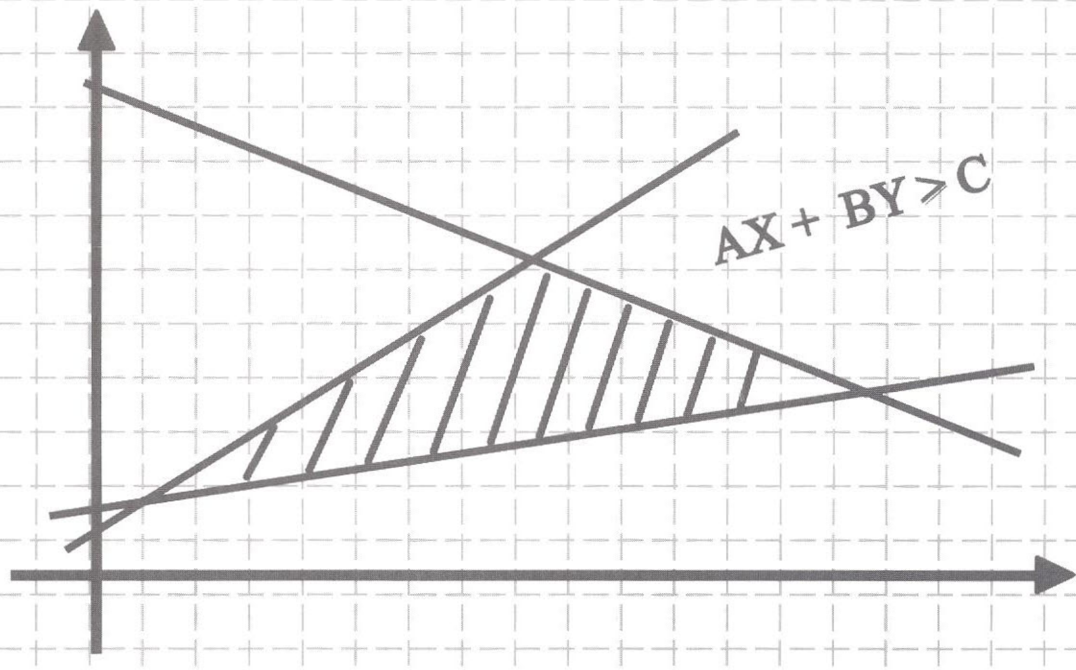
1 Edición

# Álgebra y Programación Lineal

## Con Aplicaciones en Ciencias Administrativas


LUZ MARIA ROJAS DUQUE
JAIME ALBERTO ECHEVERRY
JOSÉ GERARDO CARDONA TORO


$a, b = ?$

$$a = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ e^2 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 3 & b & 4 \\ e & 5^2 & 4 \\ 1 & 4 & a \end{bmatrix}$$

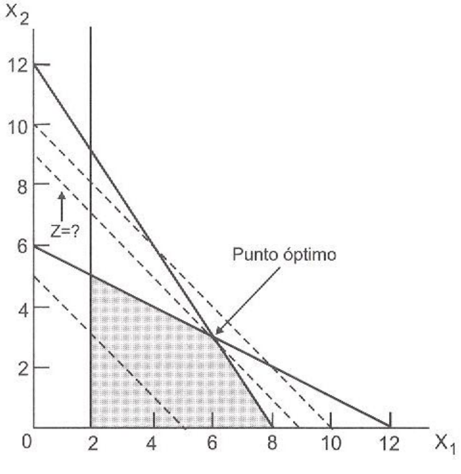
$a.b \neq b.a$

$$a.b = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ e^2 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 3 & b & 4 \\ e & 5^2 & 4 \\ 1 & 4 & a \end{bmatrix} \qquad b.a = \begin{bmatrix} 3 & b & 4 \\ e & 5^2 & 4 \\ 1 & 4 & a \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ e^2 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$


FUNDACION UNIVERSITARIA
DEL AREA ANDINA
SECCIONAL PEREIRA

# Algebra y Programación Lineal con Aplicaciones en Ciencias Administrativas

# Algebra y Programación Lineal con Aplicaciones en CienciasAdministrativas




**Luz María Rojas D.**

Docente Fundación Universitaria del Área andina

Universidad Tecnológica de Pereira

**Jaime Alberto Echeverry B.**

Docente Universidad Libre de Pereira

**José Gerardo Cardona Toro**

Docente Universidad Tecnológica de Pereira

Universidad Libre de Pereira

Fundación Universitaria del Area Andina, 2010

TÍTULO: **ALGEBRA Y PROGRAMACIÓN LINEAL CON APLICACIONES EN CIENCIAS**

Autores: Luz María Rojas D.
Jaime Alberto Echeverry B.
José Gerardo Cardona Toro

Primera Edición
300 ejemplares
Diciembre de 2010

Diagramación: Mónica Johana Salazar Quintero
Diseño de portada: Simón Agudelo Pérez

ISBN: 978-958-99483-4-7



Pereira - Colombia

Catalogación en la fuente Biblioteca Fundación Universitaria del Area Andina

Rojas D. Luz María
Algebra y Programación Lineal con Aplicaciones en Ciencias Administrativas / Luz María Rojas D, Jaime Alberto Echeverri B, José Gerardo Cardona Toro. - - Pereira: Fundación Universitaria del Área Andina, 2010
228P. ; 23cm
Incluye Bibliografía
ISBN: 978-958-99483-4-7

CDD 512.5 ed. 21
1. ALGEBRAS LINEALES 2.PROGRAMACION LINEAL
Catalogación de la Publicación – Fundación Universitaria del Área Andina
"Biblioteca Otto Morales Benítez".

# CONTENIDO

# PRÓLOGO

Las empresas hoy toman decisiones en los distintos niveles de las organizaciones y cada vez es de mayor complejidad, dadas las crecientes restricciones de disponibilidad de todo tipo de recursos. La matemática aplicada y sobre todo la investigación de operaciones se ha preocupado por contribuir a solucionar este tipo de situaciones proporcionando herramientas que faciliten a los gerentes el abordaje de estos procesos.

Los métodos cuantitativos en la toma de decisiones empresariales; de ahí que en los planes de estudio correspondientes a la formación de profesionales de la negocios internacionales, administración financiera, contaduría, economía ingeniería industrial y administración en sus diferentes matices, las finanzas y muchas más disciplinas, figuren asignaturas que pretendan que los egresados de estas titulaciones se apropien de un cúmulo de herramientas que les facilite el análisis y la toma de decisiones en situaciones complejas.

Con la popularización de los computadores personales (PC's) han surgido programas y aplicaciones muy completas para el tratamiento de los problemas de gestión mediante herramientas cuantitativas, las que en su conjunto constituyen los métodos de la investigación de operaciones.

QSB (Quantitative System Business), podría decirse que es el software más utilizado en la actualidad por estudiantes de pregrados y posgrados que incluyen en su plan de estudios asignaturas como algebra y programación lineal o investigación de operaciones. El texto escrito incluye modelos desarrollados en este programa, facilitando así el aprendizaje y análisis de los estudiantes.

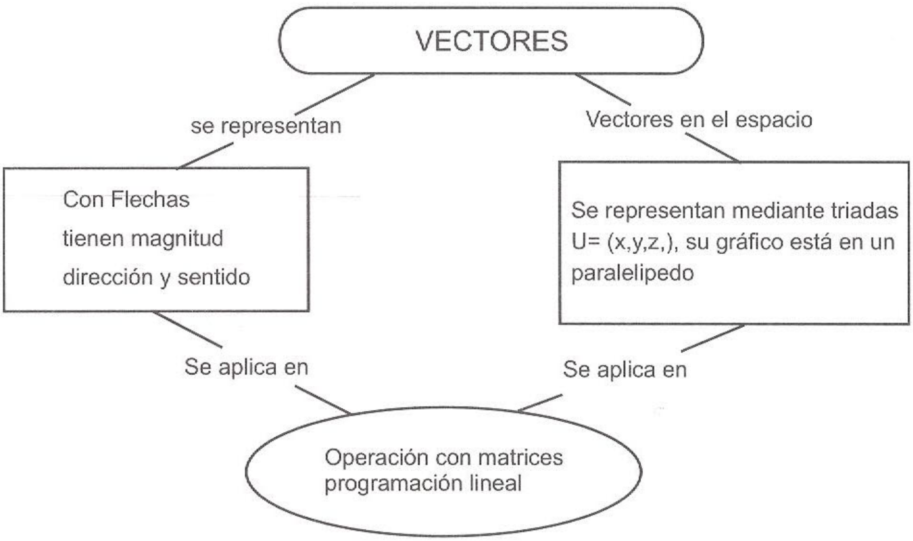
A pesar de la existencia de libros sobre esta temática, hemos querido contribuir con este texto para aquellos estudiantes de nuestra región y con un lenguaje más pedagógico y con diferentes ejercicios resueltos, los cuales ayudaran a que los estudiantes aprendan con mayor efectividad los conceptos y así aprendan a tomar decisiones más rápidamente. También con el apoyo del computador el estudiante en su práctica podrá hacer más rápido los análisis correspondientes a un problema real.

# CAPÍTULO I:

# Introducción a los Vectores

## OBJETIVO

Mostrar la importancia de los vectores en el estudio del Álgebra lineal y Programación Lineal.




## 1.1 DEFINICIÓN DE VECTOR

Un vector es un arreglo de números. Cada componente de cada vector se le da el nombre **elemento** y al número total de elementos se le conoce como **dimensión**. Denotaremos los vectores así $\vec{u} = A$. Los elementos por minúsculas. Ejemplo

$\vec{u} = (a_1, a_2, a_3)$ este vector es de dimensión tres y su primer elemento es $a_1$. Dos segmentos rectilíneos dirigidos (flechas) cuya longitud no es nula representan el mismo vector si y solo si tienen la misma longitud y dirección.

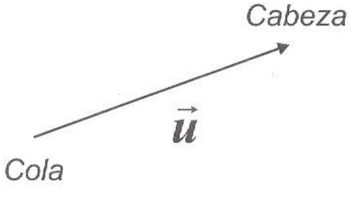
### 1.1.1 Vector renglón

Un vector renglón es un arreglo de números ordenados en forma horizontal, de renglón o fila.

Ejemplo:

$$\vec{u} = (3, 5, 2)$$
$$\vec{v} = (-1, 6, 7, -8, 3)$$
$$\vec{w} = (w_1, w_2, w_3, w_4)$$

### 1.1.2 Representación de un vector lineal



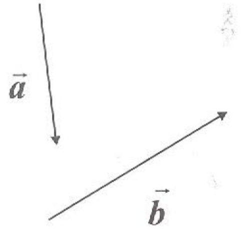

## 1.2 OPERACIONES CON VECTORES LINEALES

### 1.2.1 Suma

Existen dos métodos de suma el triangulo y el paralelogramo.

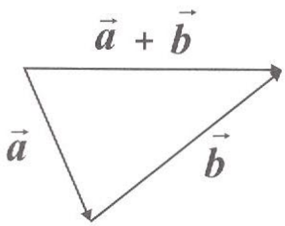
### 1.2.2 Triángulo

Sumar los vectores



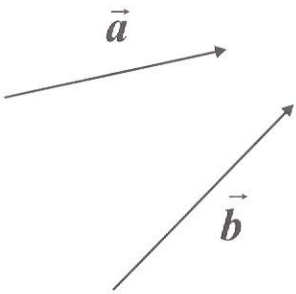
**Solución**

Unimos la cabeza de $\vec{a}$ y la cola de $\vec{b}$, luego unimos la cabeza de $\vec{b}$ con la cola de $\vec{a}$. Veamos:



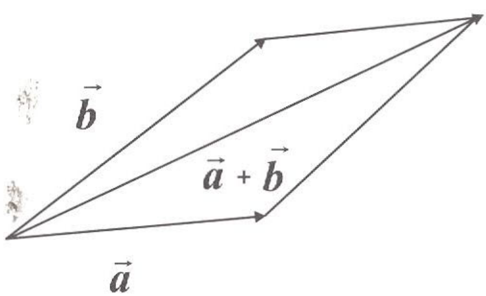

### 1.2.3 Regla del paralelogramo

**Sumar**

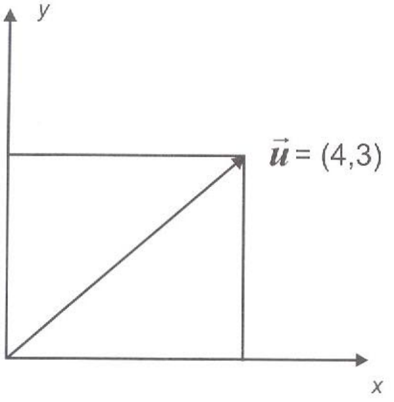



**Solución**

Unimos cola con cola y dibujamos líneas paralelas tanto de $\vec{a}$ como de $\vec{b}$ y luego trazamos la línea que une las paralelas. Veamos:



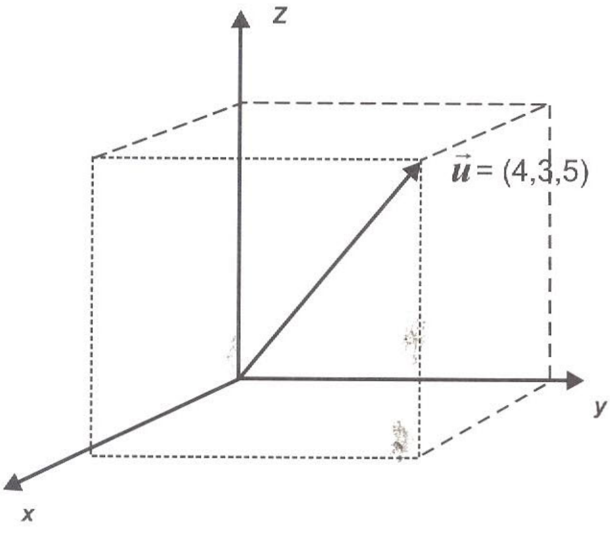
### 1.2.4 Representación geométrica de un vector unidimensional




## 1.3 REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA DE UN VECTOR TRIDIMENSIONAL

Para la representación de un vector tridimensional, debemos utilizar el espacio es decir coordenadas ***x, y*** y ***z.***

Ejemplo: Representar el vector (4, 3 ,5)



## 1.3.1 Algebra de vectores en $R^3$

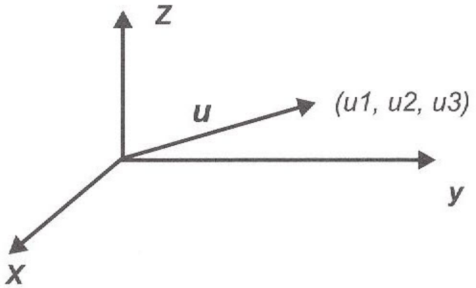
Si $u=(u_1,u_2,u_3)$ y $v=(v_1,v_2,v_3)$ son dos vectores en el espacio tridimensional, se puede aplicar los argumentos semejantes a los vectores usados en $R^2$.

u y v son equivalentes si y solo son iguales componente a componente, es decir:

$u_1= v_1, \quad u_2= v_2, \quad u_3= v_3$

$$u+v = (u_1+ v_1, \quad u_2+v_2, u_3+ v_3)$$

$$ku=(ku_1, \quad ku_2, \qquad ku_3)$$




**Ejemplo**

Si $u = (2,-1,3)$ y $v = (5,3,-1)$

$$u + v = (2 + 5,-1+3,3 - 1) = (7,2,2)$$

$$u - v = (2 - 5, -1 - 3,3 - (-1) = (-3, -4,4)$$

**Normas de un vector**

Si ***u, v y w*** son vectores en el espacio bidimensional o tridimensional, y ***k y r*** son escalares, entonces cumplen las relaciones:

$$a)\ u+v=v+u$$
$$b)\ (u+v)+w=u+(v+w)$$
$$c)\ u+0=0+u=u$$
$$d) u+(-u)=0$$
$$e) k(ru)=(kr)u$$
$$f) k(u+v)=ku+kv$$
$$g) (k+r)u=ku+ru$$
$$h) 1u=u$$

**Norma de un vector**

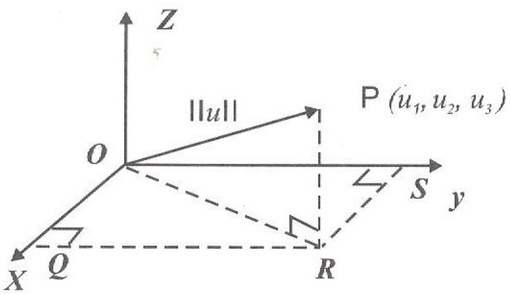
A la longitud de un vector *u* a menudo se le conoce como norma de *u* y notación está dada por: $\|u\|$. Por Pitagoras podemos obtener la norma de un vector $u=(u_1,u_2)$. Por tanto:

$$\|u\| = \sqrt{u_1^{\,2} + u_2^{\,2}}$$

Para un vector en el espacio numerico tridimensional tenemos:

$$\|u\| = \sqrt{u_1^{\,2} + u_2^{\,2} + u^3}$$

Geométricamente, tenemos:




En el espacio numérico tridimensional, podemos definir la distancia entre dos puntos de la siguiente manera:

$$d = \sqrt{x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y^1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Ejemplo: Calcular la norma del vector $u = (-4,3,-5)$

**Solución:**

$$d = \sqrt{x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y^1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

**Producto Vectorial**

Sean los vectores $u = (u_1, u_2, u_3)$ y $v = (v_1, v_2, v_3)$, en el espacio numérico tridimensional, el producto $u \bullet v$ está dado por:

$u \bullet v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$

Propiedades

Si u, v y w son vectores en el espacio numérico tridimensional y k es un escalar, tenemos

$$a)\ u \bullet v = v \bullet u$$
$$b)\ u \bullet (v+w) = u \bullet v + u \bullet w$$
$$c)\ k\,(u \bullet v) = (ku) \bullet v = u \bullet (kv)$$
$$d)\ u \bullet u > 0 \ \ si \ \ u \neq 0 \ \ y \ \ u \bullet u = 0 \ \ si \ \ u = 0$$

a) $u \bullet v = v \bullet u$

b) u $\bullet \,( v + w ) = u \bullet v + u \bullet w$

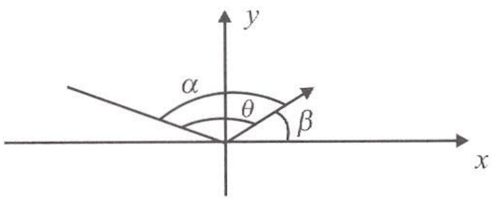
c) $k$ (u $\bullet$ $v) = (ku) \bullet v = u \bullet (kv)$

d) $u \bullet u > 0$ $si\ u \neq\ 0\ y\ u \bullet u = 0\ si\ u = o$

Angulo entre vectores

Sean los vectores $u = (u_1, u_2,)$ $y$ $v = (v_1, v_2)$ dos vectores de $R^2$.

Sea α el angulo entre ellos.




$$\alpha = \theta - \beta$$
$$\cos\alpha = \cos(\theta - \beta)$$
$$\cos\alpha = \cos\theta \cos\beta + sen\theta \ \ sen\beta$$
$$\cos\alpha = \frac{x_1}{\|X\|}\frac{y_1}{\|Y\|} + \frac{x_2}{\|X\|}\frac{y_2}{\|Y\|}$$
$$\cos\alpha = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2}{\|X\|\|Y\|} \qquad 0 \leq \alpha \leq \pi$$

**Ejemplo:**

Hallar el ángulo entre los vectores:

$u = (1,2,3) \quad v = (-1,3,2)$

$$\cos\alpha = \frac{1(-1)+2(3)+3(2)}{\|u\|\,\|v\|} = \frac{-1+6+6}{\sqrt{14}\sqrt{14}} = \frac{11}{14}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{11}{14}\right) = 38°12'48''$$

## EJERCICIOS RESUELTOS

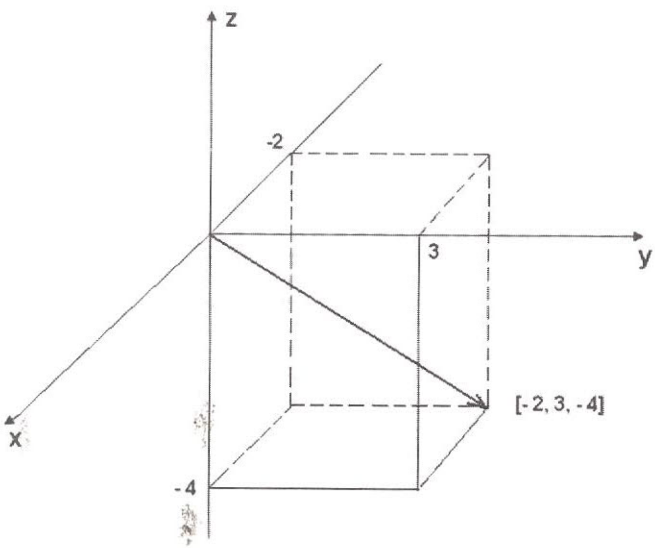
Dibujar los puntos

$a)\ (2,3,-4)$

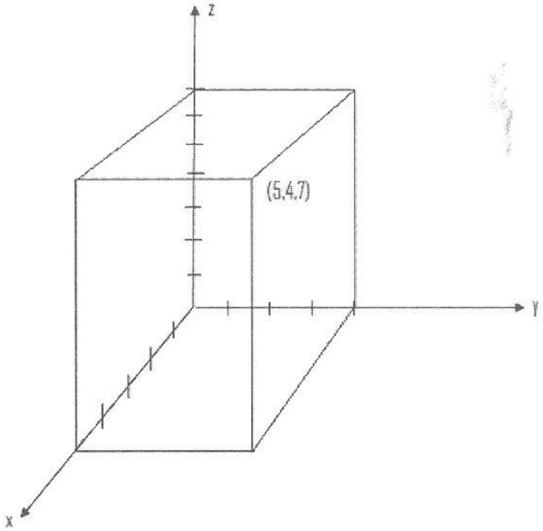
$b)\ (5,4,7)$

Solución

$a)(3,5,-1)$



*b)* (5,4,7)




Para los siguientes vectores:

$u = (5,-3,7)$ $v = (9,3,2)$ $y$ $w = (9,1,-3)$. Hallar:

i) $u + v$ *ii)* $u \bullet 2v$ *iii)* $\|u\|$ *iv)* $\|3w - v\|$ *v)*

**Solución:**

*a)* $u + v = (5,-3,7) + (9,3,2) = (14,0,9)$
*b)* $u \bullet v = (5,-3,7) \bullet 2\,(9,3,2) = (5,-3,7) \bullet (18,6,4) = 5(18) + (-3)(6) + 28$
$= 39$
*c)* $\|u\| = 5^2 + (-3)^2 + 7^2 = \ \ 83$
*d)* $\|3w - v\| = \|(15,-9,21) - (9,3,2)\| = 6^2 + (-12)^2 + (19)^2 = 23{,}25$

e)El ángulo está dado por:

$$\cos\alpha = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2}{\|X\|\|Y\|} \qquad 0 \le \alpha \le \pi$$

$$\cos\alpha = \frac{(5,-3,7) \bullet (9,3,2)}{\|(5,-3,7)\|\,\|(9,3,2)\|} = \frac{50}{88.3} = 0{,}06$$

$\alpha = \cos^{-1}(0{,}06) = 86^{\circ}33'37''$

## EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Graficar los puntos:

a) $(-3,5,7)$
b) $(-4,-8-5)$
c) $(-3,2,5)$

2. Para los vectores dados a continuación, realizar las operaciones indicadas: $u = (-2,1-3)$, $v = (5,2,1)$ $y$ $w = (4,1,2)$

a) $u + 3v - 2w$ $b)$ $2u - 3v + 2w$ $c)$ $-2u + 3v + 7w$

$d)$ $2u \cdot w$ e)$w \cdot 3v$

3. Halle el vector entre los vectores:

$u\ y\ w$ $b)$ $v\ y\ w$

4. Para los vectores del punto 2 calcular:

$a)$ $\|u + 3v\|$
b) $\|\mathrm{w} - 2v\|$
c) $\|w\| \cdot \frac{1}{\|v\|}$
d) $\left\| w \frac{1}{\|v\|} \right\|$

5. Dibuje los vectores

$a)$ $u = (-4,5,7)$

$b)$ $v = (7,8,9)$

$c)$ $w = (-10,8,-6)$

# CAPÍTULO II:

# Algebra de Matrices

(Richmond, Reino Unido, 1821-Cambridge, id., 1895) Matemático británico. Hijo de comerciantes, los primeros ocho años de su infancia transcurrieron en San Petersburgo. En 1838 ingresó en el Trinity Collere de Cambridge, donde estudió matemáticas y derecho. Nombrado profesor de esta primera disciplina, permaneció en Cambridge durante el resto de sus días. Uno de los matemáticos más prolíficos de la historia, Cayley publicó a lo largo de su vida más de novecientos artículos científicos. Considerado como uno de los padres del álgebra lineal, introdujo el concepto de matriz y estudió sus diversas propiedades. Con posterioridad empleó estos resultados para estudiar la geometría analítica de dimensión n; en 1859 concluyó que la geometría métrica se encontraba incluida en la proyectiva, noción que recogería Felix Klein en su estudio de las geometrías no euclídeas. Entre 1854 y 1878 escribió diversos artículos en los que desarrolló por vez primera la teoría de los invariantes.

## INTRODUCCIÓN

En este capítulo trataremos los conceptos de matriz, algebra de matrices, determinantes y la matriz inversa. Además, se mostraran las aplicaciones que tiene cada concepto de estos en ciencias económicas y administrativas.

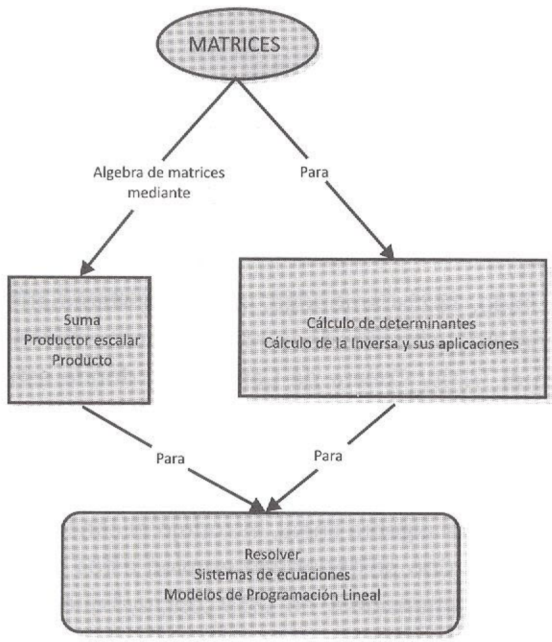
# OBJETIVOS

Aprender el concepto de matriz

Identificar los tipos especiales de matrices

Aplicar las propiedades y aplicarlas en operaciones con matrices

Utilizar programas como solver y derive en la solución de problemas




# 2.1 MATRICES

## 2.1.1 Definición:

Una matriz, es un arreglo rectangular de números reales en filas y columnas, encerrados en grandes paréntesis rectangulares. Las matrices en general se denotan mediante letras mayúsculas repintadas como:

A, B, C,....,Z.

Son matrices las siguientes:

$$A=\begin{bmatrix}-3 & 5\\ 4 & \sqrt{3}\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 8\\ -8 & 7 & \sqrt[5]{3}\\ 4 & 9 & 100\end{bmatrix},$$

$$C=\begin{bmatrix}3 & -1 & 9\end{bmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}1 & 9 & 7 & -9\\ 7 & 12 & 6 & 110\\ 9 & 6 & 5 & 3\\ -2 & 1 & 7 & 13\end{pmatrix},\quad E=\begin{bmatrix}2\end{bmatrix}$$

Las matrices son continuamente utilizadas en la vida cotidiana, veamos un caso sencillo.

La dirección de transito desea conocer las horas de mayor congestión en la zona centro de la ciudad de Pereira. Para ello ha destinado a uno de sus guardas de transito el cual realizó el conteo de los vehículos los días lunes miércoles y viernes en las horas de la tarde, obteniendo los siguientes resultados:

| Hora | Lunes | Miércoles | Viernes |
|---|---|---|---|
| 12-13 | 30 | 28 | 30 |
| 13-14 | 26 | 23 | 22 |
| 14-15 | 30 | 32 | 35 |
| 15-16 | 25 | 21 | 19 |

Tabla No1

Lo anterior lo podemos expresar en forma de matriz, así:

$$T=\begin{bmatrix}30 & 28 & 30\\ 26 & 23 & 22\\ 30 & 32 & 35\\ 25 & 21 & 19\end{bmatrix}$$

Llamamos filas a la disposición en forma horizontal y columnas a la vertical como lo muestra el siguiente gráfico.

$$A = \begin{bmatrix} \text{Filas} \rightarrow \\ \downarrow \text{Columnas} \end{bmatrix}$$

# 2.2 TAMAÑO DE UNA MATRIZ

Una matriz que tiene m filas y n columnas, se dice que tiene un tamaño m x n (que se lee m por n). De las matrices del ejemplo tenemos que A es de tamaño 2 x 2, B es de tamaño 3 x 3 y C es de tamaño 1 x 3, D es de 4 x 4 y E es de 1x1.

Lo anterior lo podemos escribir también así:

$$A_{2x2}, B_{3x3}, C_{1x3}, D_{4x4} \text{ y } E_{1x1.}$$

# 2.3 MATRIZ FILA

Una matriz fila es aquella que tiene un tamaño 1xn; es decir tiene una fila y n columnas.

$$A = [a_1, a_2, a_3, ......a_n]$$

Ejemplo:

A = [1, 2, 67, 9] A es de tamaño 1 x 4.

# 2.4 MATRIZ COLUMNA

Una matriz columna es aquella de tamaño m x 1; es decir tiene una columna y m filas.

$$A = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{bmatrix}$$

En general podemos escribir una matriz así:

$$A = [a_{ij}]_{mn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots\dots\dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \dots\dots\dots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \dots\dots\dots a_{3n} \\ . & . & . \qquad\quad . \\ . & . & . \qquad\quad . \\ . & . & . \qquad\quad . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \qquad a_{mn} \end{bmatrix}_{mn}$$

En la notación $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, aij es un elemento cualquiera de la matriz A, veamos el siguiente ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 7 \\ 12 & 8 & 9 \\ 1 & 0 & 19 \end{bmatrix} \text{el elemeto } a_{13} = 7, \text{pues corresponde al elemento ubicado en}$$

la fila 1 columna 3

Si nos dicen $a_{32}$ debemos hallar el elemento ubicado en la fila 3

columna 2, es decir : $a_{32} = 0$

# 2.5 MATRIZ CUADRADA

Una matriz A de tamaño n x n, es decir, cuando el número de filas es igual al de columnas, se dice que A es una matriz cuadrada de orden n.

Ejemplo:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 100 & 56 \end{bmatrix}$$

# 2.6 MATRICES IGUALES

Dos matrices $A=(a_{ij})_{m\times n}$ **y** $B=(b_{ij})_{m\times n}$ del mismo tamaño son iguales si y sólo si todos los elementos correspondientes son iguales; es decir:

*aij = bij*

**Ejemplo:**

a) Las matrices:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 8 & 16 & 5 \\ 7 & 15 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 5^0 & 2^2 \\ 2^3 & 4^2 & \sqrt{25} \\ \sqrt{49} & 15 & 0 \end{bmatrix}$$

Son iguales, pues al igualar entrada a entrada tenemos:

$$3=3,\quad 1=5^0,\quad 4=2^2, 8=2^3$$
$$16=4^2,\quad 5=\sqrt{25}$$
$$7=\sqrt{49},\quad 15=15,\quad 0=0$$

**Ejemplo:**

Hallar los valores de x, y, z y t para que se cumpla la igualdad:

$$\begin{bmatrix} x+3 & 3y-1 \\ 4z-6 & 6t+3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & y+5 \\ z+3 & 5t+4 \end{bmatrix}$$

Solución:

Para que se cumpla la igualdad dada se igualan las entradas correspondientes y se halla el valor de la incógnita; es decir:

$x+3=5 \therefore x=2$

$3y-1=y+5 \Rightarrow 3y-y=5+1 \Rightarrow 2y=6 \therefore y=\dfrac{6}{2}=3$

$4z-6=z+3 \Rightarrow 4z-z=3+6 \Rightarrow 3z=9 \therefore z=\dfrac{9}{3}=3$

$6t+3=5t+4 \Rightarrow 6t-5t=4-3 \therefore t=1$

# 2.7 OPERACIONES ENTRE MATRICES

## 2.7.1 Suma

Sean $A=(a_{ij})_{m\times n}$ **y** $B=(b_{ij})_{m\times n}$ .. La suma de estas matrices es la matriz

C= *(cij)mn* donde cij = *aij + bij*. Esto nos indica que al sumar dos matrices del mismo tamaño, obtenemos otra de ese tamaño al sumar los elementos de las entradas correspondientes. Para sumar matrices estas deben ser del mismo tamaño.

**Ejemplo:**

$$a)\,A=\begin{bmatrix}1 & 3 & -4\\ 2 & 5 & \sqrt{3}\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0 & 2 & 3\\ 1 & 6 & 8\end{bmatrix}$$

$$b)\,E=\begin{bmatrix}3 & 4 & 5\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}4\\ 6\end{bmatrix}$$

**Hallar las Sumas A + B y E + D:**

Solución:

$$a)\quad A+B=\begin{bmatrix}1 & 3 & -4\\ 2 & 5 & \sqrt{3}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 2 & 3\\ 1 & 6 & 8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+0 & 3+2 & -4+3\\ 2+1 & 5+6 & \sqrt{3}+8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 5 & -1\\ 3 & 11 & \sqrt{3}+8\end{bmatrix}$$

b) No es posible puesto que las matrices no son iguales, E tiene una fila y tres columnas y D tiene dos filas y una columna.

### 2.7.2 Producto Escalar

Sea k un escalar (es decir un número) y $A=(a_{ij})_{m\times n}$ una matriz. La multiplicación kA es la matriz C = *(cij)mn* donde *cij = kaij.*

Esto nos muestra el producto el producto de un escalar k por una matriz A. El producto se obtiene al multiplicar cada elemento de A por el escalar k.

**Ejemplo:**

a) Sean $k=5$ y $A=\begin{bmatrix}7 & 2\\ 6 & \sqrt[4]{3}\end{bmatrix}$ Hallar kA.

Solución:

$$\text{kA}=5A=5\begin{bmatrix}7 & 2\\ 6 & \sqrt[4]{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}35 & 10\\ 30 & 5\sqrt[4]{3}\end{bmatrix}$$

## 2.8 DIFERENCIA DE MATRICES

Sean $A=(a_{ij})_{m\times n}$ **y** $B=(b_{ij})_{m\times n}$ se define la diferencia *A - B = A - (-1)B.*

**Ejemplo:**

Dadas las matrices: $\text{A}=\begin{bmatrix}2 & 6\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ $\text{B}=\begin{bmatrix}1 & 7\\ 8 & 4\end{bmatrix}$ Hallar A - B

Solución:

$$\text{A - B}=\begin{bmatrix}2 & 6\\ 0 & -1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 7\\ 8 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2-1 & 6-7\\ 0-8 & -1-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -8 & -5\end{bmatrix}$$

## 2.9 MATRIZ CERO

Una matriz con la particularidad de que todos sus elementos son **ceros** se denomina **matriz cero (matriz nula).** Se simboliza mediante **0.**

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nota: de acuerdo a la necesidad se define la matriz 0.

# 2.10 MATRIZ IDÉNTICA

Una matriz cuadrada en la cual su diagonal principal tiene unos y los demás elementos son ceros se denomina idéntica(o matiz identidad). La denotaremos con la letra In. La n nos da el orden, veamos algunos casos.

**Ejemplo:**

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{Idéntica de orden dos}$$

$$\mathrm{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ Idéntica de orden 3}$$

La idéntica de orden n está dada por:

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## 2.11 PROPIEDADES DE LA SUMA (DIFERENCIA) Y PRODUCTO ESCALAR

(A+B) = B + A

(A+B) + C = A + (B + C)

A + (-A) = 0 donde 0 es la matriz cero

A + 0 = A

K(A + B) = kA + kB k es un escalar.

(k + d)A = kA + dA ; k y d son escalares

(kd)A = k(dA); k y d son escalares.

A1 = 1A = A.

## 2.12 PRODUCTO ENTRE MATRICES

Sean las matrices $A = (a_{ij})_{m\times n}$ **y** $B = (b_{jk})_{n\times p}$ . Definimos el producto de

$$\mathrm{C_{ik}} = [a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \ldots\ldots, a_{in}] \begin{bmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ b_{3k} \\ . \\ . \\ b_{nk} \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$$

AB como otra matriz C tal que $C = (c_{ik})_{m\times p}$ tal que $c_{ik} = A_{i\bullet}\, B_{\bullet j}$

### Matricialmente tenemos:

Esto nos dice que el producto de AB se obtiene calculando los productos de los elementos correspondientes tanto en A y B y luego calculando la suma de estos n productos. (El producto se realiza entre filas de A por columnas de B).

Nota: Para que se pueda realizar el producto entre A y B es necesario que el número de columnas de A sea igual al número de filas de B.

La matriz producto C es de tamaño m x p.

Ejemplo:

$A_{3\times4}$ y $B_{4\times5}$ Observamos que AB puede efectuarse pues cumple lo dicho en la nota anterior.

**Ejemplo:** Calcular el producto de las siguientes matrices.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 1\\ 5 & 8 & 0\\ 10 & 2 & 4\end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix}4 & 1\\ -1 & 0\\ 8 & 3\end{bmatrix}$$

Solución:

$$a)\ AB=\begin{bmatrix}1(4)+3(-1)+1(8) & 1(1)+3(0)+1(3)\\ 5(4)+8(-1)+0(8) & 5(1)+8(0)+0(3)\\ 10(4)+2(-1)+4(8) & 10(1)+2(0)+4(3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4-3+8 & 1+0+3\\ 20-8+0 & 5+0+0\\ 40-2+32 & 10+0+12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9 & 4\\ 12 & 5\\ 70 & 22\end{bmatrix}$$

En c) No se puede calcular AB, pues el tamaño de A es 2x2 mientras que el de B es de 3x1, no cumple lo dicho en la nota sobre producto que número de columnas de A debe ser igual al número de filas de B.

$$b)\begin{bmatrix}2 & 0\\ 4 & 3\\ 5 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}9\\ 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2(9)+0(5)\\ 4(9)+3(5)\\ 5(9)+1(5)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}18\\ 41\\ 50\end{bmatrix} \qquad c)\ A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 1 & 0\end{pmatrix};B=\begin{pmatrix}3\\ 5\\ 9\end{pmatrix}$$

# 2.13 PROPIEDADES DEL PRODUCTO ENTRE MATRICES

Sean A, B y C matrices de tamaño tal que se puedan efectuar las operaciones dadas a continuación. *r* es un escalar.

A(BC) = (AB)C

r(AB) = (rA)B = A(rB)

A(B+C) =AB + AC

(A + B)C = AC + BC

IA = A *y* BI = B

Potencia de una matriz.

Sea A una matriz cuadrada de tamaño n x n. La ene-ésima potencia de A esta dada por:

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot A \cdot A \ldots\ldots A}_{\text{n veces}}$$

Se definen:

$$A^0 = I \qquad A^2 = AA \qquad A^3 = AAA$$

**Ejemplo:**

$$\text{Si } A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \text{Calcular a)} A^2 \text{ y b)} A^3$$

Solución:

$$a)\ A^2 = AA = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 12 \\ 30 & 59 \end{bmatrix}$$

$$b)\ A^3 = AAA = A^2A = \begin{bmatrix} 11 & 12 \\ 30 & 59 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 49 & 106 \\ 265 & 473 \end{bmatrix}$$

# 2.14 POLINOMIO DE UNA MATRIZ

Sea $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 x + a_0$ un polinomio tal que los coeficientes $a_n, a_{n-1}, \ldots\ldots, a_1, a_0$ son escalares (números reales).

Solución:

Sea A una matriz cuadrada, para calcular el polinomio de una matriz es decir f(A) se procede de la manera siguiente:

$$f(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 A + a_0 \mathrm{I}$$

donde I es l matriz                la cual tiene el mismo tamaño de A.

Notemos que hemos reemplazado a *x* por A.

**Ejemplo:**

Dado el polinomio $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$ y la matriz

$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 7 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ hallar f(A).

Solución:

$$f(A) = 2\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 7 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 7 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 7 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$f(A) = 2\begin{bmatrix} 22 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{7}{2} & \frac{85}{4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -9 \\ -21 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$f(A) = \begin{bmatrix} 44 & -3 \\ -7 & \frac{85}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & -9 \\ -21 & \frac{5}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 44+7 & -3-9 \\ -7-21 & \frac{85}{2}+\frac{5}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 51 & -12 \\ -28 & 45 \end{bmatrix}$$

# 2.15 ALGUNOS MATRICES ESPECIALES

Matriz Transpuesta.

Sea A una matriz de tamaño m x n. La matriz obtenida de A al intercambiar las filas por las columnas se denomina Transpuesta de A y se denota así:

A'.

En algunos textos utilizan la notación:

$$A^t$$

Lo que nos dice el enunciado es que si $A=(a_{ij})_{m\times n}$ al intercambiar filas por columnas obtenemos otra matriz $A'=(a_{ji})_{n\times m}$.

**Ejemplo:**

Para cada matriz hallar su transpuesta.

$$a)A=\begin{bmatrix}3 & -6\\ 7 & 5\end{bmatrix} \quad b)C=\begin{bmatrix}2 & 3 & 7 & -9\\ 8 & 5 & 12 & 6\\ 7 & 13 & 6 & \sqrt{3}\\ 8 & 20 & 17 & 65\\ 6 & 7 & 0 & 9\end{bmatrix}$$

Solución

$$a)A'=\begin{bmatrix}3 & 7\\ -6 & 5\end{bmatrix} \quad b)C'=\begin{bmatrix}2 & 8 & 7 & 8 & 6\\ 3 & 5 & 13 & 20 & 7\\ 7 & 12 & 6 & 17 & 0\\ -9 & 6 & \sqrt{3} & 65 & 9\end{bmatrix}$$

# 2.16 PROPIEDADES DE LA TRANSPUESTA

Si A ***y*** B son matrices que permiten las operaciones indicadas (es decir son conformables) y r un escalar.

(A')' = A

(rA)' = rA'

(AB)' = B'A'

(A + B)' = A' + B'

Matriz simétrica

Sea A una matriz cuadrada se dice que A es simétrica si A = A′ **y** antisimétrica si A = -A′.

**Ejemplo:**

a) Comprobar que la matriz dada es simétrica

$$A=\begin{bmatrix}1 & 5 & 7\\ 5 & -1 & 3\\ 7 & 3 & 8\end{bmatrix} \Rightarrow A'=\begin{bmatrix}1 & 5 & 7\\ 5 & -1 & 3\\ 7 & 3 & 8\end{bmatrix} \text{ como } A = A'$$

decimos que A es simétrica.

b) comprobar que la matriz dada es antisimétrica

$$B=\begin{bmatrix}0 & 9 & -2\\ 9 & 0 & 4\\ -2 & 4 & 0\end{bmatrix} \Rightarrow -B=\begin{bmatrix}0 & -9 & 2\\ -9 & 0 & -4\\ 2 & -4 & 0\end{bmatrix} \text{ como } B = -B'$$

decimos que B es antisimétrica.

Nótese que, ya que los elementos de la diagonal principal de una matriz y su transpuesta coinciden, necesariamente una matriz antisimétrica debe tener los elementos de su diagonal principal nulos.

Teorema 1

Toda matriz cuadrada A puede escribirse como la suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica.

A = D + E. Donde D es simétrica y E es antisimétrica.

Demostración.

Para realizar la demostración escribiremos la matriz A de modo que nos devuelva su valor es decir:

$$A=\frac{A+A^t}{2}+\frac{A-A^t}{2}$$

Si agrupamos y restamos vemos que encontramos que A = A.

Ahora sean:

$$D=\frac{A+A^t}{2} \text{ y } E=\frac{A-A^t}{2}$$

**Comprobemos que D es simétrica.**

$D=\frac{A+A^t}{2}$ Tomamos transpuesta a ambos lados y hacemos uso de las propiedades de la transpuesta.

$$D^t=\left[\frac{1}{2}(A+A^t)\right]^t=\frac{1}{2}\left(A+A^t\right)^t=\frac{1}{2}\left[A^t+\left(A^t\right)^t\right]=\frac{1}{2}(A^t+A)=\frac{1}{2}(A+A^t)=D$$

**Como** D = D′ **entonces D es simétrica.**

**De igual manera comprobemos que E es antisimétrica.**

$E=\frac{A-A^t}{2}$ Tomamos tanspuesta a ambos lados y de nuevo hacemos uso de las propiedades de la transpuesta.

$$E^t=\left[\frac{1}{2}(A-A^t)\right]^t=\frac{1}{2}\left(A-A^t\right)^t=\frac{1}{2}\left[A^t-\left(A^t\right)^t\right]=\frac{1}{2}(A^t-A)=-\frac{1}{2}(A-A^t)=-E$$

**Como** E = -E′ **decimos que E es antisimétrica.**

**Ejemplo:**

**Escribir la matriz** A **como la suma de una antisimétrica y una simétrica.**

$$A=\begin{bmatrix}4 & 6\\ -5 & 7\end{bmatrix}$$

$$A=\frac{1}{2}(A+A^t)+\frac{1}{2}(A-A^t)=\frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}4 & 6\\ -5 & 7\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4 & -5\\ 6 & 7\end{bmatrix}\right)+\frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}4 & 6\\ -5 & 7\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4 & -5\\ 6 & 7\end{bmatrix}\right)$$

$$A=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}8 & 1\\ 1 & 14\end{bmatrix}+\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & 11\\ -11 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 1/2\\ 1/2 & 7\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 11/2\\ -11/2 & 0\end{bmatrix}$$

Definición:

Sea A una matriz cuadrada, se denomina diagonal principal al conjunto ordenado de elementos diagonales y se denota por día A.

**Ejemplo:**

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 7 & 8 & 9 \\ 7 & 6 & 13 \end{bmatrix} \text{Su diagonal principal es diaA} = (2,8,13)$$

En general:

$$\text{Si A} = \left[a_{ij}\right]_{nxn} \text{ entonces diaA} = (a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots\ldots\ldots, a_{nn})$$

# 2.17 TRAZA DE UNA MATRIZ. TR(A)

Sea A una matriz cuadrada, la suma de los elementos de la diagonal principal se llama Traza de A y la denotamos por Tr(A).

**Ejemplo:**

Dada la matriz A hallar su traza.

$$A=\begin{bmatrix} 5 & 8 & 14 \\ 9 & 15 & 22 \\ 30 & 7 & 1/5 \end{bmatrix} \text{La diagonal principal es DiaA} = (5,15,1/5)$$

$$\text{Luego la traza es Tr(A)} = 5+15+1/5 = 20+1/5 = 101/5$$

# 2.18 MATRIZ DIAGONAL

Sea A una matriz cuadrada se dice que A es diagonal si todos sus elementos no diagonales son cero.

**Ejemplo:**

**A es una matriz diagonal:**

$$A=\begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

# 2.19 MATRIZ ESCALAR

Sea A una matriz cuadrada, se dice que A es escalar si todos los elementos de la diagonal principal son iguales y los demás elementos son ceros.

**Ejemplo:**

**A es una matriz escalar:**

$$A=\begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

# 2.20 MATRIZ TRIANGULAR SUPERIOR

**Sea A una matriz cuadrada cuyos elementos por debajo de la diagonal principal son cero, a está se le denomina** Triangular superior.

$A=(a_{ij})_{n\,x\,n}$ es triangular superior si $a_{ij}=0$ para i > j.

**Ejemplo:**

**A es una matriz triangular superior**

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 8 & 19 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 8 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 31 & 12 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 21 \end{bmatrix}$$

# 2.21 MATRIZ TRIANGULAR INFERIOR

Sea A una matriz cuadrada cuyos elementos por encima de la diagonal principal son ceros, a está se le denomina Triangular inferior.

**Ejemplo:**

A **es una matriz triangular inferior**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 7 & 0 & 0 \\ 19 & -1 & 9 & 21 & 0 \\ 0 & 42 & 7 & 34 & 6 \end{bmatrix}$$

# 2.22 MATRIZ ORTOGONAL

**Sea** A **una matriz cuadrada, se dice que** A **es ortogonal si** AA′ = A′A = I

**Ejemplo:**

**La matriz**

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{Es ortogonal}$$

# 2.23 MATRIZ IDEMPOTENTE

**Sea** A **una matriz cuadrada se dice que** A **es** idempotente **si:**

$$A^2 = A$$

**Ejemplo:**

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & a & 0\end{bmatrix} \text{Donde } a \text{ es un escalar.}$$

(Ejercicio: compruebe que efectivamente A es idempotente).

# 2.24 MATRIZ INVOLUTIVA

Se dice que A es Involutiva si:

$$A^2 = I$$

**Ejemplo:**

**La matriz:**

$$A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ -1 & -1 & -1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix} \text{Es involutiva}$$

(Ejercicio compruebe que A es involutiva)

# 2.25 MATRIZ NILPOTENTE

**Se dice que** A **es** nilpotente **de índice** k **si:**

$$A^k = 0 \text{ y } A^{k-1} \neq 0$$

**Ejemplo:**

La matriz:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \text{Es nilpotente de indice 2 pues :}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

# 2.26 EJERCICIOS RESUELTOS I

**1. Dadas las matrices**

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 5 & 6 & 1 \\ 3 & 9 & 0 \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} 0 & 4 & 6 \\ 7 & -9 & 7 \\ 5 & -8 & 9 \end{bmatrix} \quad C=\begin{bmatrix} 2 & 7 & -3 \\ 5 & 4 & 8 \\ 4 & 6 & -7 \end{bmatrix}$$

Hallar: a)4A - C b)(A - 3B) + 5C c)3A - 2(B - C)

$$a)\ 4A-C=4\begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 5 & 6 & 1 \\ 3 & 9 & 0 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 2 & 7 & -3 \\ 5 & 4 & 8 \\ 4 & 6 & -7 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & -12 & 28 \\ 20 & 24 & 4 \\ 12 & 36 & 0 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 2 & 7 & -3 \\ 5 & 4 & 8 \\ 4 & 6 & -7 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 2 & -5 & 31 \\ 15 & 20 & -8 \\ 8 & 30 & 7 \end{bmatrix}$$

Solución:

$$b)\ (A-3B)+5C=\left(\begin{bmatrix}1 & -3 & 7\\ 5 & 6 & 1\\ 3 & 9 & 0\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}0 & 4 & 6\\ 7 & -9 & 7\\ 5 & -8 & 9\end{bmatrix}\right)+5\begin{bmatrix}2 & 7 & -3\\ 5 & 4 & 8\\ 4 & 6 & -7\end{bmatrix}$$

$$=\left(\begin{bmatrix}1 & -3 & 7\\ 5 & 6 & 1\\ 3 & 9 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 12 & 18\\ 21 & -27 & 21\\ 15 & -24 & 27\end{bmatrix}\right)+5\begin{bmatrix}2 & 7 & -3\\ 5 & 4 & 8\\ 4 & 6 & -7\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & -15 & -11\\ -16 & 33 & -20\\ 12 & 33 & -27\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}10 & 35 & -15\\ 25 & 20 & 40\\ 20 & 30 & -35\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11 & 20 & -26\\ 9 & 53 & 20\\ 32 & 63 & -62\end{bmatrix}$$

$$c)\ 3A-2(B-C)=3\begin{bmatrix}1 & -3 & 7\\ 5 & 6 & 1\\ 3 & 9 & 0\end{bmatrix}-2\left(\begin{bmatrix}0 & 4 & 6\\ 7 & -9 & 7\\ 5 & -8 & 9\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & 7 & -3\\ 5 & 4 & 8\\ 4 & 6 & -7\end{bmatrix}\right)$$

$$=\begin{bmatrix}3 & -9 & 21\\ 15 & 18 & 3\\ 9 & 27 & 0\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}-2 & -3 & 9\\ 2 & -13 & -1\\ 1 & -14 & 16\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3 & -9 & 21\\ 15 & 18 & 3\\ 9 & 27 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4 & 6 & -18\\ -4 & 26 & 2\\ -2 & 28 & -32\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & -3 & 3\\ 11 & 44 & 5\\ 7 & 55 & -32\end{bmatrix}$$

2. Si $f(x)=x^2-5x-14$ y $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 6 & 5\end{bmatrix}$, Hallar $f(A)$.

$$f(A)=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 6 & 5\end{bmatrix}^2-5\begin{bmatrix}1 & 3\\ 6 & 5\end{bmatrix}-14\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 6 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3\\ 6 & 5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-5 & -15\\ -30 & -25\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-14 & 0\\ 0 & -14\end{bmatrix}$$

$$f(A)=\begin{bmatrix}19 & 18\\ 36 & 43\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-19 & -15\\ -30 & -39\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 3\\ 6 & 4\end{bmatrix}$$

$$3.\ \text{Si } A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\7&0&0\end{bmatrix} \text{Comprobar que}: A^3=7I_3$$

Solución:

$$\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\7&0&0\end{bmatrix}^3=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\7&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\7&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\7&0&0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0&0&1\\7&0&0\\0&7&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\7&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&0&0\\0&7&0\\0&0&7\end{bmatrix}=7\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

4. Mostrar qu si $AB=A$ y $BA=B$ entonces $A^2=A$ y $B^2=B$

Solución :

$AB=A \Rightarrow (AB)A=A^2$ multiplicamos por A a ambos lados

$A(BA)=A^2$ comutando

$AB=A^2$ Por hipótesis $BA=B$

$A=A^2 \therefore A^2=A$

$BA=B \Rightarrow (BA)B=B^2$ Multiplicando por B a ambos lados

$B(AB)=B^2$ Conmutando

$BA=B^2$ Por hipótesis $AB=A$

$\therefore B=B^2$ Por hipótesis $BA=B$

$f(x) = x^2 + 2x + 1$, comprobar que $f(A^t) = f(A)^t$

Solución :

Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$

$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$

$$f(A) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$f(A) = \begin{bmatrix} 9 & 14 \\ 28 & 44 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 18 \\ 36 & 57 \end{bmatrix}$$

$$f(A)^t = \begin{bmatrix} 12 & 36 \\ 18 & 57 \end{bmatrix}$$

5. Sea A una matriz de 2x2 y f(x) el polinomio dado por:

Hallemos ahora $f(A^t)$ comprobemos que $f(A^t) = f(A)^t$

$$f(A^t) = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 28 \\ 14 & 44 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$f(A^t) = \begin{bmatrix} 12 & 36 \\ 18 & 57 \end{bmatrix} \quad \therefore \; f(A^t) = f(A)^t.$$

6.. ¿Es verdad de modo general que:

$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

Solución :

Mediante un contra ejemplo vamos a demostrar que no siempre se cumple dicha igualdad.

$$\text{Sean } A=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{bmatrix} \text{ y } B=\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}$$

$$(A+B)^2=\begin{bmatrix}5 & 2\\2 & 1\end{bmatrix};\quad B^2=\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 0\end{bmatrix};\quad A^2=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{bmatrix};\ 2AB=\begin{bmatrix}4 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$$

$$A^2+2AB+B^2=\begin{bmatrix}6 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$$

Reuniendo todos los términos y reemplazando en la igualdad tenemos:

$$\begin{bmatrix}5 & 2\\2 & 1\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}6 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$$

7. Con Las matrices dadas comprobar que Tr(A+B) =Tr(A) + Tr(B).

$$A=\begin{bmatrix}1 & 4\\3 & 5\end{bmatrix} \text{ y } B=\begin{bmatrix}2 & 1\\0 & 8\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Tr}(A+B)=\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix}1 & 4\\3 & 5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 1\\0 & 8\end{bmatrix}\right)=\mathrm{Tr}\begin{bmatrix}3 & 5\\3 & 13\end{bmatrix}\text{por definición}$$

$$\mathrm{Tr}(A+B)=3+13=16$$

$$\mathrm{Tr}(A)+\mathrm{Tr}(B)=\mathrm{Tr}\begin{bmatrix}1 & 4\\3 & 5\end{bmatrix}+\mathrm{Tr}\begin{bmatrix}2 & 1\\0 & 8\end{bmatrix}=(1+5)+(2+8)=16$$

Luego: $\mathrm{Tr}(A+B)=\mathrm{Tr}(A)+\mathrm{Tr}(B)$.

8. Demostrar que una condición necesaria y suficiente para que A sea involutiva es que : (I - A)(I + A) = 0.

Supongamos que $(I - A)(I+A) = I - A^2 = 0 \ \therefore\ A^2 = I$.

Supongamos ahora que A es involutiva; entonces:

$A^2 = I$ y $(I - A)(I + A) = I - A^2 = I - I = 0$.

casos)

$$A=\begin{bmatrix} x^{x^2-10x+16} & \sqrt[3]{2^{2x+1}} & \sqrt[x]{2} \\ 4^x-2^{x+1} & D_x\left[\ln\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right)\right] & e^{x^2-4} \\ \log_x 9 & \sqrt[n]{\dfrac{3^{2n}36}{27^{2n+1}+9^{3n+1}}} & \left[\left(\dfrac{x}{x^a}\right)^a\left(\dfrac{x^{2a}}{x^{a+1}}\right)\left(\dfrac{x^a}{x^{-1}}\right)^{a+1}\right]^{\frac{1}{a}} \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} 1 & \dfrac{1}{32} & 2^x \\ 35 & \dfrac{-1}{(1+x^2)x} & 1 \\ 2 & \dfrac{1}{81} & x^4 \end{bmatrix}$$

Solución:

Debemos igualar entrada a entrada correspondiente.

Entrada $a_{11}=b_{11}$

$$x^{x^2-10x+16}=1$$

El 1 lo podemos escribir como $x^0$ por tanto:

$$x^{x^2-10x+16}=x^0 \Rightarrow x^2-10x+16=0 \Rightarrow (x-2)(x-8)=0$$

$$x=2 \vee x=8$$

Cualquiera de estos valores que reemplacemos nos da la igualdad.

$$a_{12} = b_{12}$$

$$\sqrt[3]{2^{2x+1}} = \frac{1}{32} \Rightarrow \left(2^{2x+1}\right)^{1/3} = 2^{-5} \Rightarrow \frac{2x+1}{3} = -5 \Rightarrow 2x+1 = -15$$

$$2x = -16 \Rightarrow x = -8$$

$$a_{13} = b_{13}$$

$$\sqrt[x]{2} = 2^x \Rightarrow 2^{1/x} = 2^x \Rightarrow \frac{1}{x} = x \Rightarrow 1 = x^2 \therefore x = \pm 1$$

$$a_{21} = b_{21}$$

$$4^x - 2^{x+1} = 35 \Rightarrow 2^{2x} - 2 \cdot 2^x - 35 = 0 \Rightarrow \left(2^x - 7\right)\left(2^x + 5\right) = 0$$

$$2^x = 7 \Rightarrow x = \frac{\log_{10} 7}{\log_{10} 2} = 2{,}8$$

Como no existe el logaritmo de números negativos la segunda solución no se toma $\mathbf{2^x = -5}$ pues $\mathbf{2^x > 0}$

$$a_{22} = b_{22}$$

$$\ln\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right)' = \ln\sqrt{1+x^2} - \ln x = \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) - \ln x$$

Derivando tenemos:

$$\left(\frac{1}{2}\right)\frac{2x}{1+x^2} - \frac{1}{x} = \frac{x^2 - 1 - x^2}{(1+x^2)x} = \frac{-1}{(1+x^2)x}$$

$$a_{23} = b_{23}$$

$$e^{x^2-4} = 1 \Rightarrow e^{x^2-1} = e^0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$a_{31} = b_{31}$$

$$\log_x 9 = 2 \Rightarrow 9 = x^2 \therefore x = \pm 3$$

$$a_{32} = b_{32}$$

$$\sqrt[n]{\frac{3^{2n}36}{27^{2n+1} + 9^{3n+1}}} = \frac{1}{81} \Rightarrow \sqrt[n]{\frac{3^{2n}36}{3^{3(2n+1)} + 3^{2(3n+1)}}} = \sqrt[n]{\frac{3^{2n}36}{3^{6n+3} + 3^{6n+2}}}$$

$$\sqrt[n]{\frac{3^{2n}36}{3^{6n}3^3+3^{6n}3^2}}=\sqrt[n]{\frac{3^{2n}36}{3^{6n}\left(3^3+3^2\right)}}=\sqrt[n]{\frac{3^{2n}36}{3^{6n}\left(3^3+3^2\right)}}=\sqrt[n]{\frac{3^{2n}36}{3^{6n}(36)}}=\frac{3^2}{3^6}=\frac{1}{3^4}$$

$$a_{33}=b_{33}$$

Aplicamos las propiedades de las potencias.

$$\left[\left(\frac{x}{x^a}\right)^a\left(\frac{x^{2a}}{x^{a+1}}\right)\left(\frac{x^a}{x^{-1}}\right)^{a+1}\right]^{\frac{1}{a}}=\left[\frac{x^a}{x^{a^2}}x^{2a-a-1}\left(x^{a+1}\right)^{a+1}\right]^{\frac{1}{a}}=\left[x^{a-a^2+2a-a-1}x^{(a+1)^2}\right]^{1/a}$$

$$\left[x^{a-a^2+a-1+a^2+2a+1}\right]^{1/a}=\left[x^{4a}\right]^{1/a}=x^4$$

Por tanto concluimos que las matrices son iguales.

# 2.27 APLICACIONES

Vamos a continuación a ver algunas aplicaciones de las matrices en contabilidad y economía manejando solo los conceptos vistos anteriormente.

Recordemos antes que:

Ingreso = precio por cantidad

Costos totales = costos fijos más costos variables

Utilidad = Ingresos menos costos.

1. La compañía "LM" fabricante de partes para computadores, desea calcular el número de unidades de disco y monitores necesarias para programar el proceso de producción de de los tres modelos que ofrece.

En la siguiente tabla se muestran los requerimientos de unidades de disco y monitores, necesarios para la producción de un computador de acuerdo al modelo.

| Modelos / Partes | A | B | C |
|---|---|---|---|
| Unidades de disco | 14 | 20 | 15 |
| Monitores | 3 | 4 | 5 |

Tabla No2

Para el mes de febrero se ha recibido el siguiente plan de producción de computadores: 130 unidades del modelo A, 250 del modelo B y 120 del modelo C. Para el mes de Marzo se tienen las siguientes estimaciones: 70 unidades del modelo A, 110 del modelo B y 80 del modelo C.

Se pide lo siguiente:

a) Hacer una matriz que resuma las estimaciones de febrero y marzo

b) Determinar el total de partes, unidades de disco y monitores, que se requieren para cumplir los planes de producción de los dos meses.

Solución:

a) Modelo Febrero Marzo

$$\begin{array}{c} \boxed{\begin{array}{c} \textbf{A} \\ \textbf{B} \\ \textbf{C} \end{array}} \end{array} \begin{bmatrix} 130 & 70 \\ 250 & 110 \\ 120 & 80 \end{bmatrix}$$

b) Los requerimientos los calculamos mediante el producto de la matriz de unidades de disco y monitores y la matriz de los meses de febrero y marzo.

$$\begin{bmatrix} 14 & 20 & 15 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 130 & 70 \\ 250 & 110 \\ 120 & 80 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8620 & 4380 \\ 1990 & 1050 \end{bmatrix}$$

La información anterior la podemos organizar mediante el siguiente cuadro de doble entrada:

| Mes / Partes | Febrero | Marzo |
|---|---|---|
| Unidades de disco | 8620 | 4380 |
| Monitores | 1990 | 1050 |

Tabla No 3

2. Una compañía Pereirana "JG" fabricante de muebles, ha ampliado su cobertura de operación a todo el país.

Consumidores directos, minoristas y mayoristas. Para facilitar y agilizar las operaciones de distribución, la fabrica, ubicada en la zona industria de la ciudad, ha instalado sucursales que abastecen las zonas del centro y sur de Colombia.

Cuando ha transcurrido el trimestre de operación, la compañía desea determinar:

El número de unidades totales vendidas por producto y tipo de cliente

El número de unidades totales vendidas por producto

Los costos totales de fabricación de las unidades vendidas

Ingresos monetarios totales

Las utilidades brutas totales obtenidas

La estimación de las ventas para el siguiente trimestre, por zonas geográficas, producto y tipo de cliente, en el supuesto de que el incremento será del 20 por ciento.

Lo erogado en el trimestre por concepto de sueldos y comisiones, según el tipo de vendedor.

Para ello la empresa cuenta con la siguiente información:

Unidades vendidas en el trimestre.

| | Fabrica en Pereira | | | | Sucursal centro | | | | Sucursal sur | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Producto Categoría | I | II | III | IV | I | II | III | IV | I | II | III | IV |
| Directos | 40 | 30 | 50 | 28 | 60 | 54 | 35 | 34 | 58 | 60 | 47 | 27 |
| Minoristas | 60 | 73 | 68 | 24 | 75 | 92 | 84 | 27 | 73 | 87 | 75 | 35 |
| Mayoristas | 70 | 84 | 73 | 39 | 86 | 75 | 53 | 40 | 72 | 70 | 60 | 35 |

Tabla No 4

b) salarios y comisiones pagados, por mes de actividad, de acuerdo con la categoría del personal y la zona en que opera.

| Zona / Categoría | Fábrica de Pereira | Sucursal del Centro | Sucursal del sur |
|---|---|---|---|
| Gerentes | 125 | 115 | 115 |
| Jefes regionales | 100 | 90 | 80 |
| Vendedores | 90 | 80 | 70 |

Tabla No 5

c) Costos de fabricación por unidad y por tipo de producto.

| Productos | I | II | III | IV |
|---|---|---|---|---|
| Costos | 80 | 60 | 100 | 40 |

Tabla No6A

d) Precios de venta por unidad y por tipo de producto.

| Producto | I | II | III | IV |
|---|---|---|---|---|
| Precio de venta | 110 | 80 | 130 | 60 |

Tabla No 6B

Solución:

Lo primero que debemos hacer es organizar la información y a su vez dar una nomenclatura que identifique la misma; es decir:

V = Matriz de unidades vendidas en la fábrica principal por tipo de cliente y producto.

T = Matriz de unidades vendidas en el trimestre en la sucursal del centro.

W = Matriz de unidades vendidas en el trimestre en la sucursal sur.

$$V = \begin{bmatrix} 40 & 30 & 50 & 28 \\ 60 & 73 & 68 & 24 \\ 70 & 84 & 73 & 39 \end{bmatrix} \qquad W = \begin{bmatrix} 58 & 60 & 47 & 27 \\ 73 & 87 & 75 & 35 \\ 72 & 70 & 60 & 35 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 60 & 54 & 35 & 34 \\ 75 & 92 & 84 & 27 \\ 86 & 75 & 53 & 40 \end{bmatrix}$$

Las matrices A, B y C denotan lo pagado cada mes en las respectivas zonas geográficas, esto por los conceptos de sueldos y comisiones, por categorías de personal:

$$A=\begin{bmatrix}125\\100\\90\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}115\\90\\80\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix}115\\80\\70\end{bmatrix}$$

Las matrices G y H representan respectivamente los costos de fabricación y los precios de venta por unidad y por tipo de producto:

$$G=\begin{bmatrix}80 & 60 & 100 & 40\end{bmatrix}$$
$$H=\begin{bmatrix}110 & 80 & 130 & 60\end{bmatrix}$$

Con esta información podemos resolver el problema.

a) Unidades vendidas por producto y tipo de cliente:

$$V+T+W=R$$

$$\begin{bmatrix}40 & 30 & 50 & 28\\60 & 73 & 68 & 24\\70 & 84 & 73 & 39\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}60 & 54 & 35 & 34\\75 & 92 & 84 & 27\\86 & 75 & 53 & 40\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}58 & 60 & 47 & 27\\73 & 87 & 75 & 35\\72 & 70 & 60 & 35\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}158 & 144 & 132 & 89\\208 & 252 & 227 & 86\\228 & 229 & 186 & 114\end{bmatrix}$$

c) Para hallar los costos totales de fabricación de las unidades vendidas, debemos multiplicar la matriz L por la transpuesta de la matriz G que representa los costos de fabricación.

$$\begin{bmatrix}594 & 625 & 545 & 289\end{bmatrix}\begin{bmatrix}80\\60\\100\\40\end{bmatrix}=151080$$

b) Unidades vendidas por tipo de producto :

Aqui tomamos la matriz fila $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}$ y la multiplicamos por la matriz R resultado de sumar V + T + W.

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}158 & 144 & 132 & 89\\ 208 & 252 & 227 & 86\\ 228 & 229 & 186 & 114\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}594 & 625 & 545 & 289\end{bmatrix} = L$$

hemos utilizado la matriz fila con el fin de dar un resultado total de cada columna.

d) Ahora debemos hallar los ingresos monetarios totales. Para ello tomamos de nuevo la matriz L y la multiplicamos por la matriz transpuesta de precios de venta H.

$$\begin{bmatrix}594 & 625 & 545 & 289\end{bmatrix}\begin{bmatrix}110\\ 80\\ 139\\ 60\end{bmatrix} = 208435$$

e) Recordando que las utilidades las obtenemos de restar a los ingresos los costos, encontramos:

U = Ingresos – Costos = 208435- 151080 = 57355

f) Aquí se nos pide estimar las ventas para el próximo trimestre en un aumento del 20%, lo cual se halla multiplicando 1.20 por la matriz R. Es decir:

$$1.20\begin{bmatrix}158 & 144 & 132 & 89\\ 208 & 252 & 227 & 86\\ 228 & 229 & 186 & 114\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}189.6 & 172.8 & 158.4 & 106.8\\ 249.6 & 302.4 & 272.4 & 103.2\\ 273.6 & 274.8 & 223.2 & 136.8\end{bmatrix} = P$$

$$3\left(\begin{bmatrix}125\\ 100\\ 90\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}115\\ 90\\ 80\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}115\\ 80\\ 70\end{bmatrix}\right) = 3\begin{bmatrix}355\\ 270\\ 240\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1065\\ 810\\ 720\end{bmatrix}$$

g) Ahora debemos calcular las erogaciones trimestrales por concepto de sueldos y comisiones, según el tipo de vendedor. Esto lo logramos realizando la siguiente operación: 3(A + B + C).

2. La industria manufacturera LA de Dosquebradas, posee dos plantas para la fabricación de camisas. En ambas plantas se producen camisas tipo A y tipo B, utilizando maquinaria y tecnología diferentes.

Los costos de fabricación de las camisas, se resume en la siguiente tabla:

| Producto y Planta Concepto | Tipo A | | TipoB | |
|---|---|---|---|---|
| | Planta I | Planta II | Planta I | Planta II |
| Mano de obra directa | 1 | 2 | 2 | 2 |
| Materiales | 2 | 3 | 3 | 5 |
| Mano de obra indirecta | 4 | 3 | 4 | 2 |

Tabla No 7

La producción mensual de camisas de ambos tipos, se ha programado para el período actual de la manera siguiente:

| Camisas | Planta I | Planta II |
|---|---|---|
| Camisas tipo A | 1000 | 7000 |
| Camisas tipo B | 8000 | 6000 |

Tabla No 8

En reunión con los directores de mercadeo, producción y la parte financiera se conoció que la demanda para el próximo año crecerá en un 8% para las camisas tipo A y en un 3 % para las camisas tipo B.

Mediante las operaciones entre matrices, encontrar:

1. Los costos mensuales por concepto de mano de obra directa, materiales y mano de obra indirecta correspondientes a:

a) Camisas tipo A

b) Camisas tipo B

c) Ambas camisas.

2. El costo total mensual de operar las dos plantas a los niveles indicados;

3. El costo total mensual de operar ambas plantas a los niveles previstos para el próximo año, bajo el supuesto que el incremento de producción se distribuirá por partes iguales entre ambas plantas;

4. El costo total mensual de operar ambas plantas a los niveles previstos para el próximo año, bajo el supuesto de que el incremento de las camisas tipo A se efectuará totalmente en la planta I, y el de las camisas tipo B únicamente en la planta II.

5. ¿Cuál debe ser la alternativa más eficiente en términos de costos de operación?

Solución:

1a) Los costos mensuales para las camisas tipo A, está dada por:

b) Unidades vendidas por tipo de producto :

Aqui tomamos la matriz fila $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}$ y la multiplicamos por la matriz R resultado de sumar V + T + W.

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}158 & 144 & 132 & 89\\ 208 & 252 & 227 & 86\\ 228 & 229 & 186 & 114\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}594 & 625 & 545 & 289\end{bmatrix} = L$$

hemos utilizado la matriz fila con el fin de dar un resultado total de cada columna.

1b) Costos mensuales para el tipo de camisas B está dado por:

$$\begin{bmatrix}2 & 2\\ 3 & 5\\ 4 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8000\\ 6000\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}28000\\ 54000\\ 44000\end{bmatrix}\begin{array}{l}\text{Mano de obra directa}\\ \text{Materia prima}\\ \text{Mano de obra indirecta}\end{array}$$

1c) Costos mensuales para ambos tipos de camisas:

$$\begin{bmatrix}15000\\ 23000\\ 25000\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}28000\\ 54000\\ 44000\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}43000\\ 77000\\ 69000\end{bmatrix}\begin{array}{l}\text{Mano de obra directa}\\ \text{Materia prima}\\ \text{Mano de obra indirecta}\end{array}$$

2. Costo mensual de operar las dos plantas a los niveles indicados:

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}43000\\77000\\69000\end{bmatrix}=\$189000$$

3. Costo total mensual de operar ambas plantas a los niveles previstos para el próximo año, bajo el supuesto que el incremento de producción se distribuirá por partes iguales entre ambas plantas:

a) Camisas tipo A

$$0.08\left(\begin{pmatrix}1000 & 7000\end{pmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)=640$$

Por tanto cada planta debe producir 640/2 = 320 camisas adicionales.

b) Camisas tipo B

$$0,03\left(\begin{bmatrix}8000 & 6000\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)=420$$

Por tanto cada planta debe producir 420/2 = 210 adicionales.

3. A Nuevos niveles de producción:

$$\begin{bmatrix}1000 & 7000\\8000 & 6000\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}320 & 320\\210 & 210\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1320 & 7320\\8210 & 6210\end{bmatrix}$$

3. B Costos de las camisas tipo A

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 3\\4 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1320\\7320\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15960\\24600\\27240\end{bmatrix}$$

3. C Costo camisas tipo B

$$\begin{bmatrix}2 & 2\\3 & 5\\4 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8210\\6210\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}28840\\55680\\45260\end{bmatrix}$$

3. D Costos de ambos tipos de camisas

$$\begin{bmatrix}15960\\24600\\27240\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}28840\\55680\\45260\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}44800\\80280\\72500\end{bmatrix}$$

3. E Costo total de operar ambas plantas

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}44800\\80280\\72500\end{bmatrix}=197580$$

4a Nuevos niveles de producción

$$\begin{bmatrix}1000 & 7000\\8000 & 6000\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}640 & 0\\0 & 420\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1640 & 7000\\8000 & 6420\end{bmatrix}$$

4. b Costos de las camisas tipo A

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 3\\4 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1640\\7000\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15540\\24280\\27560\end{bmatrix}$$

4. c Costos de las camisas tipo B

$$\begin{bmatrix}2 & 2\\3 & 5\\4 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8000\\6420\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}28840\\56100\\44840\end{bmatrix}$$

4.4 Costos de ambos tipos de camisas

$$\begin{bmatrix}15540\\24280\\27560\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}28840\\56100\\44840\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}44380\\80380\\72400\end{bmatrix}$$

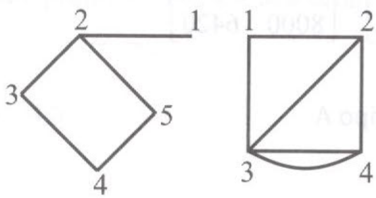
4.5 Costo total de operar ambas plantas

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 44380 \\ 80380 \\ 72400 \end{bmatrix} = \$197160$$

5. Los costos totales de operación sufren una reducción si el incremento no es distribuido por partes iguales entre ambas plantas.

3. Una de las aplicaciones importantes es el de las gráficas dirigidas. Una gráfica es un número de puntos llamados vértices, donde algunos están conectados por unas líneas llamadas aristas.

**Ejemplo:**



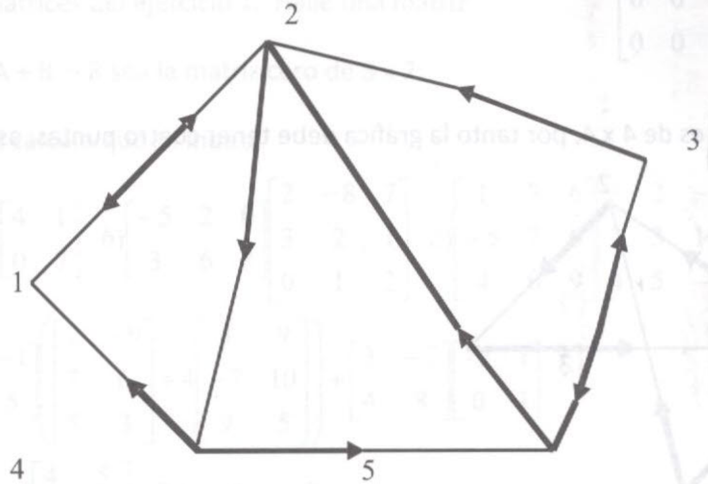

Representación de un sistema de comunicación mediante una gráfica

Supóngase que se está estudiando un sistema contable enlazado mediante un grafo. En dicho sistema hay cinco cuentas, en la tabla siguiente se indican las cuentas y sus enlaces.

| Cuenta 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | * | | | |
| 2 * | | * | | * |
| 3 | | | * | |
| 4 | * | * | | |
| 5 * | | | * | |

Tabla No 9

la cuenta 1. Toda esta información de la tabla puede ser representada en una gráfica dirigida. Es decir:




La anterior gráfica la podemos representar en una matriz de 5 x 5, pues tiene 5 filas y 5 columnas.

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

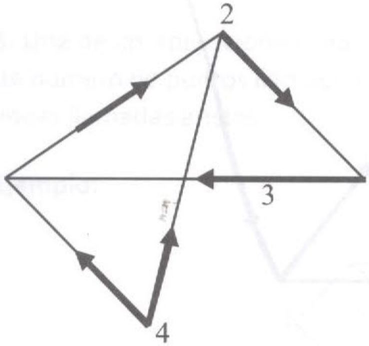
Obtención de una gráfica dirigida dada la matriz

Cuando nos entregan la matriz para obtener la gráfica dirigida debemos observar cual es el tamaño de la matriz y de acuerdo a este, dibujamos el número de vértices del gráfico y donde se halla un uno nos indica que existe una conexión entre un número y otro (una fila y una columna). El uno nos indica la fila de la cual partimos hasta la columna que nos indique la matriz.

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Esta matriz es de 4 x 4, por tanto la gráfica debe tener cuatro puntas, así:




En general una gráfica dirigida es una reunión de n puntos los cuales reciben el nombre de vértices, que denotamos por $P_1, P_2, P_3, ....P_n$ junto con un número finito de bordes que unen diferentes pares de vértices. Toda gráfica dirigida se puede representar mediante una matriz cuadrada de n x n, en la que el número que se halla en la posición *ij* ese el número de bordes que unen el vértice *i*-ésimo con el vértice *j*-ésimo.

Más adelante abordaremos de nuevo este tema, pero como una aplicación contable.

# EJERCICIOS PROPUESTOS GRUPO I

En los problemas de la a la j efectúe el cálculo indicado con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 6 \\ -8 & 9 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 5 \\ -9 & -8 \end{bmatrix}$$

a) 5A b) A + B c) A – C d) 3C – 6A e)A + B + C f) – 8A – 3B

g) 7C – B + 10A h) C – A + 3B i) 2C – 4A j) 2(3A).

2. Con las matrices del ejercicio 1. Halle una matriz

R tal que 2A + B – R sea la matriz cero de 3 x 2.

3. Efectúe el cálculo que se indica.

$$a)\begin{bmatrix}3 & -3\\4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 1\\0 & 7\end{bmatrix}\quad b)\begin{bmatrix}-5 & 2 & 0\\3 & 6 & 8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -8 & 7\\3 & 2 & 1\\0 & 1 & 2\end{bmatrix}\quad c)\begin{bmatrix}1 & 3 & 6\\-5 & 7 & 6\\4 & 0 & 9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 2 & -1\\7 & 3 & 10\\4 & 5 & -8\end{bmatrix}$$

$$d)\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\4 & 6 & 5\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}2 & -9\\7 & 6\\5 & 3\end{bmatrix}+4\begin{bmatrix}4 & 9\\-7 & 10\\9 & 5\end{bmatrix}\right)+\begin{bmatrix}3 & -7\\4 & 8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$$

$$e)\begin{bmatrix}1 & 3 & 8\\-7 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 5\\6 & -9\\0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & 1\\3 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\7 & 6\end{bmatrix}$$

4. Halle una matriz $X=\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}$ tal que $X\begin{bmatrix}1 & 3\\2 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$

5. Verifique la propiedad asociativa para el producto con matrices

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 3\\1 & 0 & 6\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\-2 & 2 & 0\\3 & 6 & 4\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}1 & 5\\-3 & 1\\0 & 7\end{bmatrix}$$

6. Sean

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1\\0 & -2\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1 & 0\\2 & 1\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}0 & -2\\1 & 3\end{bmatrix}$$

Verifique las fórmulas:
(A + B)C = AC + BC
A(B + C) = AB + CA

C(A + B) = AC + BC

¿Cuáles son verdaderas y cuales son falsas?

7. Sean

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & -2\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}$$

$$D=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 3 & 2\\ 2 & 3\end{bmatrix},\ \mathrm{E}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 2 & 6\\ 5 & 0\end{bmatrix},\ F=\begin{bmatrix}2 & 5 & 0\\ 0 & 1 & 4\end{bmatrix}$$

Calcular:

AB, BC, AC, CD, CE, EF, AF, BF y CF

Muestre que $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$, si y sólo si , A y B conmutan.

¿Es verdad de modo general, que $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$? Dé un ejemplo usando matrices cuadradas de orden 2 en que la igualdad es válida.

Si $B=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 5 & 0 & 0\end{bmatrix}$, muestre que $A^3=5I_3$

Muestre que A y B conmutan si y sólo si $A-\lambda I_n$ y $B-\lambda I_n$ conmutan para un cierto escalar λ.

Muestre que dos matrices diagonales siempre conmutan.
Sean E una matriz diagonal y A una matriz arbitraria m x n
Si AE está definida, ¿Cuál es la relación entre A y AE?
Si EA está definida, ¿cuál es la relación entre A y EA?
Muestre que si

$$B=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ x & 0 & 0\\ y & z & 0\end{bmatrix},\ \text{entonces } \mathrm{B}^3=0$$

¿Es verdad que $(AB)^t=A^tB^t$ ¡Justifique!

Pruebe que :

a) $(\lambda A)^t = \lambda A^t$

b) $(A^t)^t = A$

Determine cuáles de las siguientes matrices son simétricas o antisimétricas, y si alguna no es ni lo uno ni lo otro, explique por qué?

$$a)\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad b)\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad c)\begin{bmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 3 & 2 & -5 \\ -7 & 5 & 2 \end{bmatrix}, \quad d)\begin{bmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 1 & 5 & 5 \\ 6 & 5 & 7 \end{bmatrix}, \quad e)\begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

El inventario (en libras) de una distribuidora de papas al inicio de una semana está dada por la tabla A.

| Pastuza | San Félix | R12 | |
|---|---|---|---|
| 100 | 93 | 56 | Buena |
| 80 | 78 | 89 | Excelente |

Tabla N o 10

Sus ventas durante la semana están dadas por la tabla

| Pastuza | San Félix | R12 | |
|---|---|---|---|
| 120000 | 25000 | 78000 | Buena |
| 80000 | 78000 | 89000 | Excelente |

Tabla No 11

Escriba el inventario al término de la semana.

La fábrica LM produce tres tipos de camisas en dos presentaciones. La producción (en miles) a la semana en su planta de Pereira es

**Marca**

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| Tipo 1 | 15 | 32 | 18 |
| Tipo2 | 19 | 23 | 20 |

Tabla No 12

Y la producción semanal en su planta de Desquebradas es

| | Marca | | |
|---|---|---|---|
| | A | B | C |
| Tipo 1 | 12 | 19 | 24 |
| Tipo2 | 31 | 20 | 12 |

Tabla No 13

¿Cuál es la producción semanal total?

Si la producción en la planta de Pereira se incrementa en un 30%, ¿Cuál será ahora la producción total en las dos plantas?

Luz María Compro 3 vestidos, 5 blusas y tres chaquetas en una tienda de ropa. Si los vestidos tienen un costo de $um 70 cada uno, las blusas $um 30 cada una, y $um 89 cada chaqueta. Utilice una operación matricial adecuada para representar la cantidad total que Luz maría gasto en la tienda de ropas.

Supongamos que un ingeniero electricista ha aceptado pedidos para electrificar cinco casas tipo del campo, ocho estilos españoles y 12 estilo colonial. Los pedidos se representan mediante la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 12 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Supongamos que la cantidad de materia prima que se utiliza en cada tipo de casa es alambre calibre 10, conductos de PVC, cable, puntillas y mano de obra. La siguiente tabla dan el número de unidades de cada materia prima que se usará en cada tipo de casa.

| | Cali. 10 | Cond. PVC | Cable | Puntillas | Mano de obra |
|---|---|---|---|---|---|
| Del campo | 8 | 13 | 6 | 7 | 12 |
| Español | 9 | 10 | 9 | 12 | 17 |
| Colonial | 5 | 11 | 7 | 10 | 19 |

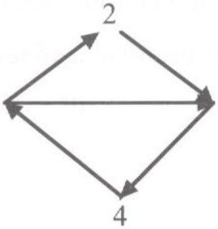
Tabla No 14

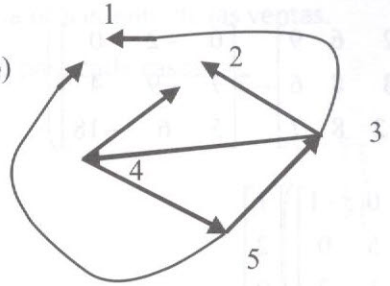
Cada fila indica la cantidad de materia prima necesaria para una clase dada de casa; cada columna indica la cantidad de materia prima dada necesaria para cada tipo de casa. Calcular la cantidad de materia prima a utilizar en los pedidos.

Cuál es el costo que tendrá que pagar el ingeniero por estas materias primas si el alambre calibre 10 vale $um 1500 el metro, cada conductor de pvc cuesta $um 800 el metro, el cable cuesta a $um 1100 el metro, $um 0.70 la puntilla y la mano de obra $um 15000.

Cuál es el costo total de la materia prima para todas las casas.

22. Halle la matriz que represente cada gráfica.

a) 


b) 


23. Dibuje la grafica que representa las siguientes matrices.

a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

# 2.28 TALLER DE CLASE Nº 1

1. Establezca la veracidad o falsedad de cada una de las proposiciones. Reemplace el enunciado falso por uno verdadero.

a)____ El producto de matrices es siempre conmutativo.

b)____ Si A, B y C son matrices tales que AB = AC, podemos concluir que B = C.

c) ___ Si AA = I entonces A es involutiva. A de n x n.

d) ___ Si $A^2 = A$ entonces A es ortogonal. A de n x n.

e) ___ A es simétrica si y solo si $A^t = A$

f) ___ Si A es cuadrada y $A^r = 0$ y $A^{r-1} = 0$ entonces A es nilpotente de índice r.

___ Sean $A_{mn}$ y $B_{np}$ matrices siempre se cumple que

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2.$$

2. Realice las operaciones indicadas.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 7 & 9 & 10 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 2 & 6 & 9 \\ 3 & 8 & 6 \\ -2 & 8 & 7 \end{bmatrix} - 7\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 7 & -9 & 4 \\ 5 & 6 & -18 \end{bmatrix}\right)$

b) $\left(\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

c) Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ y $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 3$ Hallar f(A).

3. Compruebe que $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ es ídempotente

4. Demuestre que $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ es simétrica.

5. Sean $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 5 & 11 & 8 \\ 7 & 2 & 9 \end{bmatrix}$ Comprobar que $(AB)^t = B^t A^t$

6. Una industria de zapatos deportivos fabrica por mes 1000 pares de pantalonetas de un modelo A, 1200 pares de un modelo , 800 pares de un modelo C y 2000 pares de un modelo D. Los precios (para cada par) en ciudades distintas, de los diferentes modelos de zapatos deportivos son dados en la siguiente tabla:

| | Modelo A | Modelo B | Modelo C | Modelo D |
|---|---|---|---|---|
| PEREIRA | 68 | 89 | 64 | 58 |
| DOSQUEBRADAS | 62 | 78 | 69 | 47 |
| MANIZALES | 66 | 79 | 64 | 67 |
| ARMENIA | 60 | 81 | 68 | 45 |

Tabla No 15

La industria desea saber a cual ciudad debe ser enviada toda la producción del mes, para obtener una renta máxima procedente de las ventas.

7. Diseñe una matriz A de 4 x 5 para cada caso.

a) $a_{23} = 10$
$a_{43} = -11$

b) $a_{15} + a_{45} = 12$
$a_{31} = -18$

c) $a_{41} = 6$
$a_{45} = \sqrt[5]{3}$

8. Construya una matriz A de 3x 4 tal que $a_{ij} = i^2 + 2j$

9. Compruebe que las matrices dadas son iguales.

$$a)\begin{bmatrix} 2^x & 4^{y+3} \\ 5^w & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 9^y \\ 25 & x\ln 2 \end{bmatrix}$$

$$b)\begin{bmatrix} e^x + 2e^{-x} & \log_5\left(\frac{3x+4}{x}\right)^{1/2} & x^{\log x} \\ 10^{\log x} & 25^{2x} & 4^{x^2}\cdot 2^{5x} \\ \log_3(x+1) + \log_3(x+3) & (27)^{1-x^2} & x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 100x^2 \\ 33 & 5^{2x}\cdot 5^{-12} & 8 \\ 1 & 3^{x^2}\cdot 81^{-x} & 1 \end{bmatrix}$$

$$c)\begin{bmatrix} \dfrac{16^{n+1} + 2^{2n+3} + 8\sqrt{2}}{2\cdot 2^{4n} + 4^n + \sqrt{2}} & \left[\left(x^{a+1}\cdot x^{2-a}\right)\left(\dfrac{x^{a-1}}{x^{a+1}}\right)\left(x^{a+1}\right)^{a-1}\right]^{\frac{1}{a}} \\ \dfrac{x^{n+2} - 4x^{-n}}{x + 2x^{-n}} & \dfrac{9\cdot 81^{\frac{n}{2}}}{9^{\frac{1}{2}}\left(9^n\right)^{1/2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & x^a \\ x^{n+1} - 2 & 3^{n+1} \end{bmatrix}$$

# OPERACIONES CON MATRICES EN EL PC

1. Suma y producto en Excel.

Dadas las matrices:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 10 & -4 \\ 3 & 2 & 14 \\ -18 & 13 & 4 \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} -13 & 15 & 3 \\ 7 & 9 & 4 \\ 12 & -5 & 19 \end{bmatrix}$$

a) AB

Solución:

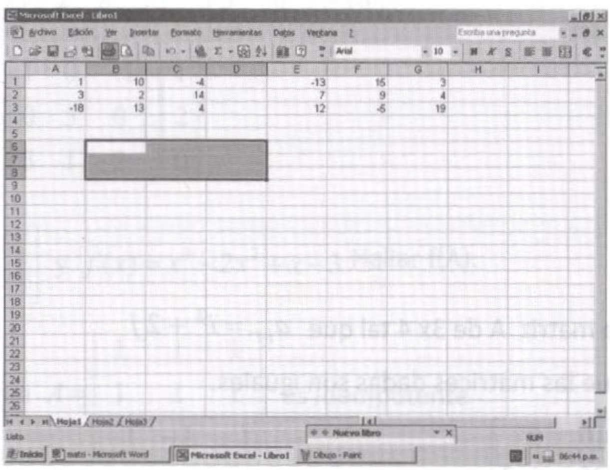



Figura 1

En la gráfica 1 vemos como inicialmente escribimos los elementos de cada matriz en las columnas respectivas para ello, luego sombreamos una tabla igual al producto de $A$ $B$; en la barra de herramientas hacemos clic en insertar y función y buscamos matemáticas y trigonométricas, encontrada ésta nos desplazamos hasta encontrar la opción MMULT como en la figura 2.

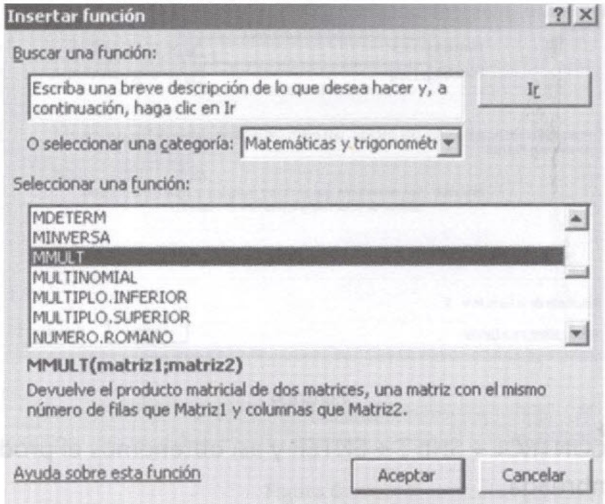



Figura 2

Hacemos clic en  Aceptar y en los campos correspondientes introducimos los elementos de cada matriz. Como vemos en el gráfico 3.

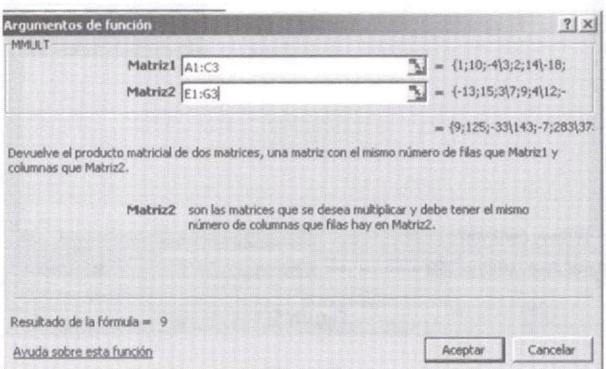



Figura 3

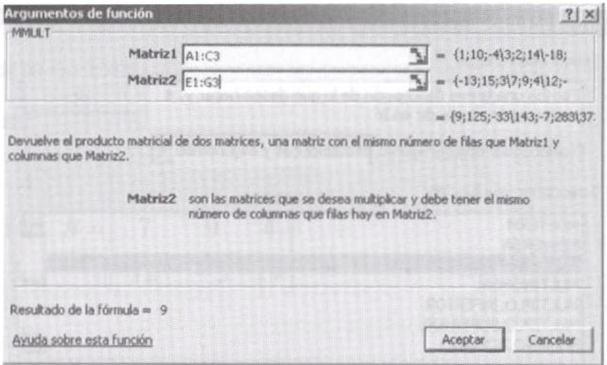



Figura 4

Luego hacemos CONTROL + SHIFT + ENTER y así obtenemos el producto en la zona previamente sombreada.

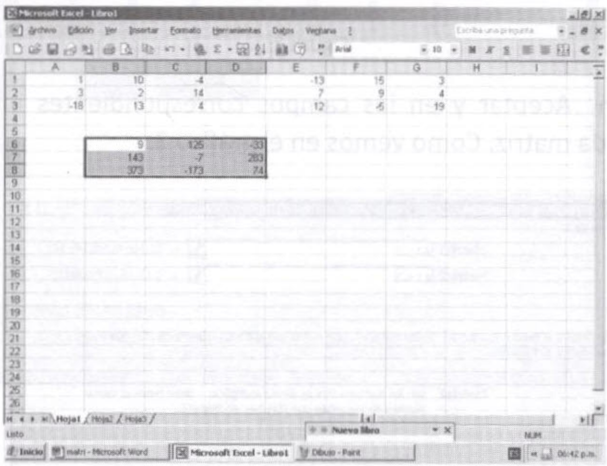



Figura 5

Calculemos ahora la transpuesta de A.

Para ello escribimos en la barra de herramientas para función la expresión

Transponer (matriz (señalamos el campo correspondiente a la matriz)). Como vemos en la figura 6.

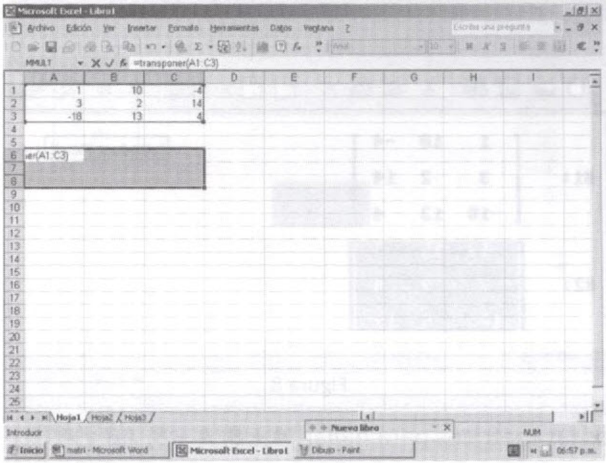



Figura 6

Ahora hacemos CTRL + SHIFT + ENTER y obtenemos:

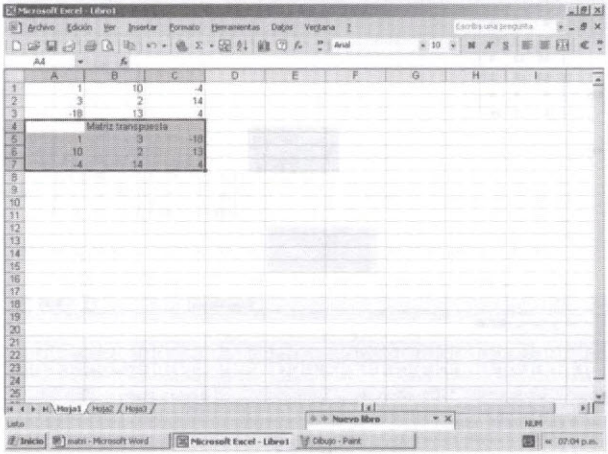



Figura 7

Ahora veamos como se hace en Derive. Para ello en la opción de la barra de herramientas de derive hacemos clic en la opción introducir matriz

Luego de tener abierta la opción de matriz introducimos los elementos de cada matriz y obtenemos lo que vemos en la figura 8.

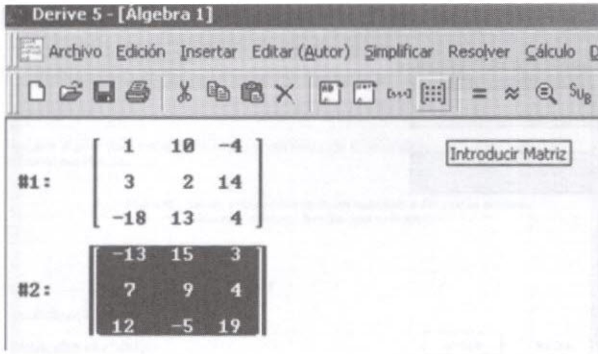



Figura 8

Ahora ya tenemos las matrices para hallar ***A + B, A – B, AB y A²***.

Para *A + B* hacemos en derive: #1 + #2

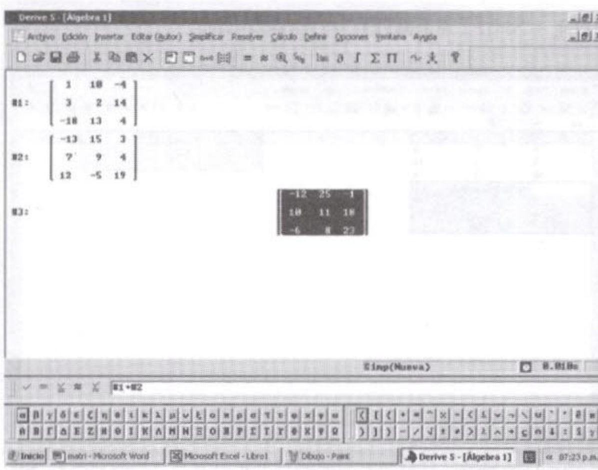



Figura 9

Para A – B hacemos en derive #1 - #2

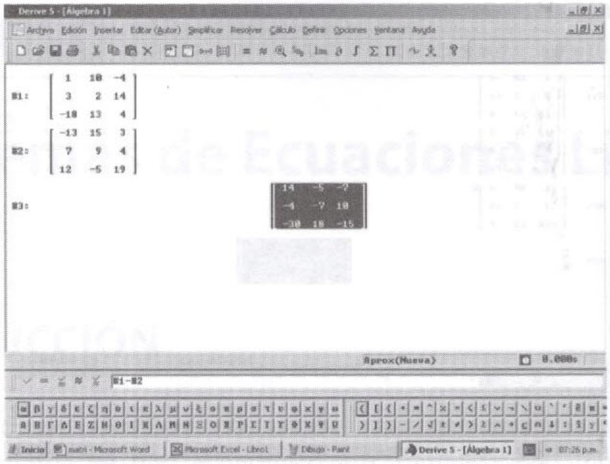


Figura 10

Para finalizar realicemos simultáneamente AB y $A^2$

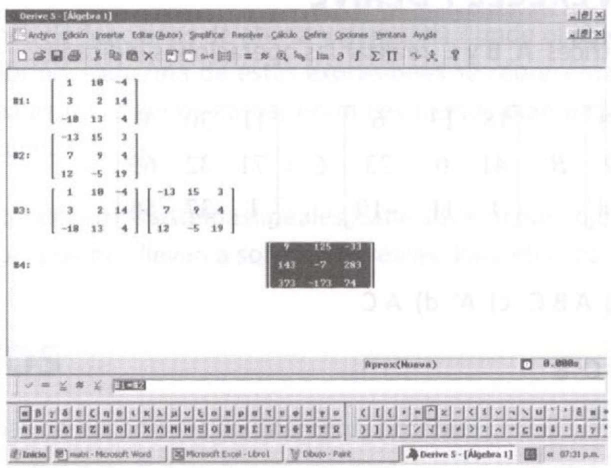


Figura 11

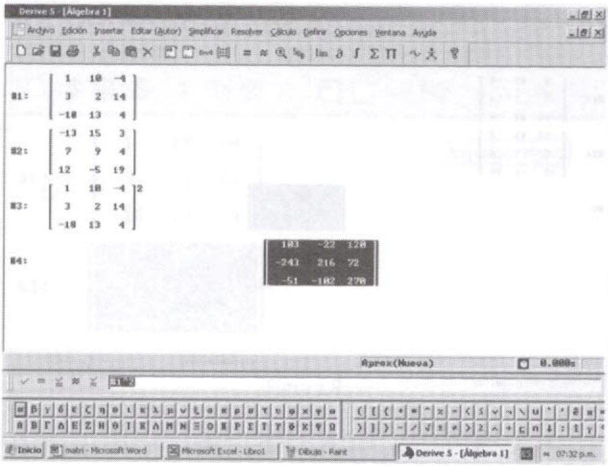



Figura 12

# TALLER CON EXECEL Y DERIVE

1. Dadas las matrices A, B y C realizar las operaciones indicadas:

$$A=\begin{bmatrix}-3 & 4 & 18\\ 3 & 0 & 9\\ 21 & 13 & 24\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}18 & 13 & 6\\ 41 & 0 & 23\\ 1 & 11 & -19\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix}11 & 30 & 0\\ 71 & 32 & 65\\ 1 & 37 & 56\end{bmatrix}$$

a) A + B + C   b) A B C   c) A'   d) A C

e) $B^2$ C   f) $C^2$ B

# CAPÍTULO III:

# Sistemas de Ecuaciones Lineales

## INTRODUCCIÓN

En todo trabajo de investigación cuantitativa, la persona que realiza el análisis considera conceptos de tipo económico y/o administrativo (pues cita precios, consumo, producción, ingreso nacional, puntos de equilibrio, etc.) como variables, las cuales pueden asumir diferentes valores dentro de su entorno de variación.

Cuando hablamos de funciones de oferta y demanda donde el objetivo es hallar el punto de equilibrio y cada una de estas expresiones se representan por medio de ecuaciones lineales (en algunos casos) entonces hemos planteado un sistema de ecuaciones lineales.

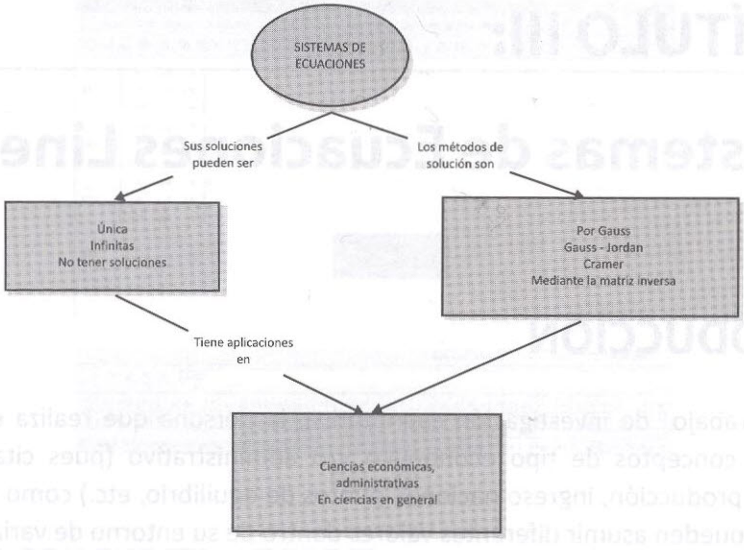
Metámonos entonces en los sistemas lineales. Cabe advertir que solo consideraremos aquellos sistemas que nos llevan a soluciones reales. Para ello sea el sistema:

## OBJETIVOS

Resolver sistemas de ecuaciones de diferentes ordenes

Resolver mediante Gauss y Gauss-Jordán

Aplicar a problemas económicos y administrativos-




$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots\dots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots\dots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots\dots\dots + a_{in}x_n = b_i$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots\dots\dots + a_{mn}x_n = b_m$$

Como vemos tenemos, un sistema de m ecuaciones con n incógnitas las cuales son: $x_1, x_2, \dots, x_n$

Recordemos el producto de matrices, y con ello podemos escribir el sistema en forma matricial así:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \ldots\ldots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots\ldots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots\ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Lo que podemos escribir en forma abreviada como: AX = b, en donde A es la matriz de coeficientes, X la matriz de incógnitas y b la matriz de términos independientes.

La forma que utilizaremos para resolver sistemas de ecuaciones matricialmente es con la matriz aumentada. Veamos un ejemplo de matriz aumentada:

Sea el sistema:

$$3x+2y-4z=9$$
$$2x-5y+z=5$$
$$x+y-z=1$$

La forma aumentada de este sistema es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -4 & 9 \\ 2 & -5 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Observemos que omitimos la matriz de incógnitas y solo escribimos la de coeficientes y la de términos independientes separados por una línea.

# 3.1 SISTEMAS LINEALES HOMOGÉNEOS Y NO HOMOGÉNEOS

I) Un sistema de ecuaciones lineales no homogéneo es de la forma

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ........ + a_{1n}x_n = b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ........ + a_{2n}x_n = b_2 \\
&. \\
&. \\
&a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ........ + a_{in}x_n = b_i \\
&. \\
&. \\
&. \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ........ + a_{mn}x_n = b_m
\end{aligned}
$$

En este sistema los $b_i$ no son todos cero (o nulos).

La solución de estos sistemas puede hacerse mediante formas algebraicas convencionales conocidos como: reducción, sustitución o igualación, etc.

En nuestro caso para resolver sistemas mediante matrices lo haremos por Gauss, y Gauss-Jordán.

Debemos tener en cuenta que en la solución de sistemas de ecuaciones de m ecuaciones con n incógnitas aparecen sistemas con a) solución única, b) número infinito de soluciones y c) no tiene solución.

Un sistema de ecuaciones lineal Homogéneo tiene la forma

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ........ + a_{1n}x_n = 0 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ........ + a_{2n}x_n = 0 \\
&. \\
&. \\
&a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ........ + a_{in}x_n = 0 \\
&. \\
&. \\
&. \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ........ + a_{mn}x_n = 0
\end{aligned}
$$

Observamos que todos los $b_i$ son todos cero(o nulos).

Una solución lógica de un sistema homogéneo es $x_1 = x_2 = x_3 ...... = x_n = 0$

No importando cuales sean los coeficientes $a_{ij}$.

En caso de tener muchas soluciones estas pueden expresarse como lo veremos más adelante en función de una de las incógnitas. Si la solución está dada por la matriz fila $(c_1, c_2, c_3, .... c_n)$ en la que los $c_i$ no son todos nulos, se puede comprobar fácilmente que multiplicándola por una constante $r$ cualquiera, la matriz fila $(rc_1, rc_2, rc_3, .....rc_n)$ es también solución del sistema. Esto nos indica que si que si conocemos una solución no trivial (la nula) del sistema, podemos conocer infinitas soluciones, que son múltiplos de la anterior.

# 3.2 MÉTODO DE ELIMINACIÓN DE GAUSS JORDAN

Para resolver un sistema por este método debemos tener presente que solo se permiten las siguientes operaciones elementales:

i) $F_i \leftrightarrow F_j$ Cambio de filas

ii) $cF_i$ multiplicar una fila por un número diferente de cero $c \neq 0$

iii) $cF_i + F_j$ Añadir a una fila, c veces una fila diferente.

**Ejemplo:**

Resolver el sistema:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Solución

Vamos a utilizar el método de Gauss-Jordán.

Para ello siempre en la primera fila en la entrada $a_{11}$ debemos conseguir un uno(1) y con el bajo su columna debemos tener ceros. Este proceso se hace con todos los $a_{ii}$

y bajo ellos ceros hasta tener una matriz identidad. Los valores obtenidos en frente de cada uno corresponden a la solución de cada $x_i$.

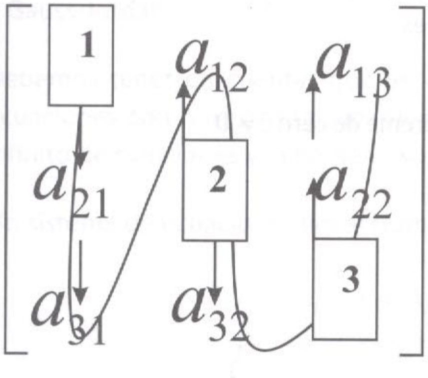
Partimos de la forma matricial aumentada:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} F_2-4F_1 \\ F_3-3F_1 \end{array} \approx \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 0 \end{array}\right] -\frac{1}{3}F_2 \approx \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} F_1-2F_2 \\ F_3+5F_2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \end{array}\right] \frac{1}{9}F_3 \approx \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} F_1+F_3 \\ F_2-2F_3 \end{array} \approx \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Luego la solución corresponde a *(0,0,0)* que conocemos como la solución trivial.

Observemos que para resolver un sistema por el método de Gauss-Jordán seguimos la siguiente ruta.




Inicialmente como dijimos tenemos que tener un uno en el primer rectángulo y luego de tener éste, debemos buscar ceros debajo de él mediante las operaciones elementales descritas. Después de tener estos ceros buscamos el siguiente uno el cual se ubica en el segundo rectángulo posición $a_{22}$. Debajo y encima de éste tenemos que conseguir ceros mediante las operaciones elementales. El paso siguiente es conseguir un uno en el tercer rectángulo posición $a_{33}$ con éste conseguimos finalmente los restantes ceros y así hemos terminado el sistema, cuando este es posible de resolver por este método.

# 3.3 MÉTODO DE GAUSS

Se plantea el sistema mediante la matriz aumentada se hace la reducción por filas a la forma escalonada, mediante las operaciones elementales (matriz triangular superior), se resuelva para la última de las incógnitas y luego se utiliza la sustitución de atrás hacia adelante sustituyendo esta incógnita cada vez hasta resolver para las demás.

¿Cuál es mejor de utilizar? El método de Gauss es útil cuando tenemos una computadora a la mano pues facilita mas la solución del sistema pues se hacen menos operaciones eliminación por filas, pero en otros casos donde se pide hallar una solución de forma reducida se utiliza más el método de eliminación de Gauss-Jordán. Para nuestro caso en la mayoría de problemas utilizaremos el método de Gauss-Jordán.

**Ejemplo:**

Resolver el siguiente sistema mediante Gauss.

$$\begin{aligned} x_1 \qquad -x_3+2x_4&=0\\ 2x_1-3x_2 \qquad -4x_4&=0\\ x_2+2x_3+3x_4&=0\\ 3x_1-2x_2+x_3+x_4&=0 \end{aligned}$$

Solución

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & 0\\ 2 & -3 & 0 & -4 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0\\ 3 & -2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} F_2-2F_1\\ F_4-3F_1 \end{matrix} \approx \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & 0\\ 0 & -3 & 2 & -8 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0\\ 0 & -2 & 4 & -5 & 0 \end{array}\right] F_2 \leftrightarrow F_3 \approx$$

$$\approx \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0\\ 0 & -3 & 2 & -8 & 0\\ 0 & -2 & 4 & -5 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} F_3+3F_2\\ F_4+2F_2 \end{matrix} \approx \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 8 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 8 & 1 & 0 \end{array}\right] F_4-F_3 \approx \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 8 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Como no podemos seguir utilizando el método de eliminación pero podemos atribuir un valor arbitrario a $x_3$.

El sistema lo podemos escribir así:

$$\begin{aligned} x_1 \quad -x_3 + 2x_4 &= 0 \quad I \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 0 \quad II \\ 8x_3 + x_4 &= 0 \quad III \\ 0 &= 0 \quad IV \end{aligned}$$

Tenemos que: $x_4 = -8x_3$

Reemplazamos en II $x_4 = -8x_3$

$$x_2 + 2x_3 + 3(-8x_3) = 0 \Rightarrow x = 24x_3 - 2x_3 - 2x_3$$

$$\boxed{x_2 = 22x_3}$$

Ahora reemplazamos en I

$$\begin{aligned} & x_1 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ & x_1 - x_3 + 2(-8x_3) = 0 \\ & x_1 - x_3 - 16x_3 = 0 \quad \therefore \boxed{x_1 = 17x_3} \end{aligned}$$

Luego la solución está dada por: $(17x_3, 22x_3, x_3, -8x_3)$

Si hacemos $x_3 = 0$ tenemos la solución trivial.

Ahora si hacemos $x_3 = 1$ tenemos la solución particular *(17, 22, 1, -8).*

Cuando tenemos un sistema homogéneo con más incógnitas que ecuaciones; dicho sistema tiene un número infinito de soluciones.

**Ejemplo:**

Resolver el sistema

$$\begin{aligned} & 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ & 8x_1 + 4x_2 + 14x_3 = 0 \end{aligned}$$

Solución

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -2 & 0 \\ 8 & 4 & 14 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \frac{1}{2}F_1 \\ \frac{1}{2}F_2 \end{array} \approx \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 7 & 0 \end{array}\right] F_2 - 4F_1 \approx \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 11 & 0 \end{array}\right]$$

El sistema puede escribirse:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \quad I \\ -2x_2 + 11x_3 &= 0 \quad II \end{aligned}$$

De II tenemos: $\boxed{x_2 = -\dfrac{11}{2}x_3}$

Ahora reemplazamos este valor en I

$$x_1 - \frac{11}{2}x_3 - x_3 = 0 \Rightarrow \boxed{x_1 = \frac{13}{2}x_2}$$

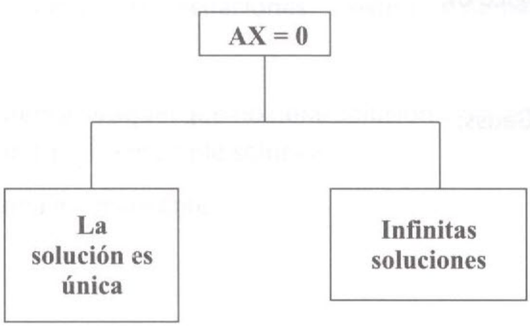
El sistema tiene infinitas soluciones, dadas por

$$\left(\tfrac{13}{2}x_3, -\tfrac{11}{2}x_3, x_3\right)$$

Podemos parametrizar esta solución haciendo $x_3 = c$, $c$ constante real.

$$\left(\tfrac{13}{2}c, \tfrac{-11}{2}c, c\right)$$

Podemos resumir mediante el siguiente cuadro para sistemas homogéneos:




Veamos a continuación sistemas no homogéneos resueltos mediante el método de Gauss-Jordán y Gauss.

**Ejemplo:**

Resolver el sistema

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 11$$
$$4x_1 + x_2 - x_3 = 4$$
$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 10$$

Solución:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 11 \\ 4 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 10 \end{array}\right] \begin{array}{l} F_2 - 4F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{array} \approx \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 11 \\ 0 & 9 & -13 & 40 \\ 0 & 3 & -3 & -12 \end{array}\right] \frac{1}{3}F_3 \approx \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 11 \\ 0 & 9 & -13 & 40 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \end{array}\right] F_2 \leftrightarrow F_3 \approx$$

$$\approx \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 11 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 9 & -13 & -40 \end{array}\right] \begin{array}{l} F_1 + 2F_2 \\ F_3 - 9F_2 \end{array} \approx \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{array}\right] -\frac{1}{4}F_3 \approx \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} F_1 - F_3 \\ F_2 + F_3 \end{array} \approx$$

$$\approx \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Por tanto la solución esta dada por *S = (2, -3, 1)* o:

$$x_1 = 2, \vee, x_2 = -3, \vee, x_3 = 1$$

(V es el conectivo lógico o).

**Ejemplo:**

Resolver mediante Gauss:

$$x_1 + x_2 - x_3 = 7$$
$$4x_1 - x_2 + 5x_3 = 4$$
$$2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0$$

Solución.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 7 \\ 4 & -1 & 5 & 4 \\ 2 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} F_2 - 4F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{array} \approx \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & -5 & 9 & -24 \\ 0 & 0 & -1 & -14 \end{array}\right] (-1)F_3 \approx \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & -5 & 9 & -24 \\ 0 & 0 & 1 & 14 \end{array}\right]$$

Ahora de acuerdo al método de eliminación de Gauss empezamos a reemplazar de abajo hacia arriba, así:

$$\begin{array}{rl} x_1 + x_2 - x_3 = 7 & I \\ -5x_2 + 9x_3 = -24 & II \\ x_3 = 14 & III \end{array}$$

Reemplazamos $x_3$*=14* en la ecuación II

$$-5x_2 + 9(14) = -24$$
$$-5x_2 + 126 = -24$$
$$-5x_2 = -150 \therefore x_2 = 30$$

Con el valor de $x_2$*= 30* y $x_3$ *= 14* reemplazamos en I y obtenemos:

$$x_1 + 30 - 14 = 7 \text{ transponemos para obtener}$$
$$x_1 = -9$$

Por tanto la solución es (-9, 30, 14).

Dentro de los sistemas de ecuaciones existen sistemas: consistentes e inconsistentes.

Un sistema Inconsistente es aquel que no tiene solución y un sistema consistente es el que tiene solución trivial o múltiple solución.

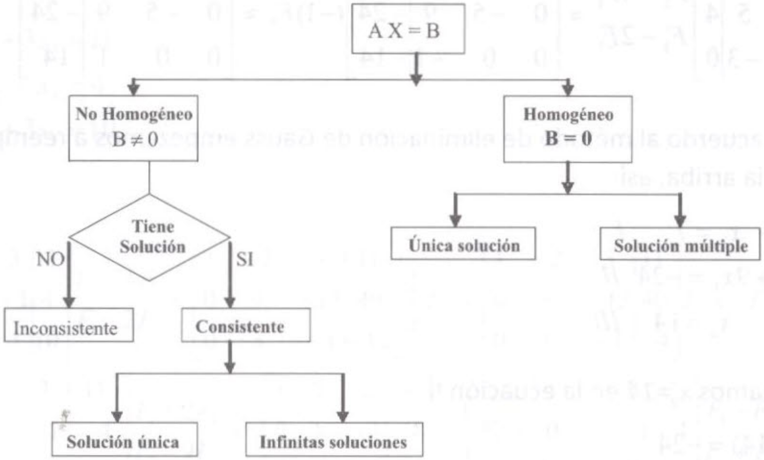
Ejemplo de un sistema inconsistente:

$$3x_1 - 7x_2 = 1$$
$$-9x_1 + 21x_2 = 1$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & -7 & 1 \\ -9 & 21 & 5 \end{array}\right] \frac{1}{3}F_1 \approx \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -7/3 & 1/3 \\ -9 & 21 & 5 \end{array}\right] F_2 + 9F_1 \approx \left[\begin{array}{cc|c} 3 & -7/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 8 \end{array}\right]$$

No hay solución pues es imposible que $0 = 8$ ($0 \neq 8$).

Resumamos mediante un gráfico lo visto.




# 3.4 EJERCICIOS RESUELTOS II

1. Hallar la solución del sistema

$$\begin{aligned}
2x+3y-4z+5w&=2\\
-x-2y+5z-3w&=7\\
4x+5y-6z+2w&=7\\
3x+4y-9z+w&=5
\end{aligned}$$

Solución:

Utilizamos el método de eliminación de gauss-Jordán

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -4 & 5 & 2 \\ -1 & -2 & 5 & -3 & 7 \\ 4 & 5 & -6 & 2 & 7 \\ 3 & 4 & -9 & 1 & 5 \end{array}\right] F_1 \leftrightarrow F_2 \approx \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & -2 & 5 & -3 & 7 \\ 2 & 3 & -4 & 5 & 2 \\ 4 & 5 & -6 & 2 & 7 \\ 3 & 4 & -9 & 1 & 5 \end{array}\right] \begin{array}{l} F_2 + 2F_1 \\ F_3 + 4F_1 \\ F_4 + 3F_1 \end{array} \approx$$

$$\approx \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & -2 & 5 & -3 & 7 \\ 0 & -1 & 6 & -1 & 16 \\ 0 & -3 & 14 & -10 & 35 \\ 0 & -2 & 6 & -8 & 26 \end{array}\right] \begin{array}{l} F_1 - 2F_2 \\ F_3 - 3F_2 \\ F_4 - 2F_2 \end{array} \approx \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & -7 & -1 & -25 \\ 0 & -1 & 6 & -1 & 16 \\ 0 & 0 & -4 & -7 & -13 \\ 0 & 0 & -6 & -6 & -6 \end{array}\right] -\frac{1}{6}F_4 \approx$$

$$\approx \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & -7 & -1 & -25 \\ 0 & -1 & 6 & -1 & 16 \\ 0 & 0 & -4 & -7 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] F_3 \leftrightarrow F_4 \approx \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & -7 & -1 & -25 \\ 0 & -1 & 6 & -1 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -7 & -13 \end{array}\right] \begin{array}{l} F_1 + 7F_3 \\ F_2 - 6F_3 \\ F_4 + 4F_3 \end{array} \approx$$

$$\approx \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 0 & 6 & -18 \\ 0 & -1 & 0 & -7 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -9 \end{array}\right] -\frac{1}{3}F_4 \approx \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 0 & 6 & -18 \\ 0 & -1 & 0 & -7 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{l} F_1 - 6F_4 \\ F_2 + 7F_4 \\ F_3 - F_4 \end{array} \approx$$

$$\approx \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 & -36 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 31 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{l} (-1)F_1 \\ (-1)F_2 \end{array} \approx \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 36 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -31 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Luego la solución del sistema es:

$x = 36$

$y = -31$

$z = -2$

$w = 3$

Resolver el sistema

$$x+y=a$$
$$x-y=b$$
$$x-y+z=0$$

Solución

Mediante Gauss –Jordán tenemos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 1 & -1 & 0 & b \\ 1 & -1 & 0 & o \end{array}\right) \begin{array}{l} F_2-F_1 \\ F_3-F_1 \end{array} \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & -2 & 0 & b-a \\ 0 & -2 & 1 & -a \end{array}\right) \frac{1}{2}F_2 \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & -1 & 0 & \frac{b-a}{2} \\ 0 & -2 & 1 & -a \end{array}\right) \begin{array}{l} F_1+F_2 \\ F_3-2F_2 \end{array}$$

$$\approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{a+b}{2} \\ 0 & -1 & 0 & \frac{a-b}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -b \end{array}\right)$$

Luego la solución del sistema es:

$$x=\frac{a+b}{2}\ ;\ y=\frac{a-b}{2};z=-b$$

Determinar una condición necesaria y suficiente para que el siguiente sistema tenga solución.

$$x-2y+z=a$$
$$x-4y+z=b$$
$$-x+y-z=c$$

Lo que queremos saber es para qué valores de ***a, b y c*** existe solución.
Mediante Gauss resolvemos y tenemos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & a \\ 1 & -4 & 1 & b \\ -1 & 1 & -1 & c \end{array}\right) \begin{array}{l} F_2-F_1 \\ F_3+F_2 \end{array} \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & a \\ 0 & -2 & 0 & b-a \\ 0 & -1 & 0 & c+a \end{array}\right) -\frac{1}{2}F_2 \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 & \frac{b-a}{2} \\ 0 & -1 & 0 & c+a \end{array}\right) \begin{array}{l} F_1+2F_2 \\ F_3+F_2 \end{array} \approx$$

$$\approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 & \frac{b-a}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2c+b+a}{2} \end{array}\right)$$

Debemos para este proceso de eliminación, ya que la tercera ecuación todas las variables tienen coeficiente cero. De la tercera ecuación podemos concluir que la condición para que el sistema admita soluciones, es que:

$$c = -\frac{(b+a)}{2}$$

Ahora si esta condición es satisfecha, se tiene en las dos primeras ecuaciones que:

$$x = b - z$$
$$y = \frac{b-a}{2}$$

Lo cual es una solución para el sistema. Por tanto la condición necesaria y suficiente para que el sistema tenga una solución (no única) es que se cumpla la igualdad

$$c = -\frac{(b+a)}{2}$$

Resolver el sistema

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 2x_4 &= 2 \\ x_1 - 12x_2 - 11x_3 - 16x_4 &= 5 \end{aligned}$$

Solución:
Utilizamos el método de Gauss-Jordán

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & 7 & 2 & 2 \\ 1 & -12 & -11 & -16 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mathrm{f}_2 - \mathrm{f}_1 \\ \mathrm{f}_3 - \mathrm{f}_1 \end{array} \approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 5 & 6 & 6 & 1 \\ 0 & -15 & -18 & -18 & 3 \end{array}\right) 1/5\mathrm{f}_2$$

$$\approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 6/5 & 6/5 & 1/5 \\ 0 & -15 & -18 & -18 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mathrm{f}_1 + 2\mathrm{f}_2 \\ \mathrm{f}_3 + 15\mathrm{f}_2 \end{array} \approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 17/5 & -8/5 & 3/5 \\ 0 & 1 & 6/5 & 6/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right)$$

Como obtuvimos 0 = 6 decimos que el sistema es inconsistente.

Resolver el sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$$

Solución:
Mediante eliminación de Gauss tenemos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ f_2 - 2f_1 \\ f_3 - 3f_1 \end{array} \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{array}\right) 1/2f_2 \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -7/2 & -17/2 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{array}\right) \begin{array}{l} f_1 - f_2 \\ \\ f_3 - 3f_2 \end{array}$$

$$\approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 11/2 & 35/2 \\ 0 & 1 & -7/2 & -17/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & -3/2 \end{array}\right) -2f_3 \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 11/2 & 35/2 \\ 0 & 1 & -7/2 & -17/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Utilizamos la eliminación Gaussiana para obtener:

$$\begin{array}{ll} x_1 + 11/2x_3 = 35/2 & (1) \\ x_2 - 7/2x_3 = -17/2 & (2) \\ x_3 = 3 & (3) \end{array}$$

Reemplazamos el valor de $x_3$ en las ecuaciones (1) y (2) y despejamos para obtener:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 3$$

# 3.5 EJERCICIOS PROPUESTOS GRUPO II

Resolver Los siguientes sistemas mediante Gauss-Jordán

$$a) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ -4x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 9 \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 13 \\ -4x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = -3 \end{cases}$$

$$b)\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 10 \end{cases}$$

$$c)\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 6x_1 - 2x_2 - x_3 = -14 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

2. Resolver los siguientes sistemas e indicar si tienen solución y si hay cuantas soluciones hay.

$$a)\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = -2 \\ -x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 \qquad\qquad - 3x_4 = -3 \end{cases}$$

$$b)\begin{cases} 3y - 6z - 4w - 3r = -5 \\ -x + 3y - 10z - 4w - 4r = -2 \\ 2x - 6y + 20z + 2w + 8r = -8 \end{cases}$$

$$c)\begin{cases} x - 2y + z - 4w = 1 \\ x + 3y + 7z + 2w = 2 \\ x - 12y - 11z - 16w = 5 \end{cases}$$

3. a) ¿Para que valores de *b* el sistema tiene solución? ¿Tiene exactamente una solución? ¿Tiene infinitas soluciones?

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 4 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 2 \\ 4x_1 + x_2 + (b^2 - 14)x_3 = b + 2 \end{cases}$$

4. Consideremos un modelo de oferta y demanda de dos bienes en un mercado en competencia perfecta (es decir los precios de los bienes vienen dados por el precio de mercado, y no lo determinan los fabricantes) ellos están representados por los siguientes sistemas:

Encontrar los valores de equilibrio de las variables consideradas.

# 3.6 SISTEMAS DE ECUACIONES EN PC

Para resolver sistemas de ecuaciones en el PC utilizaremos el Solver incluido en el paquete Excel el cual tiene varias funciones entre ellas resolver sistemas de ecuaciones.

**Ejemplo:**
Resolver el sistema

$$a)\begin{cases} x_1 + \quad x_2 + \quad x_3 + \quad x_4 = 10 \\ -4x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 9 \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 13 \\ -4x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = -3 \end{cases}$$

Solución.

Lo primero que haremos es validar las variables para ello designaremos un uno o cero a cada celda de las variables en cuestión así:

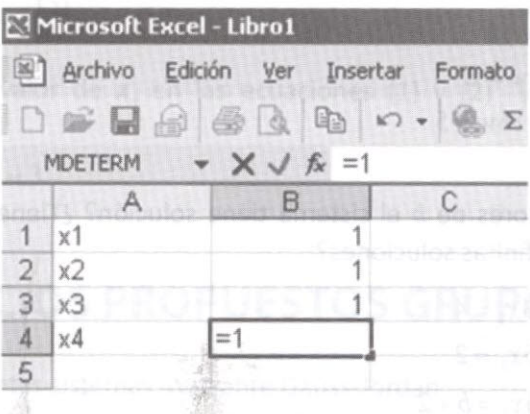



Figura 13

Ahora vamos a introducir en lenguaje que acepta Excel cada ecuación

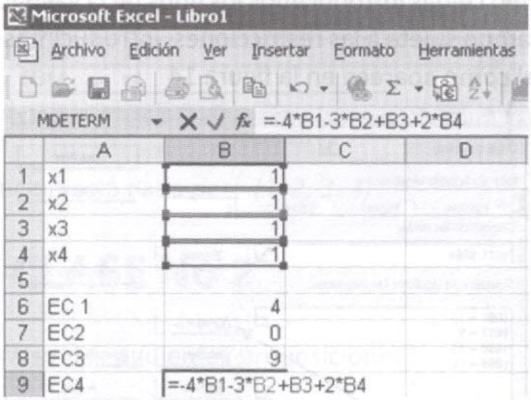



Figura 14

Luego de tener validadas las variables, llamamos a Solver de la barra de Herramientas, como vemos a continuación

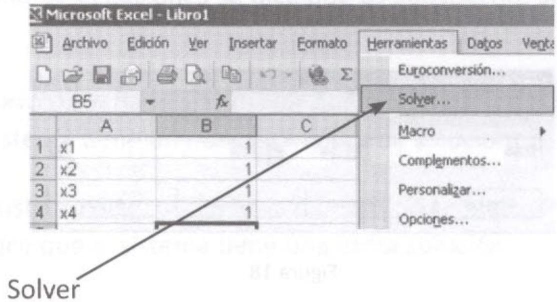



Figura 15

Ahora luego de hacer clic en Solver, nos aparece la siguiente ventana

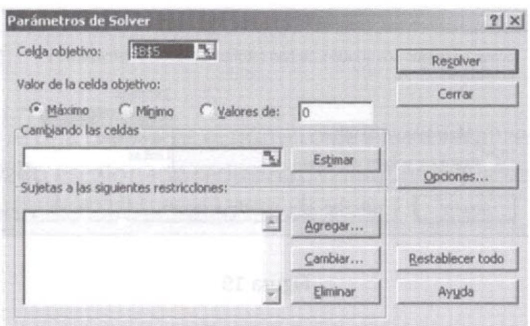



Figura 16

En el campo celda objetivo no introducimos nada, y la dejamos en blanco. Luego en los campos cambiando celdas introducimos los unos de la validación de las variables y finalmente en el campo sujeta a las restricciones, introducimos las ecuaciones que en lenguaje de Excel como aparece en la figura 14

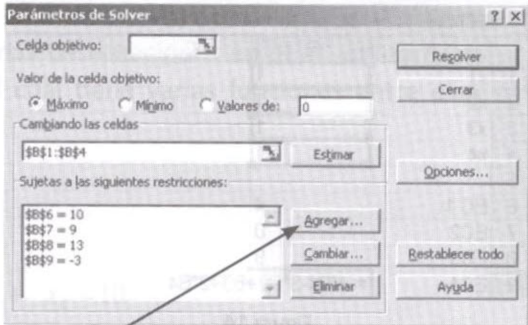



Figura 17

Damos clic en agregar cada vez e introducimos ecuación por ecuación en la tabla de la figura 18


Figura 18

Luego un clic a resolver y nos aparece la ventana siguiente y en hoja de respuestas obtenemos los valores de cada incógnita.

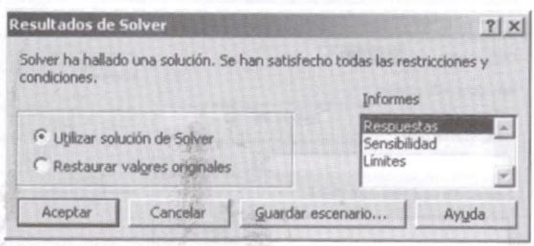



Figura 19

| Celda | Nombre | Valor original | Valor final |
|---|---|---|---|
| $B$1 | x1 | 1 | 1 |
| $B$2 | x2 | 1 | 3 |
| $B$3 | x3 | 1 | 3 |
| $B$4 | x4 | 1 | 3 |

Figura 20

Como vemos la solución está dada por: *(1, 3, 3, 3)*

# TALLER DE CLASE No 2

¿Son verdaderas o falsas las siguientes proposiciones?

a.____ Si en un sistema de ecuaciones de m ecuaciones y n incógnitas $b_1 = b_2 = b_3 = \cdots\cdots = b_m = 0$ s dice que el sistema es homogéneo.

b. ____ Un sistema de ecuaciones se dice que es consistente si tiene una solución única.

c. ____ Si el número de variables es mayor que el número de ecuaciones, se puede concluir que el sistema tiene un número infinito de soluciones.

d. ____ Si en un sistema de ecuaciones el número de ecuaciones es igual al número de variables se dice que el sistema tiene una única solución.

e. ____ El sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x+4y+6z=18 \\ 4x+5y+6z=24 \\ 2x+7y+12z=40 \end{cases}$$

Si el rango R(A) fila de una matriz es el número de filas diferentes de cero, que tiene su forma escalonada (o escalonada reducida). Cualquiera que sea la forma reducida el rango fila es el mismo. Halle el rango fila de:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

Resolver el sistema de ecuaciones mediante Gauss-Jordán y luego comprobarlo en solver de Excel.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + \quad x_4 = 3 \\ x_1 + \ x_2 - x_3 + \quad x_4 = 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \quad = 2 \end{cases}$$

¿Qué condicione deben tener *a, b, c* para que el sistema tenga solución.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \ = a \\ -2x_1 + x_2 - x_3 = b \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = c \end{cases}$$

Para la matriz *A*, hallar una matriz *X*, tal que *AX = I*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

# CAPÍTULO IV: Determinantes

Ginebra, Suiza, 1704-Bagnols-sur-Cèze, Francia, 1752) Matemático suizo. Fue catedrático de matemáticas (1724-1727) y de filosofía (1750-1752) en la Universidad de Ginebra. En 1750 expuso en Introducción al análisis de las curvas algebraicas la teoría newtoniana referente a las curvas algebraicas, clasificándolas según el grado de la ecuación. Reintrodujo el determinante, algoritmo que Leibniz ya había utilizado al final del siglo XVII para resolver sistemas de ecuaciones lineales con varias incógnitas. Editó las obras de Jakob Bernoulli y parte de la correspondencia de Leibniz.

## INTRODUCCIÓN

En este capítulo se desarrolla una teoría importante de los detrminantes y se analizan sus propiedades para luego aplicarlas en factorización y simplificación de determinantes, así como la solución de sistemas de ecuaciones.

## OBJETIVOS

Definir determinante a partir del concepto de función

Aplicar las propiedades en la simplificación de determinantes

Resolver sistemas de ecuaciones mediante determinantes

Aplicar los determinantes para hallar la inversa.

# 4.1 FUNCIÓN DETERMINANTE

La función determinante es aquella la cual introduce a las entradas matrices cuadradas pero salen escalares. Por tanto a una matriz asocia un número real llamado determinante. Lo denotamos por $|A|$.

$$f : A = \left[a_{ij}\right]_{n\,x\,n} \to |A| = k$$

Donde k es un escalar (número real).

Definición

Si A = $[a_{ij}]$ es una matriz de orden 1, entonces $|A| = a_{11}$.

Ejemplo: si $A = [6]$ entonces $|6| = 6$.

Definición

Determinantes de 2 x 2. Si $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ es una matriz cuadrada de orden 2, entonces:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22} - a_{21}\,a_{12}$$

**Ejemplo: Calcular** $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 3(2) - 2(1) = 6 - 2 = 4$

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 4(2) - (-3)(2) = 8 + 6 = 14$$

Determinantes de 3 x 3.

Para calcular determinantes de 3 x 3 utilizamos la regla de Sarrus o menores y cofactores.

## 4.1.1 Regla de Sarrus.

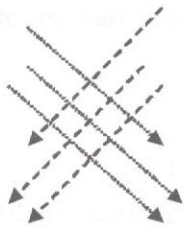
Mediante un ejemplo la definiremos.

Sea el determinante $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ calcularlo.

Solución:

Para resolver este determinante escribimos las dos primeras filas debajo de la tercera fila, así:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{array}$$



Las flechas que bajan de izquierda a derecha conservan su signo y las que bajan de derecha a izquierda se les cambia el signo.

$|A| = 1 + 24 - 6 + 3 - 12 - 4 = 6$

Veamos en detalle que ocurrió en este cálculo:

De izquierda a derecha (1)(1)(1) + (2)(4)(3) + (-1)(2)(3) = 19 *(1)*

De derecha a izquierda -((3)(1)(-1) + (3)(4)(1) + (1)(2)(2)) = -13 *(2)*

Si tomamos los resultados *(1)* y *(2)* y los sumamos, encontramos el mismo resultado *19 – 13 = 6*

# 4.2 MENORES Y COFACTORES

Menor $M_{ij}$

El menor *i j* que denotaremos $M_{ij}$ es el determinante que resulta cuando cancelamos la fila *i* y la columna *j*. Es decir:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$ si queremos calcular el menor $M_{23}$ entonces cancelamos la fila 2 y la columna 3, así:

$$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12}$$

Ejemplo: Si $\begin{vmatrix} 1 & 4 & -6 \\ 2 & 3 & 7 \\ 8 & 10 & \pi \end{vmatrix}$ hallar el menor $M_{13}$.

Solución:

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 8 & \pi \end{vmatrix} = 2\pi - 56$$

## 4.3.1 Cofactor

El cofactor *ij* que denotaremos por $c_{ij}$ y se define por:

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Ejemplo: Calcular el determinante $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

$$|A| = (-1)^{1+1}(1)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}(2)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}(3)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$|A| = (1-12) - 2[2(1)-(-1)(3)] + 3[2(4)-1(-1)] = -11 - 2(5) + 3(9) = 6$$

## 4.2.1 Propiedades de los Determinantes

1. Si cada una de las entradas de una fila (o columna) de un determinante *A* es cero su valor es cero $|A| = 0$ .

**Ejemplo:**

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 17 & 0 \\ 4 & -5 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

2. Si dos filas (o columnas) de un determinante son iguales, entonces el determinante es igual a cero $|A| = 0$.

**Ejemplo:**

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

3. El determinante de una matriz cuadrada es igual al determinante de su transpuesta $|A| = |A'|$.

**Ejemplo:**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \text{ el detrminante } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 6$$

$$\text{El determinante de su transpuesta es } \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 6$$

4. Si dos filas(o columnas) de un determinante son intercambiados, el signo del determinante queda cambiado.

**Ejemplo:**

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -4 & 3 & 9 \\ 6 & 8 & 12 \end{vmatrix} F_1 \leftrightarrow F_3 \quad = - \begin{vmatrix} 6 & 8 & 12 \\ -4 & 3 & 9 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

Si cada uno de los elementos de una fila (o columna) de un determinante se multiplican por un mismo número r, el valor del determinante queda multiplicado por r.

**Ejemplo:**

$$\begin{vmatrix} 3 & 9 & 27 \\ 1 & -5 & 17 \\ 20 & 31 & 14 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 1 & -5 & 17 \\ 20 & 31 & 14 \end{vmatrix}$$

6. El determinante del producto de dos matrices de orden *n* es el producto de sus determinantes. Es decir, $|AB| = |A||B|$.

**Ejemplo:**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

**Por tanto** $|AB| = |A| \cdot |B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = (6-4)(0-3) = -6$

Si A es triangular superior(o inferior), entonces |A| es igual al producto de las entradas de la diagonal principal.

**Ejemplo:**

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & 19 & 23 \\ 0 & 4 & 12 & 34 \\ 0 & 0 & 10 & 123 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (3)(4)(10)(1) = 120$$

Cálculo de determinantes por triangulación

**Ejemplo:**

Evaluar

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 7 \end{vmatrix}$$

Solución:

La idea en la solución de determinantes por medio de triangulación es aplicar las propiedades, buscando ceros, de tal manera que se obtenga una matriz triangular superior o inferior para así aplicar la propiedad número 7

Es decir la de la matriz triangular.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 7 \end{vmatrix} \begin{matrix} F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{matrix} \approx \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} F_3 - 2F_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (1)(1)(0) = 0$$

Observemos que si factorizamos el 2 de la fila 3 nos quedan las filas 2 y 3 iguales y de acuerdo con la propiedad 2 el valor del determinante es cero.

**Ejemplo:**

Factorizar $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$

Para factorizar tratamos de conseguir el mayor número de ceros posibles y luego mediante Sarrus o menores y cofactores calculamos el determinante.

Por tanto:

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$ Aplicamos las propiedades de Gauss-jordán para simplificar el determinante.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \mathrm{C}_2\text{-}\mathrm{C}_1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & (b-a)(b+a) & (c-a)(c+a) \end{vmatrix}$$

Factorizamos de la columna 2 el término *(b - a)* y de la columna 3 el término *(c – a)* Para obtener:

$$(b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ a^2 & b+a & c+a \end{vmatrix} C_2 - C_3 = (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & 1 \\ a^2 & b-c & c+a \end{vmatrix}$$

Ahora por menores y cofactores tenemos:

$$(b-a)(c-a)\left((1)\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ b-c & c+a \end{vmatrix} + 0 + 0\right) = (b-a)(c-a)(c-b)$$

Por tanto $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$

Ejemplo resolver la ecuación:

$$\begin{vmatrix} -2 & 2x & -2 \\ x & -3 & -2 \\ -5 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Solución:

Por propiedad podemos factorizar el 2 de la primera fila

$$2\begin{vmatrix} -1 & x & -1 \\ x & -3 & -2 \\ -5 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

Ahora mediante la regla de Sarrus tenemos:

$$\begin{matrix} & -1 & x & -1 & \\ & x & -3 & -2 & \\ & -5 & 3 & 0 & \\ \boxed{-15} & -1 & x & -1 & \boxed{0} \\ \boxed{6} & x & -3 & -2 & \boxed{-3x} \\ \boxed{0} & & & & \boxed{10x} \end{matrix}$$

Luego: *0 – 3x + 10 x – (-15 + 6 + 0)= 7x + 9 = 0*

$$7x+9=0 \Rightarrow 7x=-9 \therefore x=-\frac{9}{7}$$

# 4.3 EJERCICIOS RESUELTOS III

Demostrar que

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} C_2 - C_3 = \begin{vmatrix} a-b-c & 0 & 2a \\ 2b & -c-a-b & 2b \\ 2c & c+a+b & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a-b-c & 0 & 2a \\ 2b & -(c+a+b) & 2b \\ 2c & c+a+b & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} a-b-c & 0 & 2a \\ 2b & -1 & 2b \\ 2c & 1 & c-a-b \end{vmatrix} C_1 - C_3$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} -a-b-c & 0 & 2a \\ 0 & -1 & 2b \\ c+a+b & 1 & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)(a+b+c)\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2a \\ 0 & -1 & 2b \\ 1 & 1 & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)^2$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2a \\ 0 & -1 & 2b \\ 1 & 1 & c-a-b \end{vmatrix} F_3 + F2 = (a+b+c)^2 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2a \\ 0 & -1 & 2b \\ 1 & 0 & c-a+b \end{vmatrix} F_1 + F_3$$

$$= (a+b+c)^2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & a+b+c \\ 0 & -1 & 2b \\ 1 & 0 & c-a+b \end{vmatrix} = (a+b+c)^2 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (a+b+c)^2(1)(a+b+c)$$

Por tanto:

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$$

Resolver la ecuación

$$\begin{vmatrix} x-3 & 7 & 8 \\ 0 & x-7 & 13 \\ 0 & 0 & x-8 \end{vmatrix} = 0$$

Por la propiedad 7 tenemos: $(x-3)(x-7)(x-8)=0$ y el valor de $x$ es: $x=3,\vee,x=7,\vee,x=8$

Resolver la desigualdad

$$\begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 0 \;\Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} F_1 \leftrightarrow F_2 \Rightarrow - \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & x+2 & -1 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} \begin{matrix} F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 5F_1 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow - \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & x & 3 \\ 0 & -8 & x+10 \end{vmatrix}$$ Al cambiar filas se debe colocar un signo negativo al determinante

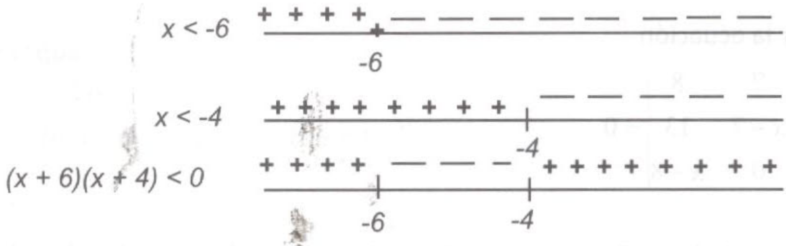
Luego de simplificar el determinante retomamos la desigualdad y por menores y cofactores lo calculamos.

$$-\left[1\begin{vmatrix} x & 3 \\ -8 & x+10 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & x+10 \end{vmatrix} + (-2)\begin{vmatrix} 0 & x \\ 0 & -8 \end{vmatrix}\right] > 0$$

$$-\left(x^2 + 10x + 24 - 0 - 0\right) > 0 \;\Rightarrow\; x^2 + 10x + 24 < 0 \;\Rightarrow\; (x+6)(x+4) < 0$$

Multiplicamos por *(-1)* a ambos lados y por tanto el sentido de la desigualdad cambia.

Utilizamos el método gráfico ("llamado el cementerio") y resolvemos la desigualdad.




La solución está dada por: S = (-6, -4) es en este intervalo donde el determinante es menor. (Comprobarlo)

4. Resolver por triangulación

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & 4 & -7 & 6 \\ 5 & 6 & -7 & 5 \\ -8 & -9 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Solución:

Debemos llevarlo a una triangular superior o inferior mediante operaciones elementales y utilizando las propiedades.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & 4 & -7 & 6 \\ 5 & 6 & -7 & 5 \\ -8 & -9 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} F_2-3F_1 \\ F_3-5F_1 \\ F_4+8F_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & -6 \\ 0 & -4 & 8 & -15 \\ 0 & 7 & -23 & 34 \end{vmatrix}$$

$$=2\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & -4 & 8 & -15 \\ 0 & 7 & -23 & 34 \end{vmatrix} \begin{matrix} F_3-4F_2 \\ F_4+7F_2 \end{matrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & -16 & 13 \end{vmatrix} F_4+4F_3$$

$$=2\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2(1)(-1)(4)(1) = -8$$

5. Hallar los términos del determinante

$$\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix}$$

Que contienen $x^4$ y $x^3$.

Solución:

$$\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix} F_1 - F_4 = \begin{vmatrix} 4x & 0 & 0 & 3-2x \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix} F_2 - F_4$$

$$= \begin{vmatrix} 4x & 0 & 0 & 3-2x \\ 0 & x-1 & -1 & 2-2x \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix}$$

hora utilizamos menores y cofactores:

$$= 4x \begin{vmatrix} x-1 & -1 & 2-2x \\ 2 & x & 3 \\ 1 & 2 & 2x \end{vmatrix} + 0 + 0 - (3-2x) \begin{vmatrix} 0 & x-1 & -1 \\ 1 & 2 & x \\ x & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 4x\left[(x-1)\begin{vmatrix} x & 3 \\ 2 & 2x \end{vmatrix} + (-1)(-1)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} + (2-2x)\begin{vmatrix} 2 & x \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\right] -$$

$$-(3-2x)\left[\cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & x \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)(x-1)\begin{vmatrix} 1 & x \\ x & 2 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ x & 1 \end{vmatrix}\right]$$

$$= 4x\left[(x-1)(2x^2-6) + 4x - 3 + (2-2x)(4-x)\right] -$$

$$-(3-2x)\left[0-(x-1)(2-x^2)-(1-2x)\right]$$

$$= 4x(2x^3 - 6x - 2x^2 + 6 + 4x - 3 + 8 - 2x - 8x + 2x^2) -$$

$$-(3-2x)(2x - x^2 - 2x + x^3 - 1 + 2x)$$

$$= 4x(2x^3 - 12x + 14) + (2x-3)(x^3 - x^2 + 1)$$

$$= 8x^4 - 48x^2 + 56x + 2x^4 - 2x^3 - 3x^3 + 3x^2 - 3$$

$$= 10x^4 - 5x^3 - 45x^2 + 56x - 3$$

Por tanto los términos son $10x^4$ y $-5x^3$

6. Resolver mediante la regla de Cramer el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} 3x+4y=10 \\ 2x+y=0 \end{cases}$$

Solución

Para dar solución a un sistema de ecuaciones por el método de Cramer, es necesario hallar el determinante denominador que llamaremos Δ (delta). Este determinante se forma con los coeficientes de las incógnitas en cuestión.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3-8=-5$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 10 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{10-0}{-5} = \frac{10}{-5} = -2$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 10 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{0-20}{-5} = 4$$

Luego la solución está dada por S = (-2,4)

7. Sean *g(r ), h(r )* funcionès al menos dos veces derivables.

Sea $f(r) = \begin{vmatrix} g(r) & h(r) \\ g'(r) & h'(r) \end{vmatrix}$ probar que $f'(r) = \begin{vmatrix} g(r) & h(r) \\ g''(r) & h''(r) \end{vmatrix}$

Solución:

$f(r) = \begin{vmatrix} g(r) & h(r) \\ g'(r) & h'(r) \end{vmatrix}$ entonces $f(r) = g(r)\cdot h'(r) - h(r)\cdot g'(r)$

Ahora derivamos *f(r)*

$$f'(r) = g'(r)\cdot h'(r) + h''(r)\cdot g(r) - g'(r)\cdot h'(r) - h(r)\cdot g''(r)$$
$$f'(r) = h''(r)\cdot g(r) - h(r)\cdot g''(r)$$
$$f'(r) = \begin{vmatrix} g(r) & h(r) \\ g''(r) & h''(r) \end{vmatrix}$$

Comprobar que $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+2)(a-1)^2$

Solución:

Buscamos algunos ceros ejemplo le restamos a la columna 2 la 3.

$\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & a-1 & 1 \\ 1 & 1-a & a \end{vmatrix}$ factorizamos de la columna 2 el término (a + 1)

$$(a-1)\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} F_2 + F_3 = (a-1)\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 2 & 0 & a+1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} C_1 + C_2 = (a-1)\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 2 & 0 & a+1 \\ 0 & -1 & a \end{vmatrix}$$

Ahora utilizamos menores y cofactores

$$(a-1)\left[ a\begin{vmatrix} 0 & a+1 \\ -1 & a \end{vmatrix} + 0 + 1\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \right] = (a-1)[a(a+1)-2] = (a-1)(a^2+a-2)$$

Factorizamos el segundo término $a^2 + a - 2 = (a+2)(a-1)$ por tanto:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+2)(a-1)^2$$

# 4.4 EJERCICIOS PROPUESTOS GRUPO III

Calcular por tres métodos los siguientes determinantes

$$a)\begin{vmatrix} 1 & -3 & 10 \\ 0 & -2 & 4 \\ -5 & 6 & 11 \end{vmatrix} \quad b)\begin{vmatrix} 0 & 12 & 21 \\ 14 & 11 & 2 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix} \quad c)\begin{vmatrix} 21 & 1 & -3 \\ 7 & 9 & 15 \\ -8 & 16 & 17 \end{vmatrix}$$

Resolver por triangulación

$$a)\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & -6 \\ -5 & -7 & 2 & -8 \\ 4 & 1 & -4 & 2 \end{vmatrix} \quad b)\begin{vmatrix} -8 & -9 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & -7 & 6 \\ 6 & 6 & -7 & 5 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \end{vmatrix}$$

Resolver las ecuaciones

$$a)\begin{vmatrix} -2 & x & -3 \\ x & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad b)\begin{vmatrix} 3 & y & -4 \\ 2 & -1 & 3 \\ y+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

4. Hallar el conjunto solución de las desigualdades

$$a)\begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} \geq 0 \quad b)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ x+8 & \frac{1}{x+1} \end{vmatrix} < \begin{vmatrix} 2 & 123 \\ 0 & \frac{2}{3x-1} \end{vmatrix} \quad c)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ x-4 & \frac{1}{x+1} \end{vmatrix} \geq \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ \frac{1}{3-2x} & 56 \end{vmatrix}$$

Comprobar cada igualdad

$$a)\begin{vmatrix} 1 & x & xy \\ 1 & y & zx \\ 1 & z & xy \end{vmatrix} = (y-x)(z-y)(z-x) \quad b)\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(z-y)$$

$$c)\begin{vmatrix} b+c & b & c \\ a & a+c & c \\ a & b & a+b \end{vmatrix} = 4abc \quad d)\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix} = x^2y^2$$

Hallar los valores de $w$ para los cuales

$$\begin{vmatrix} w-1 & 0 & 1 \\ -2 & w+2 & -1 \\ 0 & 0 & w+1 \end{vmatrix} = 0$$

Resolver utilizando la regla de Cramer

$$a)\begin{cases} 4x+7y+5z=-2 \\ 6x+3y+7z=6 \\ x-y+9z=-21 \end{cases} \quad b)\begin{cases} 3x-2y=-1 \\ 4x+z=-28 \\ x+2y+3z=-43 \end{cases}$$

Verificar que

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -36$$

Demostrar que

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+d \\ 1 & 1 & 1 \\ b+1 & c+1 & d+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \end{vmatrix}$$

Mediante la regla de Cramer determine los valores de k para los cuales el sistema tiene:

*a)* Solución única *b)* Infinitas soluciones *c)* Ninguna solución

$$\begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = 1 \\ x + y + kz = 1 \end{cases}$$

# TALLER DE CLASE No 3

Establezca la veracidad o falsedad de cada una de las proposiciones siguientes. Reemplazando cada enunciado falso por uno verdadero

a._____ Si un determinante tiene dos filas iguales el valor del determinante es cero.

b. _____ Si *A* es una matriz cuadrada de n x n, el determinante de *KA es ( k ≠ 0)* es igual a $k|A|$

c. _____ Si *A* es una matriz cuadrada y es su transpuesta, se se sigue que $|A| = |A^t|$.

d. _____ El cofactor y menor de un determinante son iguales en valor

Valor absoluto pero difieren en el signo.

e. ______ El calculo de $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 13$

f. ______ $|AB| = \|A\|B\|$

g. _____ Al calcular $\begin{vmatrix} 7 & 3 & 7 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ obtenemos como resultado cero.

2. Demuestre que

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 9 \\ x+1 & x & 2 \\ x+2 & x+1 & x-1 \end{vmatrix} = 2x^2 - 5x + 2$$

3. Compruebe que

$$\begin{vmatrix} 1 & (x+1)y & x \\ y & 1 & y \\ x & (x+1)y & 1 \end{vmatrix} = (1-x^2)(1-2y^2)$$

4. Si $A$ es idempotente $\left(A^2 = A\right)$ ¿Cuánto vale $|A|$?

5. Mediante el método de triangulación demuestre que

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 6 & -3 \\ 2 & 8 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -924$$

# 4.6 CÁLCULO DE DETERMINANTES CON EL PC

Para calcular determinantes numéricos utilizamos Excel mediante la función matemática

Ejemplo: calcular $\begin{vmatrix} -7 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \\ 8 & -3 & 4 \end{vmatrix}$

Solución:

En una hoja de Excel introducimos los números de la siguiente manera

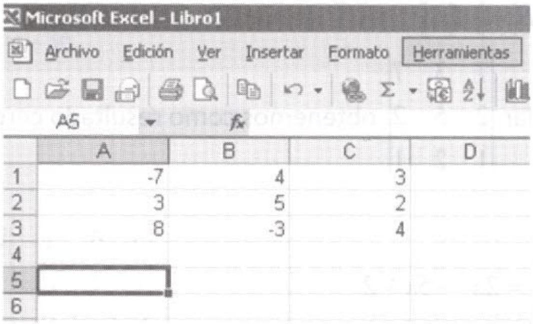



Figura 21

Ahora en Excel damos clic a la opción pegar función y obtenemos la ventana

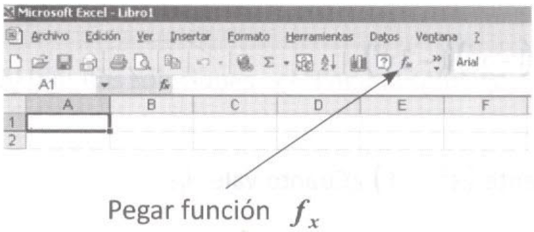
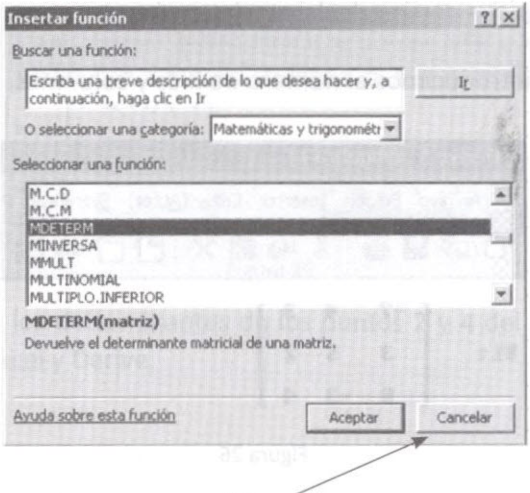



Figura 22

Esta función nos envía a la ventana que aparece a continuación y al hacer clic en aceptar aparece otra ventana la cual nos pide las celdas

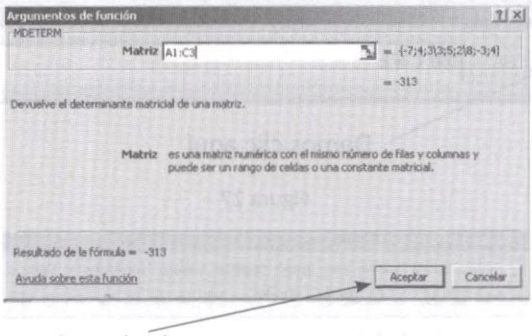
donde están los números del determinante a calcular.

El siguiente paso es señalar el campo (arrastrando con el Mouse) y damos clic en aceptar y en la celda señalada nos aparece el resultado de este determinante.

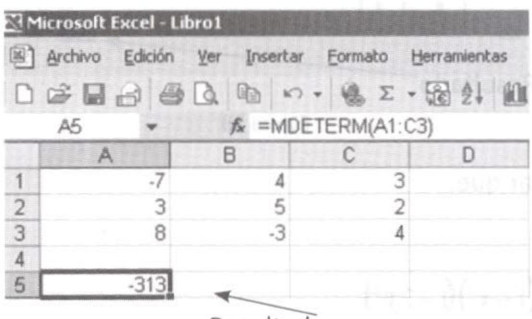



Clic aquí

Figura 23



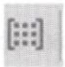

Clic aquí para obtener el resultado Figura 24




Resultado

Figura 25

Ahora veamos en derive como calcular un determinante

En la opción  introducimos el número de filas y columnas, para obtener:

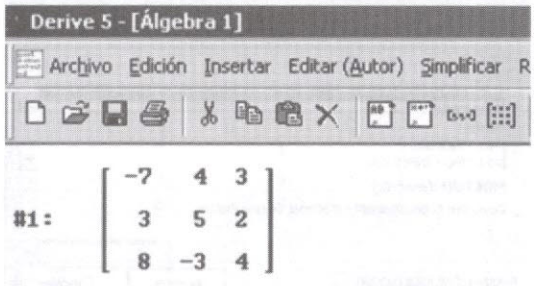



Figura 26

En el campo que aparece en la parte inferior escribimos det #1 y simplificamos y así obtenemos el resultado del determinante.

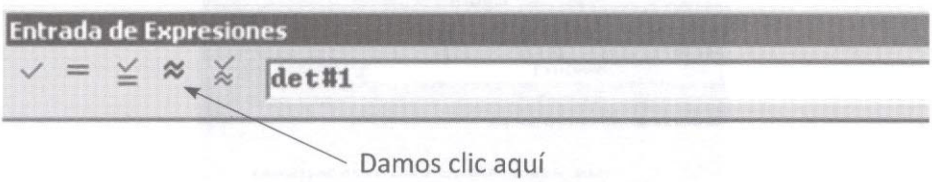



Figura 27

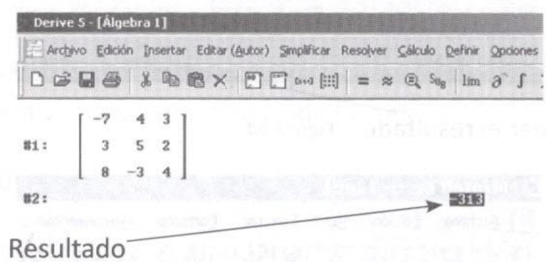



Figura 28

**Ejemplo:** Comprobar que:

$$\begin{vmatrix} 1 & (x+1)y & x \\ y & 1 & y \\ x & (x+1)y & 1 \end{vmatrix} = \left(1-x^2\right)\left(1-2y^2\right)$$

Procedemos de igual manera en derive (Excel no lo hace)

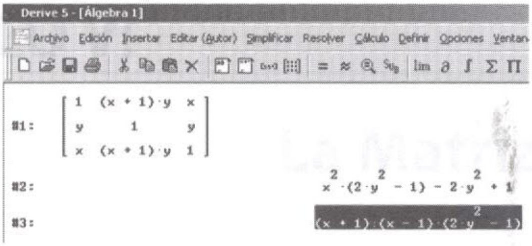



Figura 29

**Ejercicio:** Resuelva los determinantes de los puntos 2 y 4 del grupo de ejercicios propuestos III en Excel y Derive.

# CAPÍTULO V:

# La Matriz Inversa

En este capítulo trataremos uno de los conceptos importantes del álgebra lineal, como es la matriz inversa, concepto utilizado en diferentes campos como ingeniería, estadística, economía, etc.

## 5.1 DEFINICIÓN

Sea $A$ una matriz cuadrada de tamaño $n \times n$.

$A$ es invertible o no singular si existe una matriz cuadrada $X$ de tamaño $n \times n$, tal que

$A X = X A = I_n$

Donde $I_n$ es la matriz idéntica del orden de $A$ es este caso $n \times n$.

Si esto ocurre $X$ es la inversa de $A$ y escribimos $X = A^{-1}$

Teorema:

Si $A$ tiene inversa, es única.

Demostración:

Vamos a suponer que

$$AX = XA = I$$
$$AY = YA = I$$
$$X = XI = X(AY) = (XA)Y = IY = Y$$

Luego la inversa de $A$ es única.

Teorema

Si A tiene inversa, entonces $|A| \neq 0$

Demostración

Para la demostración vamos a partir de la definición de matriz inversa

Si $AX = XA = I$, se sigue que $|AX| = |I|$, entonces $|A||X| = 1$, luego $|\mathrm{A}| \neq 0$.

Definición:
Si *n* es un entero positivo y *A* es una matriz invertible, definimos:

$$A^{-n} = \underbrace{A^{-1} \cdot A^{-1} \cdot A^{-1} \cdots\cdots A^{-1}}_{\text{n veces}}$$

## Calculo de la Inversa

Para calcular la inversa utilizaremos dos métodos, el primer método es el de Gauss-Jordán y el segundo utilizando la matriz transpuesta.

## Método de Gauss-Jordán

Al igual que en los sistemas de ecuaciones, utilizaremos solo las tres operaciones permitidas:

$$\begin{aligned}
&\text{i) } \mathrm{F_i} \leftrightarrow \mathrm{F_j} \text{ Cambio de filas} \\
&\text{ii) } \mathrm{cF_i} \text{ multiplicar una fila por un número diferente de cero. } \mathrm{c} \neq 0 \\
&\text{iii) } \mathrm{cF_i} + \mathrm{F_j} \text{ Añadir a una fila, c veces} \\
&\text{una fila diferente.}
\end{aligned}$$

**Ejemplo:**

Calcular la inversa si existe de $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Solución:

Seguimos la misma ruta utilizada para resolver sistemas de ecuaciones:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_2 + F_1 \\ F_3 + F_1 \end{array} \approx \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) F_2 \leftrightarrow F_1$$

$$\approx \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \frac{1}{2}F_2 \approx \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) F_1 - F_2$$

$$\approx \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \frac{1}{2}F_3 \approx \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right) F_1 - F_3$$

$$\approx \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right) (-1)F_1$$

$$=$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right)$$

Luego la matriz inversa de $A$ es:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

El segundo método utilizando es mediante la matriz adjunta.

## **Matriz Adjunta** *Adj(A)*

Sea *A* una matriz cuadrada de tamaño *n x n*.

Formamos la matriz con los cofactores de los elementos del determinante de *A* y tomemos su transpuesta. La matriz así obtenida se llama la adjunta de *A*. Es decir

$$adj\ A = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{pmatrix}$$

Definición:

Si $|A| \neq 0$ , la inversa de la matriz *A* esta dad por:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,\mathrm{adj\,A}$$

**Ejemplo:**

Calcular la inversa del anterior ejemplo.

Solución

Lo primero que debemos hacer es calcular la adjunta de la matriz dada.

$$C_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad C_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \quad C_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$C_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \quad C_{22} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad C_{32} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$C_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \quad C_{23} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \quad C_{33} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

El valor del determinante es:

$$|A| = \frac{1}{4}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

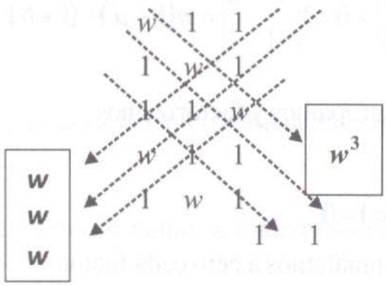
# EJERCICIOS RESUELTOS IV

Encontrar los valores de *w* para los cuales la matriz *A* tiene inversa y halle su inversa.

$$A = \begin{bmatrix} w & 1 & 1 \\ 1 & w & 1 \\ 1 & 1 & w \end{bmatrix}$$

Para que una matriz tenga inversa su determinante debe ser diferente de cero. Por tanto en este caso debemos hallar el determinante de la matriz e igualarlo a cero para saber que valores de *w* debemos excluir del determinante.

Por sarros tenemos:



$$|A| = w^3 + 1 + 1 - (w + w + w) = 0$$

$$|A| = w^3 - 3w + 2 = 0$$

Factorizamos utilizando la división sintética y obtenemos los siguientes valores de *w*.

$$w = 1, \vee, w = -2$$

Por tanto para que el determinante no sea igual a cero debemos excluir estos valores de *w*.

$$w \neq 1; \ w \neq -2$$

Utilizando menores y cofactores la inversa es (compruébelo)

$$A^{-1} = \frac{1}{w^2 + w - 2}\begin{bmatrix} w+1 & -1 & -1 \\ -1 & w+1 & -1 \\ -1 & -1 & w+1 \end{bmatrix}$$

2. Para que valores de $a$ y $b$ la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & b & a \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Es invertible.

Solución:

Para saber que valores de $a$ y $b$ hacen el determinante cero debemos calcularlo e igualarlo a cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & b & a \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} b & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0 + 1\begin{vmatrix} 1 & b \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = a(b-a) + (1+b) = 0$$

$|A| = ab - a^2 + 1 + b = 0$ agrupamos y factorizamos

$|\mathrm{A}| = ab + b + 1 - a^2 = 0$

$|A| = b(a+1) + (1+a)(1-a) = 0$

$|A| = (a+1)(b+1-a) = 0$ igualamos a cero cada factor

$(a+1) = 0 \vee (b+1-a) = 0 \;\therefore\; a \neq -1 \vee a \neq b+1$

Para que $A$ tenga inversa $a \neq -1 \vee a \neq b+1$

3. Sea $A = \mathrm{dia}(a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n)$ con $a_i \neq 0$ para todo i.
Demostrar que $A$ es invertible ¿Cuál es la inversa?

Solución:

$A = [a_{ij}]$ tal que $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$

Supongamos que $A$ es invertible por tanto

Existe $B = [b_{ij}]$ tal que $A \cdot B = B \cdot A = I_n$ entonces

$A \cdot B = [c_{ij}]$ tal que $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}$

Si $i \neq j$ entonces $c_{ij} = \sum a_{ik}\, b_{kj} = a_{ii}\, b_{ij} = 0$

entonces $b_{ij} = 0$

$Si\ i = j$ entonces $c_{ii} = \sum a_{ik}\, b_{ki} = a_{ii}\, b_{ii} = 1$ entonces $b_{ii} = \dfrac{1}{a_{ii}}$

Luego, $B = \mathrm{diag}\left(\dfrac{1}{a_1}, \dfrac{1}{a_2}, \ldots\ldots \dfrac{1}{a_n}\right)$

Utilizar la matriz inversa para resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2x - y + 3z &= -3 \\ x + y + z &= 2 \\ 3x + 2y - z &= 8 \end{aligned}$$

Solución:

Para resolver un sistema de ecuaciones mediante la inversa, utilizamos la ecuación: $X = A^{-1}B$

El procedimiento inicial consiste en hallar la matriz inversa, para ello utilizamos la matriz inversa.

$$C_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \quad C_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 5 \quad C_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4$$

$$C_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 4 \; C_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -11 \quad C_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$C_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1 \quad C_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -7 \quad C_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-13}\begin{bmatrix} -3 & 5 & -4 \\ 4 & -11 & 1 \\ -1 & -7 & 3 \end{bmatrix}$$

$$X = \frac{1}{-13}\begin{bmatrix} -3 & 5 & -4 \\ 4 & -11 & 1 \\ -1 & -7 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix} = \frac{1}{-13}\begin{bmatrix} -13 \\ -26 \\ 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Luego $x = 1,\ y = 2,\ z = -1$

(Modelo Insumo Producto)

El modelo Insumo Producto fue introducido por primera vez por Leontief a finales de los cuarenta y ganador del premio Nóbel de Economía en 1973. El modelo incorpora las interacciones entre diferentes industrias o sectores que integran una economía. Su objetivo es permitir a los economistas predecir los niveles de producción futuros de cada industria con el fin de satisfacer las demandas futuras para diversos productos.

Veamos una aplicación de este modelo.

El modelo utiliza la siguiente ecuación para su aplicación:

$X = (I - A)^{-1} D$ donde:

$X$ = Matriz de producción

$A$ = Matriz de insumo - producto

D = Matriz de demanda

**Ejemplo:**

Supongamos una economía hipotética con solo dos industrias, A y B. La interacción de estas industrias está dada en la siguiente tabla:

| | Industria A | Industria B | Demandas Finales | Producción Total |
|---|---|---|---|---|
| Industria A | 340 | 850 | 210 | 1400 |
| Industria B | 820 | 550 | 430 | 1800 |
| Insumos Primarios | 340 | 400 | | |

determinar la matriz insumo – producto

Obtener la matriz de producción si las demandas finales cambian a 412 unidades en el caso de la industria A y a 399 unidades para la industria B.

¿Cuáles serán los nuevos insumos primarios correspondientes a las dos industrias?

Solución:

La matriz de insumo producción está dada por los valores de las interacciones de cada industria ocupadas por los lugares sombreados sobre la producción total. Es decir:

a) $A=\begin{bmatrix} \frac{340}{1400} & \frac{850}{1400} \\ \frac{820}{1800} & \frac{550}{1800} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.24 & 0.60 \\ 0.46 & 0.30 \end{bmatrix}$

b) hora tomamos la matriz Idéntica y le restamos *A*

$$I-A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 0.24 & 0.60 \\ 0.46 & 0.30 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.76 & -0.60 \\ -0.46 & 0.70 \end{bmatrix}$$

Ahora hallamos la inversa de $I-A$ por cualquier método y encontramos

$$(I-A)^{-1}=\frac{1}{0.26}\begin{bmatrix} 0.70 & 0.60 \\ 0.46 & 0.76 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2.7 & 2.3 \\ 1.7 & 2.9 \end{bmatrix}$$

$D=\begin{bmatrix} 412 \\ 399 \end{bmatrix}$ este es la matriz vector correspondiente a las nuevas demandas , por tanto la matriz de producción está dada por:

$$X=(I-A)^{-1}D=\begin{bmatrix} 2.7 & 2.3 \\ 1.7 & 2.9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 412 \\ 399 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2030 \\ 1856 \end{bmatrix}$$

Por tanto la industria A debe producir 2030 nuevas unidades y B 1856 para alcanzar las nuevas demandas finales.

De un producto, se sabe que la demanda está dada por $q = 5 - 5/2p$ y que la ecuación de oferta es $q = 2p$. Hallar el precio y la cantidad de equilibrio.

Solución:

Organizamos el sistema de ecuaciones:

$$q+5/2p=5$$
$$q-2p=0$$

Que también podemos escribir así.

$$2q+5p=10$$
$$q-2p=0$$

La matriz de coeficientes es $Q=\begin{bmatrix}2 & 5\\1 & -2\end{bmatrix}$

$$X=\begin{bmatrix}q\\p\end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix}10\\0\end{bmatrix}$$

Hallamos la inversa de *Q* y obtenemos:

$$Q^{-1}=\frac{1}{-9}\begin{bmatrix}-2 & -5\\-1 & 2\end{bmatrix}$$

$$X=Q^{-1}B=\frac{1}{-9}\begin{bmatrix}-2 & -5\\-1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10\\0\end{bmatrix}=\frac{1}{-9}\begin{bmatrix}-20\\-10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{20}{9}\\\frac{10}{9}\end{bmatrix}$$

Luego el punto de equilibrio esta dado por el punto $(q,p)=\left(\frac{20}{9},\frac{10}{9}\right)$

(Contabilidad Matricial) Aplicación matricial a la contabilidad de costos.

Una empresa Risaraldense de productos alimenticios *JG* desarrolla dos procesos de producción, I Y II, con los que fabrica los productos A y B, para ello utiliza materias primas L, M y R.

El proceso I elabora el producto A e insume materia prima M y R y cierta cantidad del producto B y del mismo producto A.

El proceso II elabora el producto B e insume materia prima L, M y R y cierta cantidad del producto A y del mismo producto B.

Además se deben tener en cuenta los costos de mano de obra y los costos fijos indirectos en los demás servicios generales que colaboran en el proceso de producción.

Los registros contables de la empresa proporcionan los datos que aparecen en el cuadro siguiente:

| Costos | Proceso I | Proceso II | Total |
|---|---|---|---|
| Materia prima L 5000 litros | | 30.0000 | 300000 |
| Materia prima M 7500 litros | 20.0000 | 10.000 | 30.000 |
| Materia Prima R 5000 litros | 10.000 | 10.000 | 20.000 |
| Mano de obra | 12.0000 | 13.5000 | 25.0000 |
| Otros costos | 8000 | 90000 | 170000 |
| Total | 50.000 | 720000 | 122.500 |
| Otros insumos intermedios | | | |
| Producto A | 2400 kilos | 1440 kilos | 3840 kilos |
| Producto B | 1952 litros | 1342 litros | 3294 litros |
| Producción Bruta | | | |
| Producto A | 9600 kilos | | 9600 litros |
| Producto B | | 6100 litros | 6100 litros |
| Producto Neto | | | |
| Producto A | 5760 kilos | | 5760 kilos |
| Producto B | | 2806 litros | 2806 litros |

Para el producto A tenemos los siguientes cálculos:

9600-3840 = 5760 kilos

Para el producto B

6100-3294 = 2806 en litros

El gerente financiero pide el costo unitario de cada producto, los costos marginales y los costos de los insumos del proceso.

Cálculo del costo por unidad

Sean:

$X$ : Costo total de producción del proceso I,

$Y$ : Costo total de producción del proceso II,

$x$ : Costo por kilogramo del producto A,

$y$ : Costo por litro del producto B.

Sabemos que la producción bruta de A fue de 9600 kilos y la producción bruta de B de 6100 litros, por tanto tenemos las siguientes relaciones:

$$x = \frac{X}{9600} \text{ dada en } \frac{\$US}{\text{kilo}}; \text{ y}$$

$$y = \frac{Y}{6100} \text{ dada en } \frac{\$US}{\text{kilo}}.$$

El cuadro anterior nos da la siguiente información sobre los costos del proceso I: se insumen en este proceso $ 50000 de materias primas, mano de obra y otros costos, 2400 kilos del producto A y 1952 litros del producto B. El costo de los 2400 kilos del producto A, se puede expresar como una proporción del costo total de producción del proceso I, como sigue:

$$2400x = 2400\frac{X}{9600} = 0.25X,$$

y el costo de los 1952 litros del producto B se expresan en forma análoga, así:

$$1952y = 1952\frac{Y}{6100} = 0.32Y$$

Por lo tanto, podemos reunir los costos totales del proceso I en una única expresión:

$$X = 50000 + 0.25X + 0.32Y. \quad (1)$$

El proceso II insume $US 72500 de materias primas, mano de obra y otros costos, 1440 kilos del producto A y 1342 litros del producto B. Procediendo de igual manera a la anterior, tenemos:

$$1440x = 1440\frac{X}{9600} = 0.15X,$$

y el costo de los 1342 litros del producto B es:

$$1342y = 1342\frac{Y}{6100} = 0.22Y$$

Por lo tanto, reuniendo los costos totales del proceso II en una unica expresión, tenemos:

$$Y = 72500 + 0.15X + 0.22Y \quad (2)$$

Ahora escribimos las ecuaciones *1* y 2, así:

$$\begin{aligned} (1-0.25)X &- 0.32Y = 50000 \\ -0.15X &+ (1-0.22)Y = 72500 \end{aligned}$$

Simplificando, tenemos:

$$\begin{aligned} 0.75X - 0.32Y &= 50000 \\ -0.15X + 0.78Y &= 72500 \end{aligned}$$

Utilizamos ahora la notación matricial:

$$\begin{bmatrix} 0.75 & -0.32 \\ -0.15 & 0.78 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50000 \\ 72500 \end{bmatrix},$$

El modelo es del tipo Leontief, el cual podemos abreviar así:

| | Producto A | Producto B |
|---|---|---|
| Proceso I | 2400 kilos | 1952 litros |
| Proceso II | 1440 kilos | 1342 litros |
| Producto neto | 5760 kilos | 2806 litros |
| Producción bruta | 9600 kilos | 6100 litros |

Ahora calculamos las entradas de la matriz insumo – producto

$$a_{11} = \frac{2400}{9600} = 0.25 \quad a_{12} = \frac{1952}{6100} = 0.32$$

$$a_{21} = \frac{1440}{9600} = 0.15 \quad a_{22} = \frac{1342}{6100} = 0.22$$

Formamos ahora la matriz *A*

$$A = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.32 \\ 0.15 & 0.22 \end{bmatrix}$$

Ahora calculamos *I – A*

$$I-A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0.25 & 0.32\\ 0.15 & 0.22\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.75 & -0.32\\ -0.15 & 0.78\end{bmatrix}$$

Por cualquiera de los métodos vistos hallamos la inversa:

$$(I-A)^{1}=\begin{bmatrix}1.45 & 0.60\\ 0.28 & 1.40\end{bmatrix}$$

Ahora multiplicamos por la matriz *D*:

$$X=\begin{bmatrix}1.45 & 0.60\\ 0.28 & 1.40\end{bmatrix}\begin{bmatrix}50000\\ 72000\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}115.826,30\\ 115.220,45\end{bmatrix}$$

Para el proceso I el costo es de \$US 115.82 mientras que para el II es de \$US 115.22.

El costo por kilo del producto A es de:

$$x=\frac{X}{9600}=\frac{115.826,30}{9600}=\$US12.06523$$

Y el costo por litro para B es:

$$y=\frac{y}{6100}=\frac{115.220.45}{6100}=\$US18.88859$$

Ahora, con esta información podemos transformar las transacciones intersectoriales, pasando las unidades físicas a unidades monetarias. Para ello realizamos los siguientes cálculos:

Para el producto A

$$2400(1206523)=28956,55200$$
$$1440(12065523)=17373,93120$$
$$5760(1206523)=69495,72480$$

Para el producto B

$$1952(1888859)= 36869,75768$$

$$1342(1888859)= 25346,52778$$

$$2806(1888859)= 53004,18354$$

Ahora en un cuadro resumimos la información de las transacciones intersectoriales:

| Cuentas debito | Cuentas crédito | | | Total de débitos |
|---|---|---|---|---|
| | Producto A | Producto B | Materia prima<br>Mano de obra<br>Otros costos | |
| Procesos I | 28.956,55 | 36.869,75 | 50.000,00 | 115.826,30 |
| Proceso II | 17.373,93 | 25.346,52 | 72.500,00 | 115.220,45 |
| Producto neto | 69.495.82 | 53.004,18 | --- -- --- | 122.500,00 |
| Producción bruta (total créditos) | 115.826,30 | 115.220,45 | 122.500.00 | 353.546.75 |

Esta información monetaria puede presentarse en un formato contable, tomando los datos de los cuadros anteriores.

Contabilidad de Costos

**Proceso I**

**Debe Haber**

| Debe | | Haber | |
|---|---|---|---|
| Materia Prima M | 20.000,00 | Al proceso I: (2400 kilos a $US 12.06523 c/u) | 28.956,55 |
| Materia prima R | 10.000,00 | | |
| Mano de Obra | 12.000,00 | | |
| Otros costos | 8.000,00 | | |
| | 50.000,00 | Al proceso II: (1440 kilos a $US 12.06523 c/u) | 17.373.93 |
| Producto A: (2400 kilos a $US 12.06523 c/u) | 28.956,55 | A productos terminados: (5760 kilos a $US 12.06523 c/u) | 69.495,85 |
| Producto B: (1952 litros a $US 18.88859 c/u) | 36.869,75 | | |
| Total débitos | 115.826,30 | Total créditos | 115.826,30 |

Es de anotar que en el "Debe" se una cuenta se anotan los egresos y los costos de producción y en el "Haber" se registran los ingresos por diversos conceptos.

Para el proceso II tenemos:

**Proceso II**

**Debe Haber**

| | | | |
|---|---|---|---|
| Materia Prima L | 30.000,00 | | |
| Materia prima M | 10.000,00 | Al proceso I: | |
| Materia prima R | 10.000,00 | (1952 litros a | |
| Mano de Obra | 13.000,00 | $US 18.88859 c/u) | 36.869,75 |
| Otros costos | 9.000,00 | | |
| | 72.500,00 | Al proceso II: | |
| Producto A: | | (1342 litros a | |
| (1440 kilos | 17.373,93 | $US 18.88859 c/u) | 25.346,52 |
| a $US 12.06523 c/u) | | A productos terminados: | |
| Producto B: | | (2806 litros a | |
| (1342 litros a | | $US 18.88859 c/u) | 53.004,18 |
| $US 18.88859 c/u) | 25.346,52 | | |
| Total débitos | 115.220,45 | Total créditos | 115.220,45 |

Como vemos es más práctico utilizar la notación matricial pues esta hace fácil la sumatoria de una contabilidad de costos.

Análisis de sensibilidad de los costos (análisis marginal)

Los costos totales (115. 826,30, 115.220,45) han quedado expresados como una función de los costos de materia prima, mano de obra y "otros costos" (50.000, 72.500), es decir, de los costos de los insumos del proceso.

Vamos ahora suponer otros costos, por ejemplo: $US W para el proceso I y $US Z para el proceso II, los costos totales se obtendrán con la misma matriz inversa, como sigue:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.45250 & 0.59588 \\ 0.27931 & 1.39662 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W \\ Z \end{bmatrix}$$

Veamos ahora el cálculo de los costos marginales de producción, es decir cuando se hace un incremento en el costo unitario del producto terminado, debido a incremento en los costos de insumos de la producción.

Vamos a tomar un caso particular para realizar el análisis de sensibilidad, para ello debemos utilizar los siguientes parámetros:

ΔW: incrementos en los costos de los insumos del proceso I

ΔZ: incrementos en los costos de los insumos del proceso II

ΔX: incrementos en los costos totales de los productos terminados del proceso I

ΔY: incrementos en los costos totales de los productos terminados del proceso II.

Supongamos ahora que se registra un incremento de $US 10,00 en los costos de los insumos del proceso I (ΔW = 10,00, ΔZ = 0), por lo que W aumenta de $US 50000 a $US 50010. Los costos totales serán iguales a:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 145250 & 0{,}59588 \\ 0{,}27931 & 1{,}39662 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 50010 \\ 72500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 115.840{,}82 \\ 115.223{,}24 \end{bmatrix},$$

de donde los incrementos en los costos totales de los productos terminados serán:

$$\begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 115.840{,}82 \\ 115.223{,}24 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 115.826{,}30 \\ 115.220{,}45 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14{,}52 \\ 2{,}79 \end{bmatrix}.$$

Podemos observar que el costo por kilo del producto A se ha elevado de $US 12,06523 a $US 26,58523 y el costo por litro del producto B se ha elevado de $US 18,88859 a $US 21,67859, debido al incremento de $US 10 que hemos supuesto en los costos de los insumos del proceso I.

Este resultado se puede obtener directamente aplicando la matriz inversa a los incrementos en los costos totales como sigue:

$$\begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 145250 & 0{,}59588 \\ 0{,}27931 & 1{,}39662 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta W \\ \Delta Z \end{bmatrix},$$

Y para el caso particular

$$\begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 145250 & 0{,}59588 \\ 0{,}27931 & 1{,}39662 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14{,}52 \\ 2{,}79 \end{bmatrix},$$

Este resultado coincide con el ya obtenido. Análogamente, si se registra un aumento de $US 10,00 en los costos de los insumos del proceso II

(ΔW = 0, ΔZ =10,00), los incrementos en los costos totales de los productos terminados A y B respectivamente son:

$$\begin{bmatrix}\Delta X\\ \Delta Y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}145250 & 0,59588\\ 0,27931 & 1,39662\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5,95\\ 13,96\end{bmatrix},$$

Lo anterior muestra que hay un incremento en el costo por kilo del producto A de $US 12,065 a $US 18,015 y el costo por litro del producto B de $US 18,888 a $US 32,84.

Podemos concluir del análisis de sensibilidad:

El incremento en los costos de los insumos del proceso I repercute con mayor fuerza en ese proceso, aunque no deja de incidir también en los costos del proceso II; lo mismo ocurre, pero en sentido contrario, respecto al incremento en los costos de los insumos del proceso II;

Los elementos de la matriz inversa de coeficientes de insumo reflejan precisamente la sensitividad del proceso, es decir la magnitud de las repercusiones globales de alguna modificación en los elementos del proceso.

# 5.4 CALCULO DE LA INVERSA CON EL PC

Para calcular la inversa utilizando el PC recurrimos a Excel o Derive para nuestro caso.

**Ejemplo:** Calcular la inversa de:

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

En Excel utilizamos la función MINVERSA (BLOQUE), esta tiene como argumento : BLOQUE que indica la dirección de las celdas donde se encuentra la matriz.

Ahora escribimos en Excel los datos de la matriz A

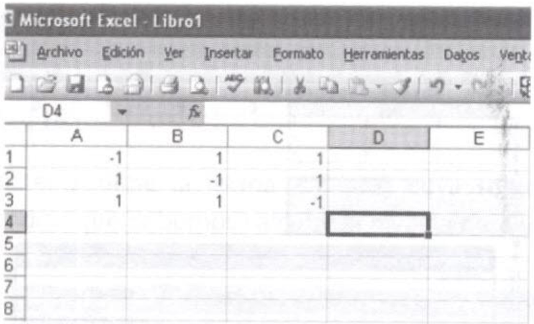
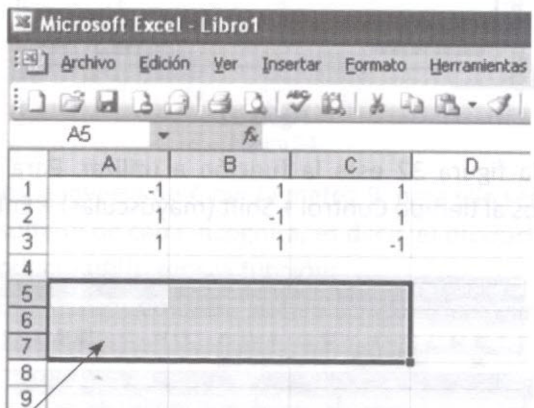



Figura 30

A continuación en la misma hoja sombreamos un número de celdas igual al tamaño de la matriz dada, es decir:




Espacio seleccionado

Figura 31

Ahora utilizamos la función para el cálculo de la inversa


Figura 32

Como vemos en la figura 32 esta la función a utilizar. Para hallar el resultado entonces oprimimos al tiempo Control + Shift (mayúsculas) + Enter y así obtenemos el resultado.

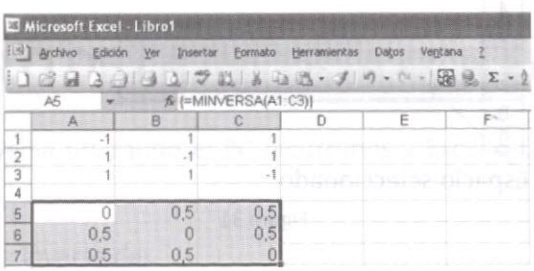



Figura 33

Inversa de A

Resolvamos ahora el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 11 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 10 \end{cases}$$

Solución: escribimos en forma matricial el sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Como vemos el sistema tiene la forma $AX = B$ cuya solución está dada por $X = A^{-1}B$ esto nos indica que debemos calcular la inversa de A y multiplicarla por la matriz columna B.

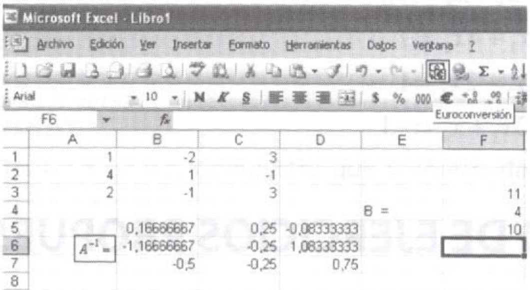



Figura 34

Ahora multiplicamos la inversa de A por la matriz B, para ello señalamos un espacio donde estará el resultado de cada incógnita, es decir, el producto.

Para obtener el producto utilizamos la función:

=MMULT (B5:D7;F3:F5) y oprimimos al tiempo Contrl + Mayúsculas + Enter y obtenemos:

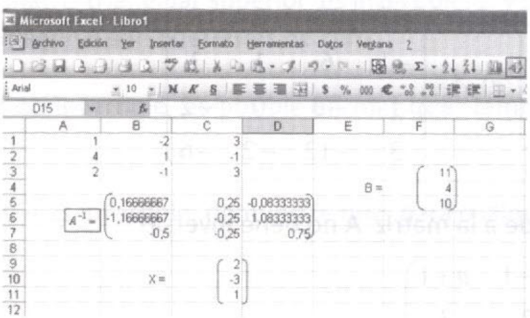



Figura 35

Por lo tanto la solución está dada por:

$x_1 = 2,\ x_2 = -3,\ x_3 = 1$

Ejercicio: Resolver el siguiente sistema utilizando el PC y mediante la inversa.

a) $\begin{cases} 9x_1+12x_2+17x_4=4 \\ 6x_1+3x_2+3x_3+8x_4=4 \\ 3x_1+6x_2+6x_3+13x_4=2 \\ 3x_1+6x_2+6x_3+13x_4=0 \\ 6x_1+5x_2-x_3+7x_4=3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=4 \\ 2x_1-3x_2-x_3+4x_4=7 \\ -2x_1+4x_2+x_3-2x_4=1 \\ 5x_1-x_2+2x_3+x_4=-1 \end{cases}$

# 5.5 GRUPO DE EJERCICIOS PROPUESTOS IV

1. Calcular por dos métodos la inversa de cada matriz si existe (Gauss-Jordán y Adjunta)

$$a)\ A=\begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \\ 7 & 12 & -4 \end{pmatrix}\quad b)\ A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 5 \\ 19 & -7 & 3 \end{bmatrix}\quad c)\ A=\begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$d)\ A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}\quad e)\ A=\begin{pmatrix} -2 & 10 & 2 & 5 \\ -1 & 6 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 0 & -2 \\ 3 & -12 & -2 & -6 \end{pmatrix}$$

¿Para que valores de a la matriz A no tiene inversa?

$$A=\begin{pmatrix} -a & a-1 & a+1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2+(-a) & a+3 & a+7 \end{pmatrix}$$

¿Para que valores de $\theta$ la matriz $\begin{pmatrix} \theta & 5 \\ 7 & \theta+2 \end{pmatrix}$ A no tiene inversa?

Demuestre que las siguientes matrices no tienen inversa

$$a)\begin{bmatrix} 8 & -6 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \quad b)\begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \\ -4 & 2 & -9 \end{bmatrix} \quad c)\begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Determine en que circunstancias, la matriz

$$\begin{bmatrix} y & 1 & 1 \\ 1 & y & 1 \\ 1 & 1 & y \end{bmatrix}$$

Tiene inversa, y halle su inversa.

Dados los números reales *x*, *y* y *z*, demuestre que la matriz dada tiene inversa y halle la inversa.

$$\begin{bmatrix} 1 & x & y \\ -x & 1 & z \\ -y & -z & 1 \end{bmatrix}$$

8. Si una matriz *A* de *n x n* tiene más de $n^2$ - *n* elementos que son cero probar que determinante de *A* es igual a cero.

Demuestre que una matriz triangular superior es invertible, si y solamente si todos los elementos de la diagonal son diferentes de cero.

¿Si *A* es una matriz no invertible, es posible afirmar que también es una matriz invertible? ¡Explique!

Si *AB* = *BC*, en donde *A* es invertible, demuestre que, para cualquier λ,

$$|A-\lambda I| = |C-\lambda I|.$$

Si *A* y *B* son matrices invertibles de *n x n*. entonces *AB* es invertible y

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Si $X = A^{-1} B$ resuelva los siguientes sistemas.

$$a)\begin{cases}3x_1+5x_2+7x_3=7\\ x_2-x_3=-4\\ 2x_1+4x_2+3x_3=6\end{cases}\quad b)\begin{cases}x_1+3x_2+2x_3=6\\ 15x_1+2x_2=1\\ 4x_1+2x_2+x_3=3\end{cases}\quad c)\begin{cases}3x_1+2x_2-x_3=1\\ 5x_1-2x_2+7x_3=-2\\ x_1+x_2-x_3=-4\end{cases}$$

Si $|A|\neq 0$ demuestre que la inversa de $A$ está dada por:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}adjA$$

Mediante el método de Gauss-Jordán encuentre la inversa de cada matriz.

$$a)\begin{bmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{bmatrix}$$

$$b)\begin{pmatrix}2&3&-4&5\\-1&-2&5&-3\\4&5&-6&2\\3&4&-9&1\end{pmatrix}$$

## 5.6 TALLER DE CLASE No 4

1. Establezca la veracidad o falsedad de cada una de las proposiciones siguientes. Reemplazando cada enunciado falso por uno verdadero

a. _____ Si $A$ tiene inversa entonces $|A|\neq 0$

b. _____ Si $A$ es invertible, el tamaño de es igual al de $A$.

c. _____ La inversa de la matriz idéntica es ella misma.

d. _____ Si una matriz tiene dos filas iguales entonces no tiene inversa.

e. _____ Toda matriz triangular inferior tiene inversa.

Halle la inversa si existe de $A=\begin{bmatrix}3&1&2\\4&2&0\\-1&3&5\end{bmatrix}$ por dos métodos

Resulta el siguiente sistema de ecuaciones mediante la inversa.

$$\begin{cases} 6x+3y-9y=10 \\ 4x+2y-6z=7 \\ 3x+2z-y=12 \end{cases}$$

En la tabla adjunta se muestra la interacción entre sectores de una economía hipotética.

| | Industria I | Industria II | Demandas finales | Producción Total |
|---|---|---|---|---|
| Industria I | 10 | 54 | 22 | 82 |
| Industria II | 58 | 28 | 48 | 132 |
| Insumos Primarios | 18 | 54 | | |

Determine la matriz insumo-producto

Suponga que en dos años las demandas finales cambian a 60 unidades en el caso de la industria I y 81 para la industria II. ¿Cuánto debería producir cada industria a fin de satisfacer estas demandas proyectadas?

Dada la siguiente matriz de insumo-producto, determine los incrementos de producción bruta sectorial necesarios para satisfacer un incremento del 30% en producto final del sector agrícola, del 15% en el sector industrial y del 25% en el sector de servicios.

| Sectores | A | I | S | Producto final | Producción bruta |
|---|---|---|---|---|---|
| A | 0.3 | 0.3 | 0.0 | 90 | 300 |
| I | 0.3 | 0.1 | 0.2 | 400 | 500 |
| S | 0.0 | 0.3 | 0.2 | 200 | 300 |
| Trabajo | 0.5 | 0.6 | 0.8 | 30 | 600 |
| Producción bruta | 300 | 500 | 300 | 600 | 1200 |

Considere un sistema de $n$ ecuaciones y $n$ incógnitas y supóngase que la matriz $A$ es invertible. El sistema $AX=B$ Tiene solución única.

$X = A^{-1}B$

Encuentre una matriz de 2 x 2 que no tenga inversa.

Para la siguiente red encuentre la matriz asociada.

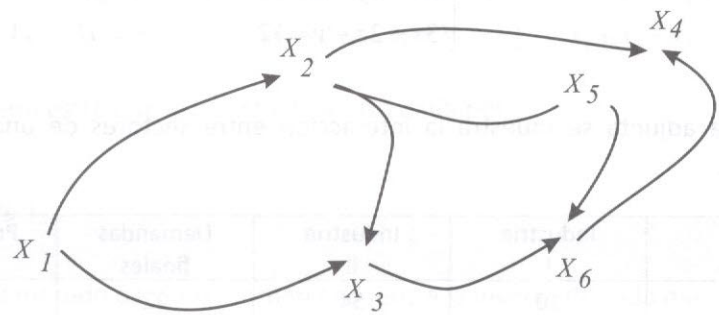



Figura 36

9 Dada la matriz de transición, dibuje la red correspondiente

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

# CAPÍTULO VI:

# Introducción a la Programación Lineal

George Bernard Dantzig nació el 8 de Noviembre de 1914 en Portland, Oregon, EEUU. Su padre era profesor de Matemáticas, se retiró dejando su puesto de Jefe del Departamento de Matemáticas en la Universidad de Maryland poco después de la Segunda Guerra Mundial. Su madre era una lingüista especializada en idiomas eslavos.

Dantzig estudió su carrera en la Universidad de Maryland, donde se graduó en 1936. Le disgustaba el hecho de no haber visto ni una sola aplicación en alguno de los cursos de Matemáticas que había tomado allí. Al año siguiente hizo estudios de postgrado en la escuela de Matemáticas de la Universidad de Michigan. Sin embargo, exceptuando la Estadística, le pareció que los cursos eran demasiado abstractos; tan abstractos, que él sólo deseaba una cosa: abandonar sus estudios de postgrado y conseguir un trabajo.

En 1937 Dantzig dejó Michigan para trabajar como empleado en Estadística en el Bureau of Labor Statistics. Dos años después se inscribía en Berkeley para estudiar un Doctorado en Estadística.

La historia de la tesis doctoral de Dantzig es ahora parte del anecdotario de las Matemáticas. Durante su primer año en Berkeley, se inscribió en un curso de Estadística que impartía el famoso profesor Jerzy Neymann. Este profesor tenía la costumbre de escribir en la pizarra un par de ejercicios al comenzar sus clases para que, como tarea para el hogar, fueran resueltos por sus alumnos y entregados en la clase siguiente. En una ocasión llegó tarde a una de las clases de Neymann y se encontró con dos problemas escritos en la pizarra. Supuso que eran problemas de tarea y, consecuentemente, los copió y los resolvió, aun cuando le parecieron "un poco más difíciles que los problemas ordinarios". Unos días después se los entregó a Neymann, disculpándose por haber tardado tanto. Aproximadamente seis semanas después, un domingo a las 8:00 de la mañana, Neymann llegó aporreando la puerta de Dantzig, explicándole que había escrito una introducción a uno de los artículos de Dantzig y que quería que la leyera a fin de poder enviar el artículo para su publicación. Los dos "problemas de tarea" que Dantzig había resuelto eran, en realidad, dos famosos problemas no resueltos de la Estadística. Las soluciones de estos problemas se convirtieron en su tesis doctoral, a sugerencia de Neymann.

No obstante, Dantzig no terminó su doctorado hasta 1946. Poco después del comienzo de la Segunda Guerra Mundial se unió a la Fuerza Aérea de Estados Unidos y trabajó con el Combat Analysis Branch of Statistical Control. Después de recibir su Doctorado, regresó a la Fuerza Aérea como el asesor de Matemáticas del U. S. Air Force Controller. Fue en ese trabajo donde encontró los problemas que le llevaron a hacer sus grandes descubrimientos. La Fuerza Aérea necesitaba una forma más rápida de calcular el tiempo de duración de las etapas de un programa de despliegue, entrenamiento y suministro logístico.

El trabajo de Dantzig generalizó lo hecho por el economista, ganador del Premio Nobel, Wassily Leontief. Dantzig pronto se dio cuenta de que los problemas de planeación con los que se encontraba eran demasiado complejos para las computadoras más veloces de 1947 (y aun para las de la actualidad).

Habiéndose ya establecido el problema general de Programación Lineal, fue necesario hallar soluciones en un tiempo razonable. Aquí rindió frutos la intuición geométrica de Dantzig: "Comencé observando que la región factible es un cuerpo convexo, es decir, un conjunto poliédrico. Por tanto, el proceso se podría mejorar si se hacían movimientos a lo largo de los bordes desde un punto extremo al siguiente. Sin embargo, este procedimiento parecía ser demasiado ineficiente. En tres dimensiones, la región se podía visualizar como un diamante con caras, aristas y vértices. En los casos de muchos bordes, el proceso llevaría a todo un recorrido a lo largo de ellos antes de que se pudiese alcanzar el punto de esquina óptimo del diamante".

Esta intuición llevó a la primera formulación del método simplex en el verano de 1947. El primer problema práctico que se resolvió con este método fue uno de nutrición.

Otro de sus grandes logros es la teoría de la dualidad, ideado conjuntamente con Fulkerson y Johnson en 1954 para resolver el paradigmático problema del Agente Viajero (resolviendo entonces problemas con 49 ciudades cuando, hoy día, mediante modernas implementaciones del método, se resuelven problemas con varios miles de ciudades y hasta un millón de nodos) es el precursor de los hoy utilísimos métodos de Branch-and Cut (Bifurcación y corte) tan utilizados en programación entera para resolver problemas de grandes dimensiones

# INTRODUCCIÓN

La programación lineal hace parte de la investigación de operaciones, aparece después de la última guerra. Fue el profesor George B. Dantzig como creador de esta técnica, debido a la cantidad de publicaciones sobre el tema y por descubrir un método sistematizado de solución. El Dr. Dantzig inicio a trabajar con la fuerza aérea norteamericana junto a Marshall Word, John Norton y Murria Geisler en la posibilidad de aplicar técnicas matemáticas a la planificación militar. Este equipo luego fue conocido como Proyecto Scoop (Scientific Computation of Optimum Programs). Luego inspirados en el método de Leontief (1936) matriz insumo producto crearon el famoso método de Simplex, el cual tiene como base un sistema de ecuaciones de primer grado, muy sencillo matemáticamente, pero de gran aplicación.

Es importante aclarar que si no hubiese sido por las computadoras y su adelanto la programación lineal no hubiese llegado hasta donde hoy ha llegado.

En este capítulo desarrollaremos el método gráfico para resolver los problemas de Programación Lineal (PL) conducentes a aplicaciones sobre todo en la empresa.

# OBJETIVOS

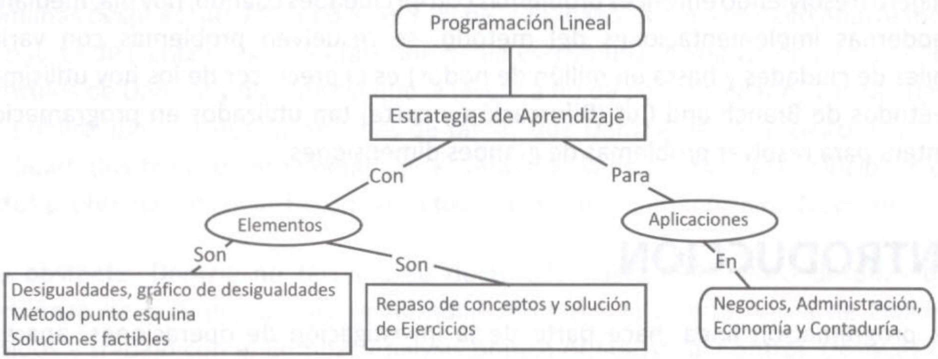
Graficar desigualdades en el plano Mediante el método punto esquina resolver problemas de programación lineal

Interpretar los resultados de un problema de Programación lineal(PL)

Resolver mediante Excel problema de PL

Resolver mediante Win QSB problemas de PL

Analizar problemas de análisis de sensibilidad con Win QSB.




Desigualdades lineales y sistemas de desigualdades

# 5.1 DEFINICIÓN

Una desigualdad lineal con dos variables $x$ y $y$ es una expresión que podemos escribir en cualquiera de las formas:

$ax+by+c<0$

$ax+by+c\leq 0$

$ax+by+c>0$

$ax+by+c\geq 0$

Con $a$, $b$, $c$ constantes y $a\neq 0$, $o$, $b\neq 0$.

**Ejemplo.** Las expresiones dadas a continuación son ejemplos de desigualdades lineales con dos variables.

$$3x+5y-6<0$$
$$-2x+y\leq 0$$
$$\frac{5}{3}x-\frac{9}{2}y+1>0$$
$$10x+3y+5\geq 0$$

## 5.2 GRÁFICO DE UNA DESIGUALDAD LINEAL CON DOS VARIABLES

Para graficar una desigualdad lineal en dos variables, necesitamos indicar cual es el conjunto de puntos del plano, cuyas coordenadas dan el conjunto solución o lo satisfacen.

Si vamos a resolver la desigualdad $ax+by+c<0$, por un instante cambiamos el signo de desigualdad por un igual, es decir $ax+by+c=0$ y representamos esta recta en el plano, al trazar la recta se debe hacer en forma punteada pues la desigualdad nos dice indica que es estrictamente mayor que cero. Luego de trazar la recta observamos que ésta divide el plano en dos semiplanos, uno de los cuales será la solución de la desigualdad.

Veamos los siguientes criterios:

Para la desigualdad *x* > *c*, la solución será el semiplano de la derecha.

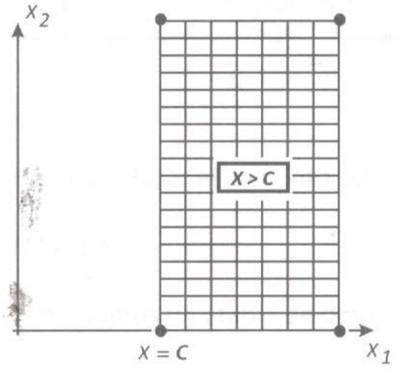



Figura 37

b) Para la desigualdad $x < d$ la solución será el semiplano de la izquierda.

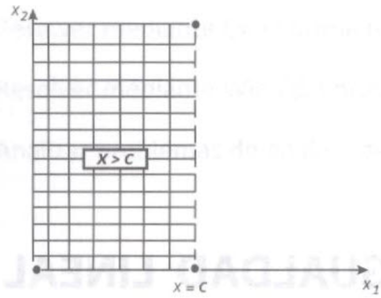



Figura 38

Semiplanos.

Los gráficos de semiplanos para la recta $ax + by + c > 0$
Está dado por:


Figura 39

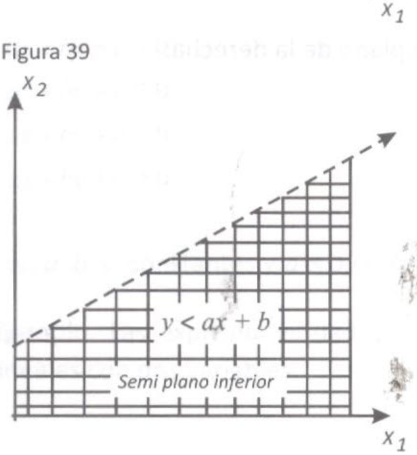



Figura 40

Ejemplo: Hallar el conjunto solución de:

$3x+6y>12$

Solución:

Construimos una tabla de datos con los interceptos de *x* y *y*.

| | | |
|---|---|---|
| x | 0 | 4 |
| y | 2 | 0 |

Recordemos que el gráfico es punteado pues la desigualdad nos indica mayor (>) estrictamente.

Ahora luego de trazar la recta probamos un punto por encima de la recta y un punto por debajo de la misma y donde nos de verdadero allí está el conjunto solución. Para nuestro caso tenemos:

$P(0,0)$ $3(0)+6(0)>12$ Conclusión: 0 no es mayor que 12F (falso)

***P (4,2)*** $3(4)+6(2)>12 \Rightarrow 24>12$ ***V*** verdadero por tanto la solución está por encima de la recta $3x+6y>12$.

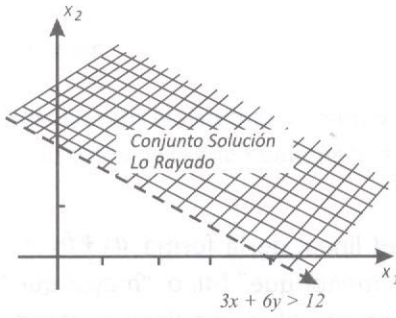



Figura 41

Ejemplo: Hallar el conjunto solución de: $2y+4x\leq 8$

Solución

Construimos una tabla de datos con los interceptos de *x* y *y*.

Nos olvidamos por un instante de la desigualdad y la volvemos un igualdad, solo mientras encontramos los valores de la tabla.

| x | 0 | 2 |
|---|---|---|
| y | 4 | 0 |

Recordemos que el gráfico es continuo pues la desigualdad nos indica menor o igual ($\leq$).

Ahora luego de trazar la recta probamos un punto por encima de la recta y un punto por debajo de la misma y donde nos de verdadero allí está el conjunto solución. Para nuestro caso tenemos:

***P (0,0)*** $\Rightarrow \ 2(0)+4(0) \leq 8$ V verdadero; por tanto la solución está por debajo.

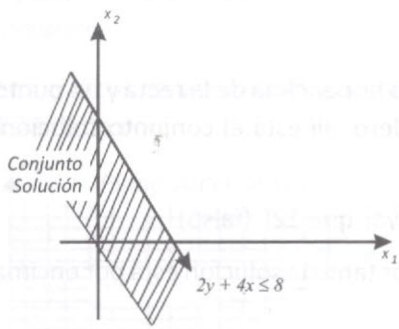



Figura 42

Conclusión:

# 5.3 SEMIPLANO ABIERTO

Un semiplano correspondiente a una desigualdad lineal de la forma $ax+by>c$ donde intervienen únicamente las desigualdades "menor que" (<) o "mayor que" (>), se denomina semiplano abierto. Para el dibujo se utiliza una línea punteada indicando que no incluye los puntos que sobre ella están.(es decir la recta no está incluida en la región solución).

Ejemplo de ello es la desigualdad $3x+6y>12$.

# 5.4 SEMIPLANO CERRADO

Un semiplano correspondiente a una desigualdad lineal de la forma $ax+by \geq c$ donde únicamente interviene las desigualdades "menor o igual que" ($\leq$) o "mayor o igual que"($\geq$). Se denomina semiplano cerrado por que incluye la frontera, es decir; la recta hace parte de la solución. Su trazado es continuo. Como en el ejemplo de $2y+4x \leq 8$.

# 5.5 SISTEMAS DE DESIGUALDADES CON DOS VARIABLES

El tratamiento es igual a los ejemplos anteriores solo que allí se tiene en cuenta el conjunto solución común a las desigualdades presentes si es que existe.

**Ejemplo:** hallar el conjunto solución del sistema:

$$\begin{cases} 3x+2y<6 \\ y-4x \leq 4 \end{cases}$$

Solución:

Resolvemos el sistema. (cambiamos la desigualdad por una igualdad por un instante) Utilizamos para ello cualquiera de los métodos de solución o por determinantes.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-2}{11} = 0.18$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -4 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-36}{11} = 3.27$$

El punto de intersección es *(-0.18*, 3.27).

Ahora tabulamos los interceptos con los ejes y el punto de intercepción

| | | | |
|---|---|---|---|
| *x* | *0* | *2* | *-0.18* |
| *y* | *3* | *0* | *3.27* |

| | | | |
|---|---|---|---|
| *x* | *0* | *-1* | *-0.18* |
| *y* | *4* | *0* | *3.27* |

Ahora dibujamos en el mismo sistema coordenado ambas desigualdades

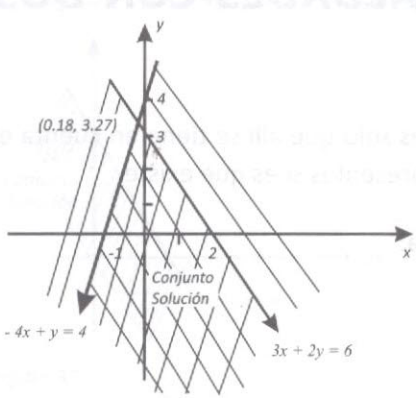



Figura 43

La solución es lo doblemente rayado (intersección)

**Ejemplo:** hallar el conjunto solución de

$|x| < 3,\ |y| < 2$

Solución:

Aplicamos la definición de valor absoluto y sus propiedades para obtener las desigualdades:

$-3 < x < 3$
$-2 < y < 2$

El gráfico es el siguiente:

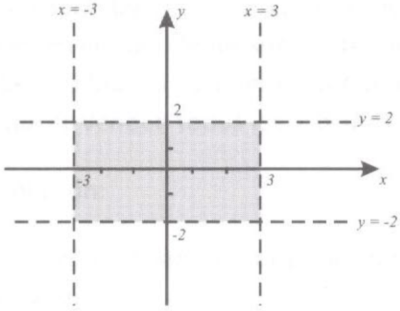



Figura 44

La solución es lo sombreado (la intersección).

**Ejemplo:** hallar el conjunto solución de:

$$\begin{cases} x+y\geq 1 \\ x+y\leq 2 \\ 3x+y\leq 3 \\ x\geq 0\ ;\ \ y\geq 0 \end{cases}$$

Solución:

Para encontrar el conjunto solución, resolvemos el sistema de ecuaciones para hallar los puntos de intersección. Luego dibujamos las desigualdades en el mismo plano coordenado.

Si observamos las dos primeras desigualdades son paralelas, por tener la pendiente igual. Combinamos la primera con la tercera y la segunda con la tercera para encontrar los cortes. La región solución es lo tres veces rayado (donde aparece la S) las desigualdades indican el eje positivo de *y* y el eje positivo de *x* respectivamente.

Los interceptos son:

$\begin{cases} x+y=1 \\ 3x+y=3 \end{cases}$ por determinantes $x=1;\ y=0$

$$\begin{cases} x+y=2 \\ 3x+y=3 \end{cases} \text{ por determinantes } x=\frac{1}{2};\ y=\frac{3}{2}$$

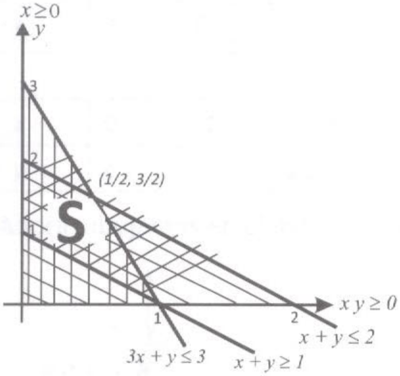



Figura 45

# 5.6 MÉTODO PUNTO ESQUINA

El problema de hallar un máximo o un mínimo es muy utilizado hoy en economía, negocios y contaduría. Solo por mencionar estas disciplinas.

El hombre de negocios piensa en como minimizar sus costos y maximizar sus ganancias. ¿Qué tasa de interés será la más favorable para pagar un préstamo? Los problemas económicos tienen sus restricciones, la nomina mensual, los gastos de gasolina de los vehículos de la empresa, los viáticos a pagar al conductor que transporta la mercancía hacia otras ciudades, etc.

Trataremos solo aquellos problemas que pueden ser graficados en el plano (***x, y***), es decir con solo dos variables. Los demás tendrán solución con otro método que veremos más adelante.

**Ejemplo:** La empresa JGDO S.A. fábrica puertas y ventanas en madera para pequeñas artesanías. Por cada puerta necesita 20 cm de madera y 3 horas de mano de obra. Por cada ventana se necesitan 15 cm de madera pero solo 1 hora de mano de obra. El fabricante dispone de de 4500 cm de madera y de una planta laboral que le puede proporcionar 400 horas de mano de obra. Por último, el fabricante ha determinado que se obtiene una ganancia neta de 8 dólares por cada puerta vendida y una ganancia de 5 dólares por cada ventana vendida. Por comodidad, se supondrá que los materiales adicionales requeridos (como puntillas y barniz) se tienen en cantidades suficientes. En estas condiciones, ¿cuántas puertas y ventanas deberá fabricar la compañía ABC con el fin de maximizar su ganancia, suponiendo que se venden todos los artículos producidos?

Solución:

Por comodidad se dispone de una tabla resumen para plantear bien las ecuaciones.

| Cantidad Requerida por unidad | | | |
|---|---|---|---|
| Materia prima | Puerta | Ventana | Total disponible |
| Madera(en cm) | 20 | 15 | 4500 |
| Mano de obra(en horas) | 3 | 1 | 400 |
| Ganancia unitaria neta | 8 | 5 | |

Sea *x* el número de puertas y *y* denota el número de ventanas producidas por la compañía. Como se necesitan 120 cm de madera para hacer una puerta, para hacer *x* puertas se requieren *120 x* cm de madera. En forma análoga, para las ventanas *70 y* cm de madera. Por tanto:

$20x + 15y \leq 4500$ Desigualdad de la madera

De manera similar, para la mano de obra tenemos:

$3x + y \leq 400$ Desigualdad de la mano de obra

Restricciones.

Estas dos desigualdades representan dos de las restricciones de este problema. Expresan, en términos matemáticos, el hecho obvio de que la materia prima y la mano de obra son cantidades finitas (limitadas). Existen otras dos restricciones, estas siempre estarán en los problemas de optimización lineal, pues no se producen cantidades negativas, estas son:

$x \geq 0 \quad y \geq 0$

La ganancia es la función a optimizar, llamada función objetivo, para este caso tenemos:

$G = 8x + 5y$ (Ganancia)

Por tanto, el problema toma la forma:

Maximizar:

$G = 8x + 5y$

Sujeta a las restricciones

$20x + 15y \leq 4500$

$3x + y \leq 400$

$x \geq 0 \quad y \geq 0$

Realizamos un gráfico en el mismo sistema coordenado y sombreamos las zonas de acuerdo a la desigualdad y la zona común es la región solución, luego probamos cada punto esquina resultante de la región solución y el mayor de ellos es el máximo.

Resolvemos mediante determinantes para hallar el punto de intersección, el cual es:

La tabulación para cada desigualdad es:

| | | | |
|---|---|---|---|
| x | 0 | 225 | 60 |
| y | 300 | 0 | 220 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| x | 0 | 133.3 | 60 |
| y | 400 | 0 | 220 |

El gráfico es el siguiente:

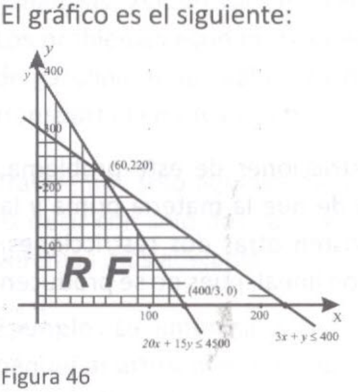



Figura 46

Ahora probamos cada punto esquina en la función objetivo y escogemos de acuerdo a lo pedido que es maximizar, el mayor de todos.

$$G(0{,}300) = 8(0) + 5(300) = 1500$$
$$G(60{,}220) = 8(60) + 5(220) = 1580$$
$$G(133{,}3{,}0) = 8(133{,}3) + 5(0) = 1066{,}4$$

Como vemos el mayor está dado en el punto esquina *(60,220)*.

Luego la compañía ABC debe producir 60 puertas y 220 ventanas para alcanzar un máximo.

La región solución señalada con el letrero RF se denomina región factible y es donde ocurrirá la solución sea máxima o mínima.

**Ejemplo:** Una fabrica de cocinas integrales produce dos tipos de cocinas, tipo I y tipo II, en los Departamentos de corte, armado y acabado. El número de horas disponible en cada departamento son 100h, 320h, y 220h respectivamente. Las horas que se requieren en la producción en cada departamento para cada tipo de cocina aparecen en la siguiente tabla:

| | Corte | Armado | Acabado |
|---|---|---|---|
| Tipo I | 1h | 4h | 3h |
| Tipo II | 2h | 3h | 2h |

Si la utilidad para cada unidad de cocinas integrales del Tipo I y del Tipo II son US$ 8 y US$10 respectivamente.¿Cuántas unidades de cada tipo se deben fabricar mensualmente para maximizar la utilidad y cuál es dicha utilidad? ¿Cuántas no se utilizan en los departamentos?

Solución:

Lo primero que debemos hacer es definir las variables de decisión:

$x_1$: número de cocinas del tipo I

$x_2$: número de cocinas del tipo II

Ahora planteamos el problema

La utilidad que dejan las cocinas Tipo I y Tipo II está dada por:

$U = 8x_1 + 10x_2$. La idea del problema es maximizar, por tanto para nuestro problema tenemos:

Maximizar: $U = 8x_1 + 10x_2$ (función objetivo).

Luego planteamos las restricciones:

Departamento de corte

$x_1 + 2x_2 \leq 100$ hay hasta 100 horas disponibles para el departamento de corte.

Departamento de Armado

$4x_1 + 3x_2 \leq 320$ hay disponibles 320 horas para el departamento de armado.

Departamento de Acabado

$3x_1 + 2x_2 \leq 220$ hay 220 horas disponibles para el departamento de acabado.

A las anteriores restricciones se agregan la que nos indican que todo es positivo.

$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0$

Reuniendo todo lo anterior le damos el cuerpo final al problema, el modelo queda así:

Maximizar: $U = 8x_1 + 10x_2$

Sujeto a: $x_1 + 2x_2 \leq 100$

$$3x_1 + 4x_2 \leq 320$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 220$$
$$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0$$

Recordemos que mediante la solución de los sistemas de ecuaciones por determinantes (u otro método) se obtienen los puntos esquina.

Solución gráfica:

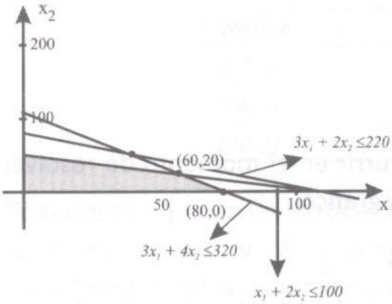



Figura 47

Los puntos esquina, para la solución son: *(60,20)* y *(80,0)*.

Reemplazando estos en la función objetivo tenemos:

$$U(60,20) = 8(60) + 10(20) = 680$$

$$U(80,0) = 8(80) + 10(0) = 640$$

Por tanto el máximo ocurre en *(60,20)* lo que quiere decir que la empresa debe fabricar 60 cocinas Tipo I y 20 del Tipo II para alcanzar una utilidad máxima. La utilidad máxima es US$680.

El manejo de recursos.

Para saber si existen horas no utilizadas procedemos de la siguiente manera.

| Departamentos | Horas requeridas | Horas disponibles | Horas no utilizadas |
|---|---|---|---|
| Corte | 60+2(20)=100 | 100 | 0 |
| Armado | 3(60)+4(20)=260 | 320 | 60 |
| Acabado | 3(60)+2(20)=220 | 220 | 0 |

De acuerdo a lo anterior los departamentos de corte y acabado utilizan todas las horas disponibles.

Decisión.

Se deben producir 60 cocinas Tipo I y 20 cocinas Tipo II, sobran 60 horas en el departamento de armado, se obtiene una utilidad máxima de US$680 en los demás departamentos se utilizan todas las horas disponibles.

Solución gráfica:

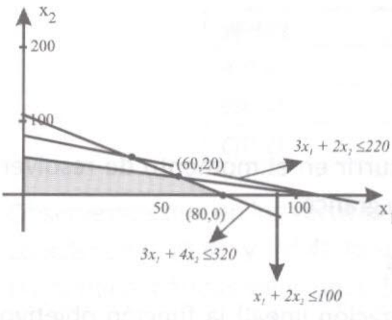



Figura 47

Los puntos esquina, para la solución son: *(60,20)* y *(80,0)*.

Reemplazando estos en la función objetivo tenemos:

$$U(60,20) = 8(60) + 10(20) = 680$$
$$U(80,0) = 8(80) + 10(0) = 640$$

Por tanto el máximo ocurre en *(60,20)* lo que quiere decir que la empresa debe fabricar 60 cocinas Tipo I y 20 del Tipo II para alcanzar una utilidad máxima. La utilidad máxima es US$680.

El manejo de recursos.

Para saber si existen horas no utilizadas procedemos de la siguiente manera.

| Departamentos | Horas requeridas | Horas disponibles | Horas no utilizadas |
|---|---|---|---|
| Corte | 60+2(20)=100 | 100 | 0 |
| Armado | 3(60)+4(20)=260 | 320 | 60 |
| Acabado | 3(60)+2(20)=220 | 220 | 0 |

De acuerdo a lo anterior los departamentos de corte y acabado utilizan todas las horas disponibles.

Decisión.

Se deben producir 60 cocinas Tipo I y 20 cocinas Tipo II, sobran 60 horas en el departamento de armado, se obtiene una utilidad máxima de US$680 en los demás departamentos se utilizan todas las horas disponibles.

El método gráfico infortunadamente solo funciona cuando tenemos dos variables.

Veamos otras variantes del método gráfico.

Soluciones múltiples no acotadas y degeneradas

Analizaremos aquellos problemas que pueden ocurrir en el momento de resolver un problema de optimización lineal por el método gráfico.

## CASO I Soluciones óptimas – múltiples

Ocurre que en algunos problemas de OL (optimización lineal) la función objetivo alcanza su valor óptimo en varios vértices de la región factible, en cuyo caso se dice que tiene soluciones óptimas múltiples alternativas.

**Ejemplo**

$$\begin{aligned} \text{Maximizar: } & Z = 4x_1 + 8x_2 \\ \text{Sujeto a: } & -2x_1 + 8x_2 \geq 16 \\ & 2x_1 + 4x_2 \leq 32 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Solución:

Utilizando cualquiera de los métodos para resolver sistemas de ecuaciones, encontramos el punto de intersección, de ambas ecuaciones y luego graficamos.

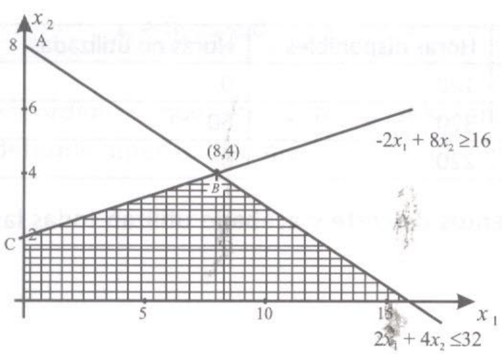



Figura 48

Los vértices que analizaremos son:

| Vértice | Función objetivo |
|---|---|
| *A(0,8)* | *Z = 4(0) + 8(8) = 64* |
| *B(8,4)* | *Z = 4(8) + 8(4) = 64* |
| *C(0,2)* | *Z = 4(0) + 8(2) = 16* |

Observemos que en los vértices A y B ocurren dos máximos, cuyo valor es *64* en las coordenadas *(0,8)* y *(8,4)*, lo que nos indica que este problema de optimización lineal tiene infinitas soluciones, pues el valor máximo aparece también en todos los puntos que se encuentran sobre el segmento de vértices A y B.

## Caso II No factibilidad

Existe la no factibilidad cuando no existe ninguna solución del problema de optimización lineal que satisfaga las restricciones, incluyendo la no negatividad, $x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$.

Gráficamente es lo siguiente:

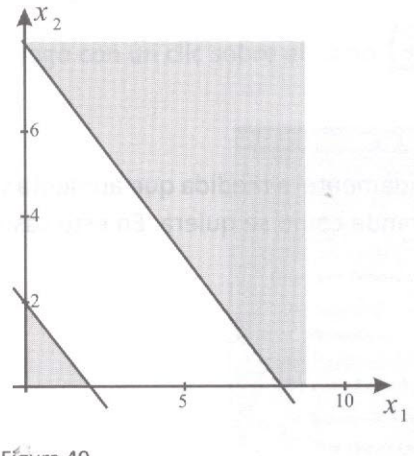



Figura 49

**Caso III No acotada**

Se dice que un problema de optimización lineal es no acotado, si el valor de la solución es tan grande como se quiera. Lo anterior se considera una utopía gerencial, ya que las empresas generarían utilidad máxima ilimitada.

Lo anterior ocurre sobre todo en problemas de tipo académico pues no existe en la realidad.

**Ejemplo:**

$$\text{Maximizar}: Z = 15x_1 + 30x_2$$
$$\text{Sujeta a}: \quad x_1 \geq 3$$
$$x_2 \leq 9$$
$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

La solución gráfica es:

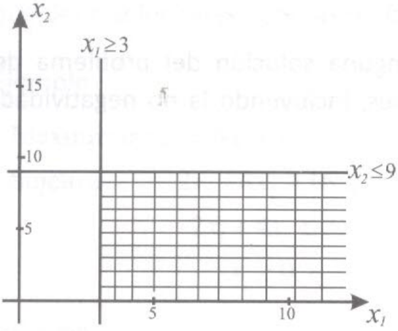



Figura 50

Veamos que $Z = 15x_1 + 30x_2$, Z aumenta indefinidamente a medida que aumenta y así el valor de la función objetivo se hace tan grande como se quiera. En este caso se dice que el problema es no acotado.

# 5.7 APLICACIÓN CON PROGRAMA WIN QSB

Vamos a resolver el problema de la empresa JGDO.
Primero entramos a Win QSB y obtenemos la siguiente pantalla

Figura 51

Luego con un clic sobre el icono aparece la pantalla la siguiente:

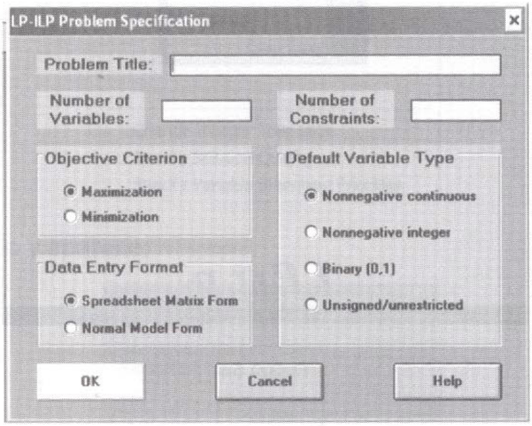



Figura 52

En los campos Problem Title colocamos el nombre del problema.
Number of Variables colocamos el número de variables
Number of Constraints colocamos el número de restricciones.

Finalmente activamos el campo maximización y la condición de no negatividad. Para nuestro caso tenemos:

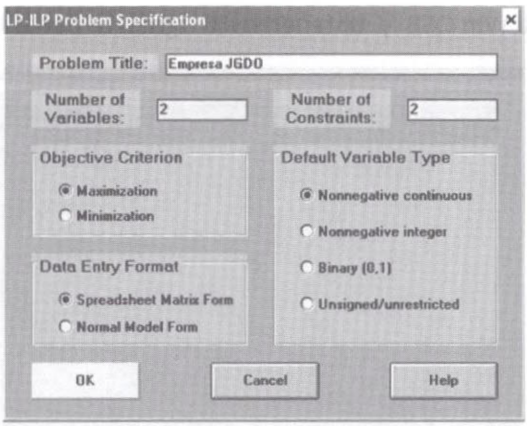
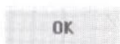



Figura 53

Oprimimos el icono  y aparece la ventana siguiente:

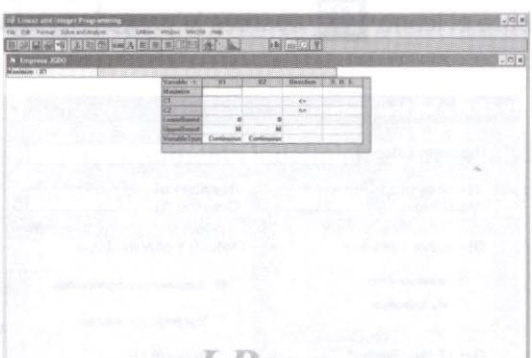



Figura 54

En la subventana:

| Variable --> | X1 | X2 | Direction | R. H. S. |
|---|---|---|---|---|
| Maximize | | | | |
| C1 | | | <= | |
| C2 | | | <= | |
| LowerBound | 0 | 0 | | |
| UpperBound | M | M | | |
| VariableType | Continuous | Continuous | | |

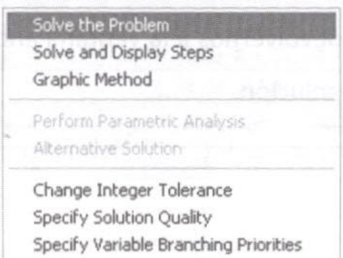
Figura 55

Escribimos en los campos correspondientes los coeficientes de las variables del problema, para nuestro caso:

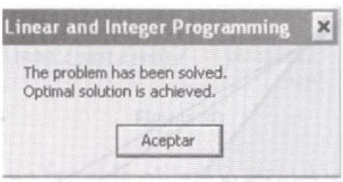
| Variable --> | X1 | X2 | Direction | R. H. S. |
|---|---|---|---|---|
| Maximize | 8 | 5 | | |
| C1 | 20 | 15 | <= | 4500 |
| C2 | 3 | 1 | <= | 400 |
| LowerBound | 0 | 0 | | |
| UpperBound | M | M | | |
| VariableType | Continuous | Continuous | | |

Figura 56

En la barra de herramientas está Solve and Analyze hacemos clic y aparece una pequeña ventana en la cual está la palabra Solve the Problem




Hacemos clic en ella y aparece:




Este nos dice: el problema se ha resuelto se logra una solución óptima. Oprimimos aceptar para ver la ventana con los datos solución del problema.

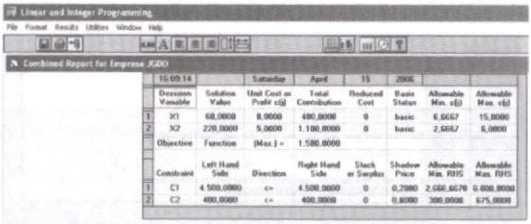



Figura 57

En la subventana

| 16:09:14 | | Saturday | April | 15 | 2006 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Decision Variable | Solution Value | Unit Cost or Profit c(j) | Total Contribution | Reduced Cost | Basis Status | Allowable Min. c(j) | Allowable Max. c(j) |
| 1 X1 | 60,0000 | 8,0000 | 480,0000 | 0 | basic | 6,6667 | 15,0000 |
| 2 X2 | 220,0000 | 5,0000 | 1.100,0000 | 0 | basic | 2,6667 | 6,0000 |
| Objective | Function | (Max.) = | 1.580,0000 | | | | |
| Constraint | Left Hand Side | Direction | Right Hand Side | Slack or Surplus | Shadow Price | Allowable Min. RHS | Allowable Max. RHS |
| 1 C1 | 4.500,0000 | <= | 4.500,0000 | 0 | 0,2800 | 2.666,6670 | 6.000,0000 |
| 2 C2 | 400,0000 | <= | 400,0000 | 0 | 0,8000 | 300,0000 | 675,0000 |

Figura 58

Observamos en la parte encerrada que la variable $x_1 = 60$ y $x_2 = 220$ resultado que encontramos, mediante métodos algebraicos.

Finalmente si queremos ver la solución gráfica (solo cuando hay dos variables) hacemos clic en  para devolvernos a la ventana anterior y luego con un clic en  obtenemos la gráfica solución.

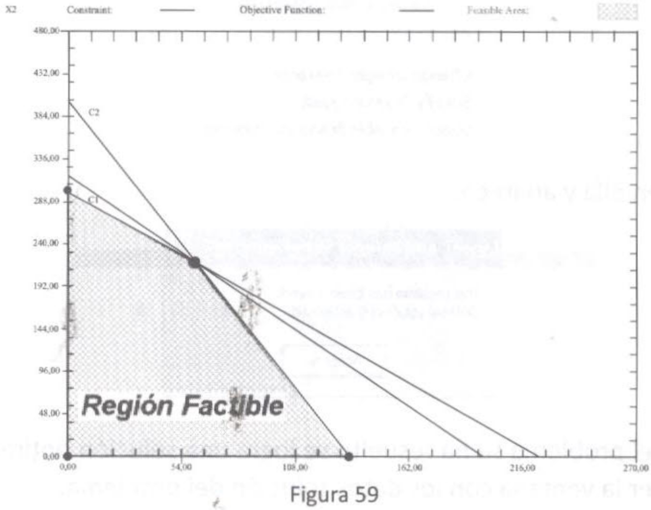



Figura 59

## SOLUCIÓN DE UN MODELO DE PROGRAMACIÓN LINEAL CON EXCEL (SOLVER)

### Un Modelo de Programación Lineal

Ejemplo resolver el modelo

Maximizar $8x_1 + 10x_2$

Sujeto a las restricciones

$$x_1 + 2x_2 \leq 100$$
$$3x_1 + 4x_2 \leq 320$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 220$$
$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

Solución

Utilizamos Solver para ello. Primero validamos como en la solución de ecuaciones y luego introducimos cada restricción en otras celdas. La hoja quedaría así:

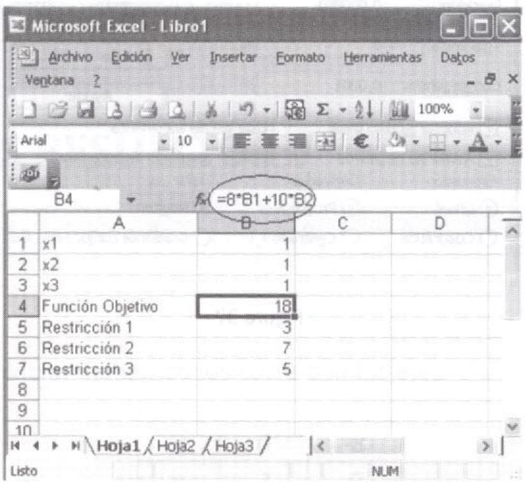



Figura 30

Ahora llamamos a Solver y en la celda objetivo introducimos la función objetivo. En combinando celda los valores de $x_1$, $x_2$ y $x_3$ su validación; es decir las celdas B1 a B3. y las restricciones las agregamos, teniendo presente que utilizamos el signo de desigualdad.

La hoja es la siguiente:

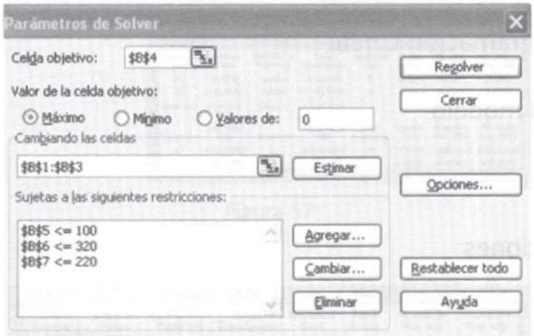



Figura 31

Clic en opciones y habilitamos adoptar modelo lineal y asumir no negativos, lo demás lo dejamos igual, finalmente clic en aceptar y resolver.

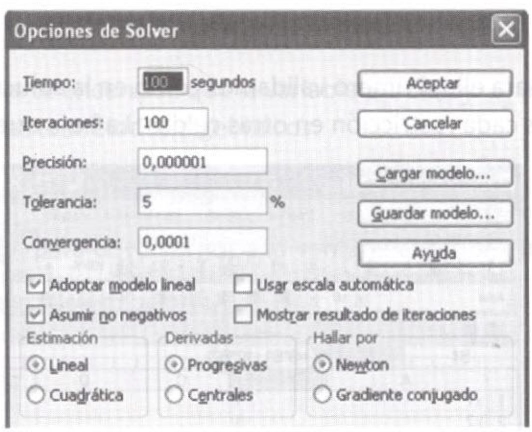



Figura 32

En la hoja de respuestas encontramos la solución:

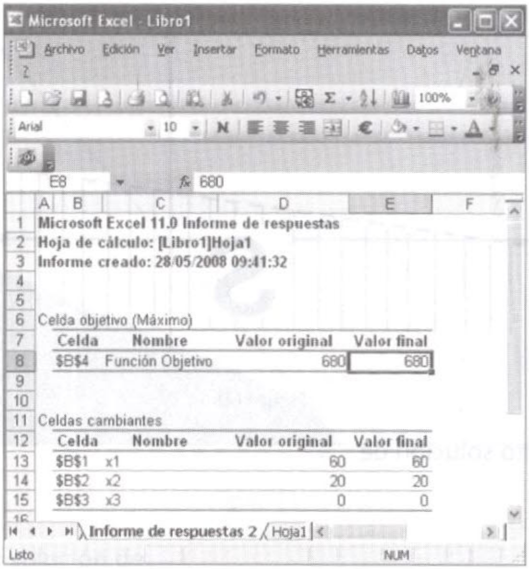



Figura 33

Como vemos la solución está dada por: $x_1 = 60$, $x_2 = 20$ $y$ $x_3 = 0$ el valor máximo es 680.

# EJERCICIOS RESUELTOS V

1. Hallara el conjunto solución de $-x + 4y < 8$

Solución

Mediante una tabulación hallamos los corte con los ejes

| | | |
|---|---|---|
| *x* | *0* | *-8* |
| *y* | *2* | *0* |

Graficamos la solución

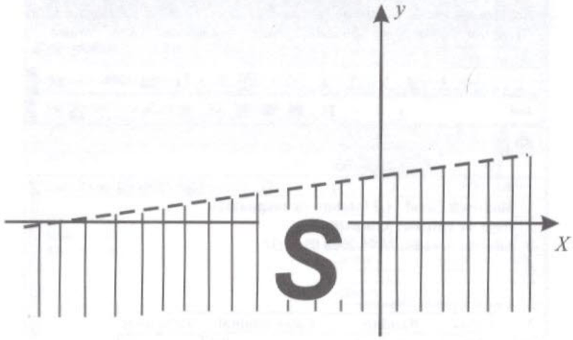



Figura 60

2. Hallara el conjunto solución de

$$\begin{cases} 3x+4y \leq 12 \\ 2x+y \leq 6 \\ x \geq 0,\ y \geq 0 \end{cases}$$

Solución

Encontramos los interceptos

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 12 & 4 \\ 6 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{12}{5} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{6}{5}$$

Luego mediante el programa Win QSB encontramos la región solución

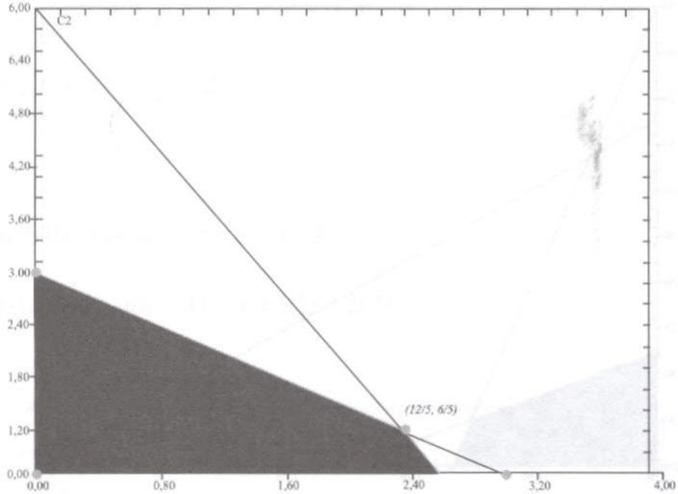



Figura 61

3. Hallar el conjunto solución de

$$\begin{cases} 2x+3y \leq 3 \\ 4x+y \leq 4 \\ x+y \geq 3 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

Solución

En estos casos (tres desigualdades) dibujamos primero y observamos cuales de las desigualdades se cortan y con estas trabajamos, no nos interesan las que no se corten. Con la ayuda del Win QSB realizamos el dibujo y obtenemos:

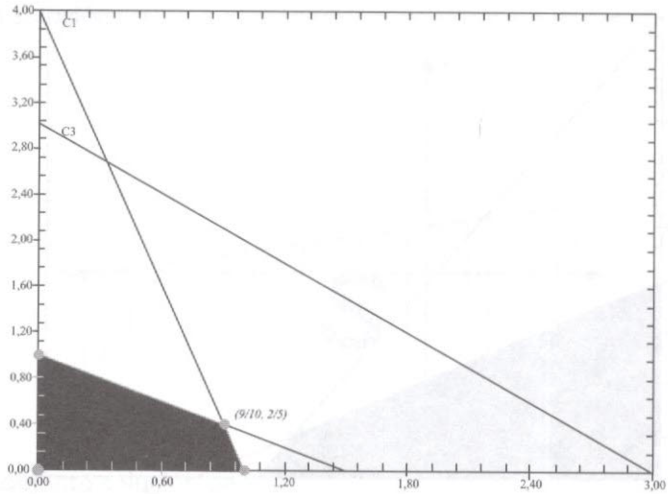



Figura 62

Como vemos en el gráfico las desigualdades 1 y 2 se cortan para dar la solución que corresponde a la zona rayada, por tanto mediante determinates hallamos la solución.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{9}{10} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{2}{5}$$

4. Maximizar

$f = 3x_1 + 2x_2$

s a

$2x_1 + x_2 \leq 4$

$x_1 + 2x_2 \leq 5$

$x_1 \geq 0$ , $x_2 \geq 0$

Solución

Mediante determinantes encontramos el punto de intersección de las dos desigualdades.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = 1 \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = 2$$

Luego el punto de intersección es *(1 , 2).*

El máximo esta dado por $f(1,2) = 3(1) + 2(2) = 7$

El gráfico es:

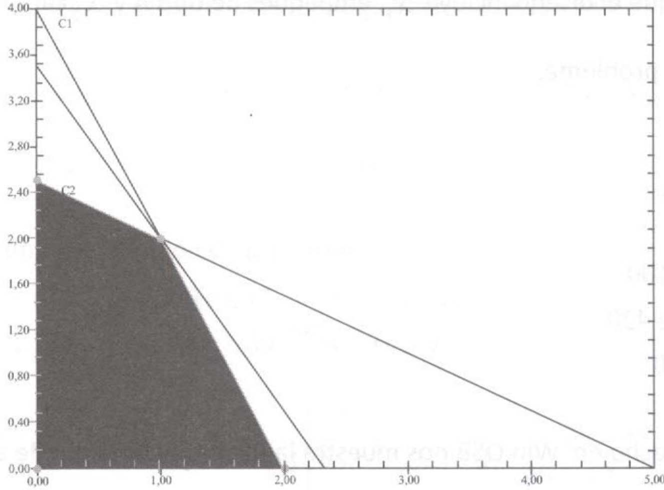



Figura 63

5. Una compañía de productos alimenticios producirá dos tipos de turrones $T_1$ y $T_2$. La planta debe tener la capacidad de producir al menos 100 unidades de $T_1$ y 420 unidades de $T_2$. La producción de estos turrones deben tener por lo menos dos tipos de empaque A y B. El empaque A tiene un costo de US \$ 6 con una capacidad de 10 turrones $T_1$ y 20 unidades del tipo $T_2$; el empaque tipo B es un diseño más económico y tiene un costo de US\$3 y una capacidad de empaque de 4 unidades de tipo $T_1$ y 30 unidades de tipo $T_2$. ¿Cuántos empaques de cada tipo deberían incluirse a fin de minimizar el costo de construcción y aún cumplir con el programa de producción requerida?

Solución

Para dar un planteamiento mejor al problema utilizamos una tabla, donde resumimos la información.

| | $T_1$ | $T_2$ | Costo |
|---|---|---|---|
| Empaque A | 10 | 20 | 6 |
| Empaque B | 4 | 30 | 3 |
| Requerimientos | 100 | 420 | |

Supongamos que el diseño incluye $x_1$ empaques de tipo A y $x_2$ cámaras de tipo B

Planteamos el problema:

Minimizar

$$
\begin{aligned}
&C = 6x_1 + 3x_2 \\
&\text{s a} \\
&10x_1 + 4x_2 \geq 100 \\
&20x_1 + 30x_2 \geq 420 \\
&x_1 \geq 0\ ,\ x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

En el gráfico hecho en Win QSB nos muestra la región factible donde esta el punto solución.

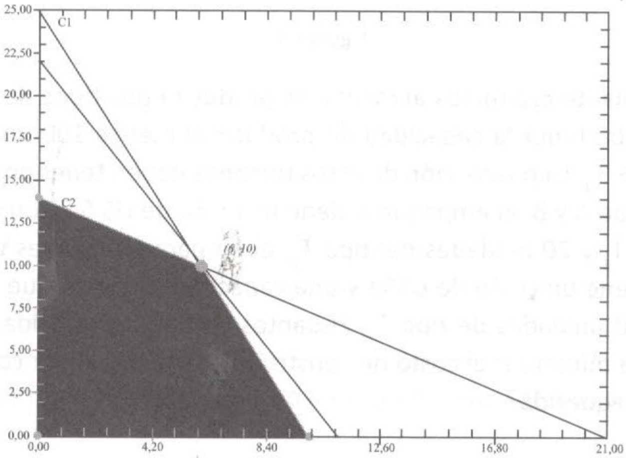



Figura 64

El costo se minimiza en *(6, 10)* el costo mínimo es *c = 66*

Es decir US$6,6 millones.

# 5.8 EJERCICIOS PROPUESTOS GRUPO V

1. Hallar el conjunto solución de las siguientes desigualdades

$a)\, x \le 4 \quad b)\, x \le 4/3 \quad c)\, x+y \le 3 \quad d)\, y-4x > 4 \quad e)\, 5x-3y \ge 15$

$f)\, \dfrac{x-2y}{4} \le 2 \quad g)\, \dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{3} \ge 1 \quad h)\, -3x-y < 3 \quad i)\, 2x-y \ge 4 \quad j)\, -3x-4y > 6$

$k)\, 1 < y \le 5 \quad l)\, -2 \le y \le 2 \quad m)\, |x| < 3\ |y| < 5 \quad n)\, \frac{-1}{2} < x < 2\ ;\ \frac{1}{2} \le y \le 3$

$o)\, |x-1| < 4,\ |y+2| \le 3 \quad p)\, x+y \le 1\ ,\ 2x+3y \ge 5$

2. Hallar el conjunto solución de los sistemas

$a)\begin{cases} 2x+3y \le 6 \\ 3x+2y \ge 12 \end{cases} \quad b)\begin{cases} 4x+3y \le 12 \\ 5x+6y \ge 30 \end{cases} \quad c)\begin{cases} 3x-2y \le 6 \\ x-3y > 9 \end{cases}$



$d)\begin{cases} 2x+3y > -6 \\ 3x-y < 6 \end{cases} \quad e)\begin{cases} y < 2x+4 \\ x \ge -2 \\ y < 1 \end{cases} \quad f)\begin{cases} x+y > 1 \\ 3x-5 \le y \\ y < 2x \end{cases} \quad g)\begin{cases} x-2y > 4 \\ x+y > 1 \end{cases}$

3. Una compañía produce dos tipos de juguetes, tipo A y tipo B. Cada unidad del tipo A requiere 2 horas en cada máquina y 5 horas en una segunda máquina. Cada unidad del tipo B demanda 4 horas en la primera máquina y 3 horas en la segunda máquina.

Se dispone de 100 horas a la semana en la primera máquina y de 110 horas en la segunda. Si la compañía obtiene una utilidad de US$70 por cada unidad del tipo A y US$50 por cada unidad del tipo B, ¿Cuánto deberá producirse de cada unidad con objeto de maximizar la utilidad total?

4. Una compañía vende dos productos diferentes, A y B. El precio de venta y la información del costo incremental aparecen en la siguiente tabla:

| | Producto A | Producto B |
|---|---|---|
| Precio de venta | 60 | 40 |
| Costo incremental | 30 | 10 |
| Rentabilidad incremental | 30 | 30 |

Los dos productos se elaboran en un proceso común y se venden en dos mercados diferentes. El proceso de producción tiene una capacidad de 30000 horas de mano de obra. Se requiere de tres horas para producir una unidad de A y de una hora para producir una unidad de B. Se hizo un estudio de mercado, por ello, los directivos de la empresa consideran que la cantidad máxima de unidades de A que pueden venderse es 8000; y de B es de 12000 unidades. Sujetos a estas limitaciones, los productos pueden venderse en cualquier combinación.

Resuelva el problema por el método gráfico y halle la mezcla máxima.

5. Una compañía fabrica dos productos llamados A y B. Se realizó un estudio de mercado y se encontró que las cantidades máximas que se pueden vender por un período de cada producto son de 1400 y 1600 unidades, respectivamente. Se tiene la siguiente información.

| Producto | Cantidad de recursos que consumen | | Precio de venta US$ |
|---|---|---|---|
| | R1 | R2 | |
| A | 3 | 2 | 22 |
| B | 1 | 4 | 24 |
| Cantidad máxima de recurso disponible | 3000 | 5000 | |
| Costo por unidad de recurso (US$) | 2 | 3 | |

¿Qué cantidad de cada producto se debe fabricar para maximizar la ganancia si solo se dispone de una cantidad de US$16000 en cada período para adquirir los recursos necesarios?

6. Una empresa Pereirana tiene una pequeña planta en la cual fabrica dos productos A y B. El departamento contable envía la siguiente información: las utilidades para los productos son US$10 y US$12 respectivamente. Los productos pasan a través de tres de tres departamentos de producción en la planta. El tiempo requerido para

fabricar cada producto y el tiempo total disponible en los respectivos departamentos se muestran en la siguiente tabla.

| | Horas/Hombre de tiempo de producción por producto | | Total de horas/hombre disponibles por mes |
|---|---|---|---|
| Departamento | A | B | |
| 1 | 2 | 3 | 1500 |
| 2 | 3 | 2 | 1500 |
| 3 | 1 | 1 | 600 |

La administración de la empresa desea determinar la mezcla de producción de los dos productos A y B que maximizan las utilidades.

a) ¿Cuál es la función y cuales las restricciones?

b) Encentre la solución optima para el problema utilizando el método gráfico.

c) ¿Qué ocurre con algunas de las restricciones?

7. Una compañía de artículos deportivos fabrica dos modelos de camisetas: una con tela nacional y otra con tela importada. La compañía tiene 900 horas de tiempo de producción en su departamento de corte y costura, 300 horas disponibles en su departamento de terminado y 100 horas disponibles en el departamento de empaque y embarque. Los requerimientos de tiempo de producción y la contribución a la utilidad de cada uno de los productos es

| Modelo | Tiempo de producción (horas) | | | Utilidad /Camiseta |
|---|---|---|---|---|
| | Corte y costura | Terminado | Empaque y embarque | |
| Camiseta Nacional | 1 | 1/2 | 1/8 | $US 5 |
| Camiseta importada | 3/2 | 1/3 | 1/4 | US$ 8 |

Suponga que la empresa está interesada en maximizar la contribución total a la utilidad.

a) ¿Cuál es el modelo de programación para este problema?

b) Encuentre la solución óptima. ¿Cuántas camisetas de cada tipo deberá fabricar la compañía?

c) ¿Cuál es la contribución total de la utilidad que puede ganar con las cantidades de producción citas arriba?

d) ¿Cuántas horas de tiempo de producción serán programadas en cada departamento?

e) ¿Cuál es el tiempo libre de cada departamento?

8. Una guardería para mascotas proporciona alojamiento por una noche para mascotas. La característica más importante es la gran atención y tratamiento que reciben las mascotas, incluyendo una excelente alimentación. La comida para perros de la perrera se elabora mezclando dos alimentos de marca para perros a fin de obtener lo que se identifica como una dieta para perros bien balanceada. Los datos para las dos comidas para perros son las siguientes:

| Comida para perros | Costo /Onza | Proteínas (%) | Grasa (%) |
|---|---|---|---|
| Marca A | US$ 0,06 | 30 | 15 |
| Marca B | US$ 0,05 | 20 | 30 |

Si la guardería desea asegurarse de que los perros reciben por lo menos 5 onzas de proteínas y como mínimo 3 onzas de grasas cada día, ¿cuál es la mezcla de costo mínimo de los dos alimentos para perros?

9. Una compañía fabrica y vende dos modelos de lámparas $L_1$ y $L_2$. Para su fabricación se necesita un trabajo manual de 20 minutos para el modelo $L_1$ y de 30 minutos para el $L_2$; y un trabajo de máquina de 20 minutos para $L_1$ y de 10 minutos para $L_2$.

Se dispone para el trabajo manual de 100 horas al mes, y para la máquina de 80 horas al mes. Sabiendo que el beneficio por unidad es de US$150 y US$100 para $L_1$ y $L_2$ respectivamente, Planificar la producción para obtener el máximo beneficio.

10. Supongamos que tenemos una empresa que elabora los productos X y Y. Para producir X hace falta 0,6 del factor K(capital), 0,8 del factor T(mano de obra) y 3 unidades del factor M(materia prima). Para el Y hacen falta 0,5 de K, 0,2 de T, y 1 de M. El producto X se vende a 6 dólares la unidad y el Y a 4 dólares. Hay restricciones

para los tres recursos: del K no se pueden disponer de más de 5 unidades, del t no más de 6 y del M no más de 13. Se pide: buscar la combinación de producción de X y Y que maximice la ganancia.

# TALLER DE CLASE No 5

1. Una empresa produce dos tipos de artículos computarizados y electrónicos. Cada uno requiere para su fabricación del uso de tres máquinas, A, B y C. En la tabla dada aparece la información relacionada con la fabricación de dichos artículos. Cada artículo computarizado requiere del uso de la máquina A durante 2 horas, de la máquina B por 1 hora y de la máquina c otra hora. Un artículo electrónico requiere de 1 hora de A, 2 horas de B y 1 hora de C. El número de horas disponibles para el uso de las máquinas A, B y C es de 180, 160 y 100 horas respectivamente. La utilidad por cada artículo manual es de $US 4 y por cada artículo electrónico es de $US6. Si la empresa vende todos los artículos que pueda producir, ¿cuántos artículos de cada tipo debe producir con el fin de maximizar la utilidad mensual?

| | | | | Utilidad |
|---|---|---|---|---|
| Computarizado | 2 horas | 1 hora | 1 hora | $US 4 |
| Electrónico | 1 hora | 2 horas | 1 hora | 6 |
| Horas disponibles | 180 | 160 | 100 | |

2. Maximizar

$Z = 5x + 6y$

sujeta a

$x + y \leq 80$

$3x + 2y \leq 220$

$2x + 3y \leq 210$

$x, y \geq 0$

3. La empresa aguas y aguas de la ciudad de Pereira debe hallar la manera de proporcionar por lo menos 10 millones de galones de agua por día. El agua se debe tomar de la Represa del Otún. Los otros depósitos de agua deben suministrar 5 millones de galos de agua, cantidad que no puede ser excedida. La Represa puede suministrar un máximo de 10 millones de galones día. Además debido a una cláusula

contractual con la alcaldía, debe bombear por lo menos 6 millones de galones día. El costo del agua de la Represa del otun es de $ US 300 por 1 millón de galones de y el costo del agua del depósito local es de $US 500 por 1 millón de galones. En que forma puede el administrador minimizar el costo diario del agua?

4. una compañía produce dos artículos, A1 y A2. Cada unidad de A1 requiere 2 horas en una máquina y 5 horas en una segunda máquina. Cada unidad de A2 requiere 4 horas de la primera máquina y 3 en la segunda máquina. Se dispone de 100 horas a la semana en la primera máquina y de 110 en la segunda. Si la compañía obtiene una utilidad de $UM 70 por cada unidad de A1 y $UM 50 por cada unidad de A2, ¿Cuánto deberá producirse de cada unidad con objeto de maximizar la utilidad total?

# CAPÍTULO VI:

# Introducción al Método Simplex

**Monge, Gaspard** (1746 - 1818).

Matemático francés. A finales del s. XVIII Gaspar Monge desarrolló la Geometría Descriptiva, dando un nuevo impulso a la geometría proyectiva. Monge es después de Euclides, probablemente, el geómetra más significativo.

Creador junto con Euler y Jean Baptiste Meusnier de los primeros teoremas de geometría diferencial.

También se interesó por la metalurgia del hierro, tanto por la fabricación en sí misma como por la teoría metalúrgica, y en 1785, junto con Berthollet y Vandermonde, publicó la primera teoría de la fundición del acero según la doctrina de Lavoisier.

## INTRODUCCIÓN

En este capítulo trataremos todo lo relacionado a la programación lineal, resolviendo problemas mediante la tabal de Simplex en forma sencilla y con la herramienbta computacional del Win QSB.

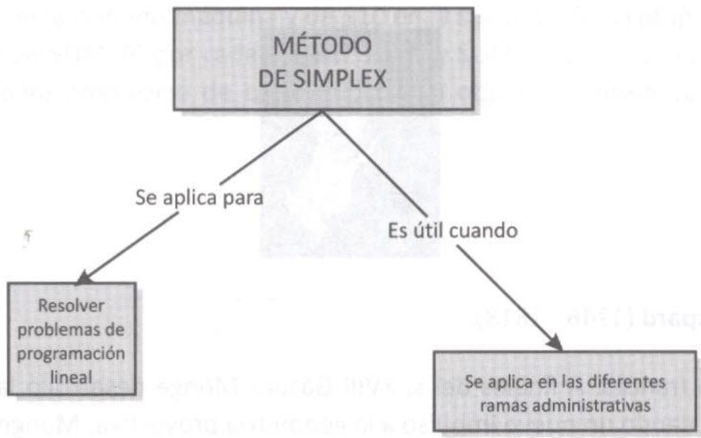
# OBJETIVOS

Explicar el método de simples y sus complicaciones

Realizar análisis de los problemas máximo y mínimo.

Mirar si un problema tiene o no solución

Resolver problemas mediante Win QSB.




## Método de Simplex  Primera forma (estándar)

El método de punto esquina tratado en el capítulo V es trabajable cuando solo hay dos variables en escena, pero se vuelve difícil y tedioso cuando aumenta el número de variables y restricciones. Vamos a utilizar un método más efectivo para resolver problemas de programación lineal. Este método recibe el nombre de método simplex. Dicho método fue desarrollado por el matemático norteamericano George B. Dantzig.

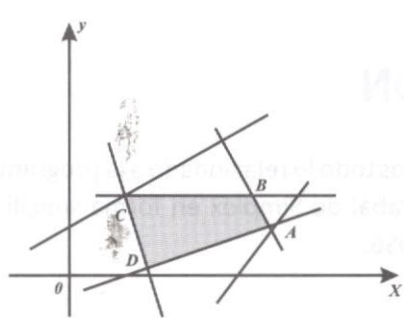



Figura 65

Supongamos que se desea maximizar una función objetivo ***f*** sobre el conjunto restricción mencionado. Lo primero que vamos a hacer es localizar un punto esquina, por ejemplo el punto B. Cualquier segmento de recta que una dos puntos esquina se denomina arista del conjunto restricción.

El matemático Dantzig demostró lo siguiente:

Si $f$ no toma su valor máximo en el punto de esquina B, entonces hay un borde que parte de B a lo largo del cual $f$ aumenta.

# INTERPRETACIÓN:

Si ***f*** toma su valor máximo ahí, el el problema esta resuelto. En caso contrario, se continua a lo largo de otro borde a lo largo del que ***f*** aumente a fin de alcanzar otro punto esquina, como es un conjunto finito el óptimo se alcanzará en un número finito de pasos. Debe quedar claro que no se regresará al inicial pues cada vez la función objetivo aumenta en cada paso. Así evitamos la necesidad de calcular todos y cada uno de los puntos esquina. Una ventaja del simplex es el fácil cálculo mediante los modernos programas de computadora.

# 6.1 PROBLEMA ESTÁNDAR DE MAXIMIZACIÓN DE PROGRAMACIÓN LINEAL

Hallar el *n*-vector $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ que maximice la función objetivo

$$f = c\,x_1 + c\,x_2 + \cdots + c\,x_n$$

que satisfaga las $m + n$ desigualdades

$$\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1 \\
a_{21}x + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le b_2 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le b_m \\
x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \cdots, x_n \ge 0 \\
b_1 \ge 0.b_2 \ge 0, \cdots, b_m \ge 0.
\end{array}$$

Para resolver este problema se deben introducir las variables $s_1, s_2, \cdots s_m$ llamadas variables holgura, con ellas el problema se convierte en:

$$f = c\,x_1 + c\,x_2 + \cdots + c\,x_n$$

Sujeta a (s.a)

$$\begin{array}{lll}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + s_1 & & = b_1 \\
a_{21}x + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & + s_2 & = b_2 \\
\vdots \qquad \vdots & \vdots & \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & + s_m & = b_m \\
x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \cdots, x_n \geq 0 & & \\
s_1 \geq 0. s_2 \geq 0, \cdots, s_m \geq 0. & &
\end{array}$$

En un comienzo $s_1, s_2, \cdots s_m$ pueden expresarse en términos de $x_1,\ x_2, \cdots, x_n$, de manera que las variables básicas son al principio $s_1, s_2, \cdots s_m$ y las variables no básicas son $x_1,\ x_2, \cdots, x_n$, las $b_1,\ b_2, \cdots, b_n$ son no negativas; lo que nos lleva al tener una igualdad y con ello el punto esquina inicial ***(0,0,...,0)***. Si una o más de las $b_i$ son negativas, entonces debemos recurrir a otra técnica para la solución.

Para obtener una solución factible, debemos contar que todas las $x_i$ y las $s_i$ deben ser positivas. Por lo tanto el único requisito para un punto esquina, si se satisfacen las restricciones de igualdad, es que todas las variables tengan valores no negativos.

Veamos ahora el diagrama de simplex inicial, aclarando que no es el único modelo utilizado, existen otros un poco más complejos.

| $x_1$ | $x_2$ | | $x_3$ | $s_1$ | $s_2$ | | $s_m$ | | *Variables básicas* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_{11}$ | $a_{12}$ | $\cdots$ | $a_{1x}$ | $s_{11}$ | $s_{12}$ | $\cdots$ | $s_{1x}$ | $b_1$ | $s_1$ *iniciales* |
| $a_{21}$ | $a_{22}$ | $\cdots$ | $a_{2x}$ | $s_{21}$ | $s_{22}$ | $\cdots$ | $s_{2x}$ | $b_2$ | $s_2$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\cdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\cdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $a_{m1}$ | $a_{M2}$ | $\cdots$ | $a_{mx}$ | $s_{m1}$ | $s_{m2}$ | $\cdots$ | $s_{mx}$ | $b_m$ | $s_m$ |
| $c_1$ | $c_2$ | $\cdots$ | $c_x$ | $0_1$ | $0_2$ | $\cdots$ | $0_x$ | $f$ | |

*Indicadores*

Si observamos con detalle, la primera línea nos indica que:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + s_1 + 0 \cdot s_2 + \cdots + 0 \cdot s_m = b_1$$

El método de simplex consiste en realizar operaciones elementales en las filas de la tabla (como en el método de gauss-Jordán) y buscar que los indicadores se vuelvan negativos. Cuando esto ocurre se dice que hemos encontrado el máximo de *f*. Para lograr esto se trabaja en la tabla hasta eliminar todos los indicadores positivos.

# 6.2 ELECCIÓN DEL PIVOTE

Inicialmente elegimos cualquier columna de la tabla que t enga un indicador positivo (si llegara haber más de uno se elige cualquiera) y se considera todos los componentes positivos de esa columna. Supongamos que elegimos $j$ - ésima la columna.

Ahora se define un pivote en dicha columna, el cual es un elemento positivo $a_{ij}$ de la $j$ - ésima columna tal que $\frac{b_i}{a_{ij}}$ es un mínimo para todos esos $a_{ij}$. Si este mínimo no es único, se elige otro elemento de la $j$ - ésima columna que de un cociente mínimo.

**Ejemplo.**

Hallar los pivotes de

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $s_1$ | $s_2$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *-1* | *4* | *2* | *6* | *1* | *0* | *1* | $s_1$ |
| *3* | *2* | *3* | *7* | *0* | *1* | *2* | $s_2$ |
| *1* | *1/2* | *1* | *-2* | *0* | *0* | *f* | |

Solución

Hay tres indicadores positivos *(1, 1/2, 1)*, lo que indica que hay tres indicadores positivos, lo que indica que existen al menos tres pivotes.

Columna 1

Como el elemento $a_{11} = -1$ el pivote es 3.

Columna 2

En la segunda columna hay dos elementos positivos , por tanto se forman los cocientes

$$\frac{b_1}{a_{12}}=\frac{1}{4} \;\; y \;\; \frac{b_2}{a_{22}}=\frac{2}{2}$$

Como $\frac{1}{4}<1$ el pivote es 4.

Columna 3

$$\frac{b_1}{a_{13}}=\frac{1}{2} \;\; y \;\; \frac{b_2}{a_{23}}=\frac{1}{3}$$

Como $\frac{1}{3}<\frac{1}{2}$ el pivote es 3.

Columna 4

$$\frac{b_1}{a_{14}}=\frac{1}{6} \;\; y \;\; \frac{b_2}{a_{24}}=\frac{1}{7}$$

Como $\frac{1}{7}<\frac{1}{6}$ el pivote es 7.

# 6.3 MÉTODO DE SIMPLEX I (PIVOTEO)

3. Cuando ya hemos encontrado el pivote, utilizamos la reducción por filas (o renglones) a fin de igualar el pivote a 1(uno) y hacer iguales a cero las demás componentes de la columna pivote.

4. La variable básica del lado derecho del lado derecho de la fila pivote se sustituye por la variable no básica que encabeza la columna pivote.

**Ejemplo**

Con respecto de la tabla anterior, como ya hallamos los pivotes. Pivotéese con respecto al elemento $a_{12}=4$.

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $s_1$ | $s_2$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -1 | 4 | 2 | 6 | 1 | 0 | 1 | $s_1$ |
| 3 | 2 | 3 | 7 | 0 | 1 | 2 | $s_2$ |
| 1 | 1/2 | 1 | -2 | 0 | 0 | $f$ | |

Para ello multiplicamos la fila 1 por ***1/4*** par así volver el elemento $a_{12} = 4$ 1 (uno).

Lo anterior para que los elementos de las columnas debajo del pivote se vuelvan cero, en este caso para que el elemento $a_{22} = 0$. Esto lo conseguimos de la siguiente manera:

*Variables básicas iniciales*

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $s_1$ | $s_2$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -1 | 4 | 2 | 6 | 1 | 0 | 1 | $s_1$ |
| 3 | 2 | 3 | 7 | 0 | 1 | 2 | $s_2$ |
| 1 | 1/2 | 1 | -2 | 0 | 0 | $f$ | |

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $s_1$ | $s_2$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -1 | 4 | 2 | 6 | 1 | 0 | 1 | $s_1$ | $\frac{1}{4}f_1$ |
| 3 | 2 | 3 | 7 | 0 | 1 | 2 | $s_2$ | |
| 1 | 1/2 | 1 | -2 | 0 | 0 | $f$ | | |

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $s_1$ | $s_2$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -1/4 | 1 | 1/2 | 3/2 | 1/4 | 0 | 1/4 | $s_1$ |
| 3 | 2 | 3 | 7 | 0 | 1 | 2 | $s_2$ |
| 1 | 1/2 | 1 | -2 | 0 | 0 | $f$ | |

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $s_1$ | $s_2$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -1/4 | 1 | 1/2 | 3/2 | 1/4 | 0 | 1/4 | $s_1$ | $-2f_1 + f_2$ |
| 3 | 2 | 3 | 7 | 0 | 1 | 2 | $s_2$ | $-1/2f_1 + f_3$ |
| 1 | 1/2 | 1 | -2 | 0 | 0 | f | | |

Para obtener:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $s_1$ | $s_2$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -1/4 | 1 | 1/2 | 3/2 | 1/4 | 0 | 1/4 | $s_1$ |
| 3 | 0 | 2 | 4 | 0 | 1 | 2 | $s_2$ |
| 29/8 | 0 | 3/4 | -11/4 | -1/8 | 0 | f-1/8 | |

La variable no básica que encabeza la columna dos, $x_2$, se convierte en variable básica. Por tanto la tabla queda así:

*Esta es la nueva variable básica*

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $s_1$ | $s_2$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -1/4 | 1 | 1/2 | 3/2 | 1/4 | 0 | 1/4 | $x_1$ |
| 7/2 | 0 | 2 | 4 | 0 | 1 | 2 | $s_2$ |
| 29/8 | 0 | 3/4 | -11/4 | -1/8 | 0 | f-1/8 | |

Como hemos pivoteado con respecto a la primera fila y segunda columna, la variable básica en la primera fila, $s_1$, se convierte en no básica, y la variable no básica que encabeza la segunda columna, $x_2$, se convierte en básica.

La interpretación del diagrama es:

$$\frac{-1}{4}x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{3}{2}x_4 = \frac{1}{4}$$

Esto quiere decir: $x_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}x_1 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{3}{2}x_4 - \frac{1}{4}s_1$

La importancia de seguir los cuatro pasos anteriores, radica en lo siguiente:

los números que aparecen en la columna de la derecha proporcionan un nuevo punto esquina de modo que todas las variables no básicas son iguales a cero.

En el punto esquina indicado en a) la función objetivo ha aumentado.

6.4 Interpretación del diagrama luego de pivotear.

En el diagrama anterior tenemos: $x_2 = 1/4$ y $x_1 = x_3 = x_4 = 0$ , por ser variables no básicas. Para este caso la última ecuación es:

$\frac{29}{8}x_1 + \frac{3}{4}x_3 - \frac{11}{4}x_4 - \frac{1}{8}s_1 = f - \frac{1}{8}$

Pero sabemos que: $x_1 = x_3 = x_4 = s_1 = 0$ por ser variables no básicas, esto nos indica que: $f - \frac{1}{8} = 0 \quad \therefore \quad f = \frac{1}{8}$. Lo que nos indica que ***f*** ha aumentado desde el valor cero (en el origen (0,0,0,0)) hasta ***1/8*** en la coordenada ***(0,1/4,0,0).***

Es de anotar que el valor de $s_2 = 2$ que resulta de hacer $x_1 = x_3 = x_4 = s_1 = 0$ en diagrama, significa que la segunda desigualdad tiene una holgura de 2 en el problema inicial de programación lineal.

# 6.4 DIAGRAMA FINAL DE SIMPLEX

En la tabla de simplex se sigue el pivoteo hasta que se consiga que todos los indicadores positivos se hayan eliminado. Cuando esto ocurre se dice que se ha llegado a un diagrama Terminal, así, los indicadores finales deben ser negativos o cero.

**Ejemplo:**

Veamos el siguiente diagrama y su interpretación:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 1 | $\frac{1}{2}$ | 1 | 3 | 0 | 1 | $x_3$ |
| 3 | 1 | 0 | 0 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{3}$ | 1 | 0 | 2 | $x_4$ |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 5 | 0 | 3 | $x_2$ |
| 0 | 4 | 0 | 0 | 3 | 0 | 2 | 1 | 3 | $s_4$ |
| -1 | 0 | 0 | 0 | $\frac{-2}{3}$ | $\frac{-1}{3}$ | -1 | 0 | $f$-30 | |

Indicadores no positivos y cero

Vemos que los indicadores son negativos y cero, quiere decir esto que $f$ tiene un máximo de 30 en el punto: *(0, 3, 1, 2)* $x_1$ es no básica.

Esto lo podemos ver mediante la última ecuación del diagrama.

$$-x_1+0\cdot x_2+0\cdot x_3+0\cdot x_4-\tfrac{2}{3}s_1-\tfrac{1}{2}s_2-s_3+0\cdot x_4=f-30$$
$$-x_1-\tfrac{2}{3}s_1-\tfrac{1}{2}s_2-s_3=f-30$$

$$f=30-x_1-\tfrac{2}{3}s_1-\tfrac{1}{2}s_2-s_3$$

$-x_1-\tfrac{2}{3}s_1-\tfrac{1}{2}s_2-s_3\le 0$ Luego $f\le 30$ Podremos observar que cuando

$x_1=s_1=s_2=s_3=0$

Con esto las primeras cuatro ecuaciones del diagrama terminal nos indican que:

$$\begin{aligned}
x_1 \quad & +x_4+\tfrac{1}{2}s_1+s_2+3s_3 &= 1\\
3x_1+x_2 \quad & +\tfrac{1}{4}s_1+\tfrac{1}{3}s_2 &= 2\\
x_3 \quad & +s_2+5s_3 &= 3\\
4x_2 \quad & +3s_1+2s_3+s_4 &= 3
\end{aligned}$$

Como $x_1 = s_1 = s_2 = s_3 = 0$, las ecuaciones se convierten en:

$x_4 = 2 \quad x_2 = 3 \quad x_3 = 1 \quad s_4 = 3$.

**Ejemplo:**

Maximizar $Z = 10x_1 + 3x_2$

s.a

$$x_1 + x_2 \leq 130$$
$$2.5x_1 + x_2 \leq 250$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Solución

Elaboramos la tabla inicial

| $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 130 | $s_1$ |
| 2,5 | 1 | 0 | 1 | 250 | $s_2$ |
| 10 | 3 | 0 | 0 | $f$ | |

Hallamos el pivote

$$\frac{130}{1} = 130 \qquad \frac{2,5}{250} = 100$$

Como vemos el pivote es el que arroja el menor cociente, en este caso es 100. El pivote es 2,5.

Ahora necesitamos volver el pivote 1 por tanto dividimos toda la fila por 2,5, para obtener:

| $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 130 | $s_1$ |
| ① | 0.4 | 0 | 0.4 | 100 | $s_2$ |
| 10 | 3 | 0 | 0 | $f$ | |

Por debajo y por encima del elemento encerrado en el círculo debemos conseguir ceros para ello realizamos las operaciones escritas enseguida de la tabla.

| $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 130 | $s_1$ | |
| ① | 0.4 | 0 | 0.4 | 100 | $s_2$ | $f_1 - f_2$<br>$f_3 - 10\ f_2$ |
| 10 | 3 | 0 | 0 | $f$ | | |

Obtenemos:

| $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.6 | 1 | -0.4 | 30 | $s_1$ |
| ① | 0.4 | 0 | 0.4 | 100 | $x_1$ |
| 0 | -1 | 0 | -4 | $f-100$ | |

Sale $s_1$ y entra como nueva variable básica $x_1$.

Como todos los indicadores son negativos y cero, hemos encontrado la solución.

Z es máxima en $x_1 = 100,\ \ x_2 = 0$ y $f = 1000$.

Por tanto Z aumento desde (0,0) hasta (100,0).

**Ejemplo:**

Maximizar $Z = 10x_1 + 15x_2$

s.a

$10x_1 + 20x_2 \leq 4000$

$5x_1 \quad + 5x_2 \quad \leq 1500$

$4x_1 \quad + 2x_2 \quad \leq 800$

$x_1, x_2 \geq 0$

Solución

Escribimos el diagrama de Simplex inicial

| $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 20 | 1 | 0 | 0 | 4000 | $s_1$ |
| 5 | 5 | 0 | 1 | 0 | 1500 | $s_2$ |
| 4 | 2 | 0 | 0 | 1 | 800 | $s_3$ |
| 10 | 15 | 0 | 0 | 0 | $f$ | |

Ahora hallamos el pivote, como podemos hacerlo por cualquier columna, hagamoslo por la segunda.

$$\frac{4000}{20} = 200 \qquad \frac{1500}{5} = 300 \qquad \frac{800}{2} = 400$$

El menor cociente es el primero por tanto el pivote es 20.
Dividimos toda la fila entre 20.

| $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.5 | 1 | 0.05 | 0 | 0 | 200 | $s_1$ | $(1/20)f_1$ |
| 5 | 5 | 0 | 1 | 0 | 1500 | $s_2$ | |
| 4 | 2 | 0 | 0 | 1 | 800 | $s_3$ | |
| 10 | 15 | 0 | 0 | 0 | $f$ | | |

Debemos volver cero todos los elementos, por debajo del elemento encerrado en el círculo (pivote).

| $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.5 | 1 | 0.05 | 0 | 0 | 200 | $s_1$ |
| 5 | 5 | 0 | 1 | 0 | 1500 | $s_2$ |
| 4 | 2 | 0 | 0 | 1 | 800 | $s_3$ |
| 10 | 15 | 0 | 0 | 0 | $f$ | |

$f_2 - 5f_1$
$f_3 - 2f_1$
$f_4 - 15f_1$

| $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.5 | 1 | 0.05 | 0 | 0 | 200 | $x_1$ |
| 2,5 | 0 | -0,025 | -4 | -5 | 500 | $s_2$ |
| 3 | 0 | -0,1 | 0 | 1 | 400 | $s_3$ |
| 2,5 | 0 | -0,75 | 0 | 0 | $f-3000$ | |

Sale $s_1$ y entra $x_1$.

Pivoteamos en la primera columna.

$$\frac{200}{0.5} = 400 \quad \frac{500}{2.5} = 200 \quad \frac{400}{3} = 133{,}34$$

El pivote es 3.

Realizando operaciones, obtenemos

| $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0,065 | 0 | -0,17 | 133,33 | $x_2$ |
| 0 | 0 | 0,05 | -4 | -5,85 | 333,325 | $s_2$ |
| 1 | 0 | -0.03 | 0 | 0.34 | 133.33 | $x_1$ |
| 0 | 0 | | 0 | | $f-3333{,}325$ | |

Sale $s_3$ y entra $x_1$. Por tanto Z alcanza un máximo en:

$x_1 = 133{,}33 \quad x_2 = 133{,}33$ y $Z = 3333{,}325.$

Como las variables no básicas son positivas, la solución es única.

**Ejemplo:**

Una empresa vende, un reproductor de música y telefonía celular a través de agentes vendedores, mediante visitas de ventas a tres tipos de clientes: minoristas, mayoristas e industriales. Por cada visita a un cliente minorista obtiene $US 200, 500 a un mayorista y $US 1000 a un Industrial de ingreso por venta.

En este mes se dispone de 3200 horas de los agentes vendedores para efectuar las visitas y de $US 1000 de viáticos.

La administración no permite que más del 20% del tiempo de visitas de ventas, sea dedicado a minoristas, 30% para mayoristas.

Para visita a un cliente minorista se utilizan 5 horas,8 horas para un mayorista y 11 para un industrial.

Los gastos de viáticos para cada visita a clientes minoristas son $US 10 minorista, $US 14 mayorista y $US35 industrial.

Se pide maximizar los ingresos de ventas.

Solución

Primero debemos dar nombre a las variables que vamos a utilizar:

$x_1 = \text{Visita a clientes minoristas}$

$\text{x}_2 = \text{Visitas a clientes mayoristas}$

$x_3 = \text{Visita a clientes Industriales}$

Función Objetivo

Maximar: $200x_1 + 500x_2 + 1000x_3$

s.a

$5x_1 + 8x_2 + 11x_3 \leq 3200$ Disponibilidad en horas de visitas

$10x_1 + 14x_2 + 35x_3 \leq 1000$ Disponibilidad ilimitada por visitas

$5x_1 \leq 640$ Requerimiento del más del 20%

$35x_3 \leq 3000$ Requerimiento del más del 30%

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$ Condiciónes de no negatividad

**Ejercicio:**

Elaborar la tabla de Simplex y resolver.

# SOLUCIÓN DE PROBLEMAS MEDIANTE WIN QSB

El programa WIN QSB es una opción importante para resolver problemas de programación Lineal. Veamos su manejo:

En la opción Nuevo Problema (New Problem) genera una plantilla en la cual se introducirán las características del problema:

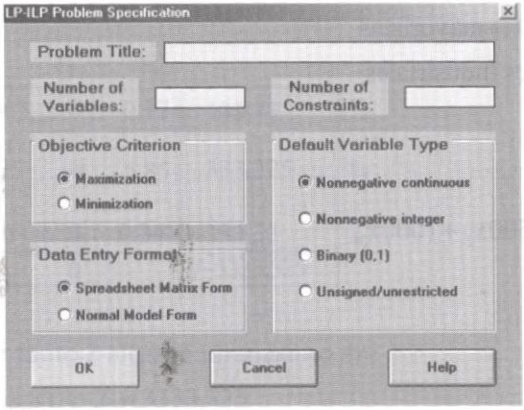



Figura 66

Veamos que indica cada casilla:

- Problem Title(Titulo del Problema): escribimos el titulo del problema

- Number of Variables(Número de variables): Se escribe la cantidad de variables con que cuenta el modelo matemático.

- Number of Contrainsts(Número de restricciones): escribimos el número de restricciones con que cuenta el modelo(Excepto la de no negatividad)

- Objetive criterion(Ojetivo): En los problemas de programación lineal se puede dar la maximización o minimización.

- Data Entry Format(Formato de Entrada de Datos) Permite elegir entre dos plantillas distintas para introducir los datos del modelo. La primera alternativa se asemeja a una hoja de cálculo, mientras que la segunda, es una plantilla diseñada especialmente para este fin.

- Default Variable Type(Tipo de Variable): Aquí se indica las características del modelo:

  a) (Nonnegative Continuos(Continuas no negativas): Indica que el modelo lo componen variables continuas no negativas(iguales o mayores a cero)

  b) Nonnegative Integrer(Enteras no negativas: Variables enteras no negativas

  c) Binary(Binarias): variables cuyo valor será o o 1.

  d) Unsigned/ undestricted(Sin asignar/Irrestrictas): Variables irrestrictas.

**Ejemplo:**

La compañía Dulce S.A productora de chocolates, quiere saber la cantidad de Chocolatinas tipo I, II y III a producir, para así maximizar la utilidad. El departamento de finanzas indica que cada unidad que se vende genera un ganancia de $ UM 150, $UM 210 y $UM 130 por unidad respectivamente.

Para el análisis de estos datos cada producto debe pasar por tres departamentos de trabajo, buscando con ello restringir la cantidad de unidades producidas debido al tiempo disponible en cada departamento. La tabla dada a continuación muestra el tiempo que se requiere por unidad de cada producto en cada departamento y el tiempo disponible por semana (tiempo en minutos)

| | Tiempo requerido Departamento 1 | Tiempo requerido Departamento 2 | Tiempo requerido Departamento 3 |
|---|---|---|---|
| Chocolatina I | 10 | 12 | 8 |
| Chocolatina II | 15 | 17 | 9 |
| Chocolatina III | 7 | 7 | 8 |
| Tiempo disponible por departamento | 3300 | 3500 | 2900 |

CREACIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO

Sea:

$x_1$: *Chocolatina tipo I*
$x_2$: *Chocolatina tipo II*
$x_3$: *Chocolatina tipo III*

$$F.O: Máx\ f=150x_1+210x_2+130x_3$$

Restricciones:

$$10x_1+15x_2+7x_3 \leq 3300 \text{ minutos}$$

$$12x_1+17x_2+7x_3 \leq 3500 \text{ minutos}$$

$$8x_1+9x_2+8x_3 \leq 2900 \text{ minutos}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Se trata de un modelo de maximización, nos dirigimos al programa y resolvemos

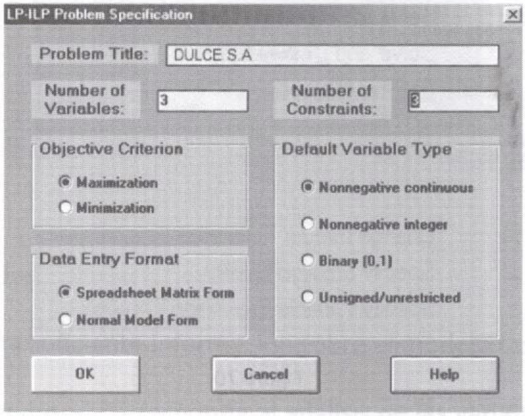



Figura 67

Luego de haber llenado todos los campos pulsamos el botón **OK**, para así, entrar luego más opciones.

Ahora ingresamos el modelo matemático, para ello con (**Spreadsheet Matrix Form**), empezamos a meter las variables, así:

| Variable --> | X1 | X2 | X3 | Direction | R. H. S. |
|---|---|---|---|---|---|
| Maximize | | | | | |
| C1 | | | | <= | |
| C2 | | | | <= | |
| C3 | | | | <= | |
| LowerBound | 0 | 0 | 0 | | |
| UpperBound | M | M | M | | |
| VariableType | Continuous | Continuous | Continuous | | |

Figura 68

Enfrente de la fila Maximize escribimos los coeficientes de las variables que corresponden a la función objetivo.

En las demás filas introducimos los coeficientes de las restricciones:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| C1 | 10 | 15 | 7 | <= | 3300 |
| C2 | 12 | 17 | 7 | <= | 3500 |
| C3 | 8 | 9 | 8 | <= | 2900 |

Figura 69

Teniendo todo esto resolvemos el problema haciendo click en Resolver y analizar(Solve and Analyze).

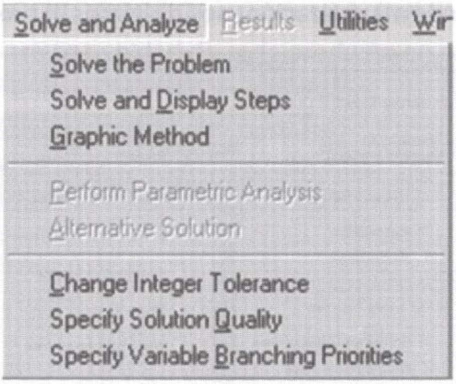



Figura 70

Solve The Problem(resolver el problema): con esta orden el programa resuelve el problema mediante el método de simplex Primal y muestra la solución final completa.

Solve and Display Steps(resolver y mostrar los pasos): con esta orden el programa muestra cada uno de los pasos o las interacciones realizadas por el método de simplex hasta obtener una solución óptima.

Cuando el problema a resolver tiene solo dos variables el programa muestra la solución gráficamente.

Cuando buscamos la solución el programa muestra la siguiente información:

El problema ha sido resuelto. La solución ha sido lograda.

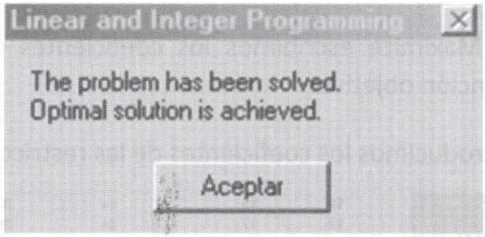



Figura 71

Pulsamos el botón ACEPTAR y automáticamente el programa generará la solución óptima.

| | 17:50:47 | | Thursday | February | 10 | 2005 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Decision Variable | Solution Value | Unit Cost or Profit c(j) | Total Contribution | Reduced Cost | Basis Status | Allowable Min. c(j) | Allowable Max. c(j) |
| 1 | X1 | 0 | 150.0000 | 0 | -14.9315 | at bound | -M | 164.9315 |
| 2 | X2 | 105.4795 | 210.0000 | 22,150.6900 | 0 | basic | 182.7500 | 315.7143 |
| 3 | X3 | 243.8356 | 130.0000 | 31,698.6300 | 0 | basic | 91.0714 | 186.6667 |
| | Objective | Function | (Max.) = | 53,849.3200 | | | | |
| | | | | | | | | |
| | Constraint | Left Hand Side | Direction | Right Hand Side | Slack or Surplus | Shadow Price | Allowable Min. RHS | Allowable Max. RHS |
| 1 | C1 | 3,289.0410 | <= | 3,300.0000 | 10.9589 | 0 | 3,289.0410 | M |
| 2 | C2 | 3,500.0000 | <= | 3,500.0000 | 0 | 6.9863 | 2,537.5000 | 3,514.0350 |
| 3 | C3 | 2,900.0000 | <= | 2,900.0000 | 0 | 10.1370 | 1,852.9410 | 2,957.1430 |

Figura 72

Análisis de resultados

Esta matriz presenta suficiente información sobre el modelo resuelto. La primera parte (***Solution Summary***) corresponde al análisis de las variables definidas (X1,X2 y X3).

| | 17:50:47 | | Thursday | February | 10 | 2005 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Decision Variable | Solution Value | Unit Cost or Profit c(j) | Total Contribution | Reduced Cost | Basis Status | Allowable Min. c(j) | Allowable Max. c(j) |
| 1 | X1 | 0 | 150.0000 | 0 | -14.9315 | at bound | -M | 164.9315 |
| 2 | X2 | 105.4795 | 210.0000 | 22,150.6900 | 0 | basic | 182.7500 | 315.7143 |
| 3 | X3 | 243.8356 | 130.0000 | 31,698.6300 | 0 | basic | 91.0714 | 186.6667 |
| | Objective | Function | (Max.) = | 53,849.3200 | | | | |

Figura 73

La columna ***Valores de la solución*** (***Solution Value***) presenta los valores óptimos encontrados. En este ejemplo se tiene que X1 es 0 unidades, X2 es 105,4795 unidades y X3 es 243,8356 unidades.

La columna ***Costo o Utilidad Unitaria*** (***Unit osto r Profit***) muestra los coeficientes de la función objetivo para cada variable.

La columna ***Contribución Total*** (***Total Contribution***) representa el costo o utilidad generado por cada variable. Por ejemplo, si el valor de la variable X2 es 105,4795 unidades y la utilidad unitaria es $210, el beneficio total resultará de la multiplicación de ambos valores dando como resultado $22.150,69. Justo debajo de la última contribución aparece el valor de Z óptimo ($53.849,32).

La columna ***Costo Reducido*** (***Reduced Cost***) identifica el costo que genera incrementar una unidad para cada variable no básica. La siguiente columna llamada ***Estatus de la Variable*** (***Basis Status***) muestra si una variable es básica (***Basic***) o no (***at bound***).

La siguiente parte de la matriz final (***Constraint Summary***), presenta las variables de holgura del sistema (C1, C2, C3).

| | Constraint | Left Hand Side | Direction | Right Hand Side | Slack or Surplus | Shadow Price | Allowable Min. RHS | Allowable Max. RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | C1 | 3.289.0410 | <= | 3.300.0000 | 10.9589 | 0 | 3.289.0410 | M |
| 2 | C2 | 3.500.0000 | <= | 3.500.0000 | 0 | 6.9863 | 2.537.5000 | 3.514.0350 |
| 3 | C3 | 2.900.0000 | <= | 2.900.0000 | 0 | 10.1370 | 1.852.9410 | 2.957.1430 |

Figura 74

La columna ***Lado de la mano derecha*** (***Left Hand Side***) muestra el valor alcanzado al reemplazar los valores de X1, X2 y X3 en cada restricción (recuerde que cada restricción se identifica con su variable de holgura).

Las dos columnas siguientes (***Direction*** y ***Right Hand Side***) muestran las especificaciones dadas a las restricciones en cuanto al operador de relación (≤) y los valores originales de las restricciones (3.300, 3.500 y 2.900 minutos).

La columna ***Déficit o Superávit*** (***Slack or Surplus***) muestran los valores de lasvariables de holgura y la columna ***Precios Sombras*** (***Shadow Price***) corresponde a los precios sombras; cuánto se estaría dispuesto a pagar por una unidad adicional de cada recurso.

Tabla de Simplex Final

**WINQSB** permite mostrar los resultados óptimos mediante el formato aplicado por el método Simplex. Para mostrar este formato deberá, una vez resuelto el problema, seleccionar en el menú ***Resultados*** (***Results***) la opción ***Tabla final del Simplex*** (***Final Simplex Tableau***).

| | | X1 | X2 | X3 | Slack_C1 | Slack_C2 | Slack_C3 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Basis | C(j) | 150.0000 | 210.0000 | 130.0000 | 0 | 0 | 0 | R. H. S. | Ratio |
| Slack_C1 | 0 | -0.9041 | 0.0000 | 0.0000 | 1.0000 | -0.7808 | -0.1918 | 10.9589 | |
| X2 | 210.0000 | 0.5479 | 1.0000 | 0.0000 | 0 | 0.1096 | -0.0959 | 105.4795 | |
| X3 | 130.0000 | 0.3836 | 0.0000 | 1.0000 | 0 | -0.1233 | 0.2329 | 243.8356 | |
| | C(j)-Z(j) | -14.9315 | 0 | 0 | 0 | -6.9863 | -10.1370 | 53,849.3200 | |

Figura 75

Simplex Paso a Paso

Regrese nuevamente a la plantilla correspondiente al modelo inicial

(sin solucionar). Procederemos a marcar la opción ***Resolver y mostrar los pasos*** (***Solve and Display Steps***).

La primera tabla corresponde a la tabla inicial del Simplex:

| | | X1 | X2 | X3 | Slack_C1 | Slack_C2 | Slack_C3 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Basis | C(j) | 150.0000 | 210.0000 | 130.0000 | 0 | 0 | 0 | R. H. S. | Ratio |
| Slack_C1 | 0 | 10.0000 | 15.0000 | 7.0000 | 1.0000 | 0 | 0 | 3,300.0000 | 220.0000 |
| Slack_C2 | 0 | 12.0000 | 17.0000 | 7.0000 | 0 | 1.0000 | 0 | 3,500.0000 | 205.8824 |
| Slack_C3 | 0 | 8.0000 | 9.0000 | 8.0000 | 0 | 0 | 1.0000 | 2,900.0000 | 322.2222 |
| | C(j)-Z(j) | 150.0000 | 210.0000 | 130.0000 | 0 | 0 | 0 | 0 | |

Figura 76

**WINQSB** cuenta con opciones de navegación para pasar de una tabla a otra (este menú se llama ***Simplex Iteration***) hasta encontrar la solución óptima:

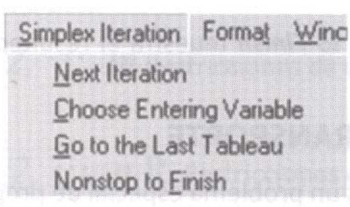



Figura 77

Al pulsar sobre la opción ***Próxima Interacción*** (***Next Iteration***) se avanza a la

siguiente tabla del Simplex.

| | | X1 | X2 | X3 | Slack_C1 | Slack_C2 | Slack_C3 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Basis | C(j) | 150.0000 | 210.0000 | 130.0000 | 0 | 0 | 0 | R. H. S. | Ratio |
| Slack_C1 | 0 | -0.5882 | 0 | 0.8235 | 1.0000 | -0.8824 | 0 | 211.7647 | 257.1429 |
| X2 | 210.0000 | 0.7059 | 1.0000 | 0.4118 | 0 | 0.0588 | 0 | 205.8824 | 500.0000 |
| Slack_C3 | 0 | 1.6471 | 0 | 4.2941 | 0 | -0.5294 | 1.0000 | 1,047.0590 | 243.8356 |
| | C(j)-Z(j) | 1.7647 | 0 | 43.5294 | 0 | -12.3529 | 0 | 43,235.2900 | |

Figura 78

La opción ***Escoger variable de entrada*** (***Choose Entering Variable***) permite seleccionar la variable que entra al sistema de forma manual:

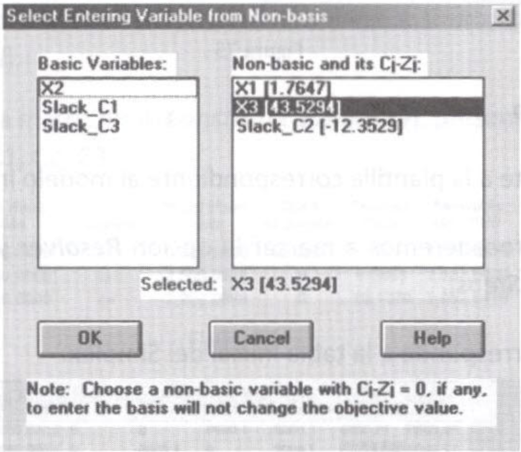



Figura 79

Debe pulsar sobre la variable no básica que desee que entre (en este caso se muestra a X1, X3 y C2 como no básicas). Para mostrar la última tabla del Simplex directamente podrá optar por seleccionar la opción llamada ***Ir a la última tabla*** (***Go To The Last Tableau***).

La última opción ***Nonstop to Finish*** muestra el resultado final completo (junto al análisis de sensibilidad).

## EL PROBLEMA DEL TRANSPORTE

El modelo de transporte es un problema especial de programación Lineal, que sirve como aplicación para la planeación de distribución de bienes y servicios desde ciertos lugares donde se suministra, hacia varios destinos.

El modelo de transporte tiene como objetivo minimizar el costo total de transportar ciertos artículos desde algunos orígenes a varios destinos, con la consideración que la oferta es limitada en los orígenes, y se debe satisfacer la demanda en los lugares destino.

Aquí lo haremos con el programa Win QSB pues facilita una mejor solución y más efectiva que a lápiz.

## MODELO GENERALIZADO DEL TRNSPORTE

Vamos a suponer que tenemos *m* orígenes con *n* orígenes, por tanto tenemos:

$x_{ij}$: Número de unidades distribuidas del origen i al destino j.

$cij$: Contribución a la función objetivo al distribuir una unidad del origen *i* al destino *j*.

$s_{ij}$: Número de unidades disponibles en el origen *i*.

$d_j$: Número de unidades de demanda del destino *j*.

*m:* Número de orígenes

*n:* Número de destinos.

*i:* Índice de orígenes

*j:* Índice de destinos

El modelo queda así:

$Minimizar: \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$ Función Objetivo

Sujeto a (s.a)

$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} x \leq si, \quad i = 1,2, \cdots, m$ Restricciones de oferta

$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j, \quad j = 1,2, \cdots, n \, \mathrm{R}$ Restricciones de demanda.

$x_{ij} \geq 0$ Para toda *i* y para toda *j*.

Ejemplo

Una compañía de equipos para oficina se aplica el modelo de transporte para tres plantas y cuatro distribuidoras.

En la tabla dada a continuación se muestran las tres(3) plantas que están en las ciudades de Pereira, Manizales y Armenia y la capacidad de producción de cada una.

| Origen | 1 | 2 | 3 | Oferta total |
|---|---|---|---|---|
| Planta | Pereira | Manizales | Armenia | |
| Capacidad de producción Unidades | 100 | 150 | 130 | 380 |

Figura 80

La compañía distribuye los equipos para oficina a través de cuatro centros de distribución que son las siguientes ciudades: Calí, Medellín, Bogotá y Barranquilla

De acuerdo a una proyección la demanda es la siguiente:

| Destino | 1 | 2 | 3 | 4 | Demanda Total |
|---|---|---|---|---|---|
| Centro de distribución | Cali | Medellín | Bogotá | Barranquilla | |
| Demanda | 45 | 115 | 170 | 50 | 380 |

Figura 81

Los costos por unidad, de transportar los equipos de los tres orígenes a los cuatro destinos se presentan en la tabla siguiente:

| | | Destinos | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Orígenes | | Cali | Medellín | Bogotá | Barranquilla |
| 1 | Pereira | 2 | 1 | 5 | 4 |
| 2 | Manizales | 7 | 4 | 1 | 7 |
| 3 | Armenia | 3 | 3 | 9 | 6 |

Figura 82

La compañía tiene como objetivo determinar la cantidad de equipos de oficina que deben enviar por cada ruta, para minimizar el costo total de transportarlos, de tal manera que se satisfaga la demanda proyectada.

Solución:

Mediante un gráfico podemos plantear lo escrito:

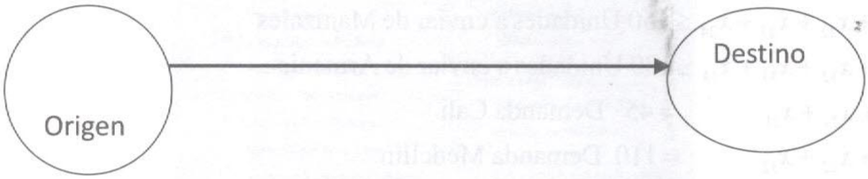



Figura 83

Para nuestro caso tenemos:

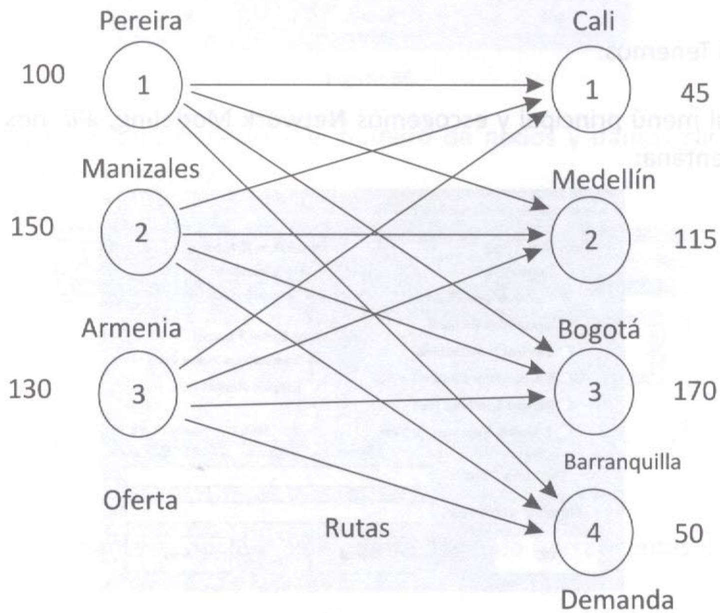



Figura 84

Ahora planteamos el problema y lo introducimos en el Win QSB

Minimizar:

$$C = 2x_{11} + x_{12} + 5x_{13} + 4x_{14} + 7x_{21} + 4x_{22} + x_{23} + 7x_{24} + 3x_{31} + 3x_{32} + 9x_{33} + 6x_{34}$$

s.a

$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 100$ Unidades a enviar de Pereira

$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 150$ Unidades a enviar de Manizales

$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 130$ Unidades a enviar de Armenia

$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 45$ Demanda Cali

$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 110$ Demanda Medellín

$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 170$ Demanda Bogotá

$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 50$ Demanda Barranquilla

En WinQSB Tenemos:

Entramos al menú principal y escogemos **Network Modeling,** allí nos aparece la siguiente ventana:

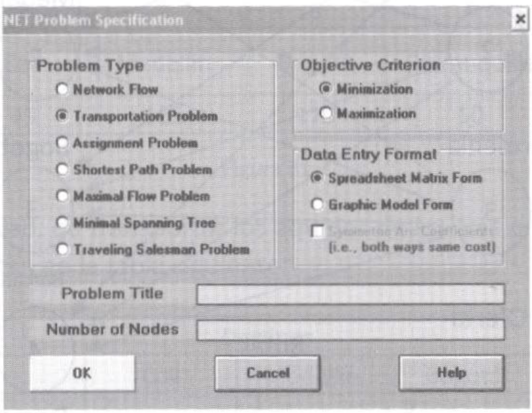



Figura 85

En esta pción seleccionamos mediante un clic Transportation Problem.

Llenamos los campos y así nos queda la ventana:

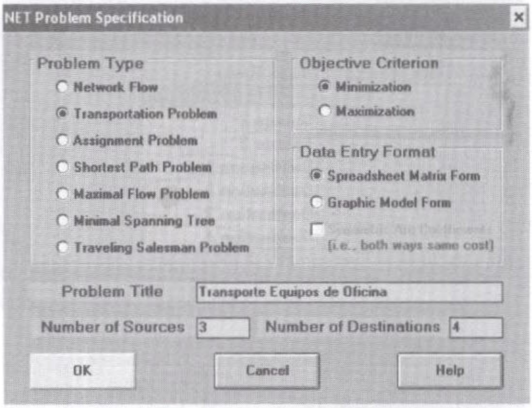



Figura 86

Damos el nombre del problema y el número de nodos y damos clic en OK nos aparece la siguiente ventana:

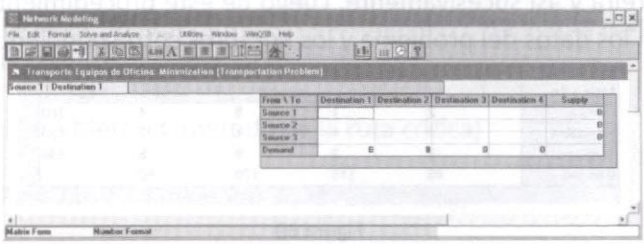



Figura 87

La editamos mediante la opción "Edit" de la barra de herramientas y estando allí seleccionamos la opción **Node Names** y aparece la ventana:

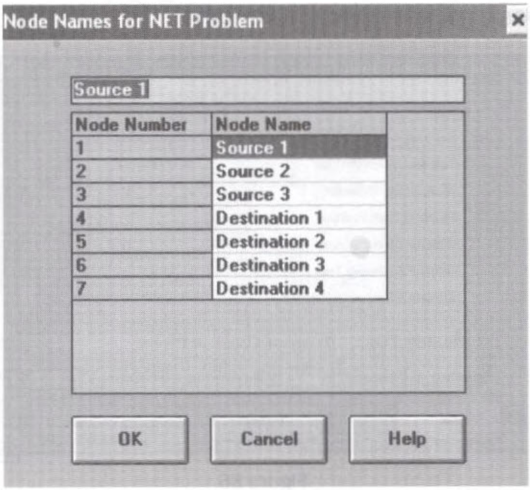



Figura 88

Aquí le damos los nombres correspondientes los "source", ejemplo a la 1 le colocamos Pereira y así sucesivamente. Luego de este procedimiento nos aparece la ventana con los datos del problema y los nombres correspondientes:

| From \ To | Cali | Medellín | Bogotá | Barranquilla | Supply |
|---|---|---|---|---|---|
| Pereira | 2 | 1 | 5 | 4 | 100 |
| Manizales | 7 | 4 | 1 | 7 | 150 |
| Armenia | 3 | 3 | 9 | 6 | 130 |
| Demand | 45 | 115 | 170 | 50 | |

Figura 89

Ahora seleccionamos del menú la opción: **"Solve and Analize"** y nos muestra la ventana:

| 05-22-2010 | From | To | Shipment | Unit Cost | Total Cost | Reduced Cost |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Pereira | Medellín | 80 | 1 | 80 | 0 |
| 2 | Pereira | Bogotá | 20 | 5 | 100 | 0 |
| 3 | Manizales | Bogotá | 150 | 1 | 150 | 0 |
| 4 | Armenia | Cali | 45 | 3 | 135 | 0 |
| 5 | Armenia | Medellín | 35 | 3 | 105 | 0 |
| 6 | Armenia | Barranquilla | 50 | 6 | 300 | 0 |
| | Total | Objective | Function | Value = | 870 | |

Figura 90

La solución gráfica la obtenemos seleccionando del Manu barra de herramientas **Results** y luego clic en **Graphic Solution** y obtenemos:

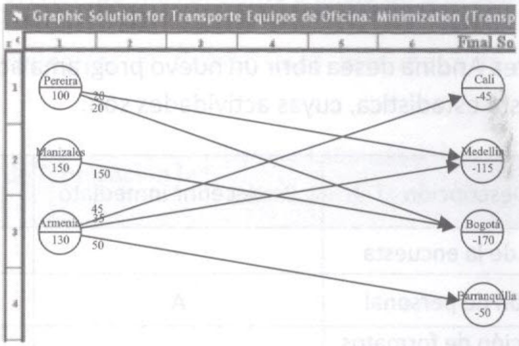



Figura 91

La solución nos muestra que el mínimo valor es 870 .

Veamos ahora un ejemplo de PERT/CPM

En nuestro tiempo es necesario en las licitaciones mostrar la ruta crítica del tiempo en el cual se va a desarrollar un trabajo determinado. Para ello se recurre al modelo PERT/CPM. Que traduce lo siguiente:

PERT: Program Path Method (método de la ruta crítica)

CPM : Critical Path Method (Método de la ruta crítica)

Cuando se realiza un proyecto se debe tener en cuenta:

Tiempo de finalización del proyecto

Fecha de inicio y finalización de cada actividad

Costo del Proyecto

Costo de realización de cada actividad

Recursos indispensables para realizar una actividad.

Desarrollaremos un ejemplo utilizando el programa Win QSB pues nos da una solución rápida y además nos permite hacer simulación(Análisis de sensibilidad).

**Ejemplo:**

La universidad del Área Andina desea abrir un nuevo programa académico, para ello se realiza una encuesta estadística, cuyas actividades son:

| Actividad | Descripción | Predecedor inmediato | Tiempo Estimado(días) |
|---|---|---|---|
| A | Diseño de la encuesta | - | 9 |
| B | Selección de personal | A | 3 |
| C | Realización de formatos De la encuesta | A | 4 |
| D | Selección de Colegios A encuestar | A | 5 |
| E | Capacitación de personal | B | 6 |
| | | | |
| F | Revisión de Formatos | C | 4 |
| G | Aplicar encuesta | E-F-D | 7 |

Figura 92

La red para el proyecto es la siguiente:

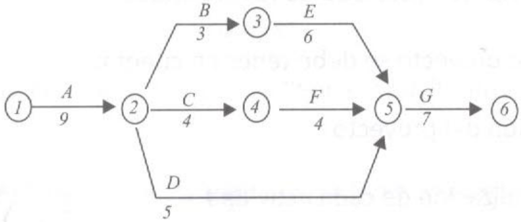



Figura 93

A es el inicio de la actividad y cada arco es la llegada de la actividad.

Tiempos utilizados:

PI : Próximo a iniciar(Tiempo más próximo a inicio de una actividad)

PT: Próximo a terminar(es el tiempo más próximo a la terminación de una actividad)

$$(\text{Tiempo Próximo de Terminación}) = \begin{pmatrix}\text{Tiempo Estimado de la}\\ \text{realización de la actividad}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Tiempo próximo}\\ \text{de iniciación}\end{pmatrix}$$

$$PT_i = t_i + PI_i$$

Holgura

Recordemos que una holgura se obtiene como la diferencia entre el tiempo lejano de iniciación y el tiempo próximo de iniciación, o , como la diferencia entre el tiempo lejano de terminación y el tiempo próximo de terminación de la actividad.

$$H = LI - PI$$
$$H = LT - PT$$

(LI = Lejano de iniciación, LT = lejano de terminación)

Podemos interpretar la holgura como el lapso de tiempo adicional que se puede demorar una actividad sin que por ello se altere el tiempo de terminación del proyecto.

Vamos a resolver el problema utilizando el programa Win QSB

Ruta Crítica

Son las actividades que tienen holgura cero. Esta información es fundamental para el administrador pues, una demora en alguna actividad implica que el tiempo de terminación se altere.

La solución en Win QSB es la siguiente:

Entramos al programa y en el menú seleccionamos PERT_CPM

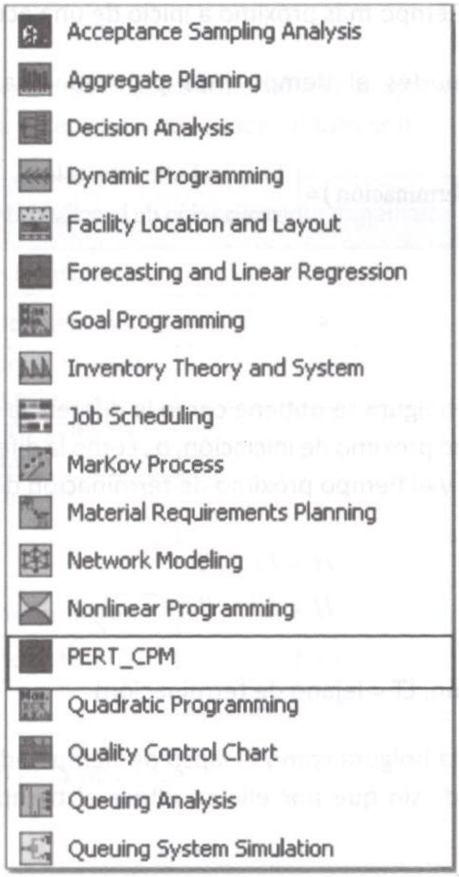
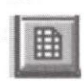



Figura 94

Luego de costumbre ingresamos por  y obtenemos la siguiente ventana de dialogo:

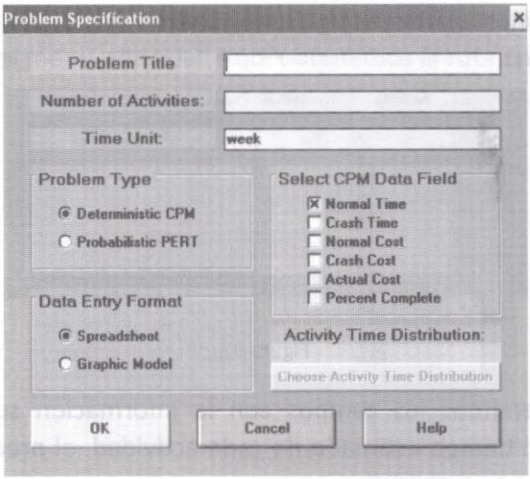



Figura 95

En esta colocamos el nombre, número de actividades, unidad de tiempo(Time Unit) Problem Type tipo de problema determinístico.

Spreadsheet: permite escribir los datos en una hoja de cálculo.

Para nuestro caso esta ventana queda:

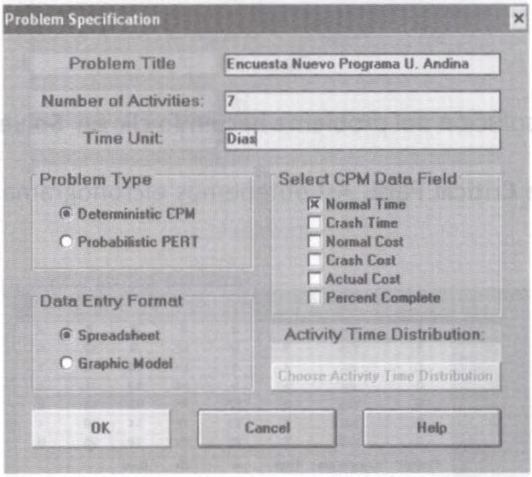



Figura 96

Luego clic en **OK** y nos aparece el siguiente cuadro

| Activity Number | Activity Name | Immediate Predecessor (list number/name, separated by ',') | Normal Time |
|---|---|---|---|
| 1 | A | | |
| 2 | B | | |
| 3 | C | | |
| 4 | D | | |
| 5 | E | | |
| 6 | F | | |
| 7 | G | | |

Figura 97

En este cuadro llenamos los campos con la información suministrada por el problema, es decir: tiempo estimado de cada actividad, el predecesor inmediato, se utilizan las comas para separar.

| Activity Number | Activity Name | Immediate Predecessor (list number/name, separated by ',') | Normal Time |
|---|---|---|---|
| 1 | A | | 9 |
| 2 | B | A | 3 |
| 3 | C | A | 4 |
| 4 | D | A | 5 |
| 5 | E | B | 6 |
| 6 | F | C | 4 |
| 7 | G | E,F,D | 7 |

Figura 98

Ahora hallamos la solución del problema haciendo clic en **Solve and Analyze**

Luego clic en **Solve Critical Path.** Así obtenemos elcronograma de actividades del proyecto.

| 05-24-2010 13:35:24 | Activity Name | On Critical Path | Activity Time | Earliest Start | Earliest Finish | Latest Start | Latest Finish | Slack (LS-ES) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | A | Yes | 9 | 0 | 9 | 0 | 9 | 0 |
| 2 | B | Yes | 3 | 9 | 12 | 9 | 12 | 0 |
| 3 | C | no | 4 | 9 | 13 | 10 | 14 | 1 |
| 4 | D | no | 5 | 9 | 14 | 13 | 18 | 4 |
| 5 | E | Yes | 6 | 12 | 18 | 12 | 18 | 0 |
| 6 | F | no | 4 | 13 | 17 | 14 | 18 | 1 |
| 7 | G | Yes | 7 | 18 | 25 | 18 | 25 | 0 |
| | Project | Completion | Time | = | 25 | Dias | | |
| | Number of | Critical | Path(s) | = | 1 | | | |

Figura 99

Ahora si deseamos la gráfica(red del problema) hacemos clic en **Results** en la barra de herramientas del menú principal. Aquí obtenemos la ruta crítica del problema.

| 05-24-2010 | Critical Path 1 |
|---|---|
| 1 | A |
| 2 | B |
| 3 | E |
| 4 | G |
| Completion Time | 25 |

Figura 100

La red del problema es(ruta crítica)

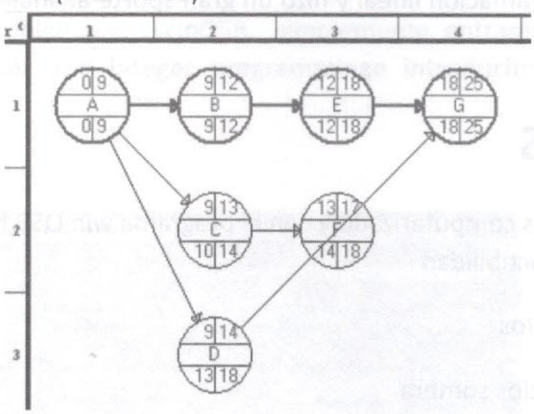



Figura 101

**El tiempo de terminación es de 25 días.**

# ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD con Win QSB(OPCIONAL)

Fue JOHN VON NEUMANN(1903-1957), matemático norteamericano, nacido en el país de Hungría, quien desarrollo la teoría de juegos. Neumann desarrollo teorías sobre programación lineal y hizo un gran sporte al análisis matemático por computadora.

# OBJETIVOS

Mediante el análisis computarizado y con el programa win QSB hallar los intervalos de optimalidad y factibilidad

Calcular los intervalos

Interpretar los precios sombra

Analizar los cambios en los coeficientes de la función objetivo.

Obtener el problema dual a partir del primal

Mostrar la importancia del problema dual en negocios.

Veamos los siguientes conceptos:

**Intervalo Optimalidad:** Es el intervalo de variabilidad de un coeficiente de la función objetivo.

**Intervalo de Factibilidad:** Intervalo de variabilidad de un lado derecho de una restricción.

**Precio sombra:** Cambio en el valor de la función objetivo por un aumento en el valor unitario en el valor del lado derecho de una restricción.

**Ejemplo:**

Consideremos el siguiente modelo:

Sujeto a(s.a):

$$
\begin{aligned}
&\textit{Macimizar:}\;\; U = 6x_1 + 5x_2 \\
&x_1 + x_2 \le 70 \\
&2x_1 + 3x_2 \le 210 \\
&3x_1 + 2x_2 \le 220 \\
&x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

Para resolver el problema en WinQSB simplemente entramos al programa y seleccionamos **Linear and integer programminge introducimos los datos del problema.**

Paso 1

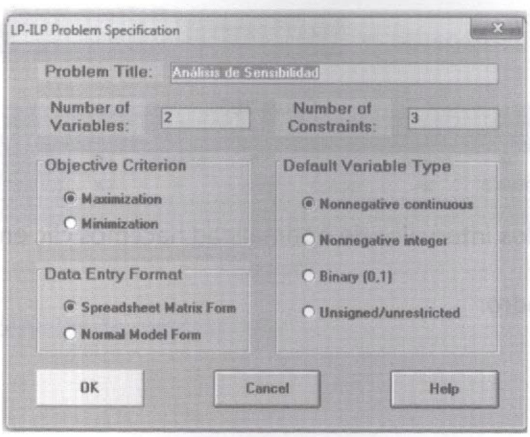



Figura 102



Paso 2

Luego hacemos clic en OK Introducimos los coeficientes de la función objetivo y las restricciones.

| Variable --> | X1 | X2 | Direction | R. H. S. |
|---|---|---|---|---|
| Maximize | 6 | 5 | | |
| C1 | 1 | 1 | <= | 70 |
| C2 | 2 | 3 | <= | 210 |
| C3 | 3 | 2 | <= | 220 |
| LowerBound | 0 | 0 | | |
| UpperBound | M | M | | |
| VariableType | Continuous | Continuous | | |

Figura 103

Resolvemos el problema(Solve and Analyze)

Intervalos de Optimalidad

| | 21:15:09 | | Monday | May | 24 | 2010 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Decision Variable | Solution Value | Unit Cost or Profit c(j) | Total Contribution | Reduced Cost | Basis Status | Allowable Min. c(j) | Allowable Max. c(j) |
| 1 | X1 | 70,0000 | 6,0000 | 420,0000 | 0 | basic | 5,0000 | M |
| 2 | X2 | 0 | 5,0000 | 0 | -1,0000 | at bound | -M | 6,0000 |
| | Objective | Function | (Max.) = | 420,0000 | | | | |
| | Constraint | Left Hand Side | Direction | Right Hand Side | Slack or Surplus | Shadow Price | Allowable Min. RHS | Allowable Max. RHS |
| 1 | C1 | 70,0000 | <= | 70,0000 | 0 | 6,0000 | 0 | 73,3333 |
| 2 | C2 | 140,0000 | <= | 210,0000 | 70,0000 | 0 | 140,0000 | M |
| 3 | C3 | 210,0000 | <= | 220,0000 | 10,0000 | 0 | 210,0000 | M |

Intervalos de factibilidad

Figura 105

Paso 3

Para observar solo los intervalos de optimalidad hacemos clic en **Results**

y obtenemos el cuadro:

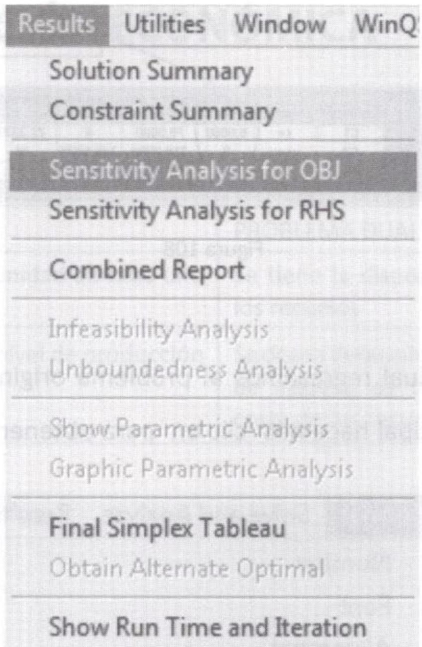



Figura 106

Seleccionamos Sensitivity Analysis for OBJ y obtenemos los intervalos de optimalidad.

| 05-24-2010 21:28:17 | Decision Variable | Solution Value | Reduced Cost | Unit Cost or Profit C(j) | Allowable Min. C(j) | Allowable Max. C(j) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | X1 | 70,0000 | 0 | 6,0000 | 5,0000 | M |
| 2 | X2 | 0 | -1,0000 | 5,0000 | -M | 6,0000 |

Figura 107

Allí tenemos los intervalos de optimalidad.

Para obtener los de factibilidad realizamos la misma rutina solo que seleccionamos Sensitivity Analysis for RHS y obtenemos:

Precio sombra

| 05-24-2010 21:31:21 | Constraint | Direction | Shadow Price | Right Hand Side | Allowable Min. RHS | Allowable Max. RHS |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | C1 | <= | 6,0000 | 70,0000 | 0 | 73,3333 |
| 2 | C2 | <= | 0 | 210,0000 | 140,0000 | M |
| 3 | C3 | <= | 0 | 220,0000 | 210,0000 | M |

Figura 108

Paso 4

Para ver el problema dual regresamos al problema original dando clic en 

Luego en el menú principal hacemos clic en para obtener la ventana de la figura 109.

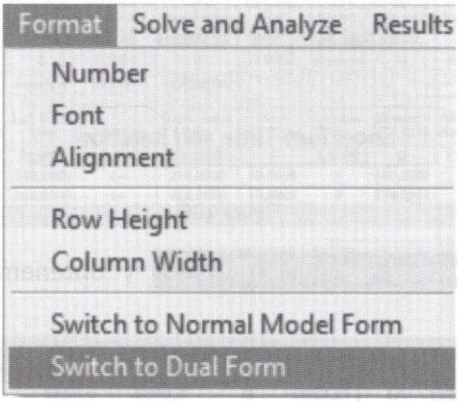



Figura 109

Seleccionamos **Switch to Dual For** y obtenemos la matriz del problema dual.

| Variable --> | C1 | C2 | C3 | Direction | R. H. S. |
|---|---|---|---|---|---|
| Minimize | 70 | 210 | 220 | | |
| X1 | 1 | 2 | 3 | >= | 6 |
| X2 | 1 | 3 | 2 | >= | 5 |
| LowerBound | 0 | 0 | 0 | | |
| UpperBound | M | M | M | | |
| VariableType | Continuous | Continuous | Continuous | | |

Figura 110

Si desamos hacer análisis de sensibilidad con el dual realizamos los pasos anteriores.

# INTERPRETACIÓN ECONÓMICA

La relación del problema primal y su dual es la siguiente

| PARA LELO ENTREL PRIMAL Y EL DUAL | |
|---|---|
| PROBLEMA PRIMAL | PROBLEMA DUAL |
| Se tiene la utilidad por unidad de cada uno de los productos | Se tiene la disponibilidad de cada uno de los recursos |
| Se desea determinar el nivel de producción que maximiza la utilidad | Se desea determinar el valor de cada unidad de insumo, de manera que minimice el costo de los recursos |

# BIBLIOGRAFÍA


1. Williams Gareth, Álgebra lineal con aplicaciones. Editorial McGraw-Hill, México 2002.

2. Kolman B, Álgebra lineal con aplicaciones y MATLAB, 6ª. Edición Editorial Pearson, México 1999.

3. Gerber Harvey, Álgebra lineal., Grupo editorial Iberoamericana, 1992.

4. Nakos George y Joyner David. Álgebra lineal con aplicaciones. Internacional Thomson Editores. México 1999.

5. Lipschutz Seymour, Álgebra lineal. Serie Schaum Editorial McGraw-Hill. México 1984.

6. Winston Wayne L. Investigación de operaciones con algoritmos. Grupo Editorial Ibero América.

7. Hillier Frederick S. y Lieberman Gerald J. Investigación de operaciones. Editorial McGraw-Hill, México 2004

8. Taha. Investigación de operaciones. Editorial Pearson.

9. Grossmann Stanley I. Algebra lineal. 4a. Edición. Editorial McGraw-Hill, México 1996.

10. Davis McKeow. Métodos cuantitativos para administración. Grupo Editorial Ibero América.

Este libro se terminó de imprimir
en el mes de diciembre de 2010
en los Talleres Litográficos
de la Universidad de Caldas
Manizales

$$a = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ e & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 3 & b & 4 \\ e & 5 & 4 \\ 1 & 4 & a \end{bmatrix}$$

$a, b = ?$

$a.b \neq b.a$

**FUNDACIÓN UNIVERSITARIA**
**DEL ÁREA ANDINA**
**SECCIONAL PEREIRA**

ISBN:978-958-99483-4-7
9 789589 948347