}$

q) $\dfrac{a-\sqrt{2ax-x^2}}{a+\sqrt{2ax-x^2}}=\dfrac{x}{a-x}$

r) $\sqrt{3x-5}+\sqrt{x-9}=2\sqrt{x-1}$
s) $3\sqrt{2}-\sqrt{1-x}=2\sqrt{x+3}$

3. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} 9x+2y=0 \\ 3x-5y=17 \end{cases}$
b) $\begin{cases} 2u+8v=7 \\ 3u-5v=4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 12m+5n=-6 \\ \dfrac{5m}{3}-\dfrac{7n}{6}=-12 \end{cases}$
d) $\begin{cases} x-y=mn(m-n) \\ \dfrac{x}{m^2}+\dfrac{y}{n^2}=n+m \end{cases}$

4. Hallar el conjunto solución de:

a) $|x+3|>5$
b) $|x-2|<3$
c) $2x^2+11x+12\le 0$
d) $12x^2+29x+14\ge 0$
e) $4x-9\le \dfrac{5}{6}x+\dfrac{2-x}{7}$
f) $3>-5-4x\ge -8$
g) $\dfrac{2}{3x+1}\le \dfrac{4}{5x-1}$
h) $|3x+4|=10$
i) $|8x|=5-x$
j) $|12x-7|=|14x+9|$
k) $\left|\dfrac{x+5}{3x-4}\right|\le 7$
l) $\left|\dfrac{6-5x}{x+3}\right|\le \dfrac{1}{2}$
m) $|3x|>|6-3x|$
n) $|4x-7|\le 5$
o) $|7x-6|\ge 10$

5) Resuelva los siguientes problemas:

A) El costo de producir x artículos al día dada en dólares por $C=1000+30\sqrt{x}+9x$. Si cada artículo puede venderse a UM\$ 30 determine el punto de equilibrio.

B) María Alejandra compró un auto nuevo por UM$ 750000. ¿Cuál es el valor V del automóvil después de t años, suponiendo que se deprecia linealmente cada año a una tasa del 12% de su costo original? ¿Cuál es valor del automóvil después de 5 años?

C) Un proveedor puede vender 300 unidades de repuesto para computador al día a UM$ 30 por unidad y 250 unidades a UM$ 27 por unidad. La ecuación de la oferta para tal artículo es $6p = x + 48$.

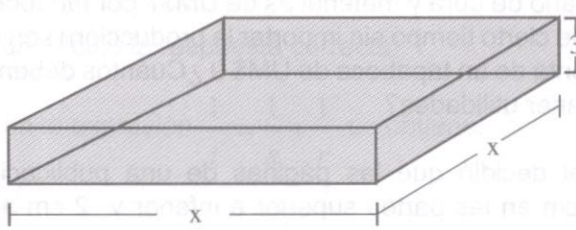
a) Determine la ecuación de la demanda para el artículo, suponiendo que es Lineal.

b) Encuentre el precio y la cantidad de equilibrio.

c) Determine el precio y la cantidad de equilibrio si se ha fijado un impuesto de UM$ 3,40 sobre el repuesto ¿Cuál es el incremento en el precio y la disminución en la cantidad demandada?

d) ¿Qué subsidio por unidad incrementaría la demanda en 25 unidades? ¿Con qué impuesto adicional por unidad debe gravarse al artículo de modo que el precio de equilibrio por unidad se incremente en UM$2,08?

D) Una empresa productora de Arequipe de café está diseñando el empaque para su producto. Parte del mismo será una caja abierta fabricada a partir de una pieza cuadrada de cartón, que se cortará con orillas de tres pulgadas cuadradas en cada esquina y se doblará en los lados (ver figura) La caja deberá contener 75 pulgadas cúbicas. ¿Cuáles son las dimensiones de la hoja cuadrada de aluminio que se debe utilizar?



E) una compañía fabrica dos tipos de helados tipo A y tipo B. El costo de fabricar cada unidad de tipo A es de UM$ 2 más que el de fabricar tipo B. Los costos de producción de tipo A y tipo B son de UM$ 1500 y UM$ 1000 respectivamente, y se manufacturaron 25 unidades más de tipo A que tipo B. ¿Cuántas unidades se fabricaron de cada uno de los productos?

F) Por cada UM$1000000 que invierta en compras en seguros, un banco recibe UM$ 116 64000 después de tres años. Esta cantidad representa el capital y los intereses compuestos anualmente. ¿Cuál es la tasa de interés?

G) El editor de una revista mensual tiene costos de publicaciones de 60 centavos de UM (unidades Monetarias) por ejemplar, y los ingresos de la publicidad el 15% de los ingresos obtenidos de las ventas que sobrepasan los 20 mil ejemplares. ¿Cuántos ejemplares deberá publicar y vender al mes para asegurar utilidades que sobrepasen los UM$4000?

H) Una empresa textil produce ropa para caballeros y esta planeando vender su nueva línea de conjuntos de trabajo con un costo para el detallista de UM$ 44 por conjunto. Por conveniencia del detallista la empresa colocará la etiqueta con el precio a cada conjunto. ¿Qué cantidad debe ser marcada en las etiquetas de modo que el detallista puede reducir este precio en un 20% durante una liquidación y aún así obtener una ganancia de UM$25 sobre el costo?

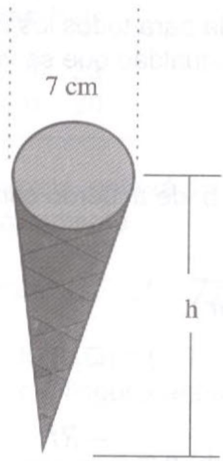
I) Un fabricante de CD vende cada CD a UM$1900. El costo de fabricación es de UM$ 1300. Los costos fijos mensuales son de UM$ 800. Durante el primer mes de de ventas de un nuevo CD, ¿Cuántos CD debe venderse para llegar al punto de equilibrio?

J) Una compañía productora de plátano compra una parcela en UM$ 72000000. después de vender todo excepto 30 hectáreas con una ganancia de UM$ 40 por hectárea sobre su costo original; el costo total de la parcela se recupero. ¿Cuántas hectáreas fueron vendidas?

K) Una compañía fabrica tapabocas para las clínicas de la ciudad, el costo combinado de mano de obra y material es de UM$7 por tapabocas. Los costos fijos (los costos de cierto tiempo sin importar la producción) son de UM$ 70000. Si el precio de venta de un tapaboca de UM$ 9 ¿Cuántos deben venderse para la compañía obtener utilidades?

L) Una editorial decidió que las páginas de una publicación debe tener márgenes de 3 cm en las partes superior e inferior y 2 cm a los lados. Ella indica además que la longitud de una pagina debe ser 3 veces su ancho y tener un área impresa de exactamente 20 cm^2. Calcular las dimensiones de una página de la publicación.

M) Una compañía de Armenia exporta empaques para conos a los estados unidos y Europa. Dicho cono ha de tener una capacidad de 15 cm^3 de nieve cuando se llene hasta el fondo. El diámetro del cono es de 7 cm y la copa de nieve forma una semiesfera. Encuentre la altura *h* del cono.



N) Las ganancias P de una empresa Caldense, varían directamente con las ventas S. Se conoce que las ganancias son de $UM 5000 cuando las ventas de $UM 50000. Calcular las ganancias cuando las ventas son de $UM 65 000.

O) Luego de varias investigaciones una compañía procesadora y exportadora de pulpa de naranja en Guatica encontró que el volumen V de ventas de pulpa de Naranja, es inversamente proporcional a la cantidad (10 + p), en donde p es el precio de ventas de cada bolsa de pulpa. Si V es 10000 cuando p es $UM 20, encontrar V cuando p es $UM 25.

RECAPITULACIÓN DE CONCEPTOS

1. Encierre con un círculo la respuesta correcta:

A) Al despejar *f* en la expresión $\frac{1}{f}=\frac{1}{s}+\frac{1}{r}$ se obtiene:

a) $f=\frac{1+s}{r\cdot s}$ b) $f=\frac{r\cdot s}{1+s}$

c) $f=\frac{r\cdot s}{r+s}$ d) Ninguna anterior.

B) Una ecuación es:

a) Una igualdad que solo se cumple para unos valores de las incógnitas.

b) Una ecuación es valida para todos los números reales.
c) Una ecuación es una igualdad que se verifica solo para los enteros.
d) Ninguna anterior.

2. Contraste las preguntas a y b de acuerdo con la siguiente información.

Al resolver para n, $I = \dfrac{nE}{(R+nr)}$

A) La solución esta dada por:

a) $n = \dfrac{R \cdot I}{r \cdot I - E}$ b) $n = \dfrac{-RI}{r \cdot I - E}$

c) $n = \dfrac{-RI}{rI + E}$ d) Ninguna anterior.

B) Existe una relación:

a) Directa entre n y R
b) Una relación inversa entre n y R.
c) No hay relación entre n y R
d) La relación directa es con E.

C)La solución del sistema de ecuaciones $\begin{cases} nx + my = n^2 + m^2 \\ mx + ny = 2nm \end{cases}$ es:

a) $x = n$ $y = m$ b) $x = m$ $y = n$
c) $x = 1$ $y = n$ d) Ninguna anterior.

D). La diferencia entre dos números es 15 y 1/3 de su suma es 11. Los números son:

a) *29* y *13* b) *29* y *15*
c) *29* y *14* d) *29* y *16*

3. Un nutricionista, en un experimento sobre nutrición, quiere preparar una dieta especial para unos pacientes especiales. El requiere una comida formada por una mezcla que contenga entre otras cosas, 22 onzas de proteínas y 8 onzas de grasa. El encuentra la comida preparada pero con las siguientes composiciones:

	Proteínas (%)	Grasa (%)
Mezcla A	30	4
Mezcla B	20	8

¿Cuántas onzas de cada mezcla deberá usar para preparar su mezcla? Resolver geométrica y algebraicamente.

A) Para el modelo de oferta y demanda: $O: 20-7p \quad D: -4+5p$. La solución es:

a) (p,Q) = (3,6) b) (p,Q) = (2,6)
c) (p, Q) = (6, 2) d) Ninguna anterior.

B) Al resolver el modelo de oferta y demanda $\begin{cases} 27-4p: D \\ -3+2p: O \end{cases}$. Se obtiene:

a) (7,5) b) (5,7)
c) (4,7) d) (7,4) e) Ninguna anterior.

C) Al resolver el sistema: $\begin{cases} 9x^2+y^2=90 \\ x^2+9y^2=90 \end{cases}$. Se obtiene:

a) $(3,3), (3,-3), (-3,3)\ y\ (-3,-3)$
b) $(-3,-3), (3,-3), (4,-4)\ y\ (-4,4)$
c) $(-4,4), (4,4), (-4,-4)\ y\ (4,-4)$
d) $(-4,2), (2,-4), (2,4)\ y\ (-2,4)$

PROBANDO NUESTRAS COMPETENCIAS

1. $\begin{cases} 2x-y=1 \\ 2x+3y=12 \end{cases}$. Obtenemos:

a) $x=11/4,\ y=15/8$ b) $x=7/4,\ y=9/8$
c) $x=15/8,\ y=11/4$ d) $x=2,\ y=3$

2. En la expresión $\frac{1}{k}+\frac{y}{T}=\frac{2}{w}$ el valor de T es:

a) $T=\dfrac{y\,k\,w}{2\,k-w}$ b) $T=\dfrac{Y(2\,k-w)}{k\,w}$

c) $T=\dfrac{2k-w}{y\,k\,w}$ d) Ninguna anterior.

3. Al resolver la ecuación $\dfrac{2(w+x)}{c}-\dfrac{3(c+x)}{w}=\dfrac{6(w^2-2c^2)}{w\,c}$ el valor de la incógnita x es:

a) $2c-3w$ b) $2w+3c$
c) $3w+2c$ d) $3w-2c$

4. Dada la ecuación $ax^2+ax+a=0\,;a\neq 0$, la afirmación falsa es:

a) Si $a=2$ la ecuación tiene dos raíces complejas conjugadas
b) Si $a<0$ la ecuación tiene raíces reales distintas
c) Si $a>4$ la ecuación tiene raíces reales distintas
d) Si $0<a<4$ la ecuación tiene raíces complejas conjugadas
e) $\forall\, a\in \Re^+$ las raíces de la ecuación son reales y distintas.

5. Dada la desigualdad $\dfrac{x}{x^2-1}\geq 0$, el conjunto solución es:

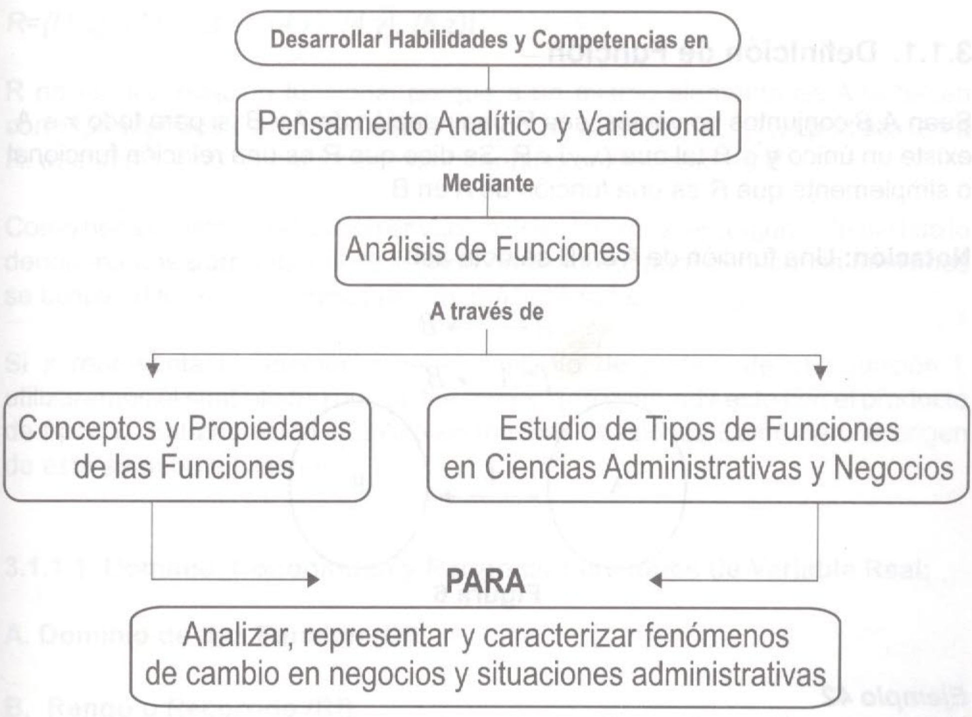
a) $(-1,0)\cup(1,\infty)$ b) $(-1,0]\cup[1,\infty)$
c) $(-1,0]\cup(1,\infty)$ d) $(-1,0)\cup[1,\infty)$

6. El departamento de compras de una compañía exportadora de partes para máquinas despulpadoras de café, estudia la compra de un vehiculo de carga más. Los analistas de compras estiman el costo del vehiculo en 18 000 UM. Han estimado también un costo promedio de operaciones de 0,40 UM por kilómetro. La función matemática que representa el costo total y la operación del vehiculo en términos del número de kilómetros es:

a) $C(x)=0{,}40x+18000$
b) $C(x)=40x+18000$
c) $C(x)=0{,}40+1800$
d) $C(x)=0{,}45+180000$

Capítulo 3

Algunas Funciones de Importancia en Ciencias Administrativas y Negocios



3.1. FUNCIONES

Un principio básico en las matemáticas es el concepto de función, tiene aplicaciones en ingeniería, contaduría, administración, economía, medicina, matemáticas, biología, química, etc.

En matemáticas utilizamos este nombre para denotar cierta clase de asociación entre los elementos de dos conjuntos. Estos conjuntos pueden ser de números o de otros objetos cualesquiera. Por ejemplo si en un almacén a cada artículo de le asocia un precio, entonces se tiene una función entre artículos y precios.

Cuando vamos a la Papelería para comprar algo, siempre pensamos en cuanto dinero tenemos disponible para la compra. En este momento estamos en función del dinero, también aquí hemos hablado de función. Si *y* es la compra y *X* el dinero, tenemos que la cantidad *y* depende de la magnitud *X*.

El éxito en el aprendizaje de una asignatura es función entre otras del tiempo que se dedique a ella para estudiarla.

3.1.1. Definición de Función

Sean *A,B* conjuntos no vacíos, sea R una relación de *A x B*; si para todo $x \in$ A, existe un único y $\in$ B tal que *(x,y)* $\in$ R. Se dice que R es una relación funcional o simplemente que R es una función de A en B.

Notación: Una función de A en B se nota así:

$$A \xrightarrow{f} B$$

$$f : A \to B$$

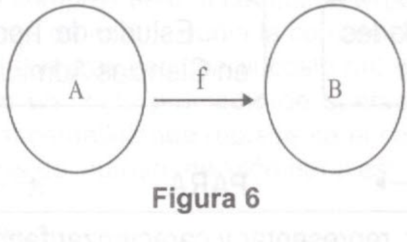
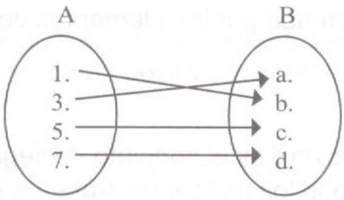


Figura 6

Ejemplo 42

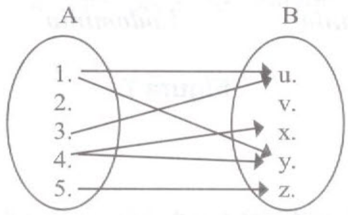
a) Sean A = *{1, 3, 5,7}* B= *{a, b, c, d}*



R = *(1,b),(3,a),(5,c),(7,d)*

Decimos que R es una relación funcional de *A* en *B*, o simplemente que es una función de A en B.

b) Sean *A* = *{1, 2, 3, 4, 5,6}* *B*= *{u, v, x, y, z}*



R={(1,u), (1,y), (3,u), (4,x), (4,y), (5,z)}

R no es una relación funcional porque a un mismo elemento de A le hacen corresponder dos elementos diferentes de B, ya que (1,u), (1,y) pertenecen a R. además a 2 no se hace corresponder ningún elemento de B.

Como hemos visto, una función envuelve dos conjuntos, al conjunto de partida lo denominamos **dominio** y al de llegada **codominio**, para denotar las funciones se utilizan diferencias letras, pero las más utilizadas son *f, g, h.*

Si *x* representa un elemento en el conjunto de partida de una función f, utilizaremos el símbolo f(x) que se lee "f de x " (no confundir esto con el producto de f por *x*). Esta notación la utilizó en muchas ocasiones Euler, pero el origen de ésta se debe a Clairaut.

3.1.1.1. Dominio, Condominio y Rango de Funciones de Variable Real:

A. Dominio de una Función (Df)

B. Rango o Recorrido (Rf)

Si *f* es una función de *X* en *Y*, el subconjunto de *X* para el cual *f* asigna una única $y \in Y$ se denomina el **Dominio** de la función f.

Es el subconjunto de *y* formado por los elementos de *y* que están asociados con el dominio de *f*.

C. Codominio (Cf)
El condominio de una función *f* es el conjunto de llegada.
Mediante un gráfico veamos los conceptos tratados (en forma intuitiva). Sean A y B dos conjuntos los cuales forman una función; es decir:

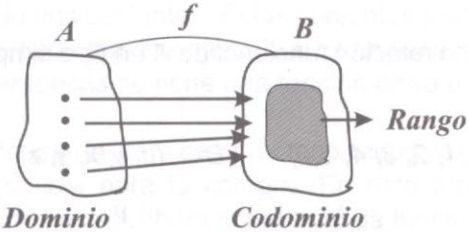


Figura 7

Ejemplo 43:
a) Hallar el dominio y rango de *f(x) = 5x - 3.*

Solución:
Dominio de *f* = *Df* = Reales (*R*); pues cualquier valor que tome *X* en 5x - 3 siempre es real.
Rango de *f* = *Rf* = Reales (R); pues cualquier valor que tome *y* siempre es real.

b) Hallar el dominio y rango de $f(x)=\sqrt{x+2}$

Solución:
Para hallar el dominio debemos analizar la cantidad subradical, la cual debe ser positiva o 0, para ello despejamos a *X* así:

$$x+2\geq 0 \quad \therefore \quad x\geq -2$$

$$Df=[-2,\infty)$$

Recuerde que la raíz par de un número negativo no existe en R.

Rango:
Despejamos *x*.
$y=\sqrt{x+1}\rightarrow y^2=\left(\sqrt{x+1}\right)^2\rightarrow y^2=x+1$
$\therefore \quad x=y^2+1$

Observe que cualquier valor que tome *y* es real, pero como se trata de una función y estamos utilizando la raíz positiva para *X*, el rango es igual:

$R^+ \cup \{0\} = [0, \infty)$.

c) Hallar el dominio y rango de:

$$f(x) = \frac{3x^2 + 5x - 2}{x + 2}$$

Solución:
Debemos factorizar la expresión del numerador y luego simplificar teniendo presente que el número -2 no hace parte del dominio por lo tanto:

$$f(x) = \frac{3x^2 + 5x - 2}{x + 2} = \frac{(x+2)(3x-1)}{(x+2)} = 3x - 1$$

DF = R - (-2). (Reales menos el -2). Ya que *x* no debe tomar el valor de -2 pues el denominador valdría 0 y así f(x) no estaría definida.

El rango de *f* consiste de todos los números reales excepto -7 que se obtiene al reemplazar *X* por -2 en *f(x) = 3x - 1.* Por tanto:
Rf = R-{-7}. El punto *(-2,-7)* lo suprimimos en la gráfica colocando allí un agujero (o).

3.1.2. La Función Lineal

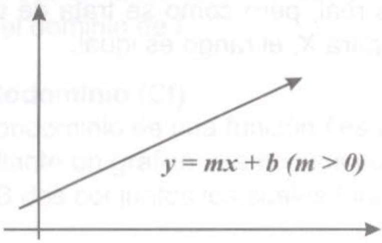
La función $f : R \rightarrow R$

$$x \rightarrow f(x) = mx + b$$

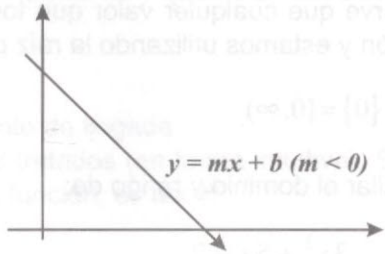
Donde *m, b* son números reales fijos, se denomina **Función Lineal**.

El dominio corresponde al igual que el rango al conjunto de números reales. La gráfica es una línea recta.

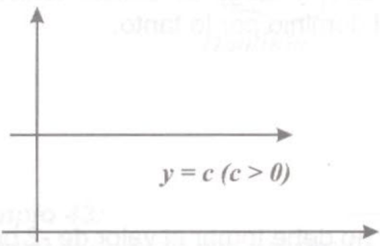
Gráficos:



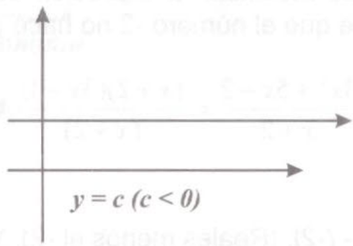
Recta con pendiente positiva
Al aumentar x también aumenta y



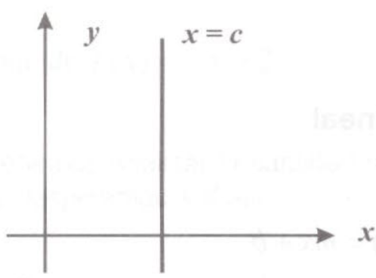
Recta con pendiente negativa
Al aumentar x disminute y



Recta con pendiente igual a cero
Recta constante
Al aumentar o disminuir x,
y permanece constante (y = c)



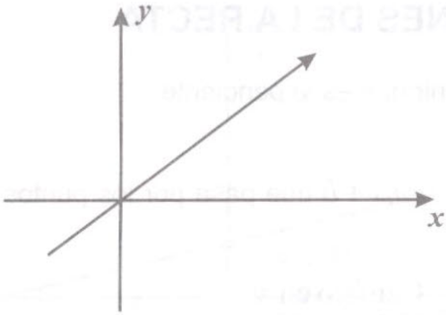
Recta con pendiente igual a cero
Recta constante



Pendiente Indefinida
x es constante sin importar
el valor de y (x = c)

Figura 8

Existe dentro de la familia de la función lineal una función llamada **idéntica.** Su forma es: $y = mx$ si $m = 1$ la grafica pasa por el origen a formando un ángulo de 45° con la horizontal.



y = mx, con m = 1

Figura 9

Algunas familias son:

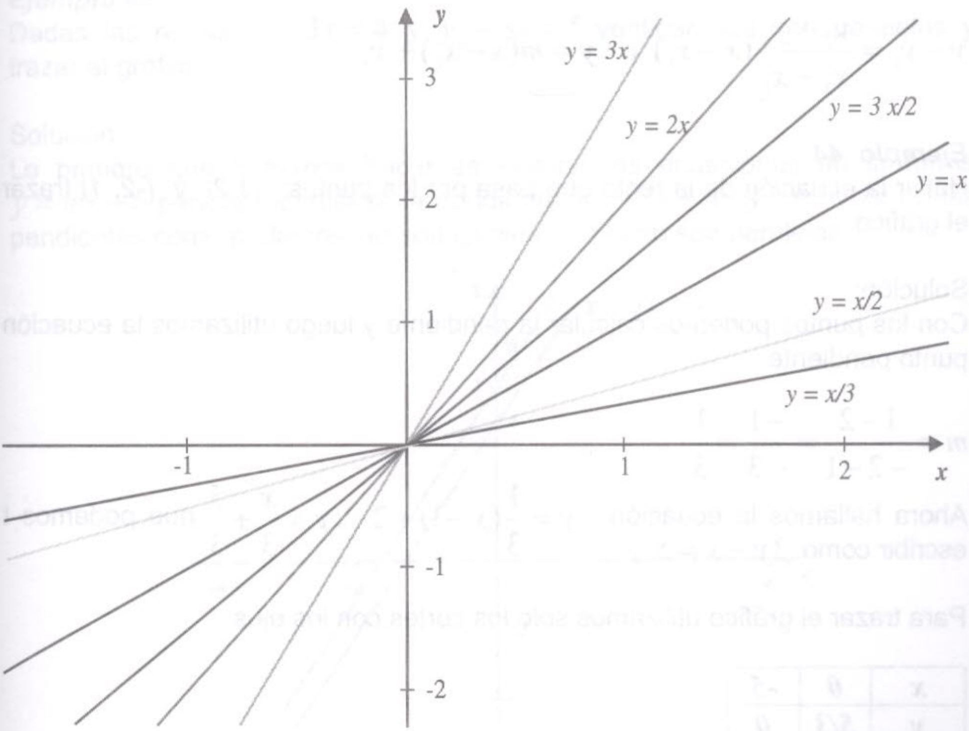


Figura 10

3.2. ECUACIONES DE LA RECTA

Primero vamos a definir que es la pendiente.
1. Pendiente

La pendiente de la $y = mx + b$ que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) recta está dada por:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta y} = \frac{\text{Cambio en } y}{\text{Cambio en } x}$$

3.2.1. Ecuación Punto Pendiente

$$y - y_1 = m(x - x_1) \text{ o } y = m(x - x_1) + y_1$$

La ecuación de la recta que pasa por el punto (x_1, y_1) y (x_2, y_2) y pendiente m está dada por:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \text{ o } y = m(x - x_1) + y_1$$

Ejemplo 44
Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos: *(1,2)* y *(-2, 1)* trazar el gráfico.

Solución:
Con los puntos podemos calcular la pendiente y luego utilizamos la ecuación punto pendiente:

$$m = \frac{1-2}{-2-1} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$$

Ahora hallamos la ecuación: $y = \frac{1}{3}(x-1) + 2 \therefore y = \frac{x}{3} + \frac{5}{3}$ que podemos t escribir como: $3y - x = 5$

Para trazar el gráfico utilizamos solo los cortes con los ejes.

x	*0*	*-5*
y	*5/3*	*0*

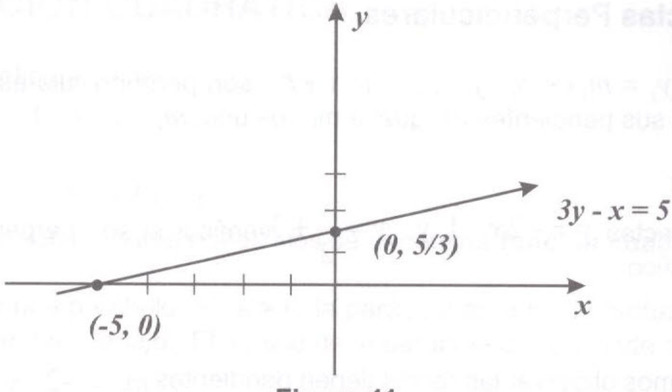


Figura 11

3.2.2. Rectas Paralelas

Dos rectas $y_1 = m_1x + b_1$ y $y_2 = m_2x + b_2$ son paralelas si y solo si sus pendientes son iguales es decir: $m_1 = m_2$.

Ejemplo 45

Dadas las rectas $y_1 - 3x = 4$ y $y_2 - 3x = 5$ verificar que son paralelas y trazar el gráfico.

Solución:

Lo primero que debemos hacer es escribir las ecuaciones en la forma $y = mx + b$ para así identificar la pendiente. $y_1 = 3x + 4$ y $y_2 = 3x + 5$ las pendientes como podemos ver son iguales, por tanto son paralelas.

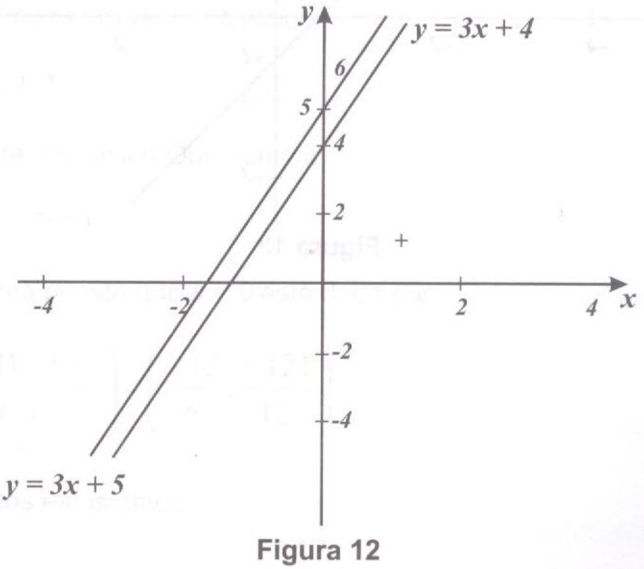


Figura 12

3.2.3. Rectas Perpendiculares.

Dos rectas $y_1 = m_1x + b_1$ y $y_2 = m_2x + b_2$ son perpendiculares si y solo si producto de sus pendientes es igual a menos uno. $m_1 \cdot m_2 = -1$

Ejemplo 46

Dadas las rectas $y = -2x - 1$ y $y = \frac{x}{2} + 3$ verificar si son perpendiculares y trazar el gráfico.

Solución:

Como podemos observar las rectas tienen pendientes $m_1 = -2$ y $m_2 = \frac{1}{2}$ al realizar el producto:

$(-2)\left(\frac{1}{2}\right) = -1$ como el producto es igual a ***-1*** las rectas son perpendiculares.

Gráfico:

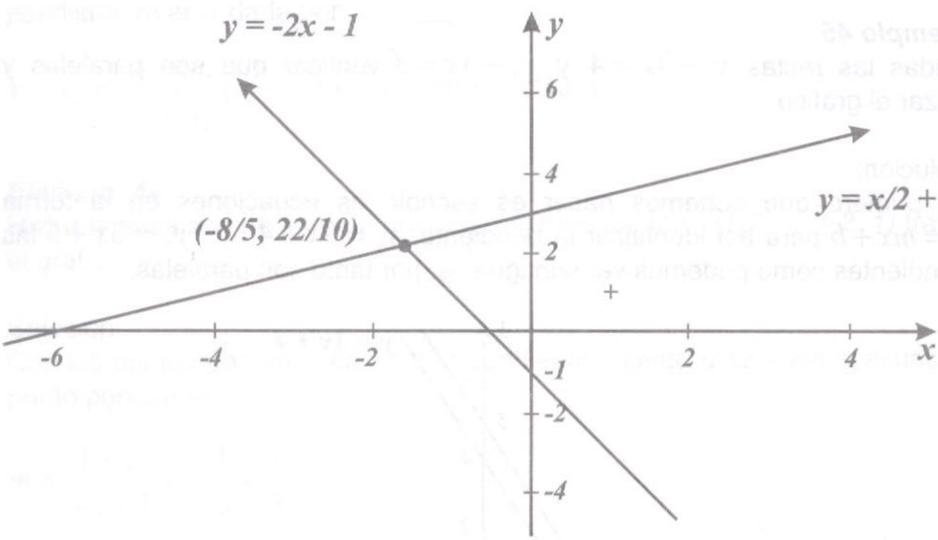


Figura 13

3.3. FUNCIÓN CUADRÁTICA

La función definida como:

$$f : R \to R$$

$$x \to f(x) = ax^2 + bx + c$$

Donde *a, b, c* son números reales fijos se denomina **función cuadrática**.

La gráfica es una parábola. Si ***a > 0*** la parábola abre hacia arriba si ***a < 0*** la parábola abre hacia abajo. El vértice de la parábola corresponde al punto

$\left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ que también puede ser un máximo o un mínimo.

Ejemplo 47
Trazar el gráfico de $y = 3x^2 + 13x + 4$

Solución:
Como vemos el valor de ***a = 3 > 0*** luego la parábola abre hacia arriba.

Cortes con los ejes:
El corte con el eje *x* se logra haciendo *y = 0* y el corte con el eje *y* se logra con *x = 0.*

Si $x = 0 \rightarrow y = 4$
Si $y = 0$ debemos resolver la ecuación:

$$0 = 3x^2 + 13x + 4$$

Por fórmula o factorización Obtenemos:

$$x = -1/3,\ o\ , x = -4$$

Punto de mínima puesto que *a > 0* está dado por:

$$\left(\frac{-13}{2(3)}, \frac{4(3)(4)-13^2}{4(3)}\right) = \left(\frac{-13}{6}, \frac{-121}{12}\right)$$

Tabulamos todos estos datos:

x	0	-1/3	-4	-13/6
y	4	0	0	-121/12

Gráfico:

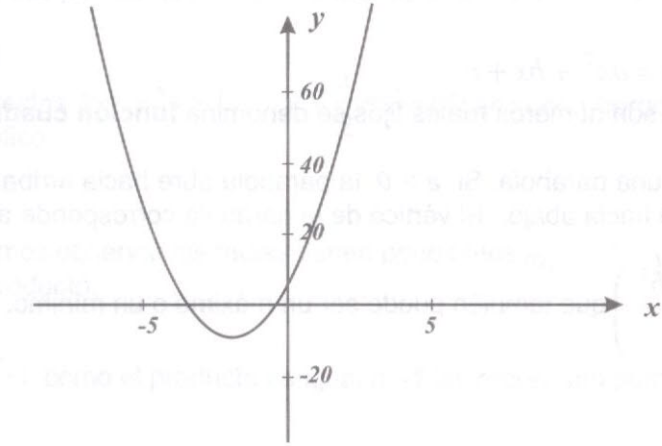


Figura 14

TALLER EN EL AULA DE CLASE No. 12

1. Trazar el gráfico de las funciones:

a) $f(x)=x-2$ b) $g(x)=4x+1$
c) $g(x)=4x^2-23x-35$
d) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x+2}$ e) $h(x)=6x^2-14x+4$
f) $y=x^2+2x-3$ g) $y=3x^2+2x-1$
h) $f(x)=12x^2-9x-30$
i) $g(x)=-7x^2+20x+3$
j) $h(x)=-3x^2-14x+5$
k) $f(x)=5x^2+11x-12$
l) $f(x)=4x^2+4x+1$

2. Hallar la ecuación de la recta que: (Trace el gráfico en cada caso)

a) Tiene pendiente -2 y pasa por lo puntos $(3,4)$ y $(-3,5)$

b) Pasa por los puntos: $(4,3)$ y $(2,-1)$.
c) Es paralela a $y = 5x + 4$ y pasa por el punto $(2,1)$.

d) Es perpendicular a $\dfrac{2x+y}{2} = 3$ y pasa por el punto $(-2,1)$.

3.4. GRÁFICA DE FUNCIONES

Al definir una función se puede tomar como un conjunto de parejas ordenadas *(x,y)*, luego si *y = f(x)* es una función real (en dominio y rango reales). La función *Y = f(x)* se define por: $\{(x,y)/\, x \in R,\ y \in R,\ y = f(x)\}$.

La representación geométrica no es más que el conjunto de parejas *(x,y)* en el plano cartesiano. La pareja *(x,y)* se obtiene al darle valores reales a *x*, obteniendo así el de *y*.

Supongamos que tenemos el gráfico de una función *y = f(x)* así:

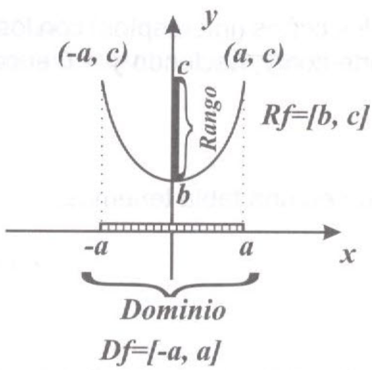


Figura 15

Recuerde: El dominio está sobre el eje *x*.
El rango sobre el eje *y*.

Ejemplo 48
a) Hallar el dominio, rango y trazar el gráfico de:

y = f(x) = x + 3.
Solución:

Dominio: En este caso el dominio consiste en el conjunto de los números reales pues cualquier valor que tome *x* es real.

Rango: Al igual que el dominio es el conjunto de los números reales.

Gráfico:

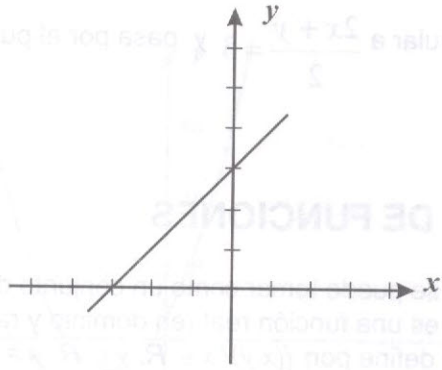


Figura 16

La ecuación que nos han dado es lineal por tanto su gráfico es una línea recta como lo veremos.

Para el gráfico hallamos los cortes (interceptos) con los ejes coordenados. Con $\boldsymbol{x = 0}$ encontramos el corte con y, haciendo $\boldsymbol{y = 0}$ encontramos el corte con el eje x así:

$x = 0 \rightarrow y = 3$
$y = 0 \rightarrow x = -3$ resumiendo en una tabla tenemos:

x	0	-3
y	3	0

Nota: Toda ecuación lineal siempre que no se defina entre intervalos o sistemas numéricos, tiene como dominio y rango el conjunto de los números reales, y su gráfica será una línea recta.

Qué ocurre si se define lo siguiente:

$$f : [-5,-2] \text{ ---------} [12,15]$$
$$x \text{ -----------} f(x) = x + 3 \ ?$$

Cuál es dominio y rango?
Cómo es su gráfica? (ejercicio).

b) Hallar el dominio, rango y trazar el gráfico de:
$y = f(x) = x^2 - 1$

Dominio: Consiste en todos los números reales, ya que todo valor que tome *X* es real.

Rango: Debemos despejar a *x*, así:

$y = x^2 - 1 \rightarrow y + 1 = x^2 \rightarrow \sqrt{y+1} = x$ luego $x = \sqrt{y+1}$

Ahora debemos analizar la cantidad subradical teniendo presente que esta cantidad debe ser positiva o cero por tanto:

$y + 1 \geq 0 \quad y \geq -1$, así que el rango consiste en todos los números reales mayores o iguales a -1. $R_f = [-1, \infty)$.

Gráfica:
La ecuación es cuadrática por tanto su dibujo es una parábola.
Para facilitar más el gráfico damos algunos valores teniendo presente los cortes (interceptos) con los ejes coordenados.

Con $X = 0$ conseguimos los cortes con *y* así:
si $x = 0 \; y = -1$.

Si $y = 0 x = -1 \quad x = 1$ ¿por qué?
Busquemos ahora el punto de máxima o mínima con la siguiente formula:

$$\left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a} \right)$$

Para nuestro caso tenemos:

$$\left(0, \frac{4(1)(-1)}{4(1)} \right) = (0,1)$$

Lo anterior lo podemos resumir en la siguiente tabla:

x	*0*	1	-1
y	-1	*0*	*0*

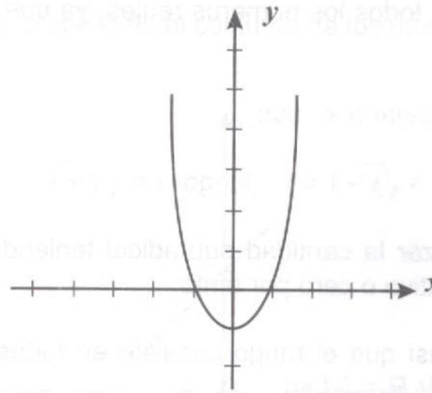


Figura 17

c) Hallar el dominio, rango y trazar el gráfico de:

$$y = f(x) = \sqrt{9 - x^2}$$

Solución:

Dominio: Despejamos *y* teniendo presente que la cantidad subradical debe ser positiva o cero, por tanto:
$9 - x^2 \geq 0$ factorizando $(3 - x)(3 + x) \geq 0$

Para resolver esta desigualdad debemos tener presente:

A) Desigualamos a cero cada factor.
B) La parte que nos cumpla la desigualdad; es decir su conjunto solución lo ilustraremos con un signo (+) y la parte que no cumpla con un signo (-). La solución será el producto de signos, observando que el signo dado al comienzo es mayor o igual, por tanto la solución es la parte donde se encuentra el signo más (+).

Lo anterior lo resumimos mediante el método gráfico siguiente:

$x \geq -3$ ---------------- -3 ++++++++++++++++++++++++++++

$x \leq 3$ ++++++++++++++++++++++++++++ 3 -----------------

$(x + 3)(3 - x) \geq 0$ ---------------- -3 ++++++++++++++++ 3 -----------------

Por tanto el dominio consiste en el intervalo cerrado:
Df = [-3, 3].

Si deseamos estar seguros tomamos un *x* en el intervalo solución, por ejemplo x = 0 y tenemos:

$$y = f(x) = \sqrt{9 - 0^2} = 3$$

y $3 \in [-3, 3]$ al igual que -3; pero si tomamos x = - 5 que está fuera de [-3, 3] observamos que no cumple pues:

$y = f(x) = \sqrt{9 - (-5)^2} = \sqrt{-16} \notin R$ (el cual no es real.)

Rango: Debemos despejar a *x* para obtener:

9Elevando ambos miembros al cuadrado tenemos

$$y^2 = \left(\sqrt{9 - x^2}\right)^2 \Leftrightarrow y^2 - 9 = -x^2 \therefore \sqrt{9 - y^2} = x$$

Analizando la cantidad subradical como en el dominio:
$9 - y^2 \geq 0 \;\; \therefore \;\; (3 - y)(3 + y) \geq 0.$

Utilizando el mismo procedimiento que para el dominio encontramos que el rango es igual a:

[-3, 2], pero como se trata de una raíz positiva, y como debemos tener en cuenta el dominio, el rango es entonces:

Rf = [0, 3].

Gráfica:

Para elaborarla debemos tener presente el dominio. Como se trata de un círculo dado por la ecuación:

$y^2 + x^2 = 9$ del cual solo podemos tomar la parte positiva; es decir tomamos medio círculo.

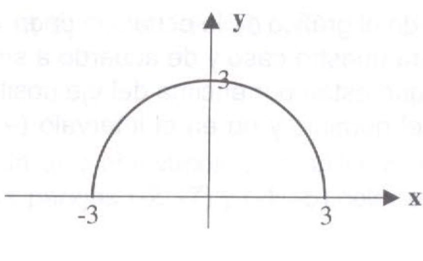


Figura 18

d) Hallar el dominio, el rango y trazar gráfico de:

$$y = f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$$

Solución:

Dominio: Despejamos a *y*, luego analizamos la cantidad subradical la cual debe ser positiva o cero así:

$$x^2 - 4 > 0 \;\Rightarrow\; (x-2)(x+2) > 0$$

$x - 2 > 0 \therefore x > 2$ ---------------------------●+++++++++ (2)

$x + 2 > 0 \therefore x > -2$ ---------●+++++++++++++++++ (-2)

$(x - 2)(x + 2) > 0$ +++++++●------------------●+++++++++ (-2, 2)

Observamos que el dominio corresponde a:
Df = (-∞, -2] ∪ [2, +∞) o también ***Df = R – (-2, 2);*** es decir los reales menos el intervalo ***(-2, 2).***

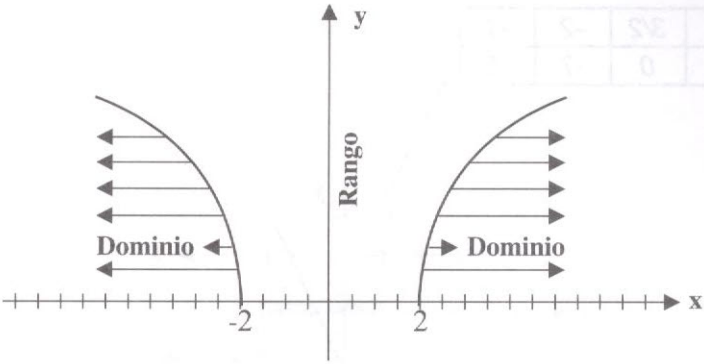
Rango: Debemos despejar a *x*, para obtener: y = x – 16 elevando ambos miembros al cuadrado tenemos:

$$y^2 = \left(\sqrt{x^2 - 4}\right)^2 \;\therefore\; \sqrt{y^2 + 4} = x$$ por qué?.

Observemos que *y* puede tomar cualquier valor real; pero como trata de una raíz positiva su rango se reduce a:

R f = [0, +∞).

Gráfica: Si tomamos todo el gráfico de la ecuación dada vemos que se trata de una hipérbola; pero para nuestro caso y de acuerdo a su dominio y rango solo tomamos los ramales que están por encima del eje positivo *y*. Damos algunos valores que estén en el dominio y no en el intervalo (-4, 4). Luego el gráfico es:



No hay Gráfica

Figura 19

e) Hallar dominio, rango y trazar el gráfico de:

$$y = f(x) = \frac{2x^3 + 3x^2 - 5x - 6}{x^2 + 3x + 2}$$

Solución:

Dominio: Factorizando la ecuación dada tenemos:

$$y = f(x) = \frac{(2x-3)(x+1)(x+2)}{(x+2)(x+1)}$$

Vemos que -2 y -1 no pueden hacer parte del dominio, ya que vuelven el denominador cero y por tanto:

Df = R - {-2, -1}. De acuerdo a esto podemos simplificar la expresión dada para obtener: ***f(x) = 2 x - 3.***

Rango: Consiste en todos los números reales excepto aquellos que se obtienen al reemplazar a *x* por -2 y -1; es decir:

f(-2) = 2(-2) - 3 = 7 y f(-1) = 2(-1) - 3 = -5
Rf = R - {-7, -5}.

Gráfica:
Dibujamos la expresión que obtuvimos al simplificar; es decir f(x) = 2x - 3. Para ello excluimos las parejas (-2, -7) y (-1, -5) colocando en el gráfico unos agujeros.

x	*0*	*3/2*	*-2*	*-1*
y	*-3*	*0*	*-7*	*-5*

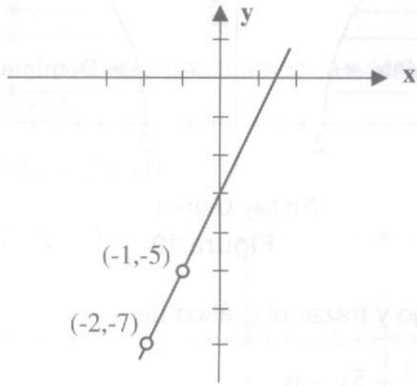


Figura 20

f) Encontrar dominio, rango y trazar la gráfica de:

$$f(x)=\begin{cases} x+4 & si \quad x>4 \\ 0 & si \quad -4\le x\le 4 \\ -3 & si \quad x<4 \end{cases}$$

Solución:
Se trata de una función escalonada(o a trozos)

Dominio: Consiste en el conjunto de los números reales, pues todo *x* está incluido como lo veremos en el gráfico.

Rango: Consiste en *Rf = {-3, 0}* $\cup$ *(8, +∞).*

Gráfica:
Es la siguiente:

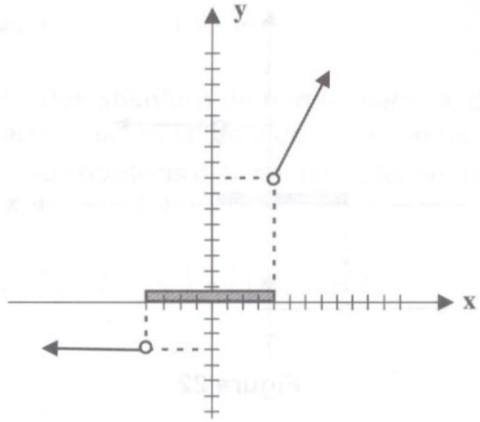


Figura 21

Observemos que:

- La gráfica solo se consigue utilizando la información dada al comienzo, y dando valores en los intervalos indicados.
- Al unir todos los segmentos del gráfico, comprobamos que el dominio es el conjunto de los reales.

g) Hallar el dominio, rango y trazar el gráfico de:

$$g(x)=\begin{cases} 3 & si \quad x\geq 2 \\ 0 & si \quad -3\leq x<2 \\ -4 & si \quad x<-3 \end{cases}$$

Solución:

Dominio: Es el conjunto de los números reales. Por qué?.

Dg = R.

Rango: Consiste en los números *{-4, 0 , 3};* es decir:

Rg = *{-4, 0, 3}*. Ya que son las únicas imágenes de cada segmento.

Gráfico:
Está formado por los segmentos dados, los cuales forman un gráfico escalonado.

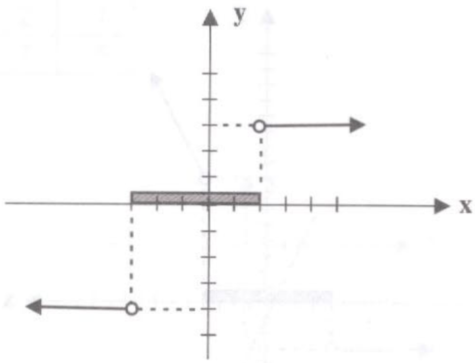


Figura 22

h) Encontrar el dominio, rango y trazar el gráfico de:

$$h(x) = \begin{cases} x^2+1 & si \quad 0 \le x < 2 \\ x+3 & si \quad x > 2 \\ \frac{1}{2}x+1 & si \quad x \le 0 \end{cases}$$

Solución:

Dominio: Es el conjunto de los números reales, exceptuando el 2 ya que se incluye. Como veremos en el gráfico.
Dh = R - {2}.

Rango: Es el conjunto de los números reales exceptuando 5 que es la imagen de 2. Por qué?.
Rh = R - {5}.

Gráfica:
Se obtiene dando valores en los intervalos dados.

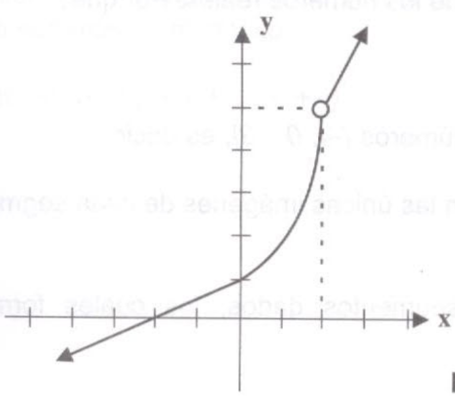


Figura 23

Función Valor Absoluto $y = f(x) = |x|$

Recordemos que el **valor absoluto** de unn número *a*, denotado por $|a|$, es la distancia de *a* hasta 0, sobre la recta de los números reales. Recordemos además que siempre son positivas o 0; por tanto, tenemos: $|a| \geq 0$ para todo número *a*.

Ejemplo, $|5| = 5 \quad |-5| = 5 \quad |\sqrt{3}-2| = \sqrt{3}-2$

En resumen:

$$|x| = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases}$$

Gráfica:

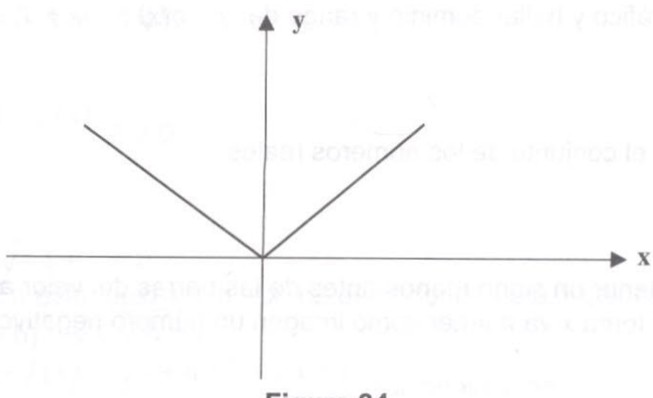


Figura 24

i) Hallar el dominio, rango y trazar el gráfico de: *y = f(x)* = |*x* + 2|

Solución:
Se trata de la función valor absoluto.

Dominio: Es el conjunto de todos los números reales, pues cualquier valor que tome *x* es real.
Df = R.

Rango: Consiste en el conjunto de los números reales positivos, ya que el valor absoluto de cada real es positivo. Rf = R.

Gráfico:
Se buscan los cortes con los ejes y se dan algunos valores, para obtener el siguiente gráfico. Desplazamos la gráfica a la izquierda 2 unidades, la función original es decir: $y = f(x) = |x|$

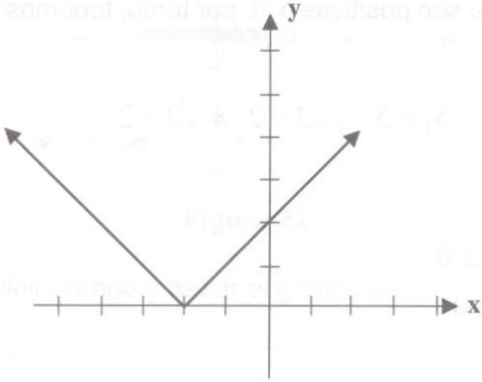


Figura 25

j) Trazar el gráfico y hallar dominio y rango de: $y = g(x) = -|x + 1|$

Solución:

Dominio: Es el conjunto de los números reales.

Dg = R.

Rango: Por tener un signo menos antes de las barras del valor absoluto toda cantidad que toma *x* va a tener como imagen un número negativo, por tanto:

$Rg = R^-$.

Gráfico:

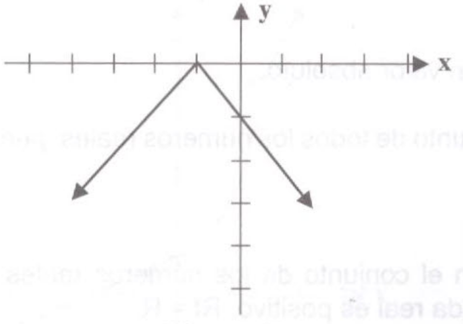


Figura 26

3.5. IMAGEN DE UNA FUNCIÓN

Sean A, B conjuntos no vacíos; sea ***f* : *A* → *B una función, x*→ *f(x)* = *y,*** a ***y*** se llama imagen de ***x*** por la función f, que denotaremos ***y* = *f(x).***

Ejemplo 49

1. Si $y = f(x) = 2x^2 - 3x + 1$.

Calcular las siguientes imágenes:

a) f(2)

b) f(-3)

c) f(a)

Solución:

a) $f(2) = 2(2)^2 - 3(2) + 1 \rightarrow f(2) = 8 - 6 + 1 \rightarrow f(2) = 3.$

b) $f(-3) = 2(-3)^2 - 3(-3) + 1 \rightarrow f(-3) = 2(9) - 3(-3) + 1 \rightarrow f(-3) = 28.$

c) $f(a) = 2(a)^2 - 3(a) + 1 \rightarrow f(a) = 2a^2 - 3a + 1 \therefore f(a) = 2a^2 - 3a + 1$

2. Si $f(x) = \sqrt{x+1}$. Hallar:

a) f(-1)

b) f(x + h)

c) $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}; h \neq 0$

Solución:

a) $f(-1) = \sqrt{-1+1} = 0$

b) f(x + h). En este caso x + h = x; es decir donde está *x* colocamos (x + h).
Luego: $f(x + h) = \sqrt{x + h + 1}$.

c) $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \dfrac{\sqrt{x+h+1} - \sqrt{x+1}}{h}$, racionalizando:

$$= \frac{(\sqrt{x+h+1} - \sqrt{x+1})(\sqrt{x+h+1} + \sqrt{x+1})}{h(\sqrt{x+h+1} + \sqrt{x+1})}$$

$$= \frac{x+h+1-(x+1)}{h(\sqrt{x+h+1} + \sqrt{x+1})} = \frac{x+h+1-x-1}{h(\sqrt{x+h+1} + \sqrt{x+1})}$$

$$= \frac{h}{h(\sqrt{x+h+1} + \sqrt{x+1})}$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{x+h+1} + \sqrt{x+1})}$$

3. Dada $g(x) = 2x^2 - 1$, encontrar:
a) $g(-5)$
b) $g(½)$
c) $g(x) - g(h)$
d) $g(x^3)$
e) $g(2x^2 - 3)$.

Solución:
a) $g(-5) = 2(-5)^2 - 1 = 49$.
b) $g(½) = 2(½)^2 - 1 = 2/4 - 1 = -½$.
c) $g(x) - g(h) = 2x^2 - 1 - (2h^2 - 1) = 2x^2 - 1 - 2h^2 + 1 = 2x^2 - 2h^2$.
d) $g(x^3) = 2(x^3) - 1 = 2x^3 - 1$.
e) $g(2x^2 - 3) = 2(2x^2 - 3)^2 - 1 = 2(4x^4 - 12x^2 + 9) - 1$.
$= 8x^4 - 24x^2 + 18 - 1 = 8x^4 - 24x^2 + 17$.

3.6. IGUALDAD DE FUNCIONES

Sean $y = f(x)$ y $y = g(x)$ se dice $f(x) = g(x)$ si y sólo si tienen el mismo dominio, para todo x.

3.7. OPERACIONES ENTRE FUNCIONES

Sean f y g dos funciones, podemos definir las siguientes operaciones:

3.7.1. Suma

La suma de f y g se define por: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.

3.7.2. Diferencia

La diferencia de f y g se define por: $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$.

3.7.3. Producto

El producto de f y g se define por: $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$.

3.7.4. Cociente

El cociente de f y g se define por: (f / g)(x) = f(x) / g(x), g(x) ≠ 0.

Nota: El dominio en cada caso es la intersección de el dominio de f con el dominio de g, exceptuando el cociente donde deben excluirse los valores que hacen g(x) = 0.

Ejemplo 50

1. Sean f(x) = x - 3 $g(x) = \sqrt{x+2}$ encontrar:
a) f + g
b) f - g
c) f · g
d) f / g y el dominio en cada caso.

Solución:
a) (f + g)(x) = x - 3 + $\sqrt{x+2}$; Df = R; Dg = x > -2 por qué?
Df ∩ Dg = R ∩ [-2, ∞) = D(f + g).

b) (f - g)(x) = x - 3 - $\sqrt{x+2}$; D(f – g) = [-2, ∞). Por qué?

c) (f · g)(x) = (x - 3)($\sqrt{x+2}$) = x $\sqrt{x+2}$ - 3 $\sqrt{x+2}$.
D(f · g) = [-2, ∞). Por qué?

d) (f / g)(x) = (x - 3) / $\sqrt{x+2}$.
D(f/g) = (-2, ∞). Observe que se debe excluir a -2, pues si se toma, el denominador será cero lo cual no está definido.

2. Sean f(x) = $\sqrt{x^2-25}$ y g(x) = $\sqrt{x-5}$ encontrar:
a) f + g
b) f · g
c) f / g.

Solución:
a) (f + g)(x) = x^2 - 25 + x - 5.
Df = (-∞, -5] ∪ [5, ∞). Por qué?
Dg = [5, ∞). Luego D(f + g) = Df + Dg = [5, ∞).

b) (f · g)(x) = ($\sqrt{x^2-25}$)($\sqrt{x-5}$).
D(f · g) = [5,∞).

c) $(f/g)(x) = \sqrt{x^2-25} \,/\, \sqrt{x-5} = (\sqrt{x-5})(\sqrt{x+5}) \,/\, (\sqrt{x-5}) = x+5.$

Para el dominio sólo excluimos a 5 y tenemos:
$D(f/g) = (5, \infty)$.

3. Sean f(x) = (x + 3) / (x - 3) y g(x) = 1 / (x - 8). Hallar:
a) f + g
b) f - g
c) f · g
d) f / g y dominio en cada caso.

Solución:

a) $(f+g)(x) = \dfrac{x+3}{x-3} - \dfrac{1}{x-8} = \dfrac{x^2-6x-21}{(x-3)(x-8)}$

Df = R - {3} y Dg = R - {8}.
D(f + g) = R - {-8, 3}.

b) (f - g)(x) (ejercicio).

c) $(f \cdot g)(x) = \left(\dfrac{x+3}{x-3}\right)\left(\dfrac{1}{x-8}\right) = \dfrac{x+3}{(x-3)(x-8)}$

D(f · g) = R - {-8, 3}.

d) $(f/g)(x) = \dfrac{\dfrac{x+3}{x-3}}{\dfrac{1}{x-8}} = \dfrac{(x+3)(x-8)}{(x-3)} = \dfrac{x^2-5x-24}{(x-3)}$ Por qué?.

D(f / g) = R - {-8, 3}.

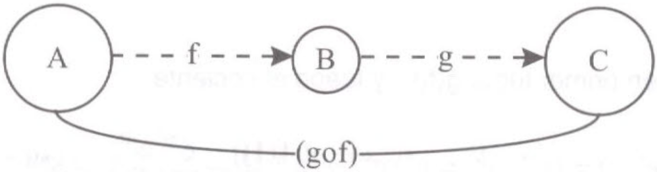
3.8. FUNCIÓN COMPUESTA

Definición: Sean f y g funciones, la función compuesta, por f o g, está definida por: ***(f o g) = f(g(x)).*** (se lee f ó g de *x*, en su defecto f compuesta g).

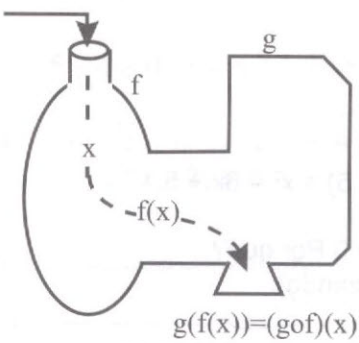
El dominio de f o g consiste en el conjunto de todos los números reales *x* en el dominio de g tales que g(x) está en el dominio de f. (El dominio en otras palabras es el de la función que se obtiene al final).

Si $f : A \to B$ y $g: B \to C$ ilustrar mediante un gráfico (gof)(x).

Solución:



Otra forma: Supongamos que tenemos una máquina f y una máquina g que actúan consecutivamente como si fuese una sola así:



Nota: La composición de funciones no es conmutativa en general.

Cómo ilustraría usted (fog)(x)?.

Ejemplo 51

1.Sean $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = x + 3$, hallar:

a)(f o g)(x)

b) (g o f)(x)

c) Dominio de (f o g)(x) y (g o f)(x).

Solución:

a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x + 3) = (x + 3)^2 + 1 = x^2 + 6x + 9 + 1.$

$= x^2 + 6x + 10.$

Recuerde lo visto en la imagen de una función. Aquí $x = x + 3$.

b) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 1) = (x^2 + 1) + 3 = x^2 + 4.$

c) D(fog) = R; D(gof) = R.

2. Si $f(t) = e^{t+\alpha}$; $h(t) = e^{b^2 t}$ y $g(y) = y^{b^2}$ hallar:

$g(f(t)) / h(t)$

Solución:
Calculamos en primer lugar $g(f(t))$ y luego el cociente.

$$g(f(t)) = g(e^{t+\alpha}) = (e^{t+\alpha})^{b^2} = e^{tb^2} e^{\alpha b^2}; \frac{g[f(t)]}{h(t)} = \frac{e^{tb^2} e^{\alpha b^2}}{e^{b^2 t}} = e^{\alpha b^2}$$

3. si $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^2 - 6x + 5$. Hallar:
a) (f o g) (x)
b) Dominio y Rango
c) Trazar el gráfico.

Solución:
a) $(f \circ g)(x) = f(x^2 - 6x + 5) = x^2 - 6x + 5$.

b) Dominio: $x^2 - 6x + 5 > 0$ Por qué?.
$(x - 5)(x - 1) > 0$ (factorizando).

Ahora por el método de los signos tenemos:

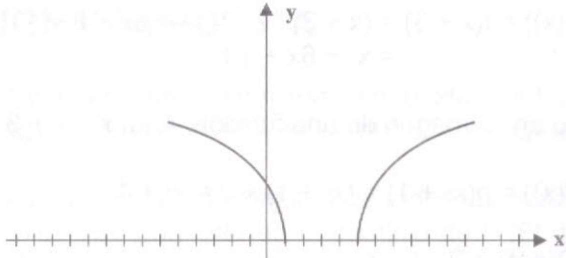
$x - 1 \geq 0 \therefore x \geq 1$ -------------- +++++++++++++++++++++++++++
1

$x - 5 \geq 0 \therefore x \geq 5$-- ++++++++++
5

$(x - 5)(x - 1) \geq 0$ ++++++++++ ------------------------------++++++++++
1 5

Luego $D(f \circ g) = (-\infty, 1] \cup [5, \infty)$.
$R(f \circ g) = [0, \infty)$.

c) Gráfico:



4. Sean f(x)= $\sqrt{x^2-4}$ g(x)+ $\sqrt{x-\sqrt{5}}$. Hallar:
a) (f o g)(x)
b) (g o f)(x)
c) D(f o g)
d) D(g o f).

Solución:

a) (f o g)(x) = f(g(x)) = f($\sqrt{x-\sqrt{5}}$) = $\sqrt{(\sqrt{x-\sqrt{5}})^2-4}$
$= \sqrt{x-\sqrt{5}-4}$

b) (g o f)(x) = g(f(x)) = g($\sqrt{x^2-4}$) = $\sqrt{\sqrt{x^2-4}-\sqrt{5}}$

c) Dominio de f o g = $\sqrt{x-\sqrt{5}-4 \geq 0}$ $x \geq \sqrt{5}+4$ luego D(fog) = [$\sqrt{5}$ + 4, ∞).

d) Dominio de g o f = $\sqrt{x^2-4}$ - $\sqrt{5} \geq 0 \leftrightarrow \sqrt{x^2-4} \geq \sqrt{5}$ $x^2 - 4 \geq 5$
$x - 4 - 5 \geq 0 \leftrightarrow x - 9 \geq 0$ $(x-3)(x+3) \geq 0$

$x - 3 \geq 0 \therefore x \geq 3$ ----------------------------------+++++++++++++
3
$x + 3 \geq 0 \therefore x \geq -3$ ------------------- +++++++++++++++++++++++
-3
$(x - 3)(x + 3) \geq 0$ +++++++++++++------------ +++++++++++++
-3 3

Luego D(gof) = (-∞, -3] ∪ [3, ∞).

3.9. CLASES DE FUNCIONES

3.9.1. Función Inyectiva

Sea $f : A \rightarrow B$

$x \rightarrow f(x)$

Sean x_1, x_2 dos elementos de A, tales que $x_1 \neq x_2$, si $f(x_1) \neq f(x_2)$, se dice que f es inyectiva o uno a uno. Es decir equivale a decir que $f(x_1), f(x_2)$ son dos imágenes en el rango de f tales que $f(x_1) = f(x_2)$; $x_1 = x_2$.

Ejemplo 52

Verificar que $f: \Re \rightarrow \Re$

$$x \rightarrow f(x) = 3x + 2$$

Solución

Sean $x_1, x_2 \in \Re$ tales que $x_1 \neq x_2$, entonces $3x_1 + 2 = 3x_2 + 2$, $\Rightarrow 3x_1 = 3x_2 \quad \Rightarrow \quad x_1 \neq x_2 \quad \therefore \quad f(x_1) \neq f(x_2)$.

3.9.2. Función Sobreyectiva

Sea $f: A \rightarrow B$

$$x \rightarrow f(x)$$

Siempre que rango de *f* este contenido en el codominio de *f*, es decir, rango $f \subset B$ cuando rango de $f = \text{codominio de } f$, es decir rango de *f* = *B*, se dice que f es sobreyectiva, o simplemente sobre.

$$(\forall\, y \in B)(\exists\, x \in A)(f(x) = y)$$

Ejemplo

$$f: A \rightarrow B$$

$$x \rightarrow f(x) = 3x + 7$$

f es sobreyectiva , pues para todo $y \in \text{codominio de } f$, existe un $x \in \text{dominio de } f$ tal que $y = 3x + 7$.

Ejemplo

$$f: A \rightarrow B$$

$$x \rightarrow f(x) = x^2$$

f no es sobreyectiva , ningún número real negativo y se puede expresar en la forma $y = x^2$. Observemos que $f = \Re^+, \text{codominio } f = \Re$.

3.9.3. Función Biyectiva

Si *f* es inyectiva y sobreyectiva se dice que es **biyectiva.**

3.10. INVERSA DE UNA FUNCIÓN

Sea $f : A \to B$

$x \to f(x)$

Una función biyectiva; si existe una función, $g : B \to A$

$x \to g(x)$

Tal que $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$, decimos que *g* es la inversa de *f*. la notación es: $f^{-1}(x)$

Para que la inversa exista, la función *f* debe ser biyectiva(uno a uno y sobre).

Ejemplo 53
Hallar la inversa de $f(x) = 4x + 1$

Solución
Para hallar la inversa despejamos x.

$$y = 4x + 1$$
$$y - 1 = 4x$$
$$\frac{y-1}{4} = x$$

Por tanto la inversa de *f* es:
$$f^{-1}(x) = \frac{x-1}{4}$$

Comprobemos que efectivamente es la inversa:

$$(f \circ f^{-1})(x) = f\left(\frac{x-1}{4}\right) = 4\left(\frac{x-1}{4}\right) + 1 = x - 1 + 1 = x$$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(4x+1) = \frac{4x+1-1}{4} = \frac{4x}{4} = x$$

Por tanto como obtuvimos *x* en ambas composiciones, concluimos que *g* es la inversa de *f*.

El grafico de f y f^{-1} es el siguiente:

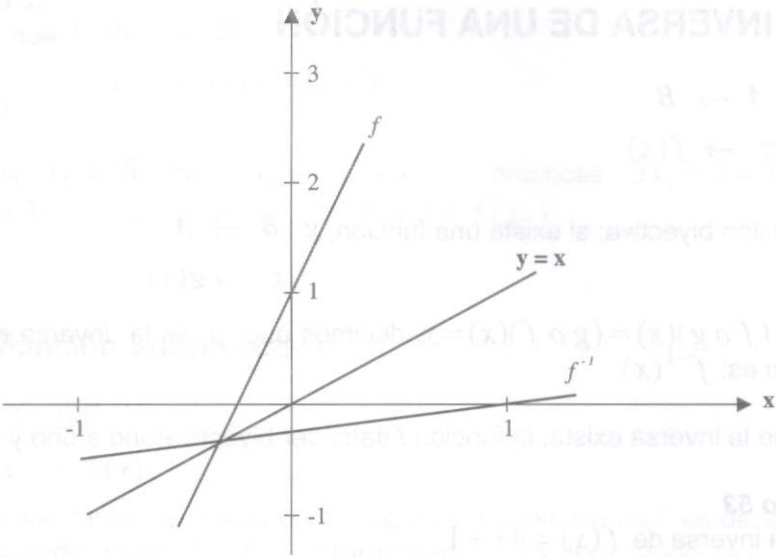


Figura 27

Observemos que son simétricas con respecto a la recta $y = x$.

Ejemplo 54

1. Hallar el dominio para que la función $y = x^2 + 3$

a) Tenga inversa.

b) Halle la inversa.

c) Trace el gráfico de f y f^{-1}

Solución

El dominio de la función es el conjunto de los números reales, pero si tomamos las dos ramas de la parábola, esta deja de ser inyectiva (uno a uno). Por tanto podemos tomar la rama derecha o la izquierda, en nuestro caso vamos a tomar la derecha es decir de $[0, +\infty)$.

a) Calculemos la inversa

$$y = x^2 + 3 \Rightarrow y - 3 = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y-3} \quad \therefore g(x) = f^{-1}(x) = \sqrt{x-3}$$

b) Comprobemos que efectivamente es la inversa:

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x-3}) = (\sqrt{x-3})^2 + 3 = x$$

$$(gof)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 3) = \sqrt{x^2 + 3 - 3} = x$$

Hemos comprobado mediante la composición de funciones que *g* es la inversa de *f*.

c) La gráfica es:

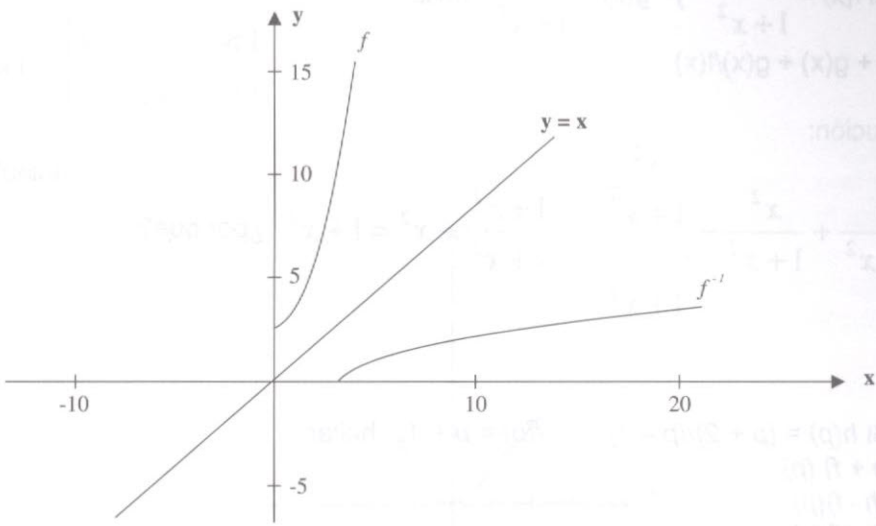


Figura 28

2. Si $f(x) = 3x^2 - x + 2$ *hallar.*
a) $f(-3)$
b) $f(x^4)$
c) $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}; h \neq 0$

Solución:
a) $f(-3) = 3(-3)^2 - (-3) + 2 = 32.$
b) $f(x^4) = 3(x^4)^2 - x^4 + 2 = 3x^8 - x^4 + 2.$
c)
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{3x^2+6xh+3h^2-x-h+-(3x^2-x+2)}{h}$$
$$= \frac{3x^2+6xh+3h^2-x-h+2-3x^2+x-2}{h}$$
$$= \frac{6xh+3h^2-h}{h} = \frac{h(6x+3h-1)}{h}$$
$$= 6x+3h-1$$

3. Si $f(x) = x - 1$ y $g(x) = 1/(x + 1)$ demuestre que $f(x^2) \cdot g(x) = f(x)$

Solución:
Calculamos $f(x^2) = x^2 - 1$ luego
$(x^2 - 1)(1 / (x + 1)) = (x + 1)(x - 1)/(x + 1) = x - 1$ que corresponde a f(x).

4. si $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ y $g(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$ hallar:
f(x) + g(x) + g(x)/f(x).

Solución:

$$\frac{1}{1+x^2}+\frac{x^2}{1+x^2}-\frac{\frac{x^2}{1+x^2}}{\frac{1}{1+x^2}} \qquad \frac{1+x^2}{1+x^2}+x^2=1+x^2$$ ¿por qué?.

5. Si $h(p) = (p + 2)/(p - 1)$ $f(p) = p + 1$; hallar:
a) $(h + f)(p)$
b) $(h \cdot f)(p)$
c) $(h / f)(p)$
d) Dominio en cada caso.

Solución:

a) (h + f)(p) =
$$\frac{p+2}{p-1}+p+1=\frac{p+2+(p+1)(p-1)}{(p-1)}=\frac{p^2-1+p+2}{p-1}=\frac{p^2+p+1}{p-1}$$
D(h+f) = R – {1}.

b) $(h \cdot f)(p) = \left(\dfrac{p+2}{p-1}\right)(p+1)=\dfrac{p^2+p+2p+2}{p-1}=\dfrac{p^2+3p+2}{p-1}$

D(h·f) = R – {1}.

c) $(h / f)(p) = \dfrac{\frac{p+2}{p-1}}{\frac{p+1}{1}}=\dfrac{p+2}{(p-1)(p+1)}=\dfrac{p+2}{p^2-1}$

D(h/f) = R – {-1, 1}. Pues cuando reemplazamos a p por 1 y -1 el denominador es cero.

6. Dada la siguiente función trace el gráfico y halle el dominio.

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & si \quad x<1 \\ x & si \quad x\geq 1 \end{cases}$$

Solución:

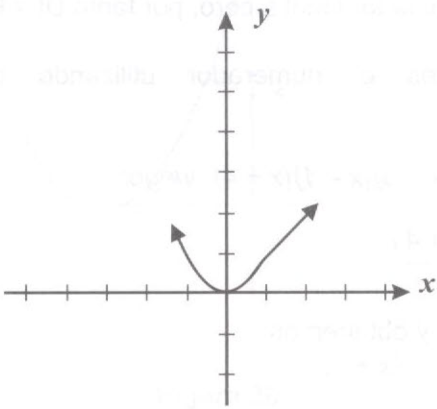


Figura 29

7. Df = (-∞, +∞). ¿Cuál es el rango?. En la anterior función halle:

a) f*(-1)*
b) f(0)
c) f(1)
d) f(3).

Solución:
Tomamos la parte correspondiente a $\boldsymbol{x^2}$ así:
a) $f(-1) = (-1)^2 = 1$.
b) $f(0) = (0)^2 = 0$.

Ahora lo correspondiente a *x*.

c) $f(1) = (1) = 1$
d) $f(3) = (3) = 3$.

Qué nombre reciben las funciones del ejemplo del numeral 6)?.
Respuesta: Este tipo de funciones se denominan compuestas.
Puede usted crear algunas?.

8.Hallar el dominio y rango de:

$$f(x) = \frac{x^3 + 6x^2 + 5x - 12}{x - 1}$$

Solución:

Dominio: Como se observa *x* puede tomar cualquier valor con excepción de 1 el cual hace el denominador igual a cero, por tanto Df = R – {1}.

Rango: Factorizamos el numerador utilizando división sintética y encontramos:

$x^3 + 6x^2 + 5x - 12 = (x + 3)(x - 1)(x + 4)$; *luego:*

$$y = \frac{(x+3)(x-1)(x+4)}{(x-1)}$$

si $x \neq 1$ simplificamos y obtenemos:
$y = (x + 3)(x + 4) = x^2 + 7x + 12.$

Rango: *y* puede tomar cualquier valor con excepción de 20 que es el número encontrado al reemplazar a *x* por 1 en la expresión que simplificamos, por tanto: Rf = R – {20}.

El gráfico corresponde a una parábola, de la cual excluimos el punto (1, 20).

Cortes con los ejes:
Con *y* tenemos: $x = 0 \leftrightarrow y = 12.$
Con x tenemos: $y = 0 \leftrightarrow 0 = x^2 + 7x + 12$
$= (x + 3)(x + 4) \rightarrow x = -3$ ó $x = 4.$

Recuerde: $a \cdot b = 0$ *si y sólo si* $a = 0$ ó $b = 0$; $a, b \in R$.

Punto de mínima: (*si* $a > 0$ hay mínima)

$$\left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right) = \left(\frac{-7}{2}, \frac{-1}{4}\right)$$

Resumiendo:

x	0	-3	-4	-7/2	1
Y = f(x)	12	0	0	-1/4	20

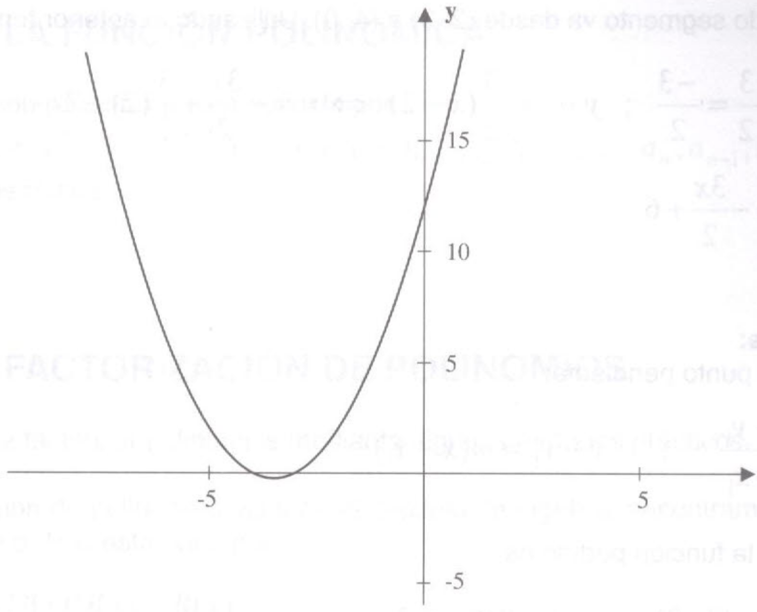


Figura 30

9. Hallar la fórmula para la función representada en la figura:

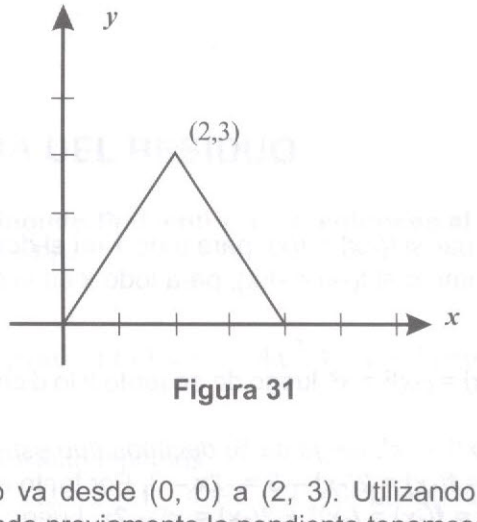


Figura 31

Solución:

El primer segmento va desde (0, 0) a (2, 3). Utilizando la ecuación punto pendiente y calculando previamente la pendiente tenemos:

$$m=\frac{3-0}{4-2}=\frac{3}{2} \quad ; \quad y-0=\frac{3}{2}(x-0) \quad \therefore \quad y=\frac{3}{2}x$$

El segundo segmento va desde (2, 3) a (4, 0). Utilizando lo anterior tenemos:

$$m=\frac{0-3}{4-2}=\frac{-3}{2}\ ;\ y-3=\frac{3}{2}(x-2)\ \Leftrightarrow y=-\frac{3x}{2}+\frac{3}{2}(2)+3$$

$$\therefore\ y=-\frac{3x}{2}+6$$

por qué?

Recuerde:
Ecuación punto pendiente:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\ ;\quad y-y_1=m(x-x_1)$$

Por tanto la función pedida es:

$$h(x)=\begin{cases}(3/2)x & si\quad 0\le x\le 2\\ (-3/2)x+6 & si\quad 2\le x\le 4\end{cases}$$

10. Dadas las siguientes funciones decir cuales son pares y cuales impares:
a) $y = x^2$
b) $y = x^3$
c) $y = 2x - 3$
d) $y = x^2 + 2x$
e) $y = x^5 + 1$.

Solución:
Recordemos que:
A) Una función f es par *si* $f(-x) = f(x)$, para todo x en el dominio de f.
B) Una función f es impar si $f(-x) = -f(x)$, para todo x en el dominio de f.

Veamos entonces:
a) $y = x^2 \rightarrow y = f(-x) = (-x)^2 = x^2$ luego de acuerdo a lo dicho en A) esta función es par.
b) $y = x^3 \rightarrow y = f(-x^3) = -x^3$, *luego de B) decimos que esta función es impar.*
c) $\boldsymbol{y = 2x - 3 \rightarrow y = f(-x) = 2(-x) - 3 = -2x -}$ 3. Por tanto es impar.
d) $\boldsymbol{y = x^2 + 2x \rightarrow y = f(-x) = (-x)^2 + 2(-x) = x^2 - 2x}$. Luego es impar.
e) (Ejercicio).

3.11. LA FUNCIÓN POLINOMICA

La función polinómica está definida por:
$f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, $x \in \Re$ con $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ números reales.

3.12. FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

Vamos a factorizar polinomios mediante algunos métodos prácticos.

La división de polinomios vista en el capitulo de algebra, encontramos que el polinomio *P(x)* está dado por:

$$P(x)=D(x)Q(x)+R(x)$$

Si *D(x)* tiene la forma $x-r$ esto se convierte en $P(x)=(x-r)Q(x)+R$. Donde *R* es de un grado menor que *x – r* debe ser una constante.

Esta identidad es valida para todos los valores de *x* incluyendo *x* = *r*. Luego:
$P(r)=(r-r)Q(r)+R=0+R$

3.13. TEOREMA DEL RESIDUO

Si se divide un polinomio *P(x)* entre *x – r*, entonces el residuo constante *R* esta dado por *R = P(r)*.

Ejemplo 55
Hallar el residuo de dividir $f(x)=x^3-4x^2+5x-2$ entre $x-1$.

Solución
Por el teorema del residuo tenemos:
$f(1)=1^3-4(1)^2+5(1)-2=1-4+5-2=0$ Luego la división es exacta, es decir si y solo si *x – r* es un factor de *P(x)*.

3.14. TEOREMA DEL FACTOR

Un polinomio *P(x)* tiene a *r* como un cero si y sólo si tiene a $x-r$ como factor.

Algunas veces es fácil localizar un cero de un polinomio, el teorema del factor nos puede ayudar a encontrar los demás ceros del polinomio.

Ejemplo 56
Hallar los ceros de: $P(x)=2x^3-5x^2-4x+3$

Solución
$P(1)=2(-1)^3-5(-1)^2-4(-1)+3=-2-5+4+3=0$
Así -1 es un cero. Por el teorema del factor *x + 1* es un factor de *P(x)*.Los otros ceros los encontramos mediante la división sintética.

3.15. DIVISIÓN SINTÉTICA

Supongamos que se desea dividir la función polinómica $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$, de grado *n*, por una función de la forma $g(x)=x-r$ donde $r\in Q$. Entonces por el algoritmo de Euclides se tiene:

$f(x)=(x-r)\cdot q(x)+R$ donde *q* es un polinomio de grado $n-1$ *R*, naturalmente, es una constante. Supongamos que *q* tiene la forma $q(x)=b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_2x^2+b_1x+b_0$. El objetivo es determinar los coeficientes $b_{n-1},,\ldots,b_1,b_0$ En término de los coeficientes de *f*.

Para la división sintética debemos encontrar los divisores enteros y racionales del término independiente. Veamos mediante un ejemplo como es el procedimiento.

Tomemos para ello el polinomio $P(x)=2x^3-5x^2-4x+3$

Los divisores de *3* son $D(3)=\pm1,\pm3$ los divisores racionales son: $\pm\frac{3}{2}$

Ya encontramos que un cero (una raíz) es *-1*. Por tanto dividamos entre está raíz.

2	-5	-4	3	-1
	-2	7	-3	
2	-7	3	0	

¿Qué se hicimos?

bajamos el 2 lo multiplicamos por (-1) lo escribimos debajo de - 5 sumamos el resultado es – 7 , ahora multiplicamos este resultado – 7po(- y obtenemos 7, este resultado lo sumamos con - 4 y obtenemos 3, el cual multiplicamos por (-1) y obtenemos -3 y finalmente sumamos este resultado con 3 y obtenemos 0. Al obtener cero paramos y aplicamos el algoritmo de Eucldes.

Es decir:
$P(x) = (2x^2 - 7x + 3)(x + 1) + 0$

Ahora factorizamos totalmente el polinomio.
$P(x) = (x - 3)(2x - 1)(x + 1)$

Ejemplo 57
Factorizar completamente el polinomio $P(x) = 3x^4 + 7x^3 - x^2 - 7x - 2$

Solución
Los divisores de 2 son ± 1, ± 2. Debemos probar con ellos hasta que uno sea raíz (el residuo sea cero).

Probemos con 1.
$P(1) = 3(1)^4 + 7(1)^3 - 1^2 - 7(1) - 2 = 3 + 7 - 1 - 7 - 2 = 0$. Como el residuo es cero podemos dividir entre 1.

3	7	-1	-7	-2	1
	3	10	9		
3	10	9	2	0	

$P(x) = (3x^3 + 10x^2 + 9x + 2)(x - 1)$

Seguimos dividiendo hasta obtener una expresión que podamos factorizar más rápidamente, como una cuadrática.

Los divisores son de nuevo $\pm 1, \pm 2$.

Probemos con ***- 1.***
$P(1) = 3(-1)^3 + 10(-1)^2 + 9(-1) + 2 = 0$

Dividimos entre ***- 1.***

$$\begin{array}{cccc|c} 3 & 10 & 9 & 2 & -1 \\ & -3 & -7 & -2 & \\ \hline 3 & 7 & 2 & 0 & \end{array}$$

$P(x) = (3x^2 + 7x + 2)(x - 1)(x + 1)$

Ahora factorizamos $3x^2 + 7x + 2$, Al factorizarlo obtenemos:

$$3x^2 + 7x + 2 = \frac{(3x + 6)(3x + 1)}{3} = (x + 2)(3x + 1)$$

Por tanto el polinomio factorizado es:
$P(x) = (x + 2)(3x + 1)(x - 1)(x + 1)$

Ejemplo 58

$$f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 3}{x^3 - 3x^2 + 5x + 1}$$

TALLER EN EL AULA DE CLASE No.13

1. *A) Dada* $f(x) = x^2 - 2x + 1$ *Calcular:*

a) $f(-3)$ *b)* $f(a + b)$
c) $f(x + h)$ *d)* $f(x) - f(2x)$.

B) sea definida por: $f : R \rightarrow R$ hallar:

$$x \rightarrow f(x) = x^2 - 3x + 4.$$

a) $f(-1)$ *b)* $f(z - y)$
c) $f(x + h)$, d) $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$; $h \neq 0$

C) Si $f(x)=\sqrt{x+1}$. Hallar:

a) f(-1) b) f(3)
c) f(a - b) d) $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$; $h \neq 0$

D) Sea la función g: $R \to R$ definida por: $g(x)=\begin{cases} x+2 & si \quad x<2 \\ x^2-3x & si \quad x>2 \end{cases}$, *Hallar:*

a) g(5) b) g(0) c) g(-2).

2. A) Si $f(x)=\dfrac{x^2}{3}-x \quad g(t)=\dfrac{t^2+4}{3t}$

a) f(7) - g(3) b) $\dfrac{f(3)}{g(2)+1}$

B) Si R(x) = S(x) + P(x) con P(x) = $\dfrac{x^2-8}{2}$ $\quad s(x)=\dfrac{3}{x^2}$ *hallar:*

a) R(3) b) R(1/2) c) R(-4).

3.Si f(x) = x^2 *y g(x) =* $\sqrt{x}$*. Hallar:*

a) (f o g)(1) b) (g o f)(x) c) (f o g)(3)

4) Sean las funciones f : $R \to R$ *y g :* $R \to R$ *definidas por f(x) =* x^2+2x-3 *, g(x) = 3x - 1. Hallar:*

a) (f o g)(1) b) (g o f)($\sqrt{2}$*)*
c) (f o f)(1) d) (g o g)(x)

5. Sean las funciones f : $R \to R$ y g : $R \to R$ definidas por f(x) = $x^2 - 3|x-1|$, g(x) = x^2. Hallar:

a) (f o g)(-5) b) (g o f)(2)
c) (g o f)(-6) d) (f o g)(a - b).

6. Si $g(t)=t\,e^{2/t}$ y $H(1/x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$. Hallar:

a) g(H(x)) b) H(g(t)).

7. Sean f(x) = e^x y g(x) = ln x. Hallar:

a) (f o g)(x) b) (g o f)(x)
c) (f o g)($\sqrt{x}$) d) (f o g)(3).

8. Si r(x) = $\sqrt[3]{x}$, demuestre que:

$$h^{-1}[r(x+h)-r(x)]=\frac{1}{\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x(x+h)}+\sqrt[3]{x^2}}$$

9. Si $f(x)=\dfrac{2x}{1+2}$, probar que *f(x) + f(-x) = 2f(-2x).*

10. Sean: $f(L)=a^{c+L}, h(L)=a^{c^2L}$ y $S(r)=r^{c^2}$.Hallar:

$$\frac{S(f(L))}{h(L)}$$

11. Si f(x) = - $\sqrt{x}$ y g(x) = 4 - x Hallar:

a) (f o g)(x) b) Dominio de (f o g)
c) Rango de (f o g) d) Gráfico de (f o g).
e) Elabore el gráfico de f, g y (f o g) en el mismo sistema coordenado.

12. Elabore el gráfico de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ *b)* $f(x) = 4x - 3$
c) $f(x) = -2x + 1$ *d)* $g(x) = -x^2 + 1$
e) $f(x) = 2x^3$ *f)* $h(x) = 3x - 5$
g) $f(x) = \sqrt{x+1}$ *h)* $f(x) = \overline{(x - 1)^2}$
i) $f(x) = 4 - x^2$ *j)* $i(x) = \sqrt{5-x^2}$
k) $g(x) = \sqrt{x+x-20}$ *l)* $f(x) = 3 - x$

m) $8x = 1 - 4y$
n) $f(x) = 3$
o) $f(x) = -5x - 2$
p) $x - y = 0$
q) $f(x) = (-3/2)x$
r) $T(x) = (-5/4)x$
s) $f(p) = -2p + 7$

13. Considere la función $y=\sqrt{2-\sqrt{x}}$:

a) Puede ser x negativa?.
b) Puede ser x mayor que 2?.
c) Puede ser $x = 0$?.
d) Cuál es el dominio de la función?.

14. Sean $f(x) = x$, $g(x) = \sqrt{x-1}$. Hallar:

a) $f + g$
b) $f - g$
c) $f \cdot g$
d) f / g y el dominio en cada caso.

15. En los siguientes problemas Halle:

A) Dominio de la función
B) Rango de la función
C) Gráfica.

a) $f(x) = \dfrac{x^2-5x-6}{x-6}$

b) $f(x) = \dfrac{x^3-13x-12}{(x+1)(x-4)}$

c) $f(x)=5$

d) $f(x)=\begin{cases} 3-x & si \quad x\leq 1 \\ 2x & si \quad 1<x \end{cases}$

e) $f(x) = |2x - 8|$

f) $f(x)=\dfrac{|x|+x}{2}$

g) $h(x)=\begin{cases} x^2 & si \quad x\leq 1 \\ x^3 & si \quad |x|<1 \\ 2x & si \quad x\geq 1 \end{cases}$

h) $s(x)=\begin{cases} 3 & si \quad x>3 \\ 0 & si \quad 0\leq x\leq 3 \\ -2 & si \quad x<0 \end{cases}$

i) $g(x)=\begin{cases} x & si \quad x\le 1 \\ -x^2 & si \quad 1<x<2 \\ x & si \quad x>2 \end{cases}$ j) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{1-x} & si \quad x\ne 1 \\ 2 & si \quad x=1 \end{cases}$

k) $f(x)=\begin{cases} \sqrt{25-x^2} & si \quad x\le 5 \\ x-5 & si \quad 5<x \end{cases}$ l) $y=\begin{cases} x^2-4 & si \quad x<3 \\ 2x-1 & si \quad 3\ge x \end{cases}$

m) $G(x)=\begin{cases} |2x+5| & si \quad x\ne -5/2 \\ 3 & si \quad x=-5/2 \end{cases}$

n) $L(x)=\begin{cases} 2x+3 & si \quad x\le 1 \\ 8-3x & si \quad 1<x<2 \\ x+3 & si \quad 2\le x \end{cases}$ o) $f(s)=\begin{cases} \dfrac{1}{s+5} & si \quad s\ne -5 \\ 0 & si \quad s=-5 \end{cases}$

p) $f(q)=\begin{cases} q^2-4q+3 & si \quad q\ne 3 \\ 5 & si \quad q=3 \end{cases}$

D) Trace la gráfica de cada una de las siguientes funciones e indique su dominio y rango exprésela en la forma $y=f(x)$.

a) $x^2-6x-2y+11=0$ b) $y-\sqrt{x-1}=2$

c) $y-\sqrt{2x-x^2}=0$ d) $\begin{cases} x+5 & \text{si } -6\le x<-3 \\ \sqrt{3-x^2-2x} & \text{si } -3\le x\le 1 \\ 1 & \text{si } 1<x<2 \\ 2x^2-12x+17 & \text{si } 2<x\le 5 \end{cases}$

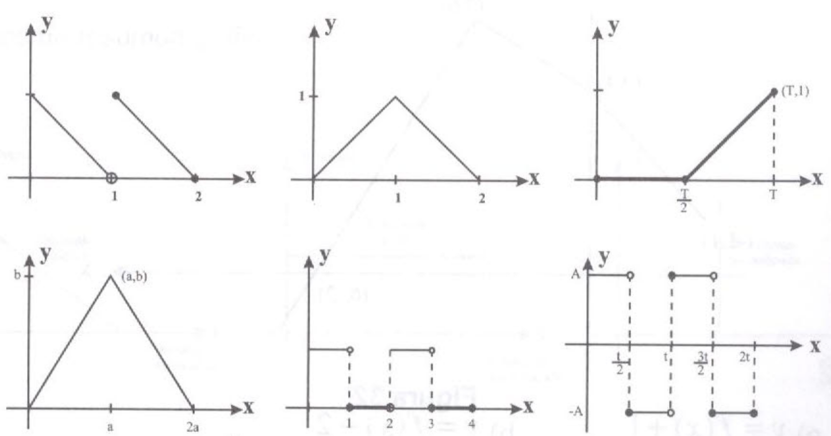
e) $\begin{cases} |x+5| & \text{si } x<-4 \\ \sqrt{16-x^2} & \text{si } -4<x\le 4 \\ x-6 & \text{si } 4<x \end{cases}$

16. En los siguientes ejercicios definir las siguientes funciones y determinar el dominio de la función resultante.

A) f + g B) f - g C) f · g D) f / g E) g / f F) f o g G) g o f

a) $f(x)=\sqrt{x} \quad g(x)=x^2+2$
b) $f(x)=\sqrt{x-3} \quad g(x)=2x-5$
c) $f(x)=\sqrt{x-1} \quad g(x)=\sqrt{x^2-1}$
d) $f(x)=|x| \quad g(x)=|x-4|$
e) $f(x)=x^2+1,\ g(x)=\sqrt{x}$
f) $f(x)=\sqrt{x},\ \ g(x)=\dfrac{x+3}{x-1}$
g) $f(x)=\sqrt{x-1},\ \ g(x)=\dfrac{2x+3}{x-2}$
h) $f(x)=x^2 \quad g(x)=\sqrt{x^2-x-2}$
i) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-1} \quad g(x)=\sqrt{x-1}$
j) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}-1} \quad g(x)=\dfrac{2x-1}{x+3}$
k) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x-2} \quad g(x)=\dfrac{x+3}{x-1}$
l) $f(x)=\dfrac{1}{x^2} \quad g(x)=\sqrt{x-1}$

17. Héllense las fórmulas de las funciones representadas en las siguientes figuras:



18.Sea $f(x)=x^2-3x-2$. Encuentre dos funciones g tales que:

19. Sean $f(x)=x^2+1 \quad g(x)=\sqrt{x} \quad h(x)=1-x$

a) Encontrar $[(fog)oh](x) \quad y \quad [f(gof)](x)$.
b) ¿Qué se puede decir de $(fog)\ o\ h\ y\ f\ o\ (goh)$?

20. Para cada una de las siguientes funciones:

a) Verifique que f es uno a uno (o inyectiva) sobre su dominio.
b) Halle la fórmula de correspondencia de f^{-1}.
c) Dibuje en un mismo plano las gráficas de f y f^{-1}.
d) Verifique que $(f^{-1}\ o\ f)(x)=x$, y $(f\ o\ f^{-1})(x)=x$

- $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$
- $f(x)=\dfrac{9x+1}{3x-2}$
- $f(x)=\dfrac{x+5}{2x+1}$

21. Utilice la gráfica de la función que se ilustra para obtener la gráfica de cada una de las funciones solicitadas.

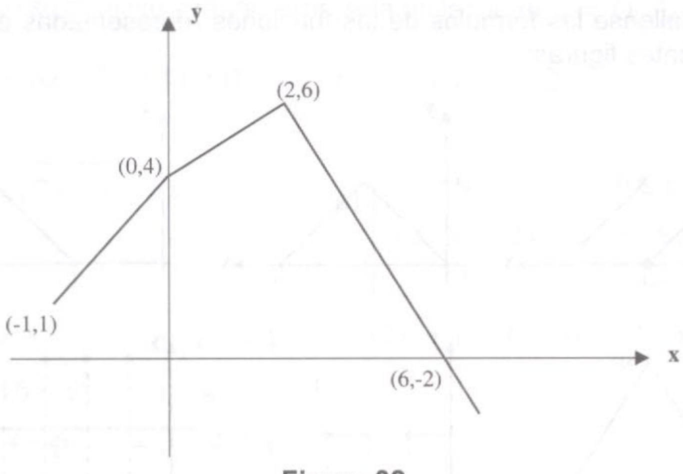


Figura 32

a) $y=f(x)+1$ b) $y=f(x)-2$
c) $y=f(2x)$ d) $y=f(x+2)+1$
e) $y=|f(x)|+1$ f) $y=\dfrac{1}{2}f(x)$
g) $y=f(x-1)$ h) $y=f(x+2)$

3.16. APLICACIONES DE LAS FUNCIONES

Veremos a continuación una serie de aplicaciones de las funciones a las ciencias administrativas y económicas.

3.16.1.Análisis de Oferta y Demanda

El punto de equilibrio en el análisis de oferta y demanda se obtiene cuando la oferta es igual a la demanda.

Al igualar la función de la oferta y la de demanda se puede determinar la cantidad y el precio de equilibrio.

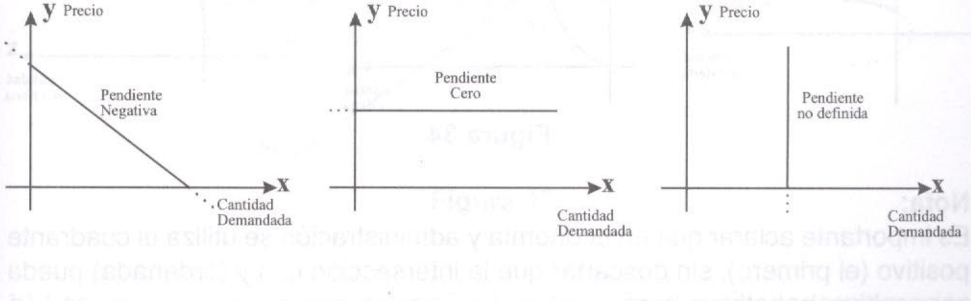
3.16.1.1.Curvas de Demanda:

En el caso más común, la pendiente de una curva de demanda es negativa, es decir, a medida que el precio aumenta, la cantidad de demanda decrece y viceversa.

En algunos casos puede ser cero la pendiente y nos indica que el precio es constante sin considerar la demanda.

Cuando la demanda es indefinida, nos indica que el precio no importa y la demanda es constante.

Veamos un resumen gráfico:



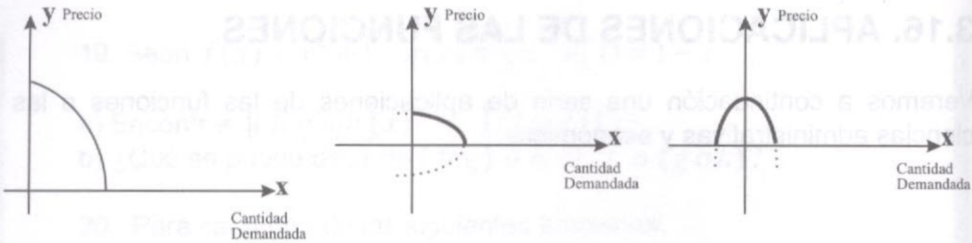


Figura 33

3.16.1.2.Curvas de Oferta.

En el caso más común, la pendiente de la curva de oferta es positiva, es decir, que al aumentar el precio aumenta el abastecimiento y decrece al decrecer el precio. Cuando la pendiente de la curva es cero, nos indica que el precio constante e independiente de la oferta. Si la curva de oferta tiene pendiente indefinida esto indica que la oferta es constante e independiente del precio. Veamos un resumen gráfico:

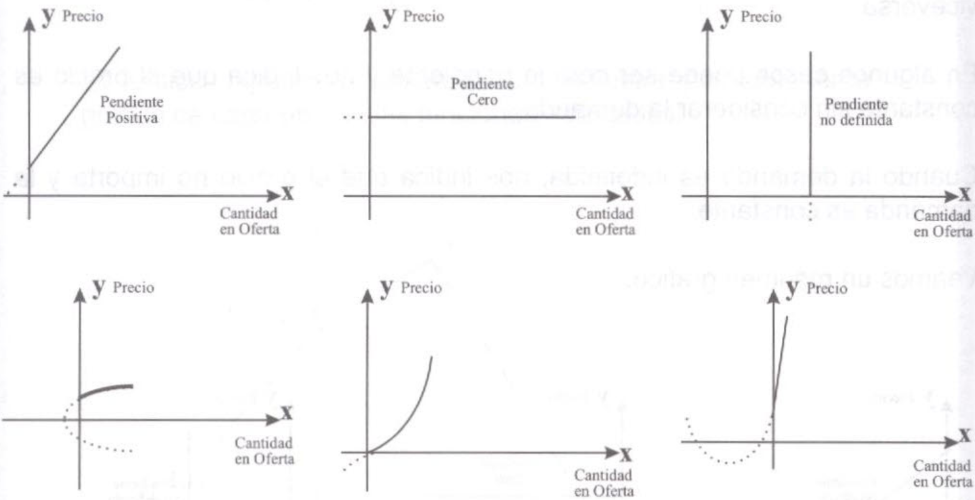


Figura 34

Nota:
Es importante aclarar que en economía y administración se utiliza el cuadrante positivo (el primero), sin descartar que la intersección con *y* (ordenada) pueda ser positiva, negativa o cero.

La abscisa de la intersección con *X* puede ser negativa y por tanto quedar fuera del intervalo de interés.

Esto es razonable puesto que los productores dejan de ofrecer un artículo antes de que el precio baje a cero.

Ejemplo 59

a) Cuando el precio de un abono es 8 unidades monetarias, hay disponibles 35 cajas en una tienda agrícola, si el precio es 12 unidades monetarias hay disponibles 40 cajas. Hallar la ecuación de la oferta para este producto.

Solución:
Utilizando la forma punto pendiente de la ecuación de la recta, tenemos:

$$\mathbf{y - y_1 = m(x - x_1)} \;;\; m = \frac{12-8}{40-35} = \frac{4}{5}$$

$$y = \frac{4}{5}(x-35)+8$$

$$y = \frac{4x}{5} - 20$$ ¿Por qué?.

Veamos el gráfico:

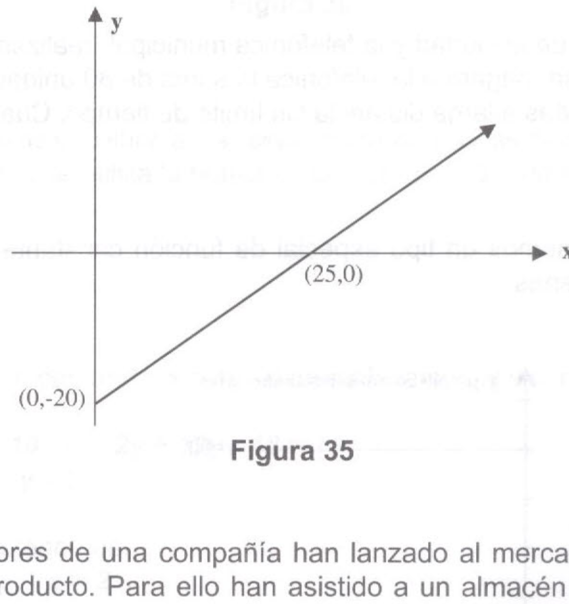


Figura 35

b) Los productores de una compañía han lanzado al mercado la promoción de un nuevo producto. Para ello han asistido a un almacén y observan que cuando el precio es 5 unidades monetarias se venden 60 ejemplares del nuevo producto, al bajar a 3 unidades monetarias se venden 120. Cuál es la ecuación de la demanda?.

Solución:

x = 60　　　　y = 5
x = 120　　　y = 3

$$m = \frac{3-5}{120-60} = \frac{-2}{60} = \frac{-1}{30}$$

y - 5 = (-1 / 30)(x - 60)　↔　y = -x / 30 + 7.

Gráfico:

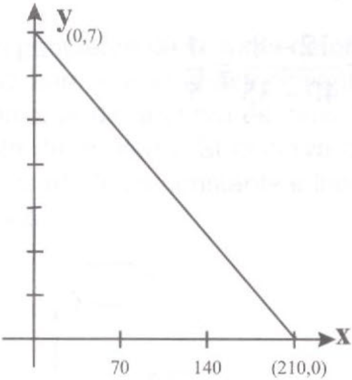


Figura 36

c) Una empresa de la ciudad y la telefónica municipal, realizan un contrato en el cual la empresa, pagará a la telefónica la suma de 80 unidades monetarias, al mes por llamadas a larga distancia sin límite de tiempo. Cuál es la ecuación de oferta?.

Solución:
En este caso tenemos un tipo especial de función constante donde y = 80 unidades monetarias.

Gráfico:

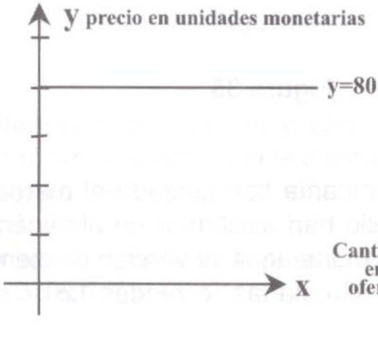


Figura 37

3.17.PUNTO DE EQUILIBRIO (EQUILIBRIO EN EL MERCADO)

De acuerdo a lo visto, para que halla equilibrio en el mercado se debe cumplir: Cantidad de demanda igual a Cantidad en oferta.
Algebraicamente la cantidad y el precio de equilibrio se hallan resolviendo simultáneamente las ecuaciones de oferta y demanda (siempre que se usen las mismas unidades para *x* y para *y* en ambas ecuaciones). En algunos casos utilizaremos las variables p y q; p = precio, q = artículos.

Para que tenga sentido se utiliza el primer cuadrante por...

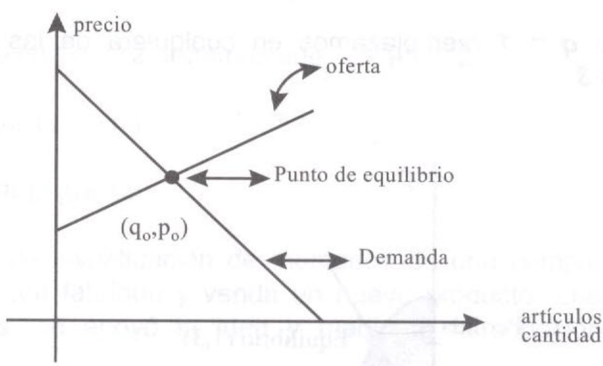


Figura 38

Ejemplo 60
a) Hallar el punto de equilibrio de las siguientes ecuaciones de oferta y demanda (en algunos textos se utiliza la notación Q = oferta, Q = demanda).

Solución:
d: x = 4y - 6
o: 2y + 3x = 10.

De la ecuación de demanda x = 4y - 6 reemplazamos el valor de *x* en la oferta así:
$2y + 3(4y - 6) = 10 \leftrightarrow 2y + 12y - 18 = 10$
$14y = 28 \quad \therefore \quad y = 2$

como y = 2 en d tenemos:
$x = 4(2) - 6 \quad \therefore \quad x = 2$

Punto de equilibrio *(2, 2).*

b) Encontrar el precio y la cantidad de equilibrio si:

***d:* $p = 4 - q^2$**
σ: **$p = 2q + 1$**
Solución:
d = σ

Luego: **$4 - q^2 = 2q + 1 \;\leftrightarrow\; q^2 + 2q - 3 = 0$. *Por qué?***

$(q + 3)(q - 1) = 0 \quad \therefore \quad q = -3, \; v \;, q = 1.$

Sólo tomamos el punto **$q = 1$** el que tiene sentido.

Precio: Como **$q = 1$** reemplazamos en cualquiera de las ecuaciones y obtenemos **$p = 3$**.

Gráfico:

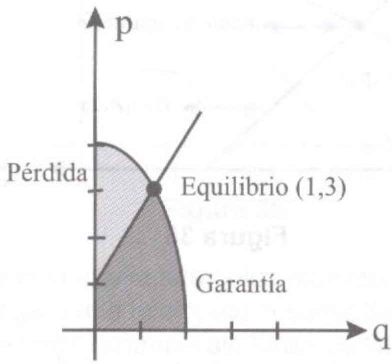


Figura 39

c) Al precio de $10 la demanda de un artículo es de 400 unidades, al precio de $4 la demanda del mismo artículo es de 1600 unidades, al precio de $5 la oferta del artículo es nula y al precio de $10 la oferta es de 1400 unidades, hallar el punto de equilibrio.

Solución:
$p_1 = 10 \quad \rightarrow \quad q_1 = 400$

$$m = \frac{4-10}{1600-400} = -\frac{6}{1200} = -\frac{1}{200}$$

$p_2 = 4 \quad \rightarrow \quad q_2 = 1600$
$p - 10 = (-1/200)(q - 400) \quad \leftrightarrow \quad p = (-1/200)q + 2 + 10$
$\therefore \quad p = (-1/200)q + 12 \quad (1).$
$P = 5 \quad \rightarrow \quad q = 0$

$$m = \frac{10-5}{1400-0} = \frac{5}{1400} = \frac{1}{280}$$

p = 4 $\rightarrow$ q = 1400
p – 5 = (1 / 280)(q – 0) $\rightarrow$ p = (1 / 280)q + 5 (2).

De las ecuaciones (1) y (2) tenemos las ecuaciones de demanda y oferta respectivamente.

D = o $\rightarrow$ ***(-q / 200) + 12 = (q / 280) + 5***
(q / 280) + (q / 200) – 7 = 0 $\leftrightarrow$
12q – 9800 = 0 $\therefore$ ***q = 9800 / 12*** ***q = 2450 / 3***

Reemplazando en (1) ó (2) tenemos que p = 95 / 12

El punto de equilibrio es (2450 / 3, 95 / 12).

Ejercicio: Trazar el gráfico.

d) La sección de investigación de mercados de una compañía recomendó a la gerencia que fabrique y venda un nuevo producto. Luego de amplias investigaciones, se apoyó la idea y mediante la ecuación de demanda siguiente:

x = f(p) = 9000 – 30p.

donde *x* es el número de unidades que los distribuidores comprarán probablemente cada mes a \$p por unidad. Observe que a medida que el precio sube, el número de unidades disminuye. Del departamento de finanzas se obtuvo la siguiente ecuación de costo.

C(x) = g(x) = 90000 + 30x.

A) Exprese el costo C como una función del precio p.
B) Exprese el ingreso R como una función cuadrática del precio p.
C) Construya la gráfica de las funciones de costo e ingreso obtenidas en las partes A) y B) en el mismo sistema de coordenadas, e identifique las regiones de utilidad y pérdida.
D) Calcule los puntos de equilibrio; es decir, encuentre los precios al valor más próximo en el cual R = C.
E) Cuál es el precio que produce el máximo ingreso?

Solución:

A) ***C = 90000 + 30x pero x = 9000 – 30p***
Tenemos entonces:
C = 90000 + 30(9000 – 30p)
= 90000 + 270000 – 900p
∴ C = 360000 – 900p que expresa el costo en función del precio.

B) Ingreso = Precio por unidad, entonces ***R = p.x***
R = p(9000 – 30p²) ∴ ***R = 9000p – 30p².***

C) Gráfica:

D) Calculamos primero el punto de equilibrio. Esto se logra con
R = C
9000p – 30p² = 360000 – 900p.
30p² – 9900p + 360000 = 0 Por qué?

P² – 330p + 12000 = 0 Por qué?

$$p = \frac{330 \pm \sqrt{108.900 - 4(12000)}}{2}$$

$$p = \frac{330 \pm 246{,}8}{2} \quad \therefore \quad \begin{array}{l} p_1 = 288{,}4 \\ p_2 = 41{,}6. \end{array}$$

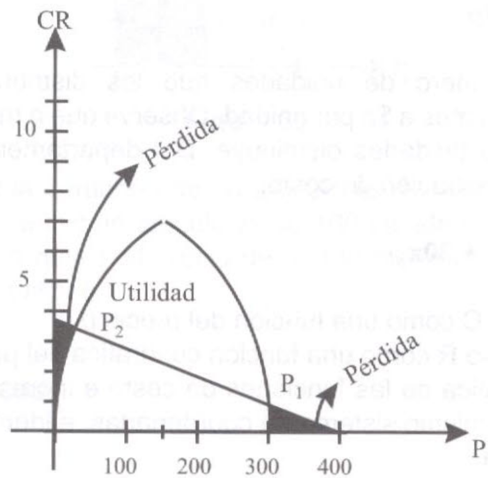


Figura 40

E) El máximo ingreso se produce $150.

Veamos: Si el costo está por encima del ingreso (gráficamente) hay pérdida. Si el ingreso está por encima del costo (gráficamente) hay ganancia.

Aplicaciones misceláneas

e) Cuando la libra de camarones se vende a p unidades monetarias, los consumidores de un puerto pesquero pueden comprar $D(p) = 45/(p-4)$ libras diariamente, por la pescadería local a este precio es de $O(p) = p - 8$ libras.

A) Elabore el gráfico de las funciones de oferta y demanda en el mismo sistema coordenado.
B) Cuál es el precio de equilibrio?.
C) Cuántas libras de camarones pueden venderse a este precio?.
D) Suponga que una gran recolección inusitada de camarón ocasione que la cantidad ofrecida al precio p unidades monetarias se eleve a 3p - 10 libras. Cuál es el nuevo precio de equilibrio?

Solución:
A) Para elaborar el gráfico es importante hallar los puntos en que se intersectan ambas funciones; es decir, hallando los puntos o punto de equilibrio. Para ello igualamos:

$\sigma = D; \rightarrow \; 45/p - 4 = p - 8$ realizando operaciones
$\rightarrow \; p^2 - 4p - 45 = 0$. Por qué?
Resolviendo:
$(p - 9)(p + 5) = 0 \quad \therefore \quad p_1 = 9, \quad p_2 = -5.$

De estos valores rechazamos a $p = -5$ por qué?.

Ahora con $p = 9$ obtenemos en la ecuación de oferta o demanda la imagen así:
$\sigma(9) = 9 - 8 = 1$ luego (9, 1) punto de intersección.

B) $p = 9$ unidades monetarias.
C) A este precio solo se vende una libra.
D) De nuevo igualamos $\sigma = D$
$3p - 10 = 45/p - 4$ realizando operaciones
$3p^2 - 6p - 45 = 0$ . . $(p - 5)(p + 3) = 0.$

La solución que tomamos es $p = 5$. Luego el precio de equilibrio es 5 unidades monetarias.

Gráfico:

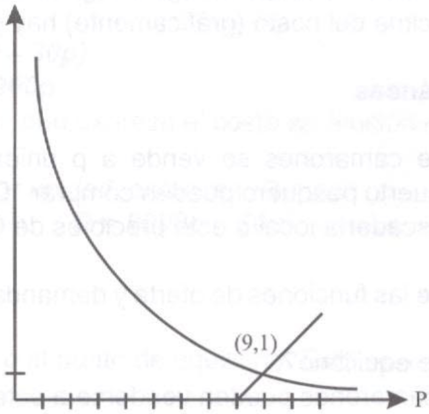


Figura 41

f) Una compañía muestra que la demanda por una mercancía está dada como una función de su precio en unidades monetarias p por D(p) = 985 – 7p. La mercancía se puede ofrecer según la función de oferta O(p) = p^2 + 10p – 65.

A) Cuál es el precio de equilibrio?.
B) En cuanto excede la cantidad demandada a la ofrecida cuando p = 5?.
C) En cuanto excede la cantidad ofrecida a la demanda cuando p = 100?.

Solución:

D = O $\rightarrow$ 985 – 7p = p^2 + 10p – 65
$\rightarrow$ p^2 + 17p – 1050 = 0 factorizando
$\rightarrow$ (p + 42)(p – 25) = 0 $\therefore$ p_1 = -42, v , p_2 = 25

Sólo tomamos p = 25. Luego el precio de equilibrio es:
A) p = 25
B) p = 15 $\rightarrow$ –(5) = 985 - 7(5) = 950
σ(5) = 5^2 + 10(5) - 65 = 10

–acemos la diferencia para saber –n cuanto excede la oferta a la demanda D(5) - O(5) = 901 - 199 = 702 unidades monetarias– Hágalo para– p = 12.

C) p = 100 $\rightarrow$ D(100) = 985 - 7(100) = 285.
$\rightarrow$ σ(100) = $(100)^2$ + 10–100) - 65 = 10935.

La cantidad ofrecida excede a–la demandada en 10650. Por qué?.
Hágalo para p = 20.

g) Una compañía de fumigaciones presenta costos fijos de \$4000 unidades monetarias, con un costo de \$2,5 unidades monetarias por herbicida. Los herbicidas se venden a \$6,5 unidades monetarias cada uno.

A) Cuál es el costo total de la empresa?.
B) Cuál es la función de ingresos?.
C) Dibuje las funciones de ingresos y costos sobre el mismo sistema coordenado.
D) En qué punto se cortan las gráficas?. Cuál es el significado económico?

Solución:
Recordemos: Costo total = costos fijos + costos variables.
Ingreso = precio por número de artículos.

Algebraicamente:
A) $C(x) = 4000 + (2,5)\ x$
B) $R(x) = (6,5)\ x$

Antes de realizar el gráfico es importante encontrar el punto de corte de las gráficas.

$C(x) = R(x) \quad \rightarrow \quad 4000 + 2,5x = 6,5\ x \quad \rightarrow \quad 4000 = 4,0\ x$
$\therefore \quad x = 1000$ por qué?

$C(1000) = 4000 + 2,5(1000) = 6500; \quad R(1000) = 6,5(1000) = 6500$

C) Gráfico:

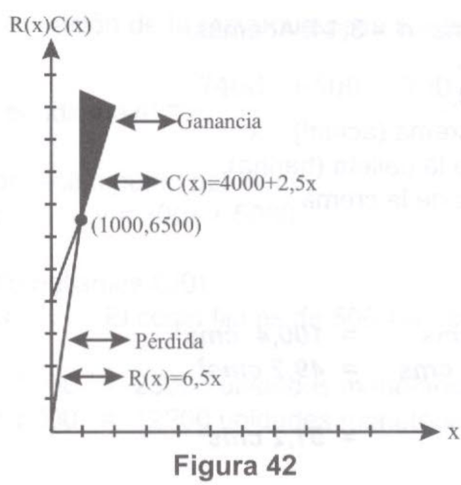


Figura 42

D) El punto de corte es (1000, 6500). El significado económico en este caso es el punto de equilibrio y además muestra la parte de ganancia y pérdida.

h) Una compañía de comestibles fabrica una galleta que exporta a Europa y presenta las siguientes características:
Tiene forma de disco.
Posee en su interior crema.
Debido a que los costos crecen, la compañía reducirá el volumen de su harina en un 10%. Para lograr esto, la compañía mantendrá igual el radio exterior y su grosor de 2 cms. Se ampliará el radio de la crema el cual tiene 2,8 cms.

La compañía desea hallar el nuevo radio de la crema con sus dimensiones (ver la figura).

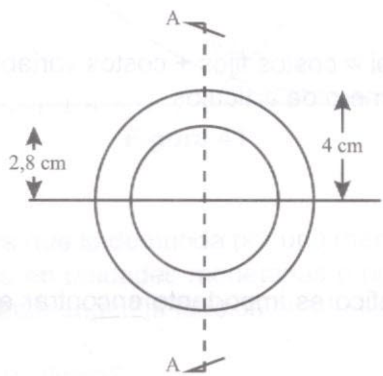


Figura 43

Solución:
Ante todo recordemos que el volumen de un disco está dado por:
Vsolido = $\pi \cdot r^2 \cdot h$, donde r = radio, h = grosor.

Para nuestro problema $\pi = 3,14$. Además:

V_1 = Volumen parcial.
V_2 = Volumen de la crema (actual).
V_t = Volumen total de la galleta (harina).
V_{nc} = Volumen nuevo de la crema.
$V_t = V_1 - V_2$

Calculemos V_1
$V_1 = (3,14)(4)^2 \cdot (2)$ cms $= 100,4$ cms^3
$V_2 = (3,14)(2,8)^2 \cdot (2)$ cms $= 49,2$ cms^3

$V_t = 100,4 - 49,2 = 51,2$ cms^3

Como el volumen reducirá en un 10/100 conservando el radio exterior y el grosor; trabajando con el volumen restante; es decir 90%. Tenemos:
(51,2)(90 / 100) = 46,08 cms.

Luego:
V_t = 46,08 cms.

Realizando operaciones y teniendo en cuenta que V_t = 51,2 cms. Tenemos:

46,08 = 100,4 - (6,28r²).
46,08 - 100,4 = -(6,28r²). Simplificando
(-1)(-54,32) = (-6,28r²)(-1). Despejando a *r* tenemos:

$$r = \sqrt{\frac{54.32}{6.28}} = \sqrt{8.65} = 2.94$$

Sólo tomamos r_1 = 2,94 cms que es el que nos interesa, pues es positivo.

i) El costo de producir cinco unidades de un artículo es de \$6500 y el costo total de producir ocho unidades es de \$7400, asumiendo que el comportamiento de la función costo total es lineal, hallar:

A) El costo total en función de las unidades producidas.
B) El costo fijo.
C) El costo total cuando se produzcan 60 unidades.
D) El costo total cuando se produzcan dos docenas.

Solución:
A) Se debe hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos (5, 6500) y (8, 7400). Luego:
Primero hallamos la pendiente $m = \frac{7400-6500}{8-5} = \frac{900}{3} = 300$

Ahora utilizamos la ecuación punto pendiente:
y - 6500 = 300(x - 5) $\therefore$ y = 300x + 5000

B) Costo fijo, para ello hallamos C(0).
C(0) = 300(0) + 5000 $\therefore$ El costo fijo es de 5000 unidades monetarias.

C) C(60) = 300(60) + 5000 = 23000 unidades monetarias.
D) C(24) = 300(24) + 5000 = 12200 unidades monetarias.

j) Una compañía Risaraldense procesadora de caféde exportación a paises Europeos y Norteamérica, tiene al producir el grano por kilos, un costo variable de \$0,22 unidades monetarias y costos fijos de \$210 unidades monetarias.

A) Cuál es la ecuación de costo lineal?.
B) Cuál es el costo de procesar 500 kilos de granos de café en un día?.

Solución:
A) Sea y_c el costo en unidades monetarias de procesar *x* kilos de café diarios, el modelo para este caso es lineal; es decir tiene la forma:

$Y_c = mx + b.$

m = costo variable por unidad.
b = costo fijo.

Aquí: $m = \$0,22$ $b = \$210$ ***luego*** $Y_c = 0,22x + 210.$

B) El costo de procesar 500 kilos se obtiene reemplazando:
$x = 500$ ***en*** $Y_c = mx + b.$ ***entonces:***
$Y_c = mx + b \rightarrow Y_c = 0,22(500) + 210.$
$Y_c = 320$ unidades monetarias.

El gráfico es el siguiente:

Recuerde que para trazar el gráfico se deben hallar los interceptos, como lo hicimos en el gráfico de funciones.

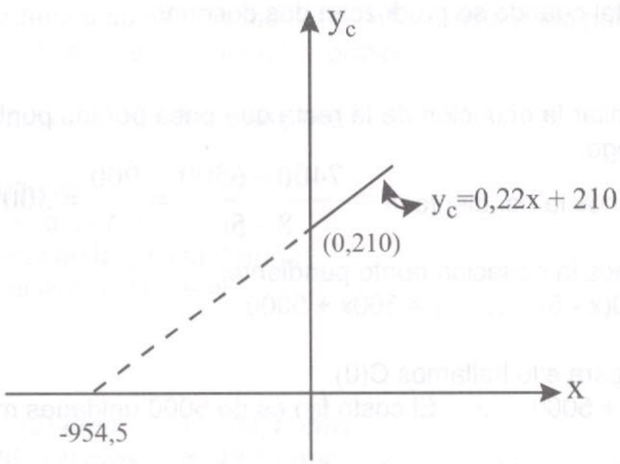


Figura 44

k) Una tienda de ropa tiene la siguiente política: Por menos de 10 paquetes de camisas vendidas se descuente 0,3 centavos UM. Por más de 10 y menos de 50 se les descuenta 0,5 centavos UM paquete de camisas, y por 50 o más se les descuenta 0,8 centavos de UM por paquete.

A) Exprese la tarifa de descuento que hace la tienda en función del grupo de venta.
B) Cuál es el dominio de la función?.
C) Cuánto es el ahorro para 10 paquetes comprados?.
D) Cuál es el ahorro por 55 paquetes?.

Solución:
Se trata de una función escalonada (compuesta), veamos porque:
Para 1 y menos de 10 se descuenta 0,3 por unidad comprada, lo que podemos resumir así:
0,3x si $1 \leq x \leq 10$

Para 10 y menos de 50 el descuento es de 0,6 por unidad, lo que resumimos así:
0,6x si $10 < x \leq 50$

Y para más de 50 el descuento es de 0,8 por unidad.
0,8x si $x \geq 50$.

Lo anterior lo resumimos así:

$$T(x) = \begin{cases} 0{,}3x & si \quad 1 < x < 10 \\ 0{,}6x & si \quad 9 < x < 50 \\ 0{,}8x & si \quad x > 50 \end{cases}$$

T = tarifa; ***T(x)*** = tarifa por unidad.

B) Dominio:
DT(x) = Z^+ - {0}.

C) T(10) = 0,6(10) = 6 unidades monetarias. El ahorro es de 6 unidades monetarias.

D) T(55) = 0,8(55) = 44 unidades monetarias.

Ejercicio: Elabore el gráfico.

l) Una multinacional estudió los efectos nutricionales en Salmón, que se alimenta con una dieta que contenía 10% de proteína. La proteína consistía en yema de huevo y harina de maíz. Al variar el porcentaje P de yema en la mezcla de proteínas, el grupo de investigadores estimó que el aumento promedio en peso (miligramos) de un animal durante un cierto período fue f(p), en donde:

f(p) = (-1 / 50)p + 2p + 20. ***0 ≤ p ≤ 100.***

Halle el aumento en peso.

Solución:
f(-b / 2a) es el máximo.

Calculemos

$$-b/2a = \frac{-2}{2\left(-\frac{1}{50}\right)} = 50$$

f(50) = (-1 / 50)$(50)^2$ + 2(50) + 20.
F(50) = -50 + 100 + 20 = 70; es decir, el máximo es 70 miligramos.

Ejercicio: Elabore el gráfico.

m) Una compañía de investigación de mercados firmó con el gobierno colombiano, un contrato para producir una película sobre evaluación de las ventas en mercados de cadena para ser usada en escuelas de mercadeo. El costo en unidades monetarias de producir *x* películas está dado por C(x) = 9000 + 370x. Si la firma vende una película por *p* unidades monetarias, entonces x = D(p) = 1500 – 3p. se puede vender.

A) Qué precio debe cobrar por película si se desea vender 330 películas?.
B) Exprese los ingresos de la firma ***R(x)*** como una función del número de películas *x* que puede vender a un precio determinado.
C) Determine la utilidad o pérdida de la firma si se quiere vender 330 películas.
D) Exprese las utilidades ***U(x)*** de la firma como una función del número de películas *x* que se pueden vender a un precio dado.
E) Para que valores de *x* alcanza la firma el punto de equilibrio?.
F) Use los valores de *x* que usted encontró en E) para determinar así los precios por película en el punto de equilibrio.

Solución:
A) En primer lugar despejemos a *p* en función de *x*.

x = D(p) = 1500 – 3p → ***x = 1500 – 3p***
x – 1500 = 3p ∴ $p = \frac{1500 - x}{3}$
Para x = 330 → $p = \frac{1500 - 330}{3} = \frac{1170}{3}$ ∴ ***p = 390*** unidades monetarias.

Que es el precio de 330 películas.

B) Recordemos que ingreso = Precio por número de artículos. Para este caso los artículos son las películas por tanto:

$$R(x)=\left(\frac{1500-x}{3}\right)\cdot x \quad \therefore \quad R(x)=\frac{1500x-x^2}{3}$$

C) Utilidad = Ingreso – costo total.

$$U(x)=\frac{1500x-x^2}{3}-(9000+370x)\leftrightarrow U(x)=\frac{1500x-x^2-3(9000+370x)}{3}$$

$$\therefore \quad U(x)=\frac{-x^2+390x-27000}{3}$$

$$U(330)=\frac{-(330)^2+390(330)-27000}{3}$$

U(330) = -2400. El signo menos nos indica que hay pérdidas.

D) Del punto anterior:

$$U(x)=\frac{-x^2+390x-27000}{3}$$

El punto de equilibrio se logra cuando R(x) = C(x).

$(1500x - x^2) / 3 = 9000 + 370x$.
$1500x - x^2 = 27000 + 1110x$ realizando operaciones
$x^2 - 390x + 27000 = 0$. Por qué?.

Resolviendo la ecuación cuadrática tenemos:

$$x = \frac{390\pm\sqrt{152100-10800}}{2}$$

$$x = \frac{390\pm\sqrt{44100}}{2}$$

$x = \dfrac{390 \pm 210}{2} \quad \therefore \quad x_1 = 300$
$x_2 = 90.$

Los valores son x= 300, v , x = 90.

F) P = (1500 – x) / 3 ; x = 300 → p = (1500 – 300) / 3 = 40
x = 90 → p = (1500 – 90) / 3 = 470

Luego: p = 400 unidades monetarias.
P = 470 unidades monetarias.

n) Una industria exportadora está diseñando el empaque para un nuevo producto, lo está realizando de cartulina rectangular de 20 cms por 30 cms, se construye una caja abierta, cortando de las esquinas cuadrados iguales de área *x* y doblando hacia arriba la cartulina para formar las caras laterales (ver figura). El fabricante quiere hallar el volumen V de la caja en función de *x* como base para otros empaques.

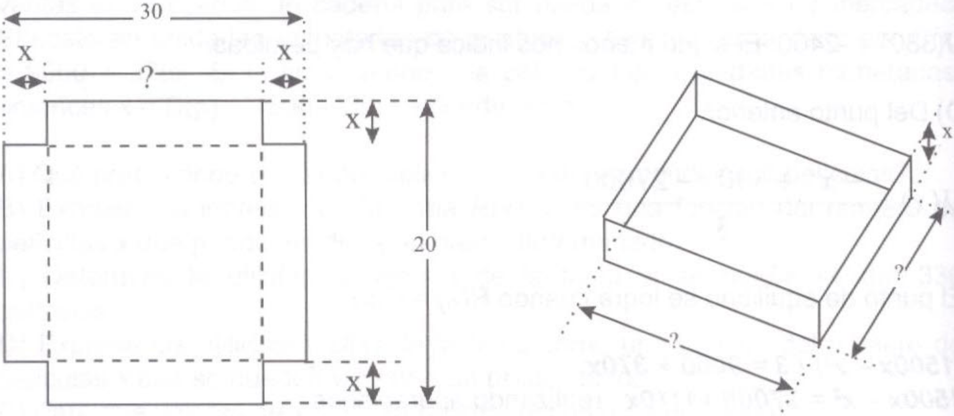


Figura 45

Volumen = área de la base por la altura, (es un paralelepípedo).
Área de la base = (20 - 2x)(30 - 2x) = $4x^2 - 100x + 600$.
$V(x) = x(4x^2 - 100x + 600) \quad \therefore \quad V(x) = 4x^3 - 100x^2 + 600x$.

o) Para propósitos de seguridad un fabricante planea colocar una barda en un área rectangular de almacenamiento 10800 cms^2 adyacente a un edificio, utilizando a éste, como uno de los lados del área que se debe cubrir (ver figura)

la reja que corre paralela al edificio queda frente a una carretera y costará \$3 unidades monetarias por cada cm instalado, en tanto que la reja para los otros lados cuesta \$2 unidades monetarias por cm instalado.
Expresar el costo como una función de *x*.

Figura 46

Solución:
$xy = 10800$ cms^2 (área) $\therefore$ $y = 10800 / x$.

Costo por el lado *x* es $C_1 = 3x$
Costo por el lado *y* es $C_2 = 4y$
Costo total = $3x + 4y$.
Como $y = 10800 / x \rightarrow C(x) = 3x + 4(10800 / x)$
$\therefore$ $C(x) = 3x + 43200 / x$. (\$/cm^2).

p) Un terreno en el cual se va a sembrar Naranja tiene forma de triángulo rectángulo, con los lados 80, 120, y 144,2 metros. Encontrar las dimensiones del almacén cuya área rectangular de piso sea el máximo que se pueda construir en el terreno que se muestra en la figura.

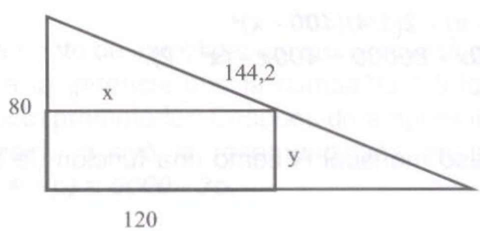


Figura 46

Solución:
Área del triángulo = (base por altura) / 2.

F(x, y) = x · y por triángulos semejantes:

$$\frac{y}{180}=\frac{120-x}{120} \quad \leftrightarrow \quad y=\frac{80(120-x)}{120} \quad \therefore \quad y=\frac{2}{3}(120-x)$$

$$A(x)=x\left[\frac{2}{3}(120-x)\right] \quad \therefore \quad A(x)=80x-\frac{2}{3}x^2$$

El máximo se obtiene con

$$f\left(\frac{-b}{2a}\right) \quad ; \quad \frac{-b}{2a}=\frac{-80}{\left(-\frac{2}{3}\right)^2}=60$$

f(60) = 80(60) - 2/3(60)² = 2400 área máxima.

q) El ingreso mensual R obtenido por vender abonos es una función de la demanda *x* del mercado, el ingreso mensual y la demanda son:

R = 400p - 2p y x = 400 - 2p.
Cómo depende ***R de x***?

Solución:
Si ***R = f(p) y p = g(x), R*** puede expresarse como una función de *x* por medio de la composición:
R = (f o g)(x). La función de f(p) está dada por:
R = f(p) = 400p - 2p sin embargo, con objeto de obtener g(x) expresamos *p* como función de *x*, así:
p = 1/2(400 - x) sustituimos a *p* en R y obtenemos:

R = 400 - 2p².
= 400(1/2)(400 - x) - 2(1/4)(400 - x)².
= 200(400) - 200x - 80000 + 400x - (x² / 2).
R = 200x - 0,5x².

Así expresa el ingreso mensual R como una función de la demanda *x* en el mercado.

TALLER EN EL AULA DE CLASE No. 14

1. La función de demanda para un producto de un fabricante es $p = f(p) = 1300 - 3q^2$, en donde *p* es el precio (en unidades monetarias) por unidad cuando se tiene una demanda semanal de *q* unidades. Calcule el nivel de producción que maximiza los ingresos totales del fabricante y determine el ingreso.

2. Una microempresa estima que t meses después de la introducción, del producto nuevo de un cliente, f(t) millares de familias, lo estarán utilizando en donde $f(t) = -\frac{1}{3}t^2 + 7t + 30$

Calcular el número máximo de fincas en las que se empleará dicho producto.

3. Determinar la cantidad de punto de equilibrio de una empresa, dados los siguientes datos: costos fijos totales, 1300, costos variables por unidad \$3. Ingresos totales por la venta de *q* unidades, dado por:

$$R = 100\sqrt{q}$$

4. Considere que se requieren \$40 unidades monetarias de costos para fabricar 10 unidades de un producto, y que el costo de 20 unidades es de \$70 unidades monetarias. Si el costo C está relacionado en forma lineal con la producción que determine la ecuación lineal que relaciona C y *q* calcule el costo para fabricar 35 unidades. Elabore el gráfico.

5. El departamento de investigación de mercados de una empresa recomendó a la gerencia que la compañía fabrique y venda un nuevo producto prometedor. Después de amplias investigaciones, el departamento apoyó la recomendación en la ecuación de demanda: $x = f(p) = 6000 - 3p$.

Donde *x* es el número de unidades que los distribuidores comprarán probablemente cada mes a \$p unidades monetarias por unidad. Observe que a medida que el precio sube, el número de unidades disminuye. Del departamento de finanzas se obtuvo la siguiente ecuación de costos: $C(x) = 72000 + 60x$.

En donde \$72000 unidades monetarias es el costo fijo (manufactura y gastos generales) y \$60 unidades monetarias es el costo variable por unidad (materia prima, ventas, transporte, almacenamiento, etc.) la ecuación de ingresos (cantidad de dinero R, que recibe la compañía por vender *x* unidades a \$p unidades monetarias) por unidad es $\boldsymbol{R = x \cdot p}$ y finalmente la ecuación de utilidad es $\boldsymbol{U = R - C}$.

a) Exprese el costo C como una función lineal del precio *p*.
b) Exprese el ingreso R como función cuadrática del precio *p*.
c) Construya la gráfica de las funciones costo e ingreso, obtenidas en las partes A) y B) en el mismo sistema coordenado, e identifique las regiones de utilidad y pérdida.
d) Calcule los puntos de equilibrio, es decir, encuentre los precios al valor más próximo en el cual R = C.
e) Calcule el precio que produce el máximo ingreso.

6. El frijol tiene un costo de 30c de UM para cantidades hasta de 60 libras y de 25c de UM por libra, en el caso de cantidades por encima de la 60 libras. Si C(x) denota el costo de *x* libras de maíz, exprese C(x) como una función de *x*. Elabore el gráfico.

7.Un fabricante de botones de lujo para Chaquetas vende a UM\$6 cada una. A este precio, los consumidores han comprado 3000 botones por mes. El fabricante desea aumentar el precio y estima que por cada incremento de UM\$1 en el precio, se venderan 1000 botones menos cada mes. Los botones pueden producirse a un costo de UM\$ 4 cada uno. Expresar la utilidad mensual del fabricante como una función del precio al que se venden los botones ; elaborar la gráfica y calcular el precio óptimo de venta. del precio al que se venden los botones; elaborar la gráfica y calcular el precio.

8. La producción de Jeans está dada por (500 - 5x) , en donde *x* es la densidad de la tela del Jean que se fabricará (es decir, el número de Jeans por metro). Determine el valor que haga de la producción total por Jean un máximo. Elabore el gráfico aproximado.

9. La demanda *x* de Turrones de arequipe de exportación está dado por $\boldsymbol{x = 200 - 15p}$, en donde *p* es el precio por unidad de turrón. El ingreso mensual R obtenido de las ventas de este artículo está dado por: R = 2000 - 15p. Cómo depende R de *x* ?.

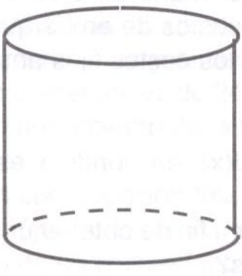
10. Un fabricante ha encontrado que el costo de producción de sus primeras *x* unidades es de $C(x) = 4x^2 - 11x - 3$ unidades monetarias.

a) Cuál es el costo de fabricación de las primeras 10 unidades?.
b) Cuál es el costo de fabricación de la vigésima tercera unidad?.

11. El parque de diversiones cobra la entrada a él con la siguiente política: Niños menores de 2 años no pagan; niños entre 2 y 12 años pagan 0,4 unidades monetarias y mayores de 12 años de edad pagan 0,6 unidades monetarias. Exprese la tarifa de entrada como una función de la edad de la persona y trace el gráfico.

12. Una compañía desea fabricar un bote cilíndrico con el fin de guardar agua para situaciones de emergencia. El bote tiene 200 cms^3 de volumen. Halle las dimensiones que debe tener para emplear la menor cantidad posible de material y elabore el gráfico. (ver la figura).

x=radio $\quad \text{Area} = 2\pi r^2 + 2\pi r h$
y=altura $\quad \text{Volumen} = \pi r^2 h$



13. Una empresa que fabrica fertilizantes tiene costos fijos de $300 unidades monetarias y el costo de mano de obra y del material es de $15 unidades monetarias por fertilizante. Determine la función de costo, es decir, el costo total como una función del número de fertilizantes producidos. Si cada fertilizante se vende a $25 unidades monetarias, encuentre la función de ingresos y la función de utilidades.

14. Un microempresario puede comprar manzanas al mayorista a los precios siguientes: 30c de dólar por kilo si adquiere hasta 30 kilos; 25c de dólar por kilo para cantidades entre 30 y 60 kilos; 15c de dólar por kilo para cantidades mayores de 60 kilos. Determine el costo C(x) de adquisición de *x* kilos de manzanas.

15. El ingreso R obtenido por vender *x* unidades está dado por $R(x) = 50x - 0{,}02x^2$. Determine el número de unidades que deben venderse al mes de modo que maximicen el ingreso. Cuál es el ingreso máximo?.

16. Una compañía vende un producto a razón de 65 unidades monetarias por unidad. Los costos de materia prima son de 25 unidades monetarias por unidad, los costos por mano de obra son de 20 unidades monetarias por unidad, los costos de embarque son de 5 unidades monetarias por unidad y los costos fijos anuales son de 75000 unidades monetarias.
a) Determine la función de utilidad U(x), en donde *x* es igual al número de unidades vendidas.
b) Cuántas unidades se deben vender a fin de obtener una utilidad anual de 150000 unidades monetarias.

17. Una compañía vende un producto a razón de 75 unidades monetarias por unidad. Los costos por mano de obra son de 30 unidades monetarias por unidad, los costos de embarque son de 10 unidades monetarias por unidad y los costos fijos anuales son de 85000 unidades monetarias.

a) Determine la función de utilidad U(x), en donde *x* es igual al número de unidades vendidas.
b) Cuántas unidades se deben vender a fin de obtener una utilidad anual de 160000 unidades monetarias?.

18. Una organización de empleados de una empresa planea salir de excursión a la isla de San Andrés y esquiar allí en el fin de año. Se ha acordado con una pequeña compañía de esquí acuático en donde además se proporcionan alimentos, equipo, habitación y boletos de cine, a un costo de $200 unidades monetarias por persona, y un costo fijo de 1500 unidades monetarias por el arreglo de actividades especiales. Los costos de transporte se espera que sean a razón de 50 unidades monetarias por persona. La empresa carga a cada empleado 235 unidades monetarias por el paquete completo (incluido el transporte).

a) Cuántos empleados se requieren a fin de obtener el equilibrio?.
b) Si la empresa subsidia el viaje contribuyendo con 700 unidades monetarias, cuántos empleados se requieren?.

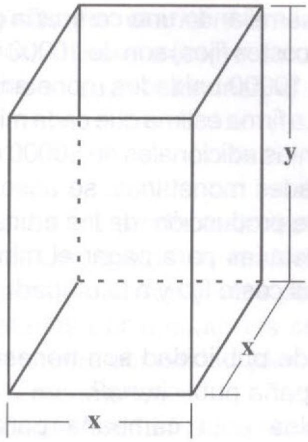
19.Una firma está desarrollando una campaña publicitaria por t.v. los costos del desarrollo (costos fijos) son de 10000 unidades monetarias, y la firma debe pagar 10000 unidades monetarias por minuto por las intersecciones de t.v. La firma estima que cada minuto de publicidad, da por resultado unas ventas adicionales de 50000 unidades monetarias. De estos 50000 unidades monetarias, se absorben 37000 en cubrir los costos variables de producción de los artículos y deben emplear 10000 unidades monetarias para pagar el minuto de publicidad. El resto es contribución al costo fijo y a la utilidad.

a) Cuántos minutos de publicidad son necesarios para recuperar los costos de la campaña publicitaria?.
b) Si la firma emplea esta campaña para intersecciones de 60 minutos, determine los ingresos totales, los costos totales (producción y publicidad), y la utilidad total (o la pérdida) resultantes de esta campaña publicitaria.

20. Una empresa consulta sobre el costo de publicidad en televisión y encuentra que: El costo neto (sin incluir el costo fijo), de grabación de un minuto de un determinado comercial es de 500 unidades monetarias y el costo total de grabación de 5 minutos del mismo comercial es de 2400 unidades monetarias. Asumiendo que el comportamiento de la función costo total, es lineal, hallar:

a) El costo como función total de la duración del comercial.
b) El costo fijo.
c) El costo de un comercial de media hora.
d) El costo total de un programa de 45 minutos.
e) El costo total de un programa de 70 minutos.

21. Se desea construir un tanque sin tapa de altura y metros y de base cuadrada de lado x metros, de tal manera que el área lateral y la del fondo suman un área de 9 m^2 Entre que valores debe estar x para obtener un tanque con una capacidad mayor o igual a $\frac{5}{2}m^3$



22. Suponga que la investigación de mercados, encontró una ecuación de demanda dada por $x = 2000 - 20p$ y la ecuación de costo dada por $C = 2000 + 20x$.

a)Exprese el costo C como una función lineal del precio P.
b)Exprese el ingreso R como una función cuadrática del precio P.
c)Construya las gráficas de costo e ingreso en el mismo sistema coordenado, e indique las zonas de pérdida ganancia y punto de equilibrio.
d) Calcule el precio que produce el máximo ingreso.

23. Un fabricante produce filtros para purificación del aire a un costo \$UM 2 por unidad. Los filtros se venden a \$UM 5 cada uno. A este precio, los consumidores compraron 5000 resortes al mes. El fabricante planea aumentar el precio de los filtros y estima que por cada incremento de \$UM 1 en el precio, se venderán 500 filtros menos cada mes. Expresar la utilidad mensual del fabricante como función del precio de venta de los filtros. Trace el grafico y señale el punto máximo.

3.18. FUNCIÓN EXPONENCIAL

En matemáticas como en la vida cotidiana las funciones exponenciales son importantes, pues con ellas podemos encontrar aplicaciones en crecimiento de poblaciones y crecimientos biológicos, etc.

La función:

$f(x)=a^x$, x número real con $a > 0$ y $a \neq 0$ se denomina función **Exponencial** con base ***a***.

Propiedades.

Si $a,b \in R^+$ y $x,y \in R$, **entonces:**

a) $a^0=1$
b) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
c) $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$
d) $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}\ (a \neq 0)$

e) $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$
f) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}(b \neq 0)$

g) Si $a^x = a^y \Leftrightarrow x=y$
h) Si $a^x = b^x \Leftrightarrow a=b$

Gráficos de la función exponencial con base ***a***.

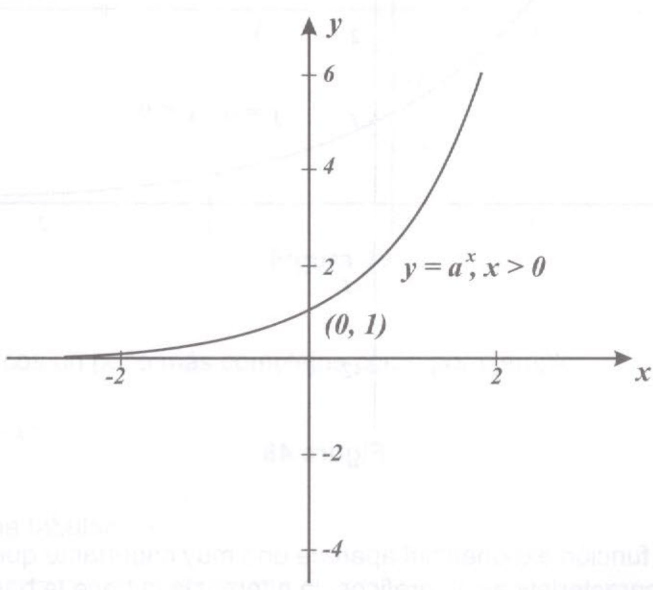


Figura 47

Características:
a) Su dominio corresponde a todos los números reales.
b) El rango está dado por: $(0,+\infty)$
c) Es creciente.
d) Su corte con el eje *y* es el punto ***(0, 1)***. No toca el eje *x*. Se dice que es una curva asintótica

Para la segunda forma de la curva cuando *x* es negativo ella tiene las siguientes características:

Características.
e) Su dominio corresponde a todos los números reales.
f) El rango está dado por: $(0,+\infty)$
g) Es decreciente.
h) Su corte con el eje *y* es el punto ***(0,1)***.
No toca el eje *x*. Se dice que es una curva asintótica.

El gráfico es el siguiente:

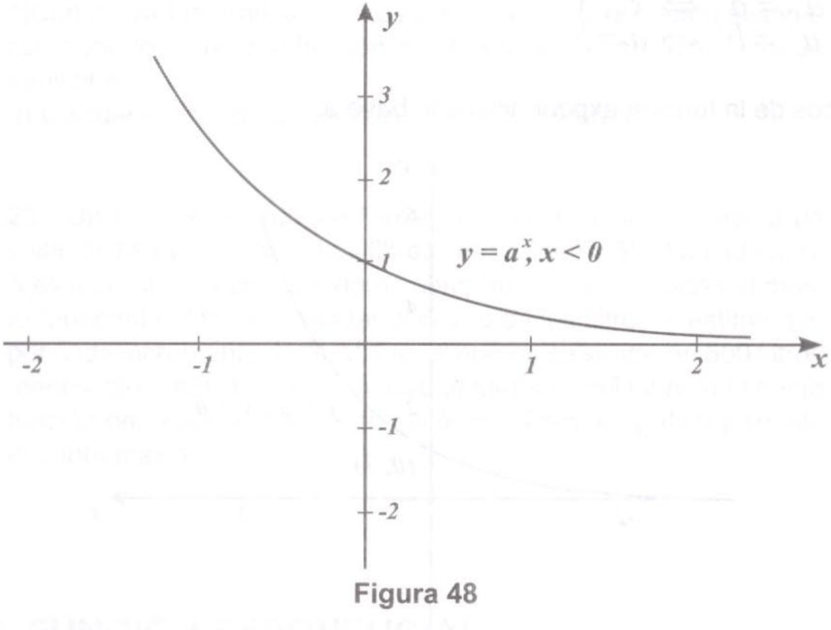


Figura 48

Dentro de la función exponencial aparece una muy importante que cumple con las mismas características y gráficos, la diferencia la hace la base **e**.

$$f(x)=e^{x}$$

Recordemos que el número ***e*** tiene un valor aproximado de ***2.718281828462...***

Ejemplo 61

Trazar el gráfico de: $y = 2^x$

Solución:

Hacemos una pequeña tabulación:

x	0	1	2	3	-1	-2	-3
y	1	2	4	8	1/2	1/4	1/8

Grafico:

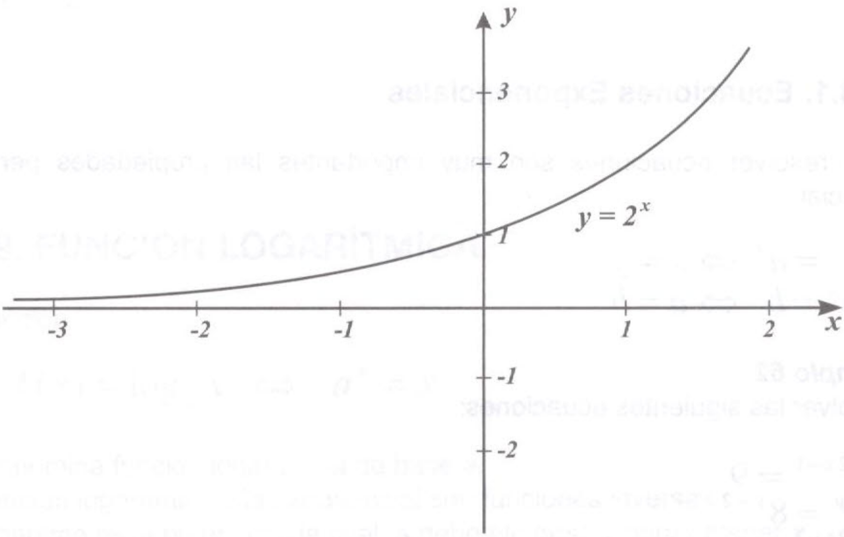


Figura 49

Existen gráficos un poco más complejos como por ejemplo:

$$f(x) = 2^{1-x^2}$$

Hacemos una tabulación:

x	0	1	2	-1	-2
y	3	1	1/27	1	1/27

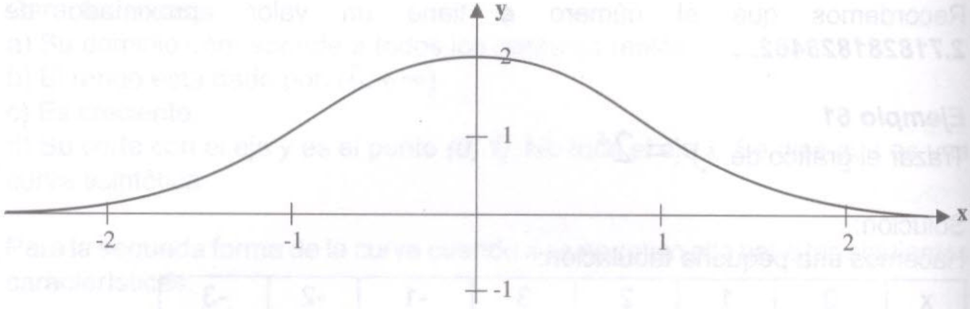


Figura 50

Esta curva es similar a la famosa campana de Gauss y que en estadística se conoce como distribución normal.

3.18.1. Ecuaciones Exponenciales

Para resolver ecuaciones son muy importantes las propiedades pero en especial

$$\text{Si } a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$$
$$\text{Si } a^x = b^x \Leftrightarrow a = b$$

Ejemplo 62

Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $3^{2x-1} = 9$
b) $2^y = 8^{y+2}$
c) $e^{2t+2} = 1$
d) $W^{w^2-10w+16} = 1$
e) $(3n+1)^n = (n+7)^n$
f) $\sqrt[3]{2^{2x+1}} = \dfrac{1}{32}$

Solución:

a) $3^{2x-1} = 9 = 3^2 \Rightarrow 2x-1=2 \therefore x = 3/2$ Utilizamos la propiedad *g).*

b) $2^y = 8^{y+2} \Rightarrow 2^y = 2^{3(y+2)} \Leftrightarrow y = 3(y+2) \Rightarrow y = 3y+6 \therefore y = -3$

c) $e^{2t+2} = 1 = e^0 \Leftrightarrow 2t+2=0 \Rightarrow 2t=-2 \therefore t=-1$

d) $W^{w^2-10w+16}=1=w^0 \Leftrightarrow w^2-10w+16=0 \Leftrightarrow (w-8)(w-2)=0$
$\therefore \; w=8, o \;, w=2$

e) $(3n+1)^n=(n+7)^n \;\Leftrightarrow 3n+1=n+7 \;\Rightarrow 3n-n=7-1$
$2n=6 \;\therefore\; n=3$

Utilizamos la propiedad *h).*

f) $\sqrt[3]{2^{2x+1}}=\dfrac{1}{32}=\dfrac{1}{2^5}=2^{-5} \Rightarrow \; (2^{2x+1})^{\frac{1}{3}}=2^{-5}$

$2^{\frac{2x+1}{3}}=2^{-5} \;\Leftrightarrow\; \dfrac{2x+1}{3}=-5 \Rightarrow 2x+1=-15 \Rightarrow 2x=-16$
$\therefore\; x=-8$

3.19. FUNCIÓN LOGARÍTMICA

La función:

$$y=f(x)=\log_a x \Leftrightarrow \; a^y=x$$

Se denomina función logarítmica de base *a.*
La función logarítmica y la exponencial son funciones inversas.
El logaritmo es la potencia a la cual ***a*** debe elevarse *y* para obtener ***x.***

Características
a) El dominio corresponde a los números reales positivos $(0,+\infty)$
b) El rango es el conjunto de los números reales.
c) Si ***a > 1*** la gráfica de la función es creciente en todo su dominio.
d) Si ***0*** < a <1, la gráfica es decreciente.
El corte con el eje ***x*** es en el punto ***(1, 0).***

Gráficos:

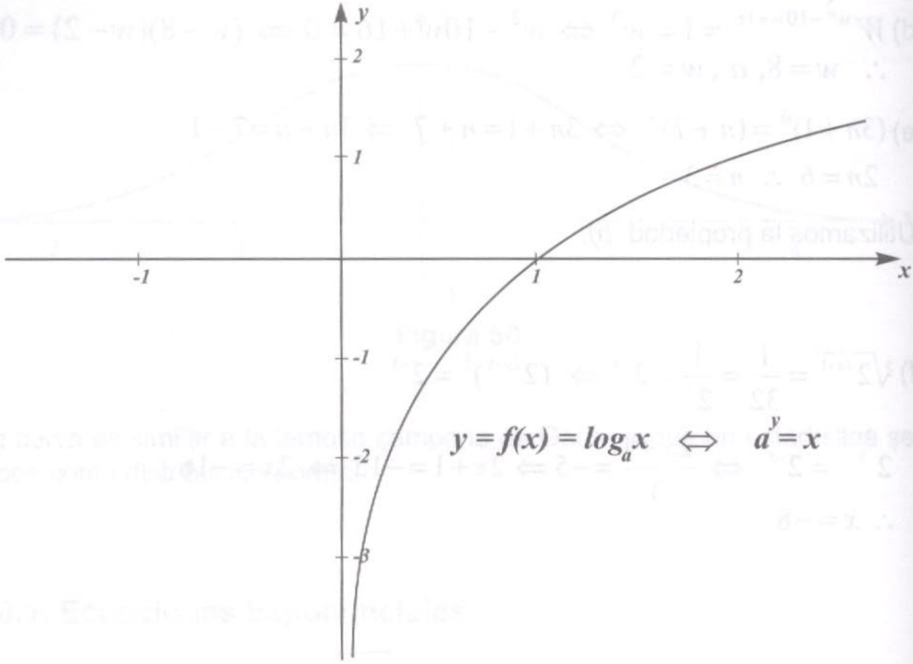


Figura 51

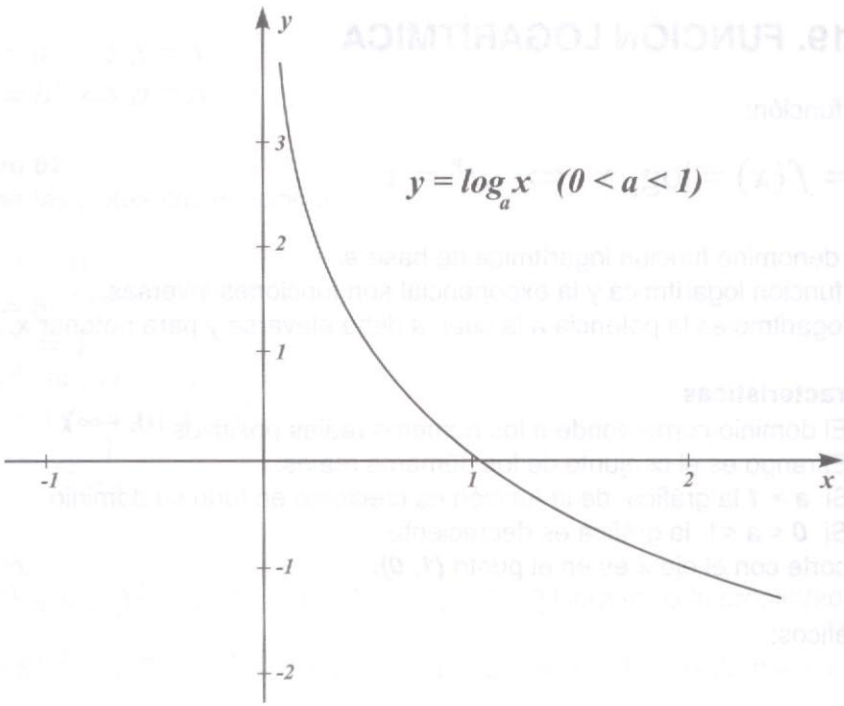


Figura 52

Propiedades

a) $\log_a x \cdot y = \log_a x + \log_a y$ (propiedad del producto)

b) $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$ (propiedad del cociente)

c) $\log_a x^n = n\log_a x$ (propiedad de la potencia)

d) $\log_a a = 1$

e) $\log_a 1 = 0$

Aplicación de las propiedades

Ejemplo 63

Escribir como suma o diferencia.

a) $\log_b\left(\dfrac{T^3 H^{\frac{3}{4}}}{z^{\frac{5}{6}}}\right)$

b) $\log_4\left(\dfrac{R^w t^b}{u^a}\right)^{\frac{n}{m}}$

Solución:

Para resolver estos ejercicios debemos utilizar las propiedades anteriores y teniendo en cuenta cual se utiliza primero. Por ejemplo para el caso a) utilizamos primero el cociente, luego el producto y finalmente la potencia.

$$\text{a) } \log_b\left(\frac{T^3 H^{\frac{3}{4}}}{z^{\frac{5}{6}}}\right) = \log_b T^3 H^{\frac{3}{4}} - \log_b z^{\frac{5}{6}}$$

$$= \log_b T^3 + \log_b H^{\frac{3}{4}} - \frac{5}{6}\log_b z$$

$$= 3\log_b T + \frac{3}{4}\log_b H - \frac{5}{6}\log_b z$$

Para el ejercicio b) primero bajamos la potencia exterior de la expresión y luego hacemos lo del ejercicio a).

b) $\log_4\left(\dfrac{R^w t^b}{u^a}\right)^{\frac{n}{m}} = \dfrac{n}{m}\left(\log_4 \dfrac{R^w t^b}{u^a}\right)$

$$= \frac{n}{m}\left(\log_4 R^w \cdot t^b - \log_4 u^a\right)$$

$$= \frac{n}{m}\left(w\log_4 R + b\log_4 t - a\log_4 u\right)$$

$$\frac{n\cdot w}{m}\log_4 R + \frac{n\cdot R}{m}\log_4 t - \frac{n\cdot a}{m}\log_4 u$$

Hagamos ahora el caso contrario.
Escribir como un solo logaritmo.

$$3\log_a(x-5) + \frac{1}{5}\log_a x - 12\log_a w$$

Solución:

$$= \log_a(x-5)^3 + \log_a x^{\frac{1}{5}} - \log_a w^{12}$$

$$= \log(x-5)^3 \cdot x^{\frac{1}{5}} - \log_a w^{12}$$

$$= \log_a\left(\frac{(x-5)^3 \cdot x^{\frac{1}{5}}}{w^{12}}\right)$$

Al igual que la función exponencial, existe para la función logarítmica una función llamada logarítmica natural que tiene como base el número **e.** Dicha función está dada por:

$$f(x) = Ln\,x \ \text{ o } \ f(x) = \log_e x$$

Cumple las mismas propiedades y su gráfico es igual.
Propiedades conjuntas exponencial y logarítmica.

1. $a^{\log_a x} = x$
2. $\log_a a^x = x$

3. $e^{\ln x} = x$
4. $Ln\, e^{x} = x$

3.20. ECUACIONES EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICA

Para resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas utilizamos las propiedades de ambas funciones y la definición de logaritmo.

Ejemplo 64
Resolver las ecuaciones:

a) $\log_{10}(7x-2)-\log_{10}(x-2)=1$
b) $\log_{2}(x+1)+\log_{2}(3x-5)=\log_{2}(5x-3)+2$

Solución:
a) $\log_{10}(7x-2)-\log_{10}(x-2)=1$

$$\log_{10}\left(\frac{7x-2}{x-2}\right)=1 \Leftrightarrow \left(\frac{7x-2}{x-2}\right)=10^{1} \Rightarrow 7x-2=10x-20$$

$$7x-10x=-20+2 \Rightarrow -3x=-18 \therefore x=6$$

b) $\log_{2}(x+1)+\log_{2}(3x-5)=\log_{2}(5x-3)+2$

$$=\log_{2}(x+1)(3x-5)-\log_{2}(5x-3)=2$$

$$=\log_{2}\left(\frac{(x+1)(3x-5)}{(5x-3)}\right)=2 \Leftrightarrow \left(\frac{(x+1)(3x-5)}{(5x-3)}\right)=2^{2} \text{ por definición}$$

$$\frac{3x^{2}-2x-5}{5x-3}=4 \Rightarrow 3x^{2}-2x-5=20x-12$$

$$3x^{2}-22x+7=0 \therefore x=7, o\ , x=1/3$$

c) $N^{\log 10\, x}=1000N^{2}$

Solución:
Tomamos logaritmos con base 10 en ambos lados.

$$\log_{10} N^{\log_{10} x} = \log_{10} 1000N^2$$

$$\log_{10} N \cdot \log_{10} N = \log_{10} 10^3 + \log_{10} N^2$$

$$(\log_{10} N)^2 = 3\log_{10} 10 + 2\log_{10} N$$

$$\log_{10}{}^2 N - 2\log_{10} N - 3 = 0$$

Si observamos con cuidado la última expresión es una ecuación cuadrática. Hacemos un cambio de variable para ver mejor la expresión:

$$u = \log_{10} N$$

$$u^2 - 2u - 3 = 0$$

$$u = 3, \text{ o } , u = -1$$

Rechazamos la solución negativa, puesto que no existe solución para logaritmos negativos.

Recuperando la variable tenemos: $\log_{10} N = 3 \therefore N = 10^3 = 1000$

TALLER EN EL AULA DE CLASE No. 15

1. Escribir como suma o diferencia.

a) $\log_3 \dfrac{x^4 \cdot y^7}{z^2 \cdot w^3}$ b) $\log_{10}\left(\dfrac{w^{\frac{1}{4}} \cdot E^2}{A^{\frac{3}{2}}}\right)^{\frac{1}{4}}$

2. Resolver las siguientes ecuaciones.

a) $\log_2 \sqrt{\dfrac{3x+4}{x}} = 0$

b) $10^{3x+7} = 87\left(3^{4x}\right)$

c) $(0.9)^{3x-6} = 13.8^{2x-3}$

d) $\log_8(x+4) + \log_8 2 = \log_8 x^2$

e) $9^x + 4 \cdot 3^x = 12$

3. Escribir como un solo logaritmo.

a) $\log_c(2x+7)+\log_c(2x-1)-\log_c(x+6)$

b) $\log_b A - 3\log_b B + \frac{1}{4}\log_b C^{\frac{1}{3}}$

4. Grafique las funciones.

a) $f(x)=\log_3 x$
b) $f(x)=\ln(x+2)$
c) $f(x)=\log_{1/4} x$

3.20.1. Aplicaciones de las Funciones Exponencial y Logarítmica

Es muy común encontrar aplicaciones en todas las ciencias de estas funciones

1. Laura Catalina tiene una exportadora de leche con la cual negocia a estados unidos y Puerto Rico, ella está interesada en conocer el número de bacterias en un cierto cultivo de bacterias de la leche después de t horas, ella encontró que este está dado por $Q(t)=Q_0e^{0.01t}$ Si hay 400 bacterias inicialmente, ¿cuántas bacterias estarán presentes después de tres días?

Solución:
Para t = 0 tenemos
$400=Q_0e^{0.01(0)} \Rightarrow 400=Q_0$

En tres días habrá:
$Q(72)=400e^{0.01(72)}=400(2,05443321064)=821,77$
Hay crecimiento de las bacterias.

2. Se cree que en muchos modelos de ventas tienen un crecimiento exponencial dado por:

$$P=f(t)=P_0e^{kt}$$

Donde P es la población en el tiempo t, P_0 indica la población cuando t = 0 y k es la constante de crecimiento (tasa porcentual de crecimiento). Determinar el período para que una población duplique el consumo de un producto.

Solución:
Si se duplica la población de consumo inicial, $\frac{P}{P_0}=2$

Luego: $\frac{P}{P_0}=e^{kt}$ la población se duplicará cuando: $e^{k\cdot t}=2$ Tomando logaritmos a ambos lados tenemos: $k\cdot t=\ln 2\ \therefore\ t=\frac{\ln 2}{k}$.

Si la constante de crecimiento de un determinado producto es 0.4 y t se expresa en horas, el tiempo que tarda la población en duplicar el consumo :

$$t=\frac{\ln 2}{0.4}=1.733 \text{ horas.}$$

3. Vida media.
Una función de decaimiento exponencial tiene la forma general $V=V_0\cdot e^{-k\cdot t}$
Donde *V* es el valor de la función en el tiempo t, V_0 indica el valor de la función cuando t = 0 y *k* es la constante de decaimiento (tasa porcentual de decaimiento).

Muchos procesos naturales se caracterizan por el comportamiento de deterioro exponencial. Uno de los más utilizados es el de la pérdida por mal estado de algunas productos perecederos. Una de las medidas utilizadas es la vida media. Es el tiempo que una cantidad de cierto alimento perecedero tarda en ser reducida por un factor de ½.

Supongamos que la cantidad de frutas se calcula por medio de la ecuación $V=V_0\cdot e^{-k\cdot t}$. La cantidad de pulpa de frutas se reducirá a la mitad cuando:

$$\frac{V}{V_0}=0.5$$

$$e^{-k\cdot t}=0.5$$

Tomando logaritmos a ambos lados tenemos:

$$-k\cdot t=Ln\ 0.5$$

$$t=\frac{\ln 0.5}{-k}$$

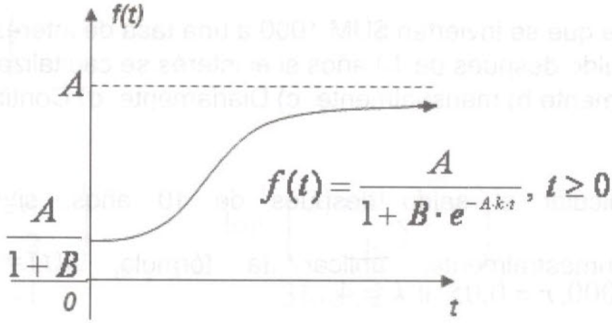
La constante de daño de de fruta es $k = 0.0244$, donde t se mide en días. Una cantidad de esta se dañará en la mitad de su tamaño si:

$$t = \frac{\ln 0.5}{-0.0244} = 28.40 \text{ días.}$$

4. Una de las funciones importantes en mercadeo es la función logística la cual esta dada por:

$$f(t) = \frac{A}{1 + B \cdot e^{-A \cdot k \cdot t}},\ t \geq 0$$

Su gráfico es:



5. En la comunidad de un barrio de Pereira se realizó el lanzamiento de un nuevo producto comestible el éxito fue tal que t semanas después de su lanzamiento $f(t)$ personas lo habían consumido, donde:

$$f(t) = \frac{500}{1 + 15e^{-0.9 \cdot t}}$$

Cuantas personas había probado el producto a) en el lanzamiento, b) después de 3 semanas, c) después de 10 semanas.

Solución:

a) $f(0) = \dfrac{400}{1 + 15e^{-0.9 \cdot (0)}} = 25$

b) $f(3) = \dfrac{400}{1 + 15e^{-0.9 \cdot (3)}} \approx 200$

c) $f(10)=\dfrac{400}{1+15e^{-0.9\cdot(10)}}\approx 399$

¿Qué ocurre si continúa indefinidamente?

Solución:
Al decir indefinidamente quiere decir infinito por tanto (simbólicamente) tomamos una cantidad muy grande que simbolizamos por: ∞

$$f(\infty)=\frac{400}{1+15e^{-0.9\cdot(\infty)}}=\frac{400}{1+0}=400$$

400 compraran el producto.

6. Supóngase que se invierten \$UM 1000 a una tasa de interés anual del 5%. Calcular el saldo después de 10 años si el interés se capitaliza.
a) Trimestralmente b) mensualmente c) Diariamente d) Continuamente.

Solución
a) Para calcular el saldo después de 10 años, si el interés se capitaliza trimestralmente, aplicar la fórmula $A(t)=P\left(1+\dfrac{r}{k}\right)^{kt}$ con $t=10, P=1000, r=0{,}05\ y\ k=4$

$$A(10)=1000\left(1+\frac{0.05}{4}\right)^{40}=\$UM\,1643.61$$

b) $A(10)=1000\left(1+\dfrac{0.05}{12}\right)^{120}=\$UM\,1647.009$

c) $A(10)=1000\left(1+\dfrac{0.05}{365}\right)^{3650}=\$UM\,1648.66$

d) Para el interés capitalizado continuamente emplear la formula $A(t)=Pe^{rt}$ con $t=10\,, P=1000\ y\ r=0.05$

$$A(10)=1000e^{0.5}=1648.72$$

MISCELÁNEA No. 3

1. Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $2 \cdot 5^{x+2} = 3^{2x+1}$ b) $\log_2(x+1) + \log_2(3x-5) = \log_2(5x-3) + 2$

c) $\log_3(2x-1) - \log_3(5x+2) - \log(x-2) = -2$

d) $8^{3x-1} = 16^{x-1}$ e) $\left(\frac{25}{8}\right)^{x+1} = \left(\frac{4}{5}\right)^{x+2} = 5$

2. Dad la ecuación:

$$w = 1000\left(\frac{1}{2}\right)^{0.8^x}$$

Demuestre que:

$$x = \frac{\log_{10}\left(\frac{3-\log_{10} w}{\log_{10} 2}\right)}{3\log_{10} 2 - 1}, \; o \; , \; x = \frac{\log_{10}\left(\frac{3\ln 10 - \ln w}{\ln 2}\right)}{3\log_{10} 2 - 1}$$

3. Resolver las ecuaciones.

a) $5^{2x-1} = 18$
b) $(a+3)^t = (2a-5)^t$
c) $\log_{2x} 27 = \log_3 27$

4. Escribir como suma o diferencia.

a) $\ln\left(\frac{3^5 A^{2w} H^4}{Q^2 \cdot e^{2R}}\right)$

b) $\log_5 \sqrt[5]{\frac{T^{-3} \cdot H^3}{W^6}}$

5. Escribir como un solo logaritmo.

a) $\ln 3x + \frac{3}{2}\ln w - 7\ln(Z-1)$

b) $3\ln(x-2) - \frac{1}{5}\ln(x+4) - \ln c$

6. Simplificar.

a) $6^{\log_6 x}$ b) $36^{\log_{36} 6}$

7. Trazar el gráfico de:

a) $f(x) = 2^{1-x}$ b) $f(x) = \log_3 x$

c) $f(x) = \log_{1/2} x$ d) $y = 3 - e^x$

e) $y = 10 \cdot e^{0.1 \cdot x}$ f) $y = 4^{x^2-1}$

8. Una sola bacteria gástrica se divide cada media hora para producir dos bacterias completas. Si se empieza con una colonia de 6000 bacterias, después de t horas habrá $B = 6000 \cdot 2^{2 \cdot t}$ bacterias. ¿Cuánto tiempo pasará para que *B = 1000 000?*

9. La venta de lámparas para fincas *x* se calcula mediante la ecuación:

$x = -\left(\frac{1}{k}\right) \cdot Ln\left(\frac{I}{I_o}\right)$ Hallar el valor de ***I***.

10. Si $\left[H^{+1}\right] = 3.0 \times 10^{-3}$ ¿Cuál es el pH?

11. En un barrio de Pereira la publicidad de venta de cierto artículo se calcula que *f(t)* personas la conocen t semanas después de su aplicación, donde

$$f(t)=\frac{30}{1+10e^{-0.8t}}$$

¿Cuántas personas compran el producto gracias a la publicidad a) inicialmente?, b) después de 7 semanas?, c) después de 14 semanas?, Si es indefinidamente cuantas lo compraran?.

12. Un producto agrícola de exportación debe tener ciertos cuidados para que no se dañe, este sigue la fórmula $Q=Q_0e^{-0.05t}$ donde t está medido en días. Cuál es la vida media de este producto?

13. Una población de bacterias crece de manera que su tiempo de duplicación es de 40 horas. Si la población consta hoy de un millón, ¿cuál será la población en 160 horas?

14. Cierta sustancia médica de exportación tiene vida media 3 ¿Qué fracción de una cantidad inicial quedará después de 243 días?

15. Trazar el gráfico de:

a) $y=\frac{3}{4}x-5$ b) $y=3x$

c) $y=3x+7$ d) $y=5x^2+9x-2$

e) $y=6x^2-10x-4$

16. Un medicamento inyectado por vía intramuscular a un adulto de 37 años sigue la ley $f(t)=3t^2-5t-2$. Donde t en milésimas de segundo es el tiempo de llegada de la sustancia al torrente sanguíneo. ¿Cuál es el tiempo mínimo de llegada de la sustancia al torrente sanguíneo? Trace el gráfico y explique.

17. Si una cantidad crce exponencialmente, variando en 10% cada mes, ¿al cabo de cuántos meses habrá triplicado su valor inicial?

18. Hallar el valor de *n* que cumpla la siguiente igualdad.

$$702507 = \frac{45600}{0{,}035 - 0{,}02}\left[1 - \left(\frac{1.02}{1.035}\right)^n\right]$$

19. Un cliente solicito unpréstamo a una cantidad financiera por $UM 36000, con el acuerdo de que pagaría tanto capital como los intereses, en 12 pagos mensuales de $UM 4080 el primero, $UM 3900 el tercero y así sucesivamente. Hallar la suma total de los pagos efectuados.

20. La venta de cierto producto (en libras por cm^2) puede calcularse aproximadamente mediante la fórmula $PA = 15.9e^{-0.22h}$. Donde h es la cantidad de personas que lo compran . Construya la gráfica de esta ecuación para el intervalo $0 \leq h \leq 12$.

21. Una empresa Ecológica tiene registros sobre contaminación ambiental causada por algunas industrias e indican que cerca de un barrio de la ciudad de Pereira la contaminación en partes por millón está dada por $N = 100(1 - e^{-0,2t})$ Número de contaminantes por millón y t es el número de semanas de contaminación. Construya la gráfica para $0 \leq t \leq 50$.

22. Después de una larga investigación, dos estudiantes del curso de humanidades de la Fundación Universitaria del Área Andina de Pereira encontraron que si los miembros de un grupo étnico de los cerros del valle de Cócora de limpieza y descontaminación de 10 se clasificaron según el número de veces en que cada uno participa en dicha limpieza, el número de veces, $N(L)$ la L – ésima persona clasificada que participó, se calculó aproximadamente mediante la ley $N(L) = L_1\, e^{-0.12(L-1)} \quad 1 \leq L \leq 10$
Donde L_1 fue el número de veces de la persona que obtuvo la mayor clasificación de especies en los cerros. Construya la ecuación suponiendo $L_1 = 100$.

REPASO DE CONCEPTOS

1. Señale la respuesta correcta.

a) Una función es una regla que asigna a cada número del conjunto de partida una y sola una imagen en el conjunto de llegada.
b) Una función es una regla que asigna más de un valor en el conjunto de llegada.

c) Una función asigna como mínimo dos valores del conjunto de partida al conjunto de llegada.
d) Ninguna anterior.

2. La solución del sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x+2y-8=0 \\ 2x+4y+4=0 \end{cases}$ está dado por:

a) *(3, -2)* b) *(3, -5)* c) *(3,-1)* d) Vacío.

3. Un laboratorio de productos químicos desea surtir un pedido de 500 litros de una solución ácida al 25%. Si se tienen disponibles en el almacén soluciones al 30% y al 18%, ¿Cuántos litros de cada uno de ellas se deben mezclar para cumplir con el pedido?

4. ¿Cuál es la definición de logaritmo?

5. Un modelo exportación de cierto producto está dado por $D=k(1-e^{-rx})$, Donde *x* es la cantidad de contenido del producto el número de productos empacados , *k* y r son constantes. Compruebe que:

$$xr=\ln\left(\frac{k}{k-D}\right)$$

6. La pendiente de una recta esta definida por un ______________ en *y* sobre un __________ en ___.

7. Señale la respuesta correcta.
Una función en la cual todos los elementos del conjunto de partida están asociados con un único electo en el conjunto de llegada se denomina:

a) Función constante porque no sobran elementos en el conjunto de llegada.

b) Función constante porque sobran elementos en el conjunto de llegada.

c) Función constante porque cada elemento del conjunto de partida tiene una sola imagen.

d) Función constante porque la imagen es la misma para todos los elementos del dominio.

8. Si $f(x)=5-3x$, el valor de *f(a + 1)* está dado por:

a) $2-3a$ b) $5-3a$
c) $3a-2$ d) $4-3a$

9. El modelo de blanco único, impacto único de la letalidad inducida por radiación, está dado por la ecuación:

$$S=\frac{N}{N_0}=e^{\frac{-D}{D_{37}}},$$

Donde S es la fracción superviviente, N el número de células que sobreviven a una dosis D, N_0 el número inicial de células y D_{37} una dosis constante relacionada con la radio sensibilidad celular. Hallar el valor de D.

13. Una compañía Pereirana deposita hoy la suma de $UM 5000000 en una cuenta de ahorros que paga interés del 2% mensual. Hallar la cantidad acumulada dentro de 5 años en la cuenta de ahorros.

14. Una compañía Dosquebradense que fabrica partes para DVD estima que el porcentaje de partes para DVD está dada por:

$$F(t)=\frac{78}{1+31.87e^{-0.71t}} \quad (0\leq t\leq 15)$$

Donde t se mide años, con t = 0 correspondiente al inicio de 1987 ¿Qué porcentaje de partes tenían estos partes al inicio de 1987 y de 2005?

15. Resuelva las siguientes ecuaciones

a) $11^{x^2+x-2}=1$ b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}=1$ c) $(\ln x)^2+2\ln x=0$

d) $\log_{1/3}(4x-1)=0$ e) $\ln(3x-1)+\ln(x-1)=0$

f) $\frac{e^{-x}+e^{x}}{2}=1$ $3^{4x^2+4x}=3^{-1}$ g) $\log_{1/3}2x-\log_{1/3}(x+1)=2$

h) $\ln\sqrt{x}=\sqrt{\ln x}$ i) $\ln\left(\frac{x^2-x-1}{x-3}\right)+\ln(x-3)=0$

16. En cada uno de los ejercicios use el logaritmo natural para despejar a x en función de y.

a) $y=\sqrt{e^{2x}-1}$ b) $y=\sqrt{e^{2x}+1}$

c) $y=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$ d) $y=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$

e) $y=\sqrt{4^{2x}-4^{x}-2}$

17. La compañía AB computadores S.A ha observado que la demanda mensual de su nueva línea de computadores t meses después de introducirlos al mercado esta dado por $P(t)=2000-1500e^{-0,05t}$ $(t>0)$

a) ¿Cuál es la demanda después de un mes, un año, tres años y cinco años.
b) trace el gráfico.

18. Un fabricante del municipio de santa Rosa de Cabal puede producir artesanías a un costo de UM$ 2 por unidad. Las artesanías se venden a UM$ 5 cada uno. A este precio, los consumidores compraron 4000 artesanías al mes. El fabricante planea aumentar el precio de las artesanías y estima que por cada incremento de UM$ 1 en el precio, se venderán 400 artesanías menos cada mes. Expresar la utilidad mensual del fabricante de artesanías como función del precio de venta de las mismas.

19. La gerencia de una empresa determina que los costos fijos mensuales correspondientes a la división que fabrica cierto tipo de componente para impresoras asciende a UM$122000. Si el costo de producción de cada componente es de UM¢ y cada componente se vende a UM$1.20, encuentre las funciones de costos, la de ingresos y de ganancia de la compañía.

PROBANDO NUESTRAS COMPETENCIAS

1. El dominio de la función $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+3}{x-4}}$ esta dado por:

a) $(-\infty,-3)\cup[4,\infty)$ b) $(-\infty,\ 3)\cup(4,\infty)$
c) $(-\infty,3]\cup(4,\infty)$ d) $\Re\neq 4$

2. Dadas las funciones: $f(x)=1-e^{-x}$ $g(x)=\ln x$

A) Las funciones son inversas entre si.
B) $(f\,o\,g)(x)=\dfrac{x-1}{x}$
C) $y=1$ es una asíntota horizontal de $f(x)$
D) El dominio de $g(x)$ es el conjunto de los reales.

a) Sí Las afirmaciones 1 y 2 son correctas.
b) Sí las afirmaciones 2 y 3 son correctas.
c) Sí las afirmaciones 3 y 4 son correctas.
d) Sí las afirmaciones 2 y 4 son correctas.
e) Sí las afirmaciones 1 y 3 son correctas.

3. Dada la función:

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{sí}\quad x<0\\ x(4-x) & \text{sí}\quad 0\le x\le 4\\ 0 & \text{sí}\quad x>4\end{cases}$$

La afirmación falsa es:

a) El dominio de la función es el conjunto de los números reales.
b) La función no es par.
c) La función es invertible en los reales.

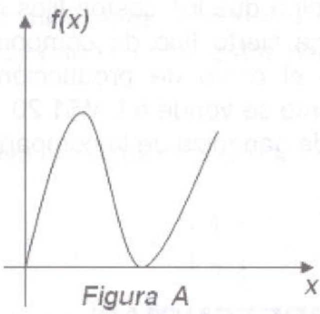


Figura A

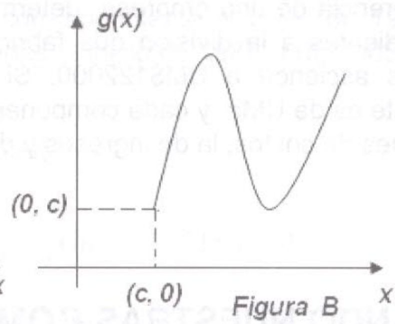


Figura B

4. La función de la figura B comparada con $f(x)$, es:

a) $g(x)=f(x+c)$ b) $g(x)=f(x-c)+c$
c) $g(x)=cf(x)$ d) $g(x)=f(x-c)$
e) $g(x)=f(x-c)-c$

5. En la ecuación $s = R\left[\dfrac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$ el valor de $\boldsymbol{n}$ es:

a) $n = \dfrac{R\,i\,s + 1}{\ln n} + 1$

b) $n = \dfrac{\ln\left(\dfrac{s\,i+1}{R}\right)}{i+1}$

c) $n = \dfrac{\ln(1+Ri)}{1+i}$

d) $n = \dfrac{\ln\left(\dfrac{s\,i+R}{R}\right)}{1+i}$

6. El valor de r en la ecuación $A = P\,e^{rt}$ es:

a) $r = \dfrac{\ln\left(\dfrac{A}{P}\right)}{t}$ b) $r = \dfrac{\ln(AP)}{t}$

c) $r = \ln(A\,p) - r$ d) $r = \dfrac{\ln\left(\dfrac{P}{A}\right)}{t}$

7. Al resolver la ecuación $\log_5(2x+1) - \log_5(x-2) = 1$ obtenemos como solución:

a) $x = \dfrac{10}{3}$ b) $x = \dfrac{11}{3}$ y $x = \dfrac{10}{3}$

c) $x = \dfrac{11}{3}$ d) $x = 3{,}\overline{6}$

Las afirmaciones ciertas son:

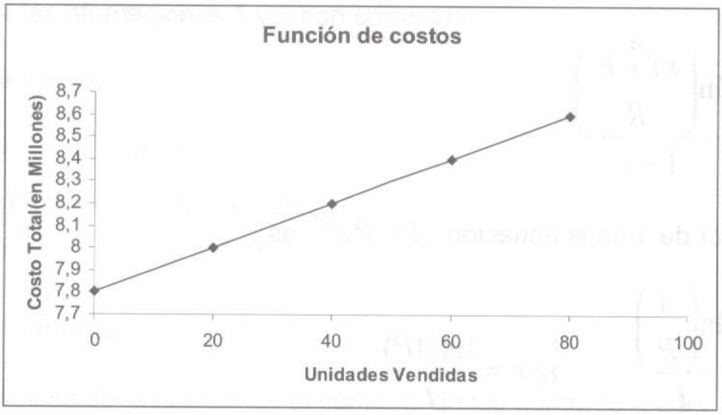
1. a) y c)

2. b) y e)
3. a) y d)
4. c) y d)

8. Al resolver la ecuación exponencial $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{x+3}{x-1}} = \frac{1}{125}$ $x \neq 1$. Obtenemos:

a) $x = 3$ b) $x = -3$
c) $x = 2$ d) $x = -2$ e) $x = 1$

9. El siguiente gráfico representa el valor total del costo de una economía. La función lineal está representada por $CT = 12000\,x + 8000000$



De acuerdo a lo anterior la pendiente de la recta corresponde a:

a) Costos semivariables.
b) Costos fijos.
c) Utilidad Unitaria.
d) Margen de Contribución.
e) Costos variables

10. si la función de costos C y la función de ingresos R están dadas por $C(x) = 4x + 12000$ y $R(x) = 10x$, respectivamente.

El número de unidades que debe producir la empresa para obtener un equilibrio es:

a) 20000 b) 200 c) 2000 d) 2200 e) 2100

Bibliografía

Arya, Matemáticas para Administración y Economía - Editorial Prentice Hall.
Ayres, Frank JR. Fundamentos de Matemáticas superiores-Ed McGraw Hill-
Barnett, Algebra y trigonometría – Editorial Mc Graw Hill – segunda edición
Baldor, Aurelio. Algebra -Ed Compañía cultural editora.
Bedoya, Fernández Hernando. Algebra y trigonometría- Universidad EAFIT Medellín – Séptima Edición.
Baldor, Aurelio. Ed Compañía cultural editora.
Fleming, Walter. Algebra y trigonometría. Ed. Prentice Hall-Tercera edición
Frumento, A.S –Biofísica Mosby –Tercera edición.
Lehmann, Charles. Algebra. Ed Limusa. Vigésima quinta reimpresión. 1992.
Leithold, Louis Cálculo con geometría análitica 7ª edición
Leithold Louis Cálculo para ciencias administrativas, biológicas y sociales.
Linda S, Constanzo. Fisiología –Ed Mc Graw-Hill –Primera edición.2000
Palmer, Claude I.Collage Algebra- Ed McGrawHill- Segunda edición 1956
Sánchez, Darío- Algebra y Trigonometría – U nacional –Segunda edición.
Spiegel, Murria R. Algebra Superior – Ed Schaum-McGraww Hill.
Swokowski, Algebra y trigonometría con geometría analítica- Ed Thomson-Décima edición.
Talleres Matemáticas I – Departamento de Matemáticas Universidad Tecnológica de Pereira.