CÁLCULO MULTIVARIADO

Autor: Danilo De Jesús Ariza Agámez

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina

MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Cálculo multivariado / Danilo De Jesús Ariza Agámez, / Bogotá D.C.,
Fundación Universitaria del Área Andina. 2017

978-958-5460-25-6

Catalogación en la fuente Fundación Universitaria del Área Andina (Bogotá).

Edición:
Fondo editorial Areandino
Fundación Universitaria del Área Andina
Calle 71 11-14, Bogotá D.C., Colombia
Tel.: (57-1) 7 42 19 64 ext. 1228
E-mail: publicaciones@areandina.edu.co
http://www.areandina.edu.co

Primera edición: noviembre de 2017

Corrección de estilo, diagramación y edición: Dirección Nacional de Operaciones virtuales
Diseño y compilación electrónica: Dirección Nacional de Investigación

Hecho en Colombia
Made in Colombia

CÁLCULO MULTIVARIADO

Autor: Danilo De Jesús Ariza Agámez

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina

MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Índice

Índice

1

Unidad 1

Ecuaciones paramétricas, coordenadas polares y secciones cónicas

Cálculo multivariado

Autor: Danilo de Jesús Ariza Agámez

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina
MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Introducción

A través del desarrollo de la presente cartilla se introduce elementos preliminares, tales como ecuaciones paramétricas, coordenadas polares y secciones cónicas, los que en sí mismos son importantes objetos de estudio y adicionalmente en este curso se hace fundamental su comprensión, bien sea en las cartillas restantes, en los videos presentados como recursos de apoyo, en los ejercicios resueltos presentados en las lecturas complementarias o como requisito para enfrentar los ejercicios de repaso.

Recomendaciones metodológicas

Es claro que el estudiante tiene la total autonomía de desarrollar el estudio de las temáticas de esta semana acudiendo a los recursos en el orden que lo desee, sin embargo creemos que el acercamiento a los temas de ecuaciones paramétricas, coordenadas polares y secciones cónicas, ofrecidos en este curso, se debe buscar inicialmente a través de la cuidadosa lectura de esta cartilla, donde se presenta los conceptos y principios básicos, lo que se puede complementar mediante la visualización de video capsulas y la revisión de los ejercicios resueltos que se presentan en las lecturas complementarias, teniendo siempre como referencia la cartilla misma. Luego de abordar los recursos antes señalados resulta conveniente afrontar los ejercicios de repaso a través de los cuales usted puede validar sus avances en la incorporación de los contenidos a su cúmulo de conocimientos.

Desarrollo temático

Ecuaciones paramétricas, coordenadas polares y secciones cónicas

Cálculo con ecuaciones paramétricas

En cursos de cálculo diferencial y cálculo integral los estudiantes han debido enfrentarse al estudio de principios de cálculo sobre funciones definidas principalmente en sistemas de coordenadas cartesianas, esta primera parte de la cartilla de la Semana 1 extiende algunos de estos principios al caso de expresiones definidas paramétricamente. Iniciamos su estudio presentando los conceptos asociados a ecuaciones paramétricas.

Ecuaciones paramétricas de una curva en el plano

Se sabe que una curva en el plano xy se puede considerar como la trayectoria seguida por una partícula en el plano, es claro que no toda curva plana C está asociada a una función de dos variables, pero si se puede expresar en términos de una tercera variable t mediante dos funciones continúas:

$$x = f(t), \qquad y = g(t) \quad t \in I \quad (1.1)$$

Las ecuaciones dadas en (1.1), que definen parejas (x, y) en términos de un parámetro t que toma valores de un intervalo I, se conocen como ecuaciones paramétricas de la curva C. Frecuentemente se asocia el tiempo con la variable t, en cuyo caso las coordenadas (x, y) de la posición de la partícula en el tiempo t están dadas por la pareja $(f(t), g(t))$.

Un detalle importante es que si es posible eliminar el parámetro de una de las ecuaciones paramétricas, se puede hallar una expresión algebraica que relacione las variables x, y.

Ejemplo 1.1: dibujar la curva definida por las ecuaciones paramétricas:

$$x = t^2, \qquad y = t - 1; \qquad t \in R$$

Solución: Nos valemos de la siguiente tabla de valores de t, x, y en la que asignamos valores arbitrarios a t.

t	-3	-2	-1	0	1	2	3
x	9	4	1	0	1	4	9
y	-4	-3	-2	-1	0	1	2

Tabla 1.1: representación tabular de la curva del ejemplo 1.1
Fuente: Propia.

La tabla muestra que las parejas $(9,-4), (4,-3), (1,-2), \ (0,-1), (1,0), (4,1), (9,2)$ son ejemplos de parejas (x, y) que hacen parte de la curva.

Podemos hallar la expresión algebraica que relaciona las variables x, y eliminando el parámetro t a partir de las ecuaciones paramétricas.

De $y = t - 1$ se tiene $t = y + 1$, al eliminar t en $x = t^2$ se obtiene $x = (y+1)^2$ o $y = \sqrt{x} - 1$. La figura 1 muestra el bosquejo de la representación gráfica.

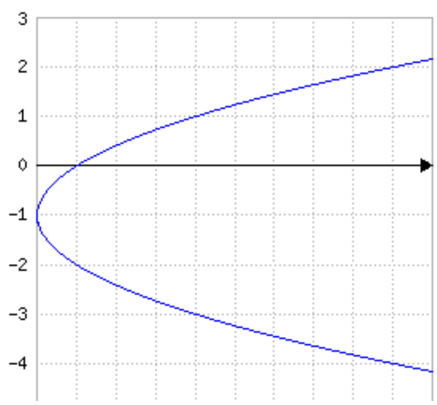

Figura 1: Gráfica de la curva del ejemplo 1.1
Fuente: Propia.

Derivada de expresiones definidas paramétricas

Si las funciones $x = f(t), \ y = g(t) \quad t \in I,$ que definen paramétricamente a una curva, son derivables en t, la curva es derivable en t, si además de lo anterior y es una función derivable respeto a x, es decir, para $y = y[x(t)]$ existe la derivada $y' = \frac{dy}{dx}$. Al aplicar el principio de derivación de funciones compuestas, o regla de la cadena, se tiene la siguiente relación.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} . \frac{dx}{dt}$$

Para casos en que $\frac{dx}{dt} \neq 0$, dividiendo cada miembro de la ecuación anterior por $\frac{dx}{dt}$ obtenemos la expresión paramétrica de la primera derivada (y') de y respecto a x.

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \qquad (1.2)$$

Si además y es una función de x, doblemente derivable podemos hallar la segunda derivada $\frac{d^2y}{dx^2}$ a partir de la ecuación (1.2) así:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}, entonces:$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left[\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right] = \frac{\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right).\left(\frac{dx}{dt}\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{dx}{dt}\right).\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right).\left(\frac{dx}{dt}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dx}\right).\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right).\left(\frac{dx}{dt}\right) - \frac{d}{dt}(1).\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right).\left(\frac{dx}{dt}\right) - 0}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

Sustituyendo $\frac{dy}{dx}$ por y'se obtiene finamente:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \quad (1.3)$$

Ejemplo 1.2: para $t = \frac{\pi}{4}$, hallar la pendiente de la recta tangente a la curva definida por las ecuaciones paramétricas:

$$x = sect; \quad y = tant; \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$$

Solución: La pendiente de la recta tangente a una curva en un punto dado corresponde al valor de $\frac{dy}{dx}$ en el punto de tangencia, usando la ecuación (1.1) con $t = \frac{\pi}{4}$ se tiene:

$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{sec^2t}{sect.tant} = \frac{sect}{tant} = \frac{\sec\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

Ejemplo 1.3: dadas las ecuaciones paramétricas $x = t^2; y = t^3 - 2t$,

Hallar la expresión paramétrica de la segunda derivada de y con respecto a x.

Solución: Las ecuaciones (1.1) y (1.2) indican que:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}; \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

En este caso tenemos:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t^2 - 2}{2t}$$

Derivando y' con respecto a t se encuentra que:

$$\frac{dy'}{dt} = \frac{(6t)(2t) - (2)(3t^2 - 2)}{4t^2} = \frac{12t^2 - 6t^2 + 4}{4t^2} = \frac{3t^2 + 2}{2t^2}$$

Por tanto:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{3t^2+2}{2t^2}}{2t} = \frac{3t^2 + 2}{4t^3}$$

Integral de una función definida paramétricamente

La integral definida de una función $y = h(x)$ en un intervalo $[a, b]$ dada por:

$$\int_a^b y dx = \int_a^b h(x)dx$$

Si las variables x, y se pueden definir en términos de un tercer parámetro t, mediante $x = f(t)\ ;\ y = \ g(t)$, se tiene $dx = f'(t)dt$ y la integral anterior se puede expresar paramétricamente como:

$$\int_a^b ydx = \int_{t_0}^{t_1} y(t)f'(t)dt \qquad (1.4)$$

Donde t_0, t_1 son valores asociados a $x = a$ y $x = b$, es decir, $f(t_0) = a$ y $f(t_1) = b$.

Ejemplo 1.4: Hallar la integral de una función $y(x)$ definida por las ecuaciones paramétricas

$x = cos^3t; \quad y = sen^3t\ ;\ t\ \in [0,\ \frac{\pi}{2}]$

Solución: Para $t = 0;\ x_0 = 1$ mientras que para $t = \frac{\pi}{2};\ x_1 = 0$, entonces la integral pedida corresponde a:

$$I = \int_{x_0}^{x_1} ydx = \int_0^1 ydx$$

De $x = cos^3t$ se tiene $dx = -3cos^2t.sentdt$, por tanto, usando como límites de integración los respectivos valores del parámetro t, encontramos que:

$$I = \int_0^1 ydx = \ -3\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} sen^3t.cos^2t.sentdt = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^4t.cos^2tdt$$

De la identidad: $cos2t = \ cos^2t - sen^2t$ se tiene:

$$cos2t = \ cos^2t - sen^2t = 1 - sen^2t - sen^2t = 1 - 2sen^2t$$

$$sen^2t = \frac{1 - cos2t}{2}$$

$$sen^4t = \left(\frac{1 - cos2t}{2}\right)^2$$

$$cos^2t = \left(\frac{cos2t + 1}{2}\right)$$

Entonces:

$$I = \int_0^1 ydx = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^4t.cos^2tdt = \frac{3}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-cos2t)^2.(cos2t+1)dt$$

$$I = \frac{3}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-2cos2t+cos^2 2t).(cos2t+1)dt$$

$$I = \frac{3}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(cos2t-2cos^2 2t+cos^3 2t+1-2cos2t+cos^2 2t\,)dt$$

$$I = \frac{3}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-cos2t-cos^2 2t+cos^3 2t)dt$$

$$\frac{3}{8}[\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-cos2t)dt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}cos^2 2tdt\ +\int_0^{\frac{\pi}{2}}cos^3 2tdt\,]$$

$$\frac{3}{8}\left[\left(t-\frac{1}{2}sen2t\right)-\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{4}sen2t\right)+\frac{1}{2}(sen2t-\frac{1}{3}sen^3t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{3}{8}\left[\left(\frac{\pi}{2}-0-0-0\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-0-0-0\right)+\frac{1}{2}(0-0-0+0)\right]$$

$$=\frac{3}{8}\left[\left(\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]=\frac{3}{8}\left[\left(\frac{\pi}{2}\right)-\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]=\frac{3}{8}\left[\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]=\frac{3\pi}{32}$$

Expresión paramétrica de la longitud de una curva

La aplicación de la integral definida al cálculo de longitud de arco, de la curva de una función, establece que para una función $y = f(x)$, la longitud de la curva en el intervalo $[a, b]$ está dada por:

$$L = \int_a^b \sqrt{1+\ [f'(x)]^2}dx = \int_a^b \sqrt{1+\left[\frac{dy}{dx}\right]^2}\,dx \qquad (1.5)$$

Si la curva se puede definir en términos del parámetro t mediante las ecuaciones $x = g(t);\ y\ = h(t)$, encontramos que $dx = g'(t)dt$ y usando la ecuación 1.2 tenemos:

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{h'(x)}{g'(x)}, enonces\ [f'(x)]^2 = \left[\frac{dy}{dx}\right]^2 = \left[\frac{h'(x)}{g'(x)}\right]^2$$

Remplazando en (1.4) encontramos que:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left[\frac{dy}{dx}\right]^2}\, dx = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 + \left[\frac{h^{'}(x)}{g^{'}(x)}\right]^2}\, g'(t)dt$$

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\frac{\left[g^{'}(x)\right]^2 + \left[h^{'}(x)\right]^2}{\left[g^{'}(x)\right]^2}[g'(t)]^2\, dt}$$

Con lo que finalmente se tiene:

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{[g'(x)]^2 + [h'(x)]^2}\, dt \;=\; \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\left[\frac{dx}{dt}\right]^2 + \left[\frac{dy}{dt}\right]^2}\; dt \quad (1.6)$$

Donde t_0 y t_1 son los valores asociados a $x = a$ y $x = b$, es decir, $g(t_0) = a$ y $g(t_1) = b$. Un detalle importante es que aunque la ecuación (1.5) se deduce de la longitud de arco de la curva de una función, se aplica también al caso de curvas definidas paramétricamente sin importar que no correspondan funciones.

Ejemplo 1.5: aplicar la ecuación (1.5) para hallar la longitud de arco de la curva definida por las ecuaciones $x = 5cost;\ y = 5sent$ en el intervalo $[0, 2\pi]$.

Solución:

$$x = 5cost;\ y = 5sent$$

$$\frac{dx}{dt} = -5sent;\ \frac{dy}{dt} = 5cost$$

$$\left[\frac{dx}{dt}\right]^2 = 25\, sen^2\, t\ ;\ \left[\frac{dy}{dt}\right]^2 = 25\, cos^2\, t$$

Entonces:

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{25\,cos^2\,t\ + 25\,sen^2\,t}\ \ dt\ = \int_0^{2\pi} \sqrt{25(cos^2\,t\ + sen^2\,t)}\ \ dt$$

$$L = \int_0^{2\pi} 5\ dt\ = 5(2\pi) = 10\pi$$

Se puede observar que la curva dada corresponde a una circunferencia de radio 5 y efectivamente la longitud de la misma es el producto de 2π y el radio. La figura 2 muestra la curva correspondiente.

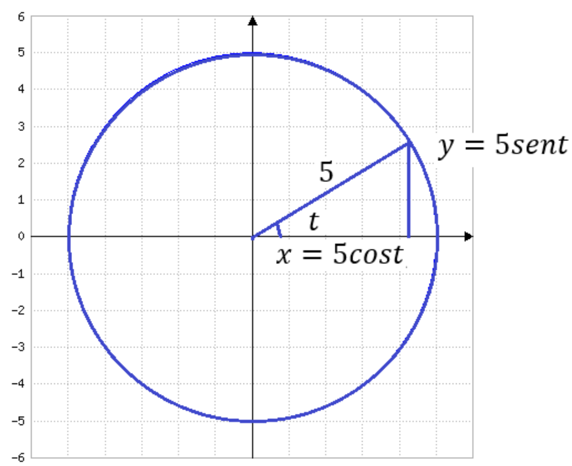

Figura 1: Gráfica de la curva definida por las ecuaciones paramétricas del ejemplo 1.5
Fuente: Propia.

Sistema de coordenadas polares

Quizá para el estudiante la forma más conocida de representar un punto en el plano o en el espacio sea a través de un sistema cartesiano de coordenadas, sin embargo existen diferentes sistemas de coordenadas entre los que se encuentra las coordenadas polares.

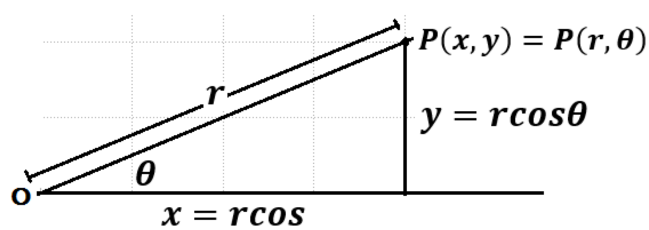

Figura 2: Representación de un punto en coordenadas polares
Fuente: Propia.

La figura 3 muestra un punto $\boldsymbol{P(x,y)}$ en el plano cartesiano y el segmento que une (x,y) con el origen del sistema. También sugiere la figura que el punto (x,y) se puede definir en términos de la longitud r del segmento y el ángulo θ formado por el radio y el semieje positivo x, es decir, se tiene un punto $P(r,\theta)$. Esta forma de expresar un punto del plano corresponde a las coordenadas polares. La relación entre coordenadas polares y coordenadas cartesianas está dada por el siguiente conjunto de expresiones.

$$\boldsymbol{x = rcos\theta; \quad y = rcos\theta; \quad r^2 = x^2 + y^2; \quad tan\theta = \frac{y}{x}} \qquad (\mathbf{1.7})$$

Es importante tener en cuenta que a un único punto (x,y) no le corresponde una sola pareja de coordenadas polares, en realidad tiene infinitas parejas de estas, una por cada giro que pasa por el punto.

Ejemplo1.6: la expresión $(x+3)^2 + (y-4)^2 = 16$ corresponde a una circunferencia con centro en $(-3,4)$ y radio $r = 4$. Hallar la ecuación en coordenadas polares.

Solución: a partir de la ecuación dada se tiene:

$$(x+3)^2 + (y-4)^2 = 16$$

$$x^2 + 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = 16$$

$$x^2 + 6x + 9 + y^2 - 8y = 0$$

$$x^2 + y^2 + 6x - 8y + 9 = 0$$

Sustituyendo $x = rcos\theta, y = rsen\theta$; $r^2 = x^2 + y^2$, según la ecuación (1.7), se tiene:

$$r^2 + 6(rcos\theta) - 8(rsen\theta) + 9 = 0 \qquad o \qquad r^2 + 6(cos\theta)r - 8(sen\theta)r + 9 = 0$$

$$r^2 + [6(cos\theta) - 8(sen\theta)]r + 9 = 0$$

Ejemplo 1.7: hallar la expresión cartesiana correspondiente a $r^2 = 5rsen\theta$

Solución: Usando las equivalencias de las ecuaciones (1.6) se tiene:

$$r^2 = 5rsen\theta; \qquad x^2 + y^2 = 5y; \qquad x^2 + y^2 - 5y = 0$$

$$x^2 + y^2 - 5y + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2; \quad x^2 + y^2 - 5y + \frac{25}{4} = \frac{25}{4}$$

$$x^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$$

La cual corresponde a la circunferencia con centro en $(0, \frac{5}{2})$ y radio $r = \frac{5}{2}$.

Gráficas en coordenadas polares

Así como al realizar gráficas en el plano cartesiano aprovechamos propiedades de la función con el fin de simplificar el proceso, en coordenadas polares también se puede hacer uso de características específicas relacionadas con simetrías y tangentes.

Simetría en coordenadas polares

Para mayor comprensión de los principios relacionados con simetría en coordenadas polares, conviene revisar los conceptos en coordenadas cartesianas. En esta sección nos apoyamos en la figura 4 para presentar un resumen de las condiciones para que se dé simetría respecto a x, respecto a y y respecto al origen.

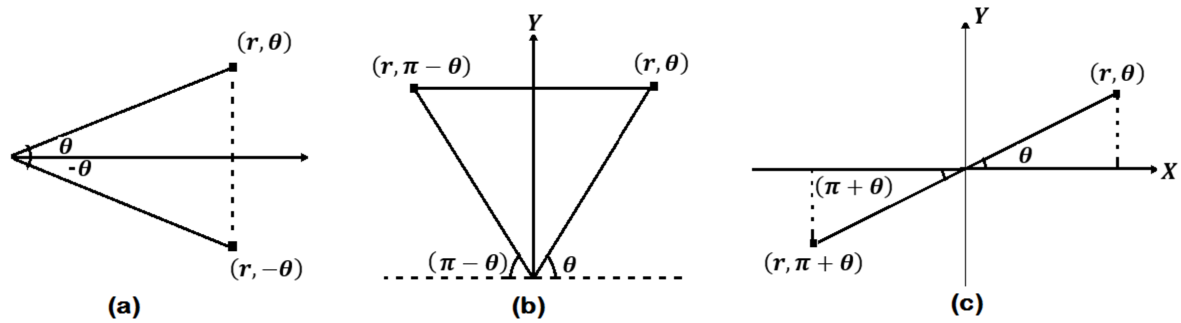

Figura 3: Ilustración de simetría en coordenadas polares

Fuente: Propia.

- Simetría respecto al eje X: una gráfica en coordenadas polares es simétrica respecto al eje X si siempre que el punto (r, θ) está en la curva, el punto $(r, -\theta)$ también está.
- Simetría respecto al eje Y: una gráfica en coordenadas polares es simétrica respecto al eje Y si siempre que el punto (r, θ) está en la curva, el punto $(r, \pi - \theta)$ también está.
- Simetría respecto al origen: una gráfica en coordenadas polares es simétrica respecto al origen si siempre que el punto (r, θ) está en la curva, el punto $(r, \theta + \pi)$ también está.

Ejemplo 1.8: gráfica de $r = 1 - cos\theta$ en $[0, 2\pi]$

Puesto que cos $(-\theta) = cos\theta$ se tiene que sin punto (r, θ) está en la curva, también está el punto $(r, -\theta)$ lo que implica que la curva es simétrica respecto al eje X, con lo cual podemos realizar cálculos para trazar la gráfica en $[0, \pi]$ y luego aplicar la simetría. La tabla adjunta indica valores correspondientes a algunos puntos de la curva mostrada en la en la Figura 5 a.

θ	0	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	π
r	0	$1/2$	1	$3/2$	2

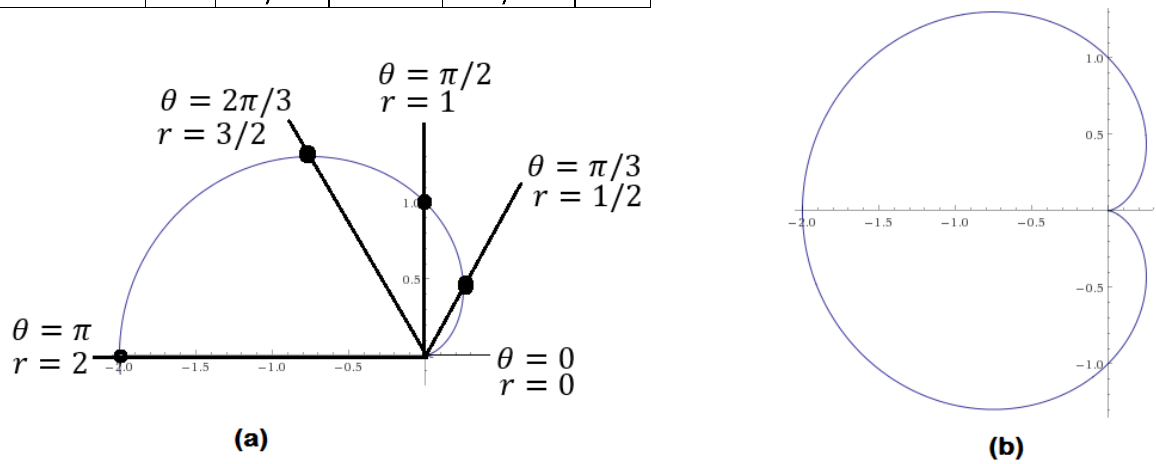

Figura 4: gráfica de 1-cosθ. En (a) se grafica en [0,π] en (b) se aplica simetría respecto a X para obtener la curva en [0,2π]
Fuente: Propia.

Pendiente de la tangente a una curva en coordenadas polares

El equivalente cartesiano de la pendiente de la tangente a una curva en un punto dado equivale al valor que toma $\frac{dy}{dx}$ en dicho punto. Si consideramos una función f definida paramétricamente como:

$x = rcos\theta = f(\theta).cos\theta;\ y = rsen\theta = f(\theta)sen\theta$, de donde se encuentra que

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}(f(\theta).cos\theta) = \frac{df}{d\theta}cos\theta - f(\theta).sen\theta$$

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}(f(\theta).sen\theta) = \frac{df}{d\theta}sen\theta + f(\theta).cos\theta$$

Entonces, en el punto (r, θ), la pendiente de la recta tangente a la curva está dada por:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(r,\theta)} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \left.\frac{f'(\theta).sen\theta + f(\theta).cos\theta}{f'(\theta).cos\theta - f(\theta).sen\theta}\right|_{(r,\theta)} \quad si\ \frac{dx}{d\theta} \neq 0 \qquad (1.8)$$

En el caso particular que la curva de $r = f(\theta)$ pase por el origen cuando $\theta = \theta_0$ se da que el valor de $f(\theta_0)$ es 0, con lo que resulta:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(r,\theta_0)} = \frac{f'(\theta).sen\theta_0}{f'(\theta).cos\theta_0} = tan\theta_0 \qquad (1.9)$$

Cálculo de longitudes en coordenadas polares

Si se tiene una función $r = f(\theta)$ entre $\theta = \theta_0$ y $\theta = \theta_1$, podemos expresar la curva paramétricamente mediante $x = f(\theta).cos\theta;\ y = f(\theta)sen\theta\ con\ \theta_0 \leq \theta \leq\ \theta_1$, aplicando la ecuación 1.5 con $t = \theta$ encontramos:

$$L = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{\left[\frac{dx}{d\theta}\right]^2 + \left[\frac{dy}{d\theta}\right]^2}\ d\theta$$

Si además tenemos en cuenta que $x = rcos\theta; y = rsen\theta$, vemos que

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta}cos\theta - rsen\theta \qquad y \qquad \frac{dy}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta}sen\theta + rcos\theta$$

Con lo que finalmente se tiene:

$$L = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{\left[\frac{dr}{d\theta}cos\theta - rsen\theta\right]^2 + \left[\frac{dr}{d\theta}sen\theta + rcos\theta\right]^2}\ d\theta$$

$$= \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 cos^2\theta - 2\frac{dr}{d\theta}cos\theta sen\theta + (rsen\theta)^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 sen^2\theta + 2\frac{dr}{d\theta}sen\theta cos\theta + (rsen\theta)^2\ d\theta}$$

$$= \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 cos^2\theta + (rsen\theta)^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 sen^2\theta + (rsen\theta)^2\ d\theta}$$

$$= \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 (cos^2\theta + sen^2\theta) + r^2(cos^2\theta + sen^2\theta)\ d\theta}$$

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2}\ d\theta \qquad (1.10)$$

Secciones cónicas

Si tomamos un cono doble y lo cortamos con un plano, de diferentes orientaciones, los cortes producidos pueden corresponder a un importante conjunto de curvas conocidas como secciones cónicas, (ver figura 5) estas curvas son específicamente la circunferencia, la elipse, la parábola y la hipérbola. Esta parte la dedicamos a una breve descripción de la parábola, la elipse y la hipérbola desde el punto de vista de su representación cartesiana, nos interesa en cada caso contar con una expresión algebraica que caractericen cada una de las curvas, esta expresión es precisamente la ecuación cartesiana.

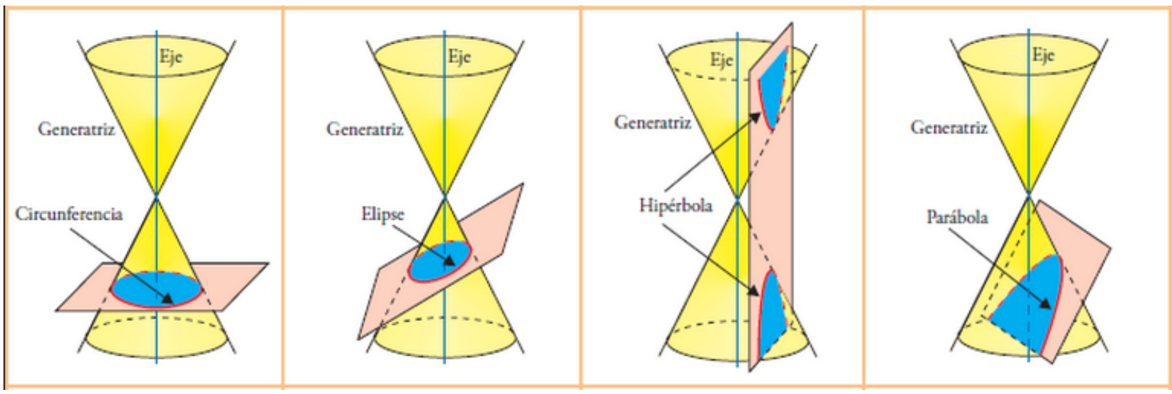

Figura 5. Corte de dos conos coaxiales de vértice común cortados por plano para producir secciones cónicas
Fuente: http://www.infoymate.es/wiris/wiris/conicas/images/SeccConi.png

Parábola con vértice en el origen

La parábola se define como el conjunto de puntos del plano que se encuentran a igual distancia de un punto fijo, denominado foco, y una recta fija llamada directriz.

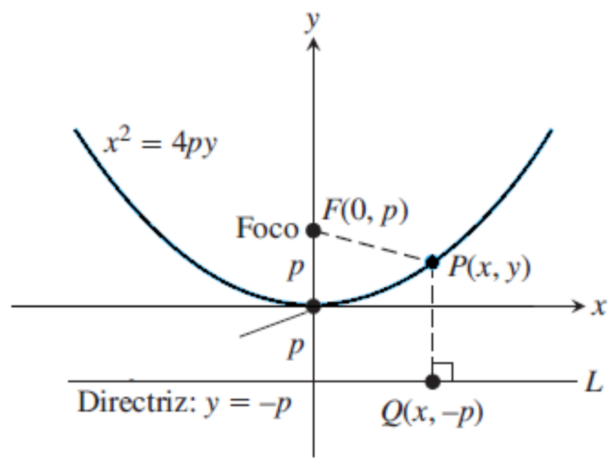

Figura 6. Conjunto de puntos equidistantes de un punto fijo y una recta fija
Fuente: Propia.

A partir de la definición se puede hallar la ecuación de la parábola cuyo foco se encuentra en una línea perpendicular a la directriz, esta recta que contiene el foco se llama eje de la parábola. (Ver figura 6). Asumiendo que el foco es el punto $F(0, p)$, que la directriz corresponde a la recta $y = -p$ y que el punto $P(x, y)$ es cualquiera de los puntos de la parábola, por definición se debe cumplir que la distancia PF equivale a la distancia PQ, con lo que se tiene:

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y-(-p))^2}$$

$$(x-0)^2 + (y-p)^2 = (x-x)^2 + (y-(-p))^2$$

Lo que luego de simplificar conduce a la siguiente expresión conocida como forma canónica de la ecuación de la parábola.

$$x^2 = 4py \qquad (1.11)$$

Se conoce como vértice de la parábola el punto donde la curva corta su eje. En el caso de la parábola $x^2 = 4py$ cuyo eje es el eje Y, el vértice es el punto $(0, 0)$, mientras que la distancia entre el vértice y el foco es lo que se conoce como distancia focal, en este caso la distancia focal es $|p|$. Notamos en la figura que si p es un número negativo, la parábola abre hacia abajo, es decir, el vértice es el punto donde la parábola alcanza el mayor valor de y.

Para la parábola cuyo eje es el eje x, vértice $V(0,0)$ y el foco es el punto $F(p,0)$ y la directriz es la recta $x=-p$, la respectiva ecuación es:

$$y^2 = 4px \qquad (1.12)$$

La demostración de (1.12) se recomienda como ejercicio de repaso al estudiante.

Parábola con vértice en un punto (h,k)

La parábola con vértice en el origen y cuyo eje es el eje X es una situación particular del caso más general en que el eje es paralelo al eje X, pero el vértice es otro punto (h,k). Tal como lo sugiere la Figura 8, esto corresponde a una traslación h unidades en x y k unidades en y de cada punto asociado a la curva.

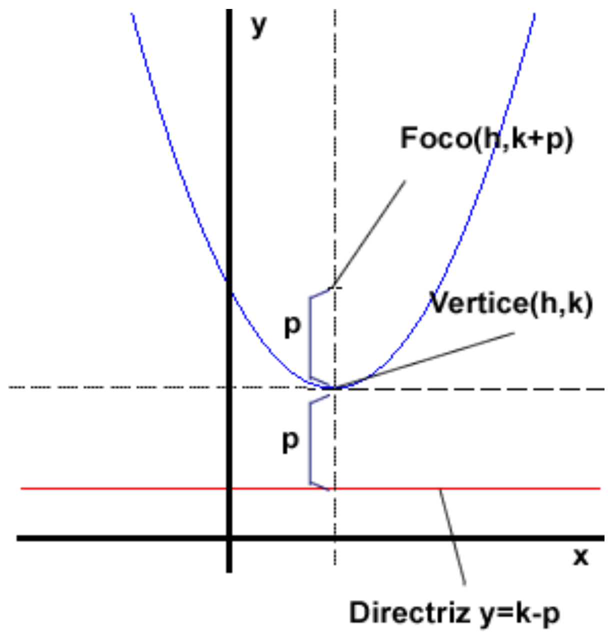

Figura 7: Ilustración de parábola con vértice en un punto (h, k).
Fuente: http://www.monografias.com/trabajos82/trabajo-conicas/image003.png

Del tema de transformaciones sobre curvas, se sabe que una traslación horizontal h unidades y una traslación vertical k unidades corresponden respectivamente a la sustitución de x por $(x-h)$ y y por $(y-k)$ en la expresión algebraica de la curva original, lo cual indica que la ecuación canónica de la parábola con vértice en (h,k) y eje paralelo al eje X es:

$$(y-k)^2 = 4p(x-h) \qquad (1.13)$$

En este caso la ecuación de la directriz es $x-h=-p \;\; o \;\; x=h-p$

De manera análoga se llega a que la ecuación canónica de la parábola con vértice en (h, k) y eje paralelo al eje Y es:

$$(x - h)^2 = 4p(y - k) \qquad (1.14)$$

La directriz es en este caso $y - k = -p \quad o \quad y = k - p$

Ejemplo 1.10: escribir la ecuación de la parábola $\boldsymbol{x^2 + 2x - 4y + 13 = 0}$ en forma canónica, también hallar las coordenadas de vértice y de foco, así como la ecuación de la directriz.

Solución: completando al cuadrado en la variable x, tenemos:

$$\boldsymbol{(x^2 + 2x + 1) - 4y + 13 - 1 = 0}$$

$$\boldsymbol{(x + 1)^2 - 4y + 12 = 0}$$

$$\boldsymbol{(x + 1)^2 = 4(y - 3)}$$

Lo cual es una expresión de la forma $\boldsymbol{(x - h)^2 = 4p(y - k)}$**,** que precisamente corresponde a la ecuación de una parábola con vértice en el punto $(h, k) = (-1, 3)$ y eje paralelo al eje Y. Siendo $4p = 4$ se tiene que $p = 1$, con lo cual encontramos que el foco es el punto $F(h, k + p) = F(-1,\ 3 + 1) = F(-1,\ 4)$, mientras que la ecuación de la directriz está dada por $y = k - p$ o $y = 2$. Nótese que si el vértice de la parábola fuera el punto $(h, k) = (0, 0)$, la respectiva ecuación sería $x^2 = 4y$, con lo cual el foco sería el punto $F(h, k + p) = F(0,\ 0 + 1) = F(0,\ 1)$ y la ecuación de la directriz sería $y = k - p$ o $y = -1$. Las gráficas correspondientes se muestran en la figura 9.

Figura 8. Curvas de las parábolas del ejemplo 1.10
Fuente: Propia.

Elipse con centro en el origen

La elipse se define como el conjunto de puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante. A la recta que contiene los focos se le denomina eje focal, el punto medio de la distancia entre los focos es el centro de la elipse y los puntos donde la curva corta al eje focal se llaman vértices.

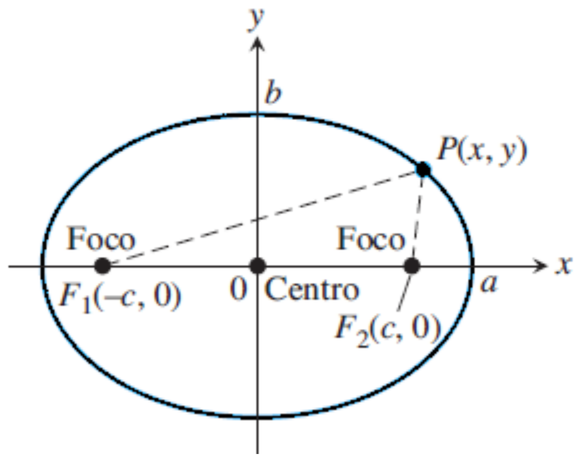

Figura 9 Conjunto de puntos cuya suma de distancias a dos puntos fijos es constante
Fuente: Propia.

Elipse con centro en $(\mathbf{0},\mathbf{0})$ y eje coincidente con el eje X

Para deducir la ecuación de una elipse con centro en $(0,0)$, focos $F_1(-c,0)$ y $F_2(c,0)$, consideramos un punto cualquiera $P(x,y)$ sobre la curva (ver figura 9). A partir de la definición se tiene que la suma de las distancias PF_1 y PF_2 es igual a una constante que denotamos como $2a$, por lo tanto:

$$\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}=2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

$$\left[\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right]^2=\left[2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right]^2$$

$$x^2+2cx+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2}+\ x^2-2cx+c^2+y^2$$

$$2cx=4a^2-4a\sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2}-2cx$$

$$4cx=4a^2-4a\sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2}$$

$$cx-a^2=-a\sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2}$$

$(cx - a^2)^2 = a^2[x^2 - 2cx + c^2 + y^2]$

$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2[x^2 - 2cx + c^2 + y^2]$

$c^2x^2 + a^4 = a^2[x^2 + c^2 + y^2]$

$c^2x^2 + a^4 = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2$

$1 = \frac{x^2(a^2 - c^2)}{a^2(a^2 - c^2)} + \frac{a^2y^2}{a^2(a^2 - c^2)}$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(a^2 - c^2)} = 1$

Dado que la distancia $2a = PF_1 + PF_2$ es mayor que la distancia $2c$ entre los focos, se tiene que $2a > 2c, a > c$ y por tanto $a^2 - c^2 > 0$, si hacemos $a^2 - c^2 = b^2$, llegamos a la ecuación de la elipse con centro en $(0, 0)$ y focos $(-c, 0)$, $(c, 0)$ que se muestra a continuación y que se conoce como forma canónica.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (1.15)$$

Si $y = 0$, se tiene que $\frac{x^2}{a^2} = 1$, con lo cual $x = \pm a$, lo que indica que la curva corta al eje en los puntos $(-a, 0)$ y $(a, 0)$, estos son precisamente los vértices de la elipse.

Elipse con centro en $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ y eje coincidente con el eje Y

Si los focos de la elipse son los puntos $(0, -c)$ y $(0, c)$, es decir el eje focal es el eje y, mediante procedimientos similares a los anteriores se llega a la siguiente ecuación.

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \qquad (1.16)$$

En este caso las coordenadas de los vértices son $(0, -a)\ y\ (0, a)$. El análisis de ambas ecuaciones muestra que la elipse es simétrica respecto al origen, respecto al eje X y respecto al eje Y.

Ejemplo 1.11: escribir en forma canónica la ecuación de la elipse $16x^2 + 25y^2 = 400$, hallar también las coordenadas de los vértices y de los focos.

Solución: dividiendo por 400 cada término de la expresión dada se encuentra que tiene:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

Lo que corresponde a una expresión de la forma:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Que es la ecuación de una elipse con centro en (0,0), eje coincidente con el eje X y donde además $a^2 = 25$, $b^2 = 16$ y $c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 16 = 9$. Teniéndose entonces que $a = 5$; $b = 4$ y $c = 3$, con lo que encontramos que las coordenadas de los vértices son: $(-a, 0) = (-5, 0)y$ $(a, 0) = (5, 0)$, las coordenadas de los focos son $(-c, 0) = (-3, 0)y$ $(c, 0) = (3, 0)$. La figura 11 muestra la gráfica de la elipse, los vértices y los focos.

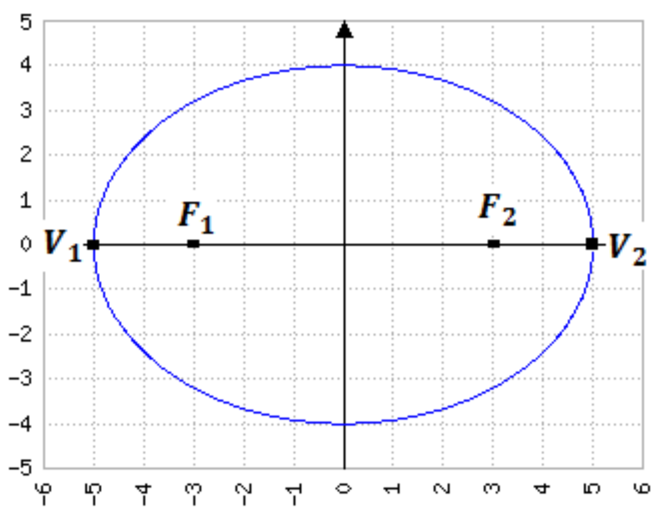

Figura 10: Gráfica de la elipse del ejemplo 1.11
Fuente: Propia.

Hipérbola con centro en el origen

La hipérbola se define como el conjunto de puntos del plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante. A la recta que contiene los focos se le denomina eje focal, el punto medio de la distancia entre los focos es el centro de la hipérbola y los puntos donde la curva corta al eje focal se llaman vértices.

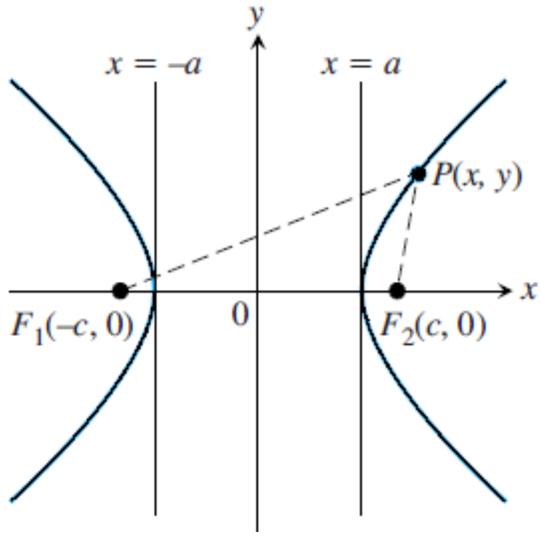

Figura 11. Conjunto de puntos del plano cuya diferencia de distancia a dos puntos fijos es constante
Fuente: Propia.

Hipérbola de centro en $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ y eje coincidente con el eje X

Para la hipérbola con centro en $(0{,}0)$, focos $F_1(-c, 0)$ y $F_2(c, 0)$, consideramos un punto cualquiera $P(x, y)$ sobre una de las ramas de la curva, (ver figura 11) en este caso la definición indica que la diferencia de las distancias PF_1 y PF_2 es igual a una constante que denotamos como $\pm 2a$, por lo tanto, la ecuación de esta hipérbola se deduce a partir de la siguiente expresión:

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = \pm 2a$$

Aplicando procedimientos algebraicos similares a los realizados para deducir la ecuación de la elipse, se puede hallar la ecuación en forma canónica de la hipérbola cuyo eje focal es el eje X, su centro es $(0, 0)$ y sus focos son los puntos $F_1(-c, 0)$y $F_2(c, 0)$. La ecuación correspondiente es la (1.x), pero su demostración se deja como ejercicio recomendado para el estudiante.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\,; \qquad con \quad c^2 = a^2 + b^2 \qquad (1.17)$$

Si $y = 0$, se encuentra que $x = \pm a$, lo que indica que los vértices de la hipérbola son los puntos $(-a, 0)$ y $(a, 0)$

Hipérbola de centro en $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ y eje coincidente con el eje Y

Si el eje focal es el eje Y, los focos serán entonces los puntos $(0, -c)\ y\ (0, c)$, los vértices son los puntos $(0, -a)\ y\ (0, a)$ y la respectiva ecuación canónica es:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1\,; \qquad con \quad c^2 = a^2 + b^2 \qquad (1.18)$$

Ejemplo 1.12: escribir en forma canónica la ecuación de la hipérbola $9y^2 - 16x^2 = 144$ y hallar las coordenadas de los vértices y de los focos.

$$-= 144 + 16x^2$$

Solución: dividiendo por 144 cada término de la expresión encontramos.

$$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$$

Que es la ecuación de una hipérbola con centro en (0,0), eje coincidente con el eje Y y donde además $a^2 = 16$, $b^2 = 9\ y\ c^2 = a^2 + b^2 = 16 + 9 = 25$. Con lo que encontramos $a = 4$; $b = 3\ y\ c = 5$, teniéndose entonces que las coordenadas de los vértices son: $(0, -a) = (0, -4)\ y\ (0, a) = (0, 4)$, las coordenadas de los focos son $(0, -c) = (0, -5)\ y\ (0, c) = (0, 5)$. La figura 13 muestra la gráfica de la curva.

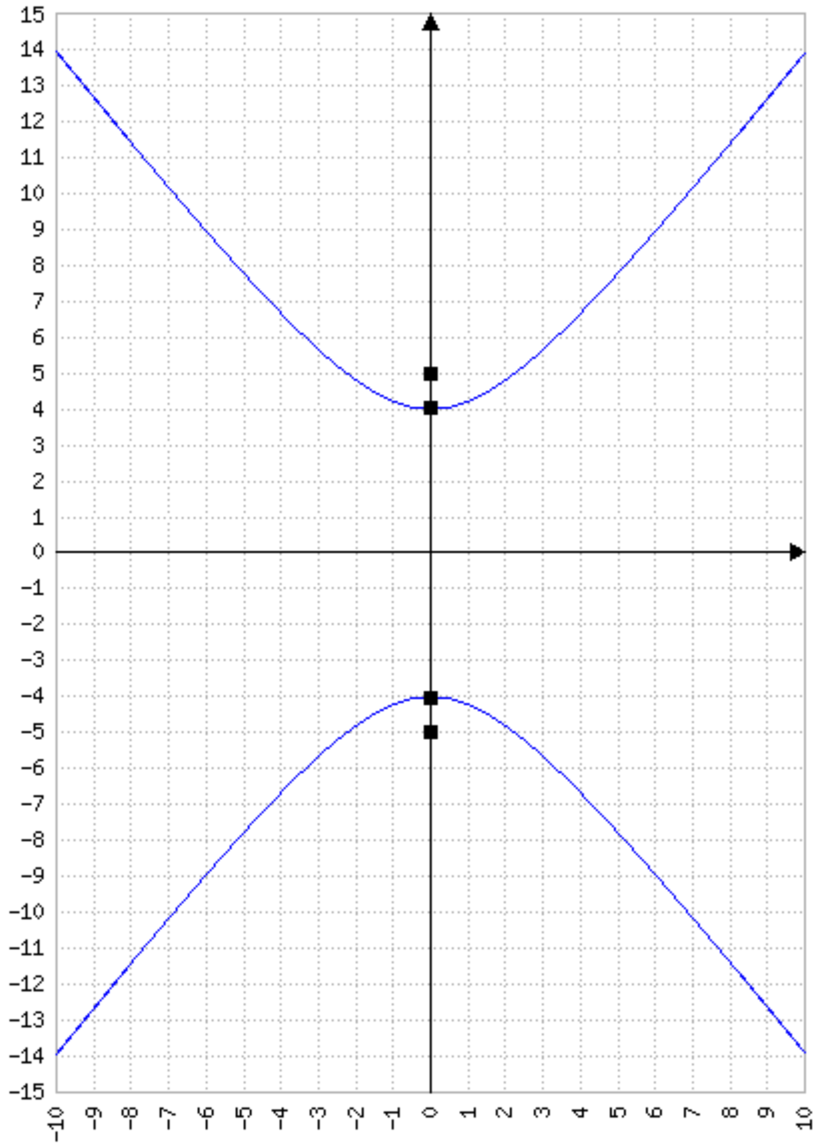

Figura 12: Gráfica del ejemplo 1.12
Fuente: Propia.

Elipse e hipérbola con centro en un punto (h, k)

Razonamientos similares a los que nos permitieron escribir las ecuaciones canónicas de la parábola con vértice en (h, k) nos indican que las ecuaciones, vértices y focos de elipse e hipérbola con centros en (h, k) y eje paralelo al eje X o al eje Y son las que se presentan en los siguientes numerales.

Elipse con centro en (h, k) y eje paralelo al eje X

- Ecuación
- $\frac{(x+h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \qquad (1.19)$
- Vértices: $(h - a,\ k)$ y $(h + a,\ k)$
- Focos: $(h - c,\ k)$ y $(h + c,\ k)$
- $a^2 = b^2 + c^2$

Elipse con centro en (h, k) y eje paralelo al eje Y

- Ecuación
- $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1 \qquad (1.20)$
- Vértices: $(h,\ k - a)$ y $(h,\ k + a)$
- Focos: $(h,\ k - c)$ y $(h,\ k + c)$
- $a^2 = b^2 + c^2$

Hipérbola con centro en (h, k) y eje paralelo al eje X

- Ecuación
- $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \qquad (1.21)$
- Vértices: $(h - a,\ k)$ y $(h + a,\ k)$
- Focos: $(h - c,\ k)$ y $(h + c,\ k)$
- $c^2 = a^2 + b^2$

Hipérbola con centro en (h,k) y eje paralelo al eje Y

- Ecuación
- $\frac{(y-h)^2}{a^2} - \frac{(x-k)^2}{b^2} = 1 \qquad (1.22)$
- Vértices: $(h,\ k - a)$ y $(h,\ k + a)$
- Focos: $(h,\ k - c)$ y $(h,\ k + c)$
- $c^2 = a^2 + b^2$

Se recomienda al estudiante remitirse a la sección Lecturas complementarias de esta semana 1 donde se encuentra un conjunto de ejercicios resueltos sobre parábola, elipse e hipérbola con centro en un punto (h, k). Es importante atender esta recomendación ya que el quiz de la semana 2 así lo demanda.

Unidad 1

Sistemas de coordenadas espaciales

Cálculo multivariado

Autor: Danilo de Jesús Ariza Agámez

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina

MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Introducción

Continuando con la presentación de conceptos básicos para el posterior desarrollo de principios de cálculo multivariado, en esta cartilla se hace una introducción de los conceptos del contexto de cantidades vectoriales, que al igual que los temas de la cartilla anterior, en sí mismos son importantes objetos de estudio, más aún cuando se relacionan con principios de cálculo como los que se tratarán en las siguientes semanas. Su clara comprensión se hace necesaria en el aprovechamiento de los diferentes recursos adicionales dados en esta cartilla y en las de las semanas posteriores.

Recomendaciones metodológicas

Se recomienda al estudiante que inicialmente acuda a la lectura de esta cartilla como elemento de acercamiento o refuerzo a la temática relacionada con vectores, las diferentes operaciones entre ellos y su respectivo significado, que luego de ello dedique parte de su tiempo a la visualización de video capsulas y la revisión de los ejercicios resueltos que se presentan en las lecturas complementarias, teniendo siempre como referencia la cartilla misma, a la que puede regresar las veces que lo considere necesario. Luego de analizar los contenidos de los recursos antes indicados conviene tratar de desarrollar los ejercicios de repaso a través de los cuales usted puede verificar sus avances frente a los conocimientos puestos en juego.

Desarrollo temático

Cantidades Vectoriales

Sistemas de coordenadas espaciales

La mayor parte de los contenidos estudiados en cursos previos de matemáticas y cálculo se apoyan en el uso de sistemas de coordenadas en un plano, teniéndose por ejemplo el sistema bidimensional de coordenadas cartesianas, con base en el cual se representa un punto en un plano. En el ámbito de funciones, el plano cartesiano se usa también para representar gráficamente una función real de variable real, que relaciona de dos variables, sin embargo son muchas las situaciones matemáticas que relacionan tres o más variables, de las cuales se resalta aquella en la que se debe ubicar un punto en el espacio tridimensional, para lo cual se requiere un sistema de coordenadas de tres dimensiones.

Al representar un punto en el plano cartesiano lo hacemos con base en sus coordenadas (x, y), para la ubicación de un punto P en el espacio se hace uso de sus coordenadas (x, y, z) y un sistema de tres ejes coordenados perpendiculares entre sí en un mismo punto, llamado origen del sistema. (Ver figura 1). Los valores de la coordenadas x, y, z respectivamente corresponden a las intersecciones de los planos perpendiculares a los ejes X, Y, Z que pasan por P

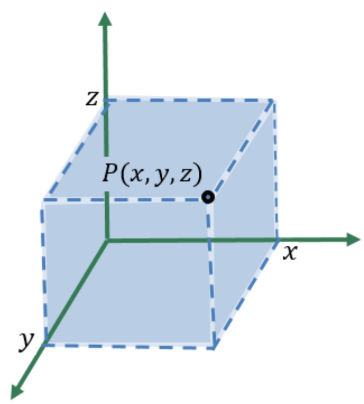

Figura 1: Representación de la ubicación de un punto en el espacio
Fuente: Propia.

Las coordenadas cartesianas (x, y, z) de un punto P en el espacio, como se puede ver en la figura 1 son los valores en los cuales los planos que pasan por P, cortan perpendicularmente a los ejes X, Y, Z, por lo que también se les llama sistema de coordenadas rectangulares. A cualquier punto que se encuentre sobre algunos de los ejes le corresponde cero como valor asociado a los otros ejes, es decir los puntos sobre el eje X tienen coordenadas $(x, 0, 0)$, los ubicados sobre el eje Y tienen coordenadas $(0, y, 0)$, mientras que los ubicados sobre el eje Z, tienen coordenadas $(0,0,z)$. ¿Cuáles serán las coordenadas de puntos ubicados sobre los planos XY, XZ, YZ?

Tal como lo sugiere la visión en perspectiva de la figura 2, el corte de los planos XY, XZ, YZ da lugar a una división del espacio tridimensional en ocho regiones, cada una de ellas es un octante del espacio.

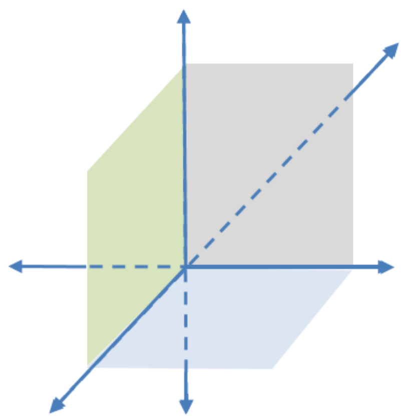

Figura 2. Los cortes de 3 planos mutuamente perpendiculares dividen el espacio en octantes
Fuente: Propia.

Distancia entre dos puntos en el espacio XYZ

Dados los puntos del espacio $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$, podemos hallar la distancia $d(P_1, P_2)$ entre ellos mediante la siguiente expresión en términos de los valores de sus coordenadas.

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \qquad (2.1)$$

Se recomienda al estudiante realizar el ejercicio de repaso consistente en demostrar la expresión dada en la ecuación 2.1, esta es una extensión de la expresión para el caso de dos dimensiones y se basa en el uso del teorema de Pitágoras.

Ejemplo 2.1: hallar la distancia entre los puntos del espacio cuyas coordenadas son: $P_1(-2, 2, 0)$ y $P_2(1, 3, 2)$.

Solución: sustituyendo en la ecuación (2.1) los valores $x_1 = -2;\ y_1 = 2;\ z_1 = 0$ y $x_2 = 1;\ y_2 = 3;\ z_2 = 2$, hallamos la distancia entre los puntos dados, como se muestra seguidamente:

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(1 - (-2))^2 + (3 - 2)^2 + (2 - 0)^2}$$

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(3)^2 + (1)^2 + (2)^2} = \sqrt{9 + 1 + 4} = \sqrt{14}$$

Ecuación de una esfera

La ecuación de una circunferencia de radio r y centro en un punto (h, k) en el plano XY corresponde a $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$, si en lugar de pensar en una circunferencia pensamos en una esfera, se tiene que esta última el conjunto de puntos (x, y, z) del espacio que se encuentran a una distancia r del centro de la esfera. Se puede extender la expresión de la ecuación de la circunferencia para incluir la variable z y escribir a continuación la ecuación de la esfera con centro en el punto $C(x_0, y_0, z_0)$ y radio r.

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2 \qquad (2.2)$$

Ejemplo 2.2: hallar la ecuación de la esfera de radio 5 y centro en el punto $(1, -2, 0)$.

Solución: con los valores dados y el uso de la ecuación (2.2) se tiene que la ecuación de la esfera está dada por:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 0)^2 = 25$$

La que se puede escribir de forma general mediante el desarrollo de los cuadrados de binomio.

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 + z^2 = 25$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 20 = 0$$

Ejemplo 2.3: en los siguientes casos indicar si la expresión dada corresponde a una esfera, de ser cierto indique el radio y centro de la esfera, en caso contrario explique la razón.

$a)\ x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y - 2z - 2 = 0$

$b)\ x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 2z + 18 = 0$

Solución: a) A partir de la expresión dada agrupamos los términos asociados con cada variable para luego realizar el proceso de completar los cuadrados, con lo que se tiene:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y - 2z - 2 = 0$$

$$(x^2 + 4x) + (y^2 - 6y) + (z^2 - 2z) - 2 = 0$$

$$(x^2 + 4x + 4) + (y^2 - 6y + 9) + (z^2 - 2z + 1) = 2 + 4 + 9 + 1$$

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 + (z - 1)^2 = 16$$

La anterior corresponde a la ecuación de una esfera con centro en el punto $(-2, 3, 1)$ y radio $r = 4$

b) procediendo de manera similar al caso a) tenemos:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 2z + 18 = 0$$

$$(x^2 - 4x) + (y^2 + 6y) + (z^2 - 2z) + 18 = 0$$

$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 6y + 9) + (z^2 - 2z + 1) = -18 + 4 + 9 + 1$$

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 + (z - 1)^2 = -4$$

Cada uno de los términos de la izquierda es no negativo, por lo cual la suma de estas tres expresiones no puede dar un número negativo. La expresión dada no puede ser la ecuación de una esfera, en realidad no corresponde a lugar geométrico alguno.

Cantidades vectoriales. Conceptos

En el estudio inicial de la física se establece la distinción entre magnitudes escalares y vectoriales, indicándose que las magnitudes escalares quedan completamente determinadas con su magnitud y una correspondiente unidad de medida, por ejemplo una masa de 20 kilogramos o una densidad de 3 gr/cm^3, por su parte una **magnitud vectorial** queda completamente caracterizada cuando de ella se da su magnitud y su dirección. En esta parte del curso se estudia la representación magnitudes vectoriales en un plano y en el espacio.

Representación de un vector

Geométricamente un vector se representa mediante un segmento dirigido de recta. La dirección se indica mediante una punta de flecha en la dirección del vector, mientras que la magnitud está dada por la longitud del segmento en el respectivo sistema de coordenadas.

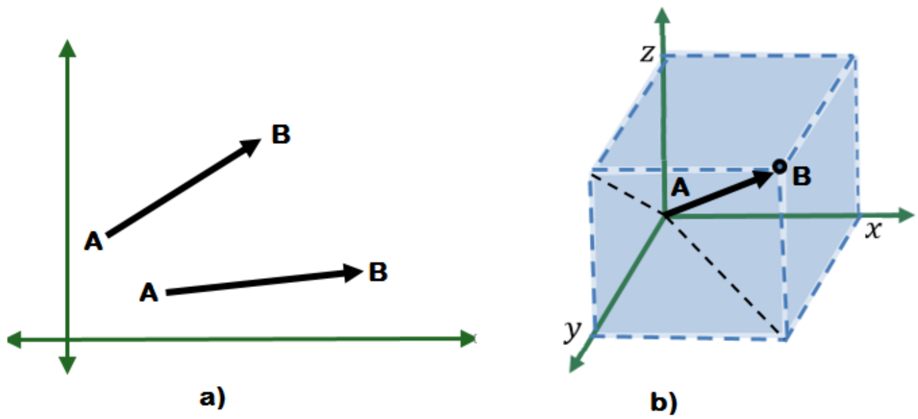

Figura 2. Representación geométrica de vectores a) en dos dimensiones y b) en tres dimensiones
Fuente: Propia.

La figura 3 muestra ejemplos de representaciones de vectores, en dos y en tres dimensiones en ella identificamos el punto inicial A y el punto final B. En expresiones analíticas denotamos un vector mediante letras en negrita como $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{F}$ también es usual representarlas con una pequeña flecha encima $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{F})$. En ocasiones conviene representar el vector haciendo referencia a los puntos inicial y final, por ejemplo, $\mathbf{x} = \overrightarrow{PQ}$. Si el punto inicial de un vector $\mathbf{x}$ es el origen se dice que el vector está dado en posición estándar, este es el caso del vector en la figura 3 b).

Igualdad de vectores

Dos vectores son iguales si tienen la misma magnitud y dirección, lo cual indica que no se requiere que tengan los mismos puntos inicial y final, una manera de indicar que tienen la misma dirección es decir que son paralelos. La figura 4 muestra gráficamente la igualdad de vectores en dos dimensiones.

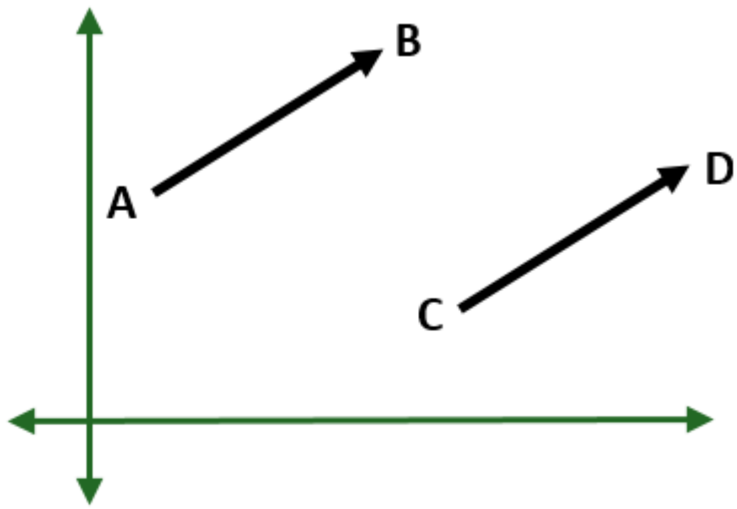

Figura 3. Ilustración gráfica de la igualdad de vectores
Fuente: Propia.

Componentes de un vector en posición estándar

Si $\mathbf{x}$ es un vector en posición estándar en el plano y su punto final es (x_1, y_1), entonces la representación de $\mathbf{v}$, y de todo vector igual a $\mathbf{v}$, en términos de sus componentes x_1, y_1 está dada por:

$$\mathbf{v} = \langle x_1, y_1 \rangle$$

De forma análoga, Si $\mathbf{x}$ es un vector en posición estándar en el espacio y su punto final es (x_1, y_1, z_1), entonces la representación de $\mathbf{v}$ y todo vector igual a $\mathbf{v}$, en términos de sus componentes x_1, y_1, z_1, está dada por:

$$\mathbf{v} = \langle x_1, y_1, z_1 \rangle$$

Si un vector $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$ tiene como inicio y final los puntos $A(x_1, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_2, z_2)$ respectivamente, se puede obtener el vector en posición estándar que sea igual a $\mathbf{x}$ restando las respectivas coordenadas del punto inicial a cada una de las coordenadas de los dos puntos, con ello el nuevo punto inicial es el origen y las coordenadas del nuevo punto final, $x_2 - x_2$; $y_2 - y_1$; $z_2 - z_1$, por lo tanto, dados los puntos $A(x_1, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_2, z_2)$ el vector en posición estándar, en términos de sus componentes, está dado por:

$$\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle \qquad (2.3)$$

Para el caso particular de vectores en el plano, si los puntos inicial y final son $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ el vector en posición estándar, en términos de sus componentes es:

$$\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle \qquad (2.4)$$

Magnitud o norma de un vector

Señalamos anteriormente que la magnitud de un vector corresponde a la medida del segmento de recta que une sus puntos inicial y final en el respectivo sistema de coordenadas. Si los puntos inicial y final de un vector $\mathbf{v}$ son respectivamente $A(x_1, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_2, z_2)$, la aplicación de la fórmula de la distancia en el espacio tridimensional nos da la norma $|\mathbf{v}|$ del vector según lo indica la siguiente expresión:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \qquad (2.5)$$

Nótese que los términos al interior de cada uno de los paréntesis son las componentes del vector en posición estándar. Si el vector $\mathbf{v}$ es un vector del plano XY, la norma está dada por:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad (2.6)$$

Ejemplo 2.4: en cada uno de los casos siguientes expresar el vector dado en términos de sus componentes y hallar la norma del vector.

a) $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$ con $A(3, 5);\ B(-2, 2)$

b) $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$ con $A(-3, 1, 2);\ B(2, 2, 3)$

Solución: a) $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle = \langle -2 - 3, 2 - 5 \rangle = \langle -5, -3 \rangle$, lo que corresponde al vector expresado en términos de sus componentes. Aplicando la ecuación (2.6) encontramos que la norma o magnitud de $\mathbf{v}$ es:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(-2 - 3)^2 + (2 - 5)^2} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34}$$

b) $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \langle 2 - (-3), 2 - 1, 3 - 2 \rangle = \langle 5,\ 1, 1 \rangle$. Lo que corresponde al vector expresado en términos de sus componentes. Al aplicar (2.5) encontramos:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(2 - (-3))^2 + (2 - 1)^2 + (3 - 2)^2} = \sqrt{25 + 1 + 1} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

Operaciones básicas con vectores

Esta sección de la cartilla se dedica a algunas operaciones que se pueden realizar con vectores, iniciamos con las correspondientes a suma de dos vectores y producto de un escalar por un vector. En lo que sigue, se tratará el caso más general de vectores en el espacio, a partir de lo cual el estudiante sabrá reducirlo al caso bidimensional.

Suma de vectores

Dados dos vectores $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$, la suma $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ es otro vector cuyas componentes corresponden a la suma de las respectivas componentes de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, es decir:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \langle u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3 \rangle \qquad (2.7)$$

La figura 5 muestra el significado geométrico de la suma de dos vectores bidimensionales $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.

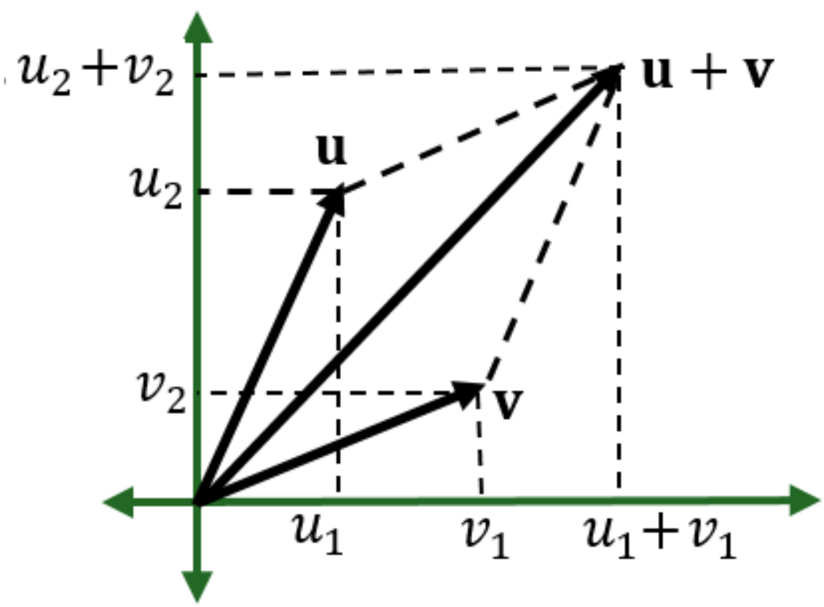

Figura 4. Ilustración de la suma de dos vectores bidimensionales
Fuente: Propia.

Ejemplo 2.5: dados los vectores $\mathbf{u} = \langle 1, 3, 2 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle 2, -1, 2 \rangle$, la suma de ellos es el vector $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \langle u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3 \rangle = \langle 3, 2, 4 \rangle$.

Producto de un vector por un escalar

Dados un vector $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ y un escalar α, el producto escalar $\alpha\mathbf{v}$ corresponde al vector cuyas componentes se obtienen multiplicando cada componente de $\mathbf{v}$ por el escalar α, es decir:

$$\alpha\mathbf{v} = \alpha\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \langle \alpha v_1, \alpha v_2, \alpha v_3 \rangle \qquad (2.8)$$

Vale la pena anotar que, desde el punto de vista de la representación geométrica, el efecto de multiplicar un vector $\mathbf{v}$ por un escalar es multiplicar su magnitud por el valor de α, si α es positivo el producto $\alpha\mathbf{v}$ es un vector de igual dirección que $\mathbf{v}$, si α es negativo el producto $\alpha\mathbf{v}$ es un vector de dirección contraria a $\mathbf{v}$. La figura 6 muestra el significado geométrico del producto de un vector bidimensional $\mathbf{v}$ por un escalar α para diferentes valores de α.

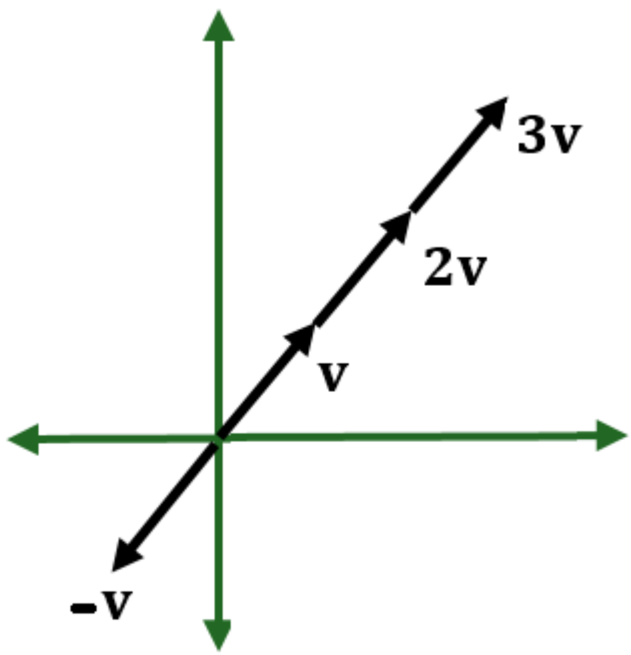

Figura 5. Representación del producto de un vector por un escalar
Fuente: Propia.

Opuesto de un vector

El opuesto de $\mathbf{v}$, denotado como $-\mathbf{v}$, es el vector que tiene igual magnitud que $\mathbf{v}$, pero sentido contrario, este vector resulta al realizar el producto de $\mathbf{v}$ por el escalar $\alpha = -1$. Visto sólo en términos de componentes, el opuesto de $\mathbf{v}$ se obtiene multiplicando por menos uno cada componente de **$\mathbf{v}$,** es decir, dado un vector $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ su opuesto corresponde al vector $-\mathbf{v} = \langle -v_1, -v_2, -v_3 \rangle$ la figura 6 también muestra esta idea.

Diferencia de vectores

Dados dos vectores $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$, la diferencia $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ se define como la suma de $\mathbf{u}$ y el opuesto de $\mathbf{v}$, esto significa que $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ es otro vector cuyas componentes corresponden a la deferencia de las respectivas componentes de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, es decir:

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v}) = \langle u_1 - v_1, u_2 - v_2, u_3 - v_3 \rangle \qquad (2.9)$$

Ejemplo 2.6: dados los vectores $\mathbf{u} = \langle 1, 3, -2 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle 3, \ 2, 3 \rangle$, hallar: a) $\mathbf{3u} - \mathbf{2v}$ b) $\mathbf{u} - \mathbf{v}$

Solución: a) $\mathbf{u} = \langle 1, 3, -2 \rangle$ entonces $3\mathbf{u} = 3\langle 1, 3, -2 \rangle = \langle 3, 9, -6 \rangle$; $\mathbf{v} = \langle 3, 2, 3 \rangle$ entonces $-2\mathbf{v} = -2\langle 3, 2, 3 \rangle = \langle -6, -4, -6 \rangle$, con lo que finalmente se obtiene que:

$$\mathbf{3u} - \mathbf{2v} = \langle 3, 9, -6 \rangle + \langle 3, 2, 3 \rangle = \langle 6, 11, -3 \rangle$$

b) $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v}) = \langle 1, 3, -2 \rangle + \langle -3, -2, -3 \rangle = \langle -2, \ 1, -5 \rangle$

Propiedades de operaciones básicas con vectores

En el desarrollo de operaciones asociadas a la suma de vectores y el producto de un vector por un escalar, así como en el estudio de otros aspectos propios de la asignatura, conviene tener claridad sobre un conjunto de propiedades que se cumplen estas operaciones, estas son:

Dados los vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ y los escalares α y β, se cumple las siguientes propiedades asociadas a la suma de vectores y al producto de un vector por un escalar.

1. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
2. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$
3. $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$
4. $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$
5. $\mathbf{0u} = \mathbf{0}$
6. $\mathbf{1u} = \mathbf{u}$
7. $\alpha(\beta\mathbf{u}) = (\alpha\beta)\mathbf{u}$
8. $\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}$
9. $(\alpha + \beta)\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u}$

Vectores en términos de vectores unitarios

Se entiende por vector unitario un vector de magnitud igual a 1, se tiene particularmente los casos de los vectores unitarios canónicos, que son vectores sobre los ejes coordenados, y los vectores unitarios en la dirección de un vector dado.

Vectores en términos de vectores unitarios canónicos

En este curso estamos, al hablar de vectores unitarios, estamos principalmente interesados en los vectores unitarios canónicos o aquellos que están sobre los ejes coordenados, en adelante nos referiremos a ellos solo como vectores unitarios, estos vectores y sus respectivas expresiones en términos de componentes son:

$$\boldsymbol{i} = \langle 1,0,0 \rangle \; vector\ unitario\ sobre\ el\ eje\ X$$

$$\boldsymbol{j} = \langle 0,1,0 \rangle \; vector\ unitario\ sobre\ el\ eje\ Y$$

$$\boldsymbol{k} = \langle 0,0,1 \rangle \; vector\ unitario\ sobre\ el\ eje\ Z$$

Dado que cada vector en el espacio tiene tres componentes en los ejes X, Y, Z, todo vector del espacio se puede escribir como una combinación lineal de los respectivos vectores unitarios, es decir, el vector $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ se puede escribir

$$\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \langle v_1, 0,0 \rangle + \langle 0, v_2, 0 \rangle + \langle 0,0, v_3 \rangle = v_1\boldsymbol{i} + v_2\boldsymbol{j} + v_3\boldsymbol{k} \qquad (2.10)$$

En la anterior expresión conviene tener presente que los valores v_1, v_2 , v_3 son las componentes escalares del vector $\mathbf{v}$.

Ejemplo 2.7: dado el vector $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$ con $A(-3, 1, 2)$; $B(2, 2, 3)$ hallar la representación de $\mathbf{v}$ en términos de los vectores unitarios.

Solución: en este caso se tiene:

$$\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_1 \rangle = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle = \langle 5, 1, 1 \rangle = 5\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$$

Vector unitario en la dirección de un vector dado

Si $\mathbf{v}$ es un vector no nulo su magnitud $|\mathbf{v}|$ es diferente de cero, si el vector dado se multiplica por el escalar $\frac{1}{|\mathbf{v}|}$ el resultado es un vector de magnitud igual a 1 que tiene la misma dirección, por tanto dado un vector $\mathbf{v}$, el vector unitario en la dirección de $\mathbf{v}$ está dado por $\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$. Nótese que nos referimos al vector unitario en la dirección de $\mathbf{v}$ y no a uno de los vectores unitarios canónicos, los cuales están en la dirección de algunos de los ejes.

Ejemplo 2.8: dado el vector $\mathbf{v} = \langle 5, 1, 1 \rangle = 5\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$, hallar el vector unitario en la dirección de $\mathbf{v}$

Solución: la magnitud de $\mathbf{v}$ es $|\mathbf{v}| = \sqrt{5^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$, por lo tanto el vector unitario en la dirección de $\mathbf{v}$ es:

$$\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{\mathbf{v}}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9}\mathbf{v} = \frac{\sqrt{3}}{9}\langle 5, 1, 1\rangle = \langle 5\frac{\sqrt{3}}{9}, \frac{\sqrt{3}}{9}, \frac{\sqrt{3}}{9}\rangle$$

Producto punto o producto escalar

En la sección anterior estudiamos las operaciones de suma y diferencia de vectores así como el producto de un vector por un escalar. En esta sección continuamos con operaciones de producto de dos vectores, resaltando el hecho que existen dos operaciones de este tipo, la primera es el producto punto o producto escalar y la segunda es el producto cruz o producto vectorial, el producto cruz se trata en la siguiente sección.

Definición de producto punto

Dados dos vectores $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$ el producto punto, denotado mediante $\mathbf{u}.\mathbf{v}$ es una cantidad escalar definida según indica la siguiente expresión.

$$\mathbf{u}.\mathbf{v} = \langle u_1, u_2, u_3\rangle\langle v_1, v_2, v_3\rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 \qquad (2.11)$$

La definición dada por (2.11) deja ver que el producto punto se halla sumando los productos de las respectivas componentes de los vectores. Dado que el resultado es una cantidad escalar, al producto punto también se le llama producto escalar.

Ejemplo 2.9: dados los vectores $\mathbf{u} = \langle 1, 3, 2\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle 2, -1, 2\rangle$, el producto escalar correspondiente es:

$$\mathbf{u}.\mathbf{v} = \langle 1, 3, 2\rangle.\langle 2, -1, 2\rangle = (1)(2) + (3)(-1) + (2)(2) = 2 - 3 + 4 = 3$$

En el contexto de los vectores resulta útil tener en cuenta el ángulo θ que forman dos vectores no nulos cuando éstos tienen el mismo punto inicial, para hallarlo se usa el siguiente teorema.

Teorema sobre ángulo entre dos vectores

Dados dos vectores $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$, el ángulo θ entre ellos está dado por:

$$\theta = cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{u}.\mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}\right) = cos^{-1}\left(\frac{u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}\right) \qquad (2.12)$$

La expresión dada en (2.12) muestra que la medida del ángulo se relaciona con las magnitudes de los vectores y el producto punto entre ellos. Se recomienda al estudiante la revisión de la demostración de este teorema.

Como un paso intermedio en la demostración del teorema anterior se encuentra que el producto escalar se puede expresar de la siguiente forma (lo que también se puede deducir fácilmente de (2.12):

$$\mathbf{u}.\mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|cos\theta \qquad (2.13)$$

Ejemplo 2.10: dados los vectores $\mathbf{u} = \langle 1, 3, 2\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle 2, -1, 2\rangle$, el producto escalar es $\mathbf{u}.\mathbf{v} = \mathbf{3}$ (Ejemplo 2.9). Se tiene además que $|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{14}}$ **;** $|\mathbf{v}| = \mathbf{3}$**,** por lo tanto el ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ es:

$$\theta = cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{u}.\mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}\right) = cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{3}}{3\sqrt{\mathbf{14}}}\right) = cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{\mathbf{14}}}{14}\right) \cong 74{,}49^{o}$$

Vectores ortogonales o perpendiculares

Se sabe que dos líneas son perpendiculares si forman un ángulo recto, o que mide 90^{o}, lo mismo se puede decir de dos vectores no nulos $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$**,** en cuyo caso se tiene $cos\theta = cos90^{o} = 0$, llegando entonces a que $\mathbf{u}.\mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|cos\theta = 0$. La conclusión del anterior razonamiento es que el producto punto de dos vectores no nulos es igual a cero.

En el estudio de esta asignatura puede resultar útil determinar si dos vectores dados son perpendiculares, para saber si lo son o no, basta hallar el producto punto y ver si es igual a cero.

Propiedades del producto punto

A continuación se presenta un conjunto de propiedades que cumple la operación de producto punto o producto escalar de dos vectores.

Dados los vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ y el escalare α, se cumple las siguientes propiedades asociadas al producto escalar.

1. $\mathbf{u}.\mathbf{v} = \mathbf{v}.\mathbf{u}$
2. $(\alpha\mathbf{u}).\mathbf{v} = \mathbf{u}.\alpha\mathbf{v} = \alpha(\mathbf{u}.\mathbf{v})$
3. $\mathbf{u}.(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u}.\mathbf{v} + \mathbf{u}.\mathbf{w}$
4. $\mathbf{u}.\mathbf{u} = |\mathbf{u}|^{\mathbf{2}}$
5. $\mathbf{0}.\mathbf{u} = \mathbf{0}$

Las demostraciones se dejan al estudiante como ejercicio.

Proyección de un vector $\mathbf{u}$ sobre un vector $\mathbf{v}$

La figura 2.7 ilustra geométricamente la idea de proyección de un vector $\mathbf{u}$ sobre un vector $\mathbf{v}$, la cual corresponde a un vector en la dirección de $\mathbf{v}$, en la misma figura se puede observar que tal proyección se puede hallar trazando la perpendicular, que pasa por el punto final de $\mathbf{u}$, sobre la línea que contiene a $\mathbf{v}$.

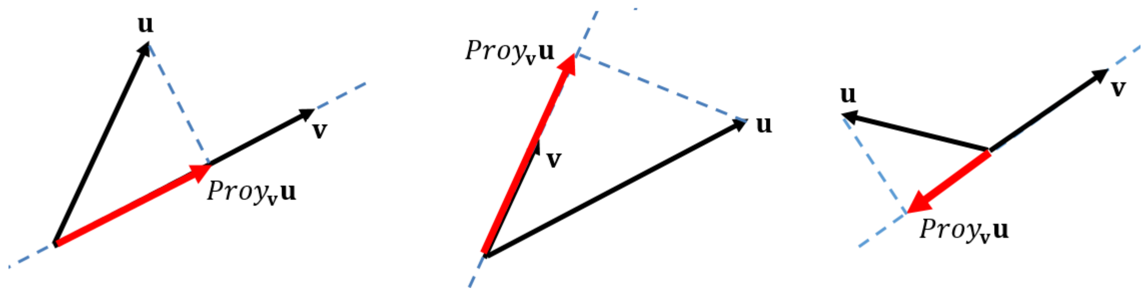

Figura 6. Diferentes casos de proyección de un vector sobre otro
Fuente: Propia.

La magnitud de la proyección, tal como lo indica la figura 7, corresponde a $|\mathbf{u}|cos\theta$, siendo θ el ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, a esta cantidad se le conoce también como componente escalar de $\mathbf{u}$ sobre $\mathbf{v}$, la que además se puede expresar como:

$$componete\ escalar\ de\ \mathbf{u}\ sobre\ \mathbf{v} = |\mathbf{u}|cos\theta = \frac{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|cos\theta}{|\mathbf{v}|} = \frac{\mathbf{u}.\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$$

Además, como señalamos anteriormente, el vector unitario en la dirección de $\mathbf{v}$ es $\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$, con lo que el vector proyección de $\mathbf{u}$ sobre $\mathbf{v}$ está dada por la siguiente expresión.

$$Proy_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = (|\mathbf{u}|cos\theta)\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$$

$$Proy_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \frac{(|\mathbf{u}||\mathbf{v}|cos\theta)}{|\mathbf{v}|}\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \left(\frac{\mathbf{u}.\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\right)\mathbf{v} \qquad (2.14)$$

Ejemplo 2.11: dados los vectores $\mathbf{u} = \langle 1, 3, 2\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle 2, -1, 2\rangle$, hallar la componente escalar de $\mathbf{u}$ sobre $\mathbf{v}$ y el vector proyección de $\mathbf{u}$ sobre $\mathbf{v}$.

Solución: la componente escalar se halla mediante:

$$componete\ escalar\ de\ \mathbf{u}\ sobre\ \mathbf{v} = |\mathbf{u}|cos\theta = \frac{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|cos\theta}{|\mathbf{v}|} = \frac{\mathbf{u}.\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$$

$$|\mathbf{u}|cos\theta = \frac{\mathbf{u}.\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{2-3+4}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

La proyección de $\mathbf{u}$ sobre $\mathbf{v}$ es:

$$Proy_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \left(\frac{\mathbf{u}.\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\right)\mathbf{v} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{9}}\langle 2,-1,2\rangle = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\langle 2,-1,2\rangle = \langle\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\rangle = \frac{2}{3}\boldsymbol{i} - \frac{1}{3}\boldsymbol{j} + \frac{2}{3}\boldsymbol{k}$$

Producto cruz o producto vectorial

Se inicia esta parte presentando la siguiente definición operacional del producto vectorial de dos vectores, como preámbulo o soporte de otros temas que se trabajan a lo largo del curso.

Definición del producto cruz o producto vectorial

Dados dos vectores $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$ no paralelos, su producto cruz se denotado mediante $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ y corresponde a una cantidad vectorial definida según indica la siguiente expresión.

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v} = (|\mathbf{u}||\mathbf{v}|sen\ \theta)\mathbf{n} \qquad (2.15)$$

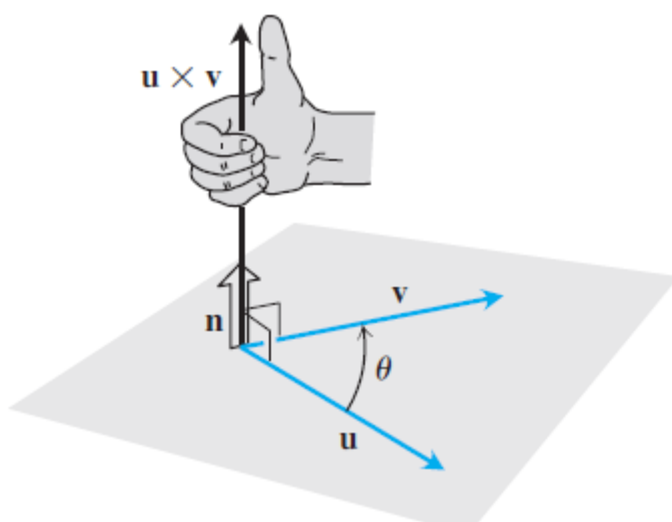

Figura 7. Ilustración de la regla de la mano derecha que da la dirección del producto cruz de dos vectores
Fuente: Propia.

Donde θ es el ángulo entre $\mathbf{u}$ **y** $\mathbf{v}$ y $\mathbf{n}$ es un vector unitario en la dirección perpendicular al plano que contiene a $\mathbf{u}$ **y** $\mathbf{v}$**.** La figura 8 ilustra lo que se conoce como regla de la mano derecha, y brinda una descripción cualitativa del hecho que el producto $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ es un vector perpendicular al plano que contiene los vectores, tal como lo indica la dirección en la que apunta el dedo pulgar cuando, los otros cuatro realizan un barrido de un ángulo θ de $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$, ¿cuál sería la dirección del producto $\mathbf{v}\times\mathbf{u}$?

De la definición dada en (2.15) se deduce que si dos vectores son paralelos su producto cruz es el vector nulo, esto en razón a que al ser paralelos, el ángulo θ es cero con lo cual $sen\theta = 0$, de lo que también se tiene que si el producto es el vector nulo es porque los vectores son paralelos.

Propiedades del producto cruz

A continuación se resume las propiedades que cumple el producto vectorial de vectores.

Dados los vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ y los escalares α y β, se cumple las siguientes propiedades asociadas al producto vectorial.

1. $(\alpha\mathbf{u})\times(\beta\mathbf{v}) = (\alpha\beta)(\mathbf{u}\times\mathbf{v})$
2. $\mathbf{u}\times(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \mathbf{u}\times\mathbf{v}+\mathbf{u}\times\mathbf{w}$
3. $\mathbf{u}\times\mathbf{v} = -(\mathbf{u}\times\mathbf{v})$
4. $(\mathbf{v}+\mathbf{w})\times\mathbf{u} = \mathbf{v}\times\mathbf{u}+\mathbf{w}\times\mathbf{u}$
5. $\mathbf{0}\times\mathbf{u} = \mathbf{0}$
6. $\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = (\mathbf{u}.\mathbf{w})\mathbf{v}-(\mathbf{u}.\mathbf{v})\mathbf{w}$

Es importante tener en cuenta el resumen los tres posibles resultados de producto cruz de pares de vectores unitarios canónicos, mostrado en la figura 2.9 a, donde también se muestra un esquema que permite recordar los resultados. Estas relaciones se pueden verificar a partir del uso de la regla de la mano derecha apoyados en el diagrama 2.9 b.

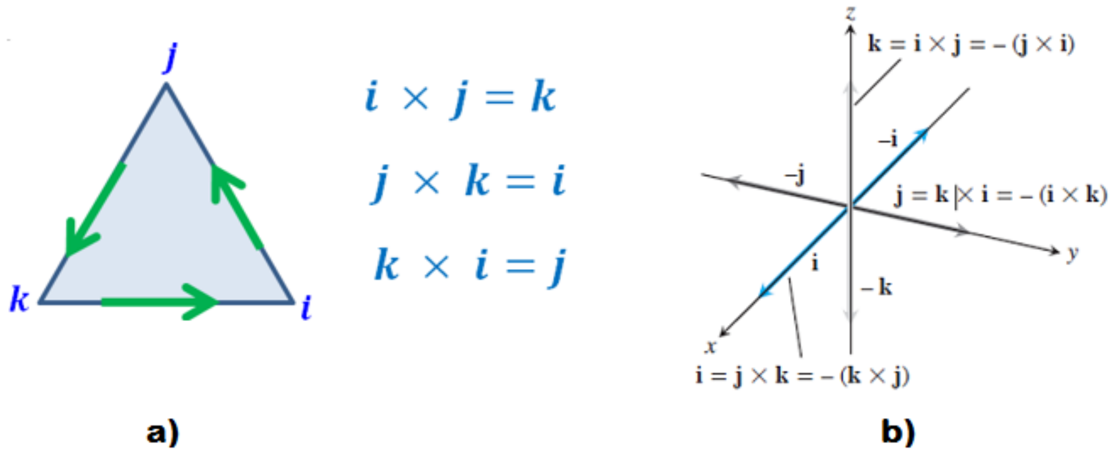

Figura 8. Resumen de resultados de producto cruz de vectores unitarios canónicos
Fuente: Propia.

Magnitud del producto cruz como área de un paralelogramo

Según (2.14) que la magnitud del producto cruz $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$**,** es $|\mathbf{u}\times\mathbf{v}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|sen\ \theta$. Si analizamos la figura 10, vemos que la base del paralelogramo construido a partir de la representación de los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ es $|\mathbf{u}|$, mientras que la altura es $|\mathbf{v}|sen\ \theta$, con lo cual el área del paralelogramo es $A = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|sen\ \theta$. De donde se concluye que la magnitud del producto cruz de dos vectores equivale al área del paralelogramo construido a partir de ellos.

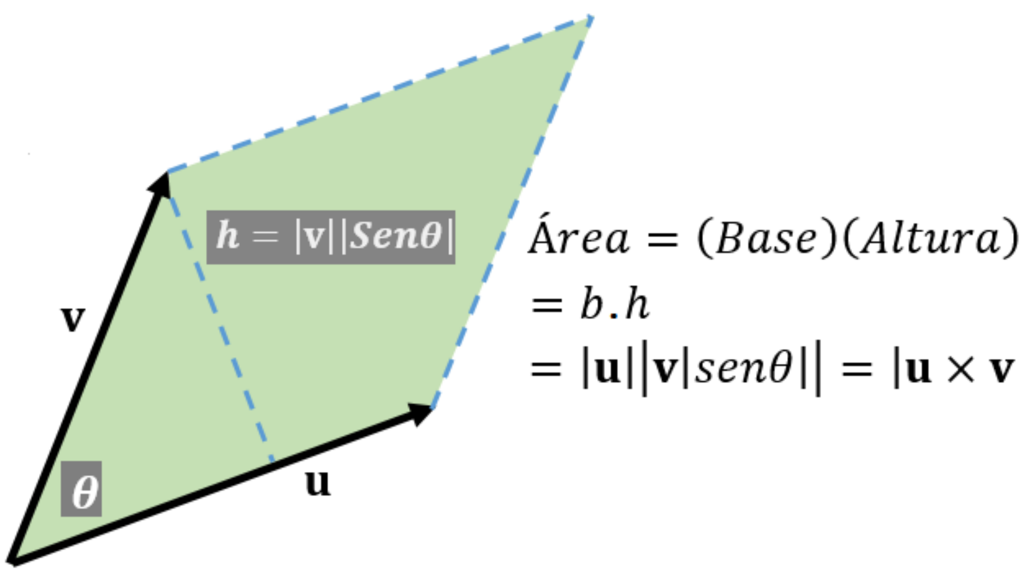

Figura 9. Módulo del producto cruz como área de un paralelogramo
Fuente: Propia.

Cálculo del producto vectorial mediante el uso de determinantes

Mediante el uso de determinantes podemos hallar el producto cruz de dos vectores que están dados en términos de sus componentes. El procedimiento se enuncia a continuación.

Dados dos vectores:

$$\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle = u_1\boldsymbol{i} + \ u_2\boldsymbol{j} + \ u_3\boldsymbol{k}$$

$$\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle = v_1\boldsymbol{i} + \ v_2\boldsymbol{j} + \ v_3\boldsymbol{k}$$

El producto cruz $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ se puede calcular mediante el cálculo del siguiente determinante:

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}\boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}\boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}\boldsymbol{k} \qquad (2.15)$$

Se recomienda al estudiante realizar el desarrollo que conduce a este resultado.

Ejemplo 2.12: dados los vectores $\mathbf{u} = \langle 1, 3, 2 \rangle = \boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$ y $\mathbf{v} = \langle 2, -1, 2 \rangle = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$, usar la fórmula (2.15) para hallar el producto vectorial $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$.

Solución:

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v} = (\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k})\times(2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}\boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}\boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}\boldsymbol{k} = \mathbf{8}\boldsymbol{i} + \mathbf{2}\boldsymbol{j} - \mathbf{8}\boldsymbol{k}$$

Rectas en el espacio tridimensional

En cursos previos de matemáticas se ha tratado el tema de una línea recta en el plano, en esta sección trataremos las ecuaciones de rectas en el espacio, para lo cual resulta de vital importancia los principios asociados a vectores. En la siguiente tratamos el tema correspondiente a planos.

Con base en el valor de la pendiente de una recta, la cual es una medida de su inclinación, y un punto por donde pasa la recta podemos hallar la respectiva ecuación de la recta en el plano. Para el caso tridimensional la ecuación de la recta se determina a partir de un vector que define su dirección y un punto por donde pasa la recta.

Definición de recta en el espacio

Sea $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle = v_1\boldsymbol{i} + v_2\boldsymbol{j} + v_3\boldsymbol{k}$ un vector y $P_0(x_0, y_0, z_0)$ un punto en el espacio, una recta L que pasa por el punto P_0 corresponde al conjunto de todos los puntos $P(x, y, z)$ del espacio tales que el vector $\overrightarrow{P_0P}$ es paralelo al vector $\mathbf{v}$, es decir, $\overrightarrow{P_0P} = t\mathbf{v}$, donde t es un número real cuyo valor depende de cada punto específico de la recta. La figura 11 ilustra estas ideas.

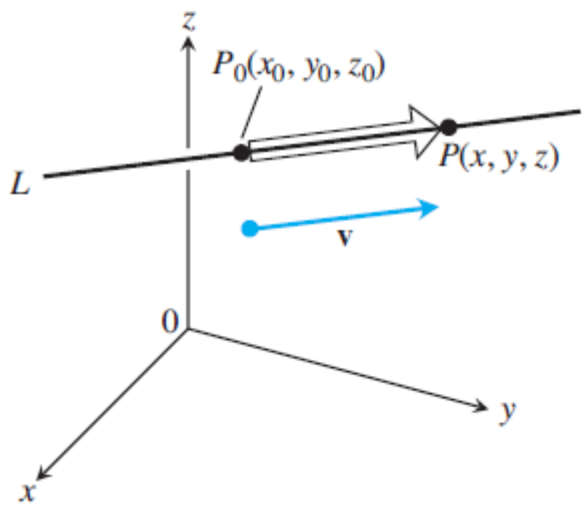

Figura 10. Una recta L en el espacio dada en términos de un vector paralelo a un vector dado
Fuente: Propia.

La ecuación de la recta está dada por:

$$(x - x_0)\boldsymbol{i} + (y - y_0)\boldsymbol{j} + (z - z_0)\boldsymbol{k} = t(v_1\boldsymbol{i} + v_2\boldsymbol{j} + v_3\boldsymbol{k}) \qquad (2.16)$$

Si definimos el vector de posición de cada punto $P(x, y, z)$ como $\mathbf{r}(t)$ y el del punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ como $\mathbf{r_0}$, podemos escribir la forma vectorial de la ecuación 2.16, esta es:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r_0} + t\mathbf{v} \quad \mathbf{t} \in (-\infty, \infty) \qquad (2.17)$$

Ecuación paramétrica de una recta en el espacio

Extendemos aquí los principios de ecuaciones paramétricas tratadas en la cartilla de la semana uno al caso de rectas en el espacio. A partir de la ecuación (2.16) y el concepto de igualdad de vectores podemos darnos cuenta que:

$$x = x_0 + tv_1, \quad y = y_0 + tv_{2,} \quad z = z_0 + tv_3 \qquad t \in (-\infty, \infty) \qquad (2.18)$$

Lo cual corresponde a la representación paramétrica de la recta L que pasa por $P_0(x_0, y_0, z_0)$ paralelamente al vector $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle = v_1\boldsymbol{i} + v_2\boldsymbol{j} + v_3\boldsymbol{k}$.

Ejemplo 2.13: dado el punto $P_0(-3, 1, 2)$ y el vector $\mathbf{v} = 2\boldsymbol{i} + \ 3\boldsymbol{j} \ - 4\boldsymbol{k}$

Hallar la representación paramétrica de la recta que pasa por P_0 y es para lela al vector $\mathbf{v}$.

Solución: con $P_0(-3, 1, 2)$ y $\mathbf{v} = 2\boldsymbol{i} + \ 3\boldsymbol{j} \ - 4\boldsymbol{k}$ tenemos:

$x_0 = -3;\ y_0 = 1;\ z_0 = 2;\ v_1 = 2;\ v_2 = 3;\ v_3 = -4$, con lo cual, aplicando la ecuación xx encontramos que la expresión paramétrica buscada es:

$$x = -3 + 2t, \quad y = 1 + 3t \quad z = 2 - 4t \qquad t \in (-\infty, \infty)$$

Ejemplo 2.14: escribir paramétricamente el segmento de recta que pasa por los puntos $P(-2, 1, -2)$ y $Q(1, -1,3)$.

Solución: El vector $\overrightarrow{PQ} = (1 - (-2))\boldsymbol{i} + (-1 - 1)\boldsymbol{j} + \big(3 - (-2)\big)\boldsymbol{k} = 3\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}$**,** corresponde al vector $\mathbf{v}$**,** con lo cual al tomar el punto $P_0 = P(-2, 1, -2)$, tenemos $x_0 = -2;\ y_0 = 1;\ z_0 = -2;\ v_1 = 3;\ v_2 = -2;\ v_3 = 5$, con lo que, según la ecuación xx, cada punto (x, y, z) corresponde a $(-2 + 3t,\ 1 - 2t, -2 + 5t)$. En el caso particular del extremo $P(-2, 1, -2)$ del segmento se requiere $t = 0$, mientras que en el caso del extremo $Q(1, -1,3)$. se requiere $t = 1$, por tanto la representación paramétrica del segmento es $(-2 + 3t,\ 1 - 2t, -2 + 5t), con\ t \in [0, 1]$.

Distancia entre un punto y una recta en el espacio

La distancia de un punto a una recta en el espacio, al igual que la distancia de un punto a una recta en el plano, es la longitud del segmento perpendicular que une al punto con la recta, en este caso, dado un punto A del espacio y un punto P sobre la recta, podemos hallar la magnitud de la componente escalar del vector PA en la dirección de un vector perpendicular a la recta. Según se muestra figura 12, esta distancia es igual a $\left|\overrightarrow{PA}\right| sen\theta$, lo cual corresponde a $\frac{\left|\overrightarrow{PA}\times \mathbf{v}\right|}{|\mathbf{v}|}$, por tanto la distancia d un punto A a una recta L que pasa por P y es paralela a un vector $\mathbf{v}$ está dada por:

$$d = \frac{\left|\overrightarrow{PA}\times \mathbf{v}\right|}{|\mathbf{v}|} \qquad (2.19)$$

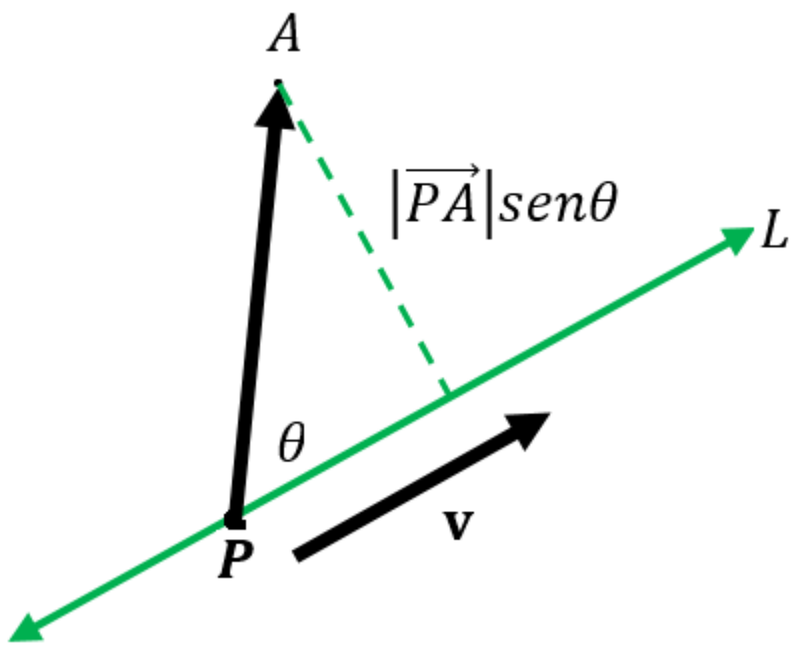

Figura 11 Ilustración de la distancia de un punto a una recta en el espacio
Fuente: Propia.

Plano en el espacio

En el espacio XYZ un plano está determinado por el mismo y por su orientación definida mediante un vector perpendicular al plano. Dado un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ en el plano M y un vector $\mathbf{n} = A\boldsymbol{i} + B\boldsymbol{j} + C\boldsymbol{k}$ perpendicular al plano, se tiene entonces que el plano M está constituido por todos los puntos $P(x, y, z)$ tales que cada vector $\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0)\boldsymbol{i} + (y - y_0)\boldsymbol{j} + (z - z_0)\boldsymbol{k}$ es perpendicular a $\mathbf{n}$, por lo cual el producto $\mathbf{n} \times \overrightarrow{P_0P}$ es igual a cero, teniéndose entonces lo siguiente:

Ecuaciones vectoriales y escalar de un plano

Dado un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y un vector $\mathbf{n} = A\boldsymbol{i} + B\boldsymbol{j} + C\boldsymbol{k}$**,** el plano M perpendicular a $\mathbf{n}$ y que contiene al punto P tiene la siguiente ecuación vectorial.

$$(A\boldsymbol{i} + B\boldsymbol{j} + C\boldsymbol{k}) \times [(x - x_0)\boldsymbol{i} + (y - y_0)\boldsymbol{j} + (z - z_0)\boldsymbol{k}] = \mathbf{0} \qquad (2.20)$$

El desarrollo del producto punto indicado en la ecuación (2.20) conduce a la ecuación cartesiana del plano dada a continuación.

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Ejemplo 2.15: hallar la ecuación cartesiana del plano que pasa por el punto $P(-2,1,5)$ y es perpendicular al vector $\mathbf{n} = (3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k})$.

Solución: di $P(-2,1,5)$ y $(3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k})$ $x_0 = -2;\ y_0 = 1;\ z_0 = 5$ y $A = 3;\ B = 2;\ C = -4$ con lo cual la ecuación cartesiana del plano es:

$$3(x+2) + 2(y-1) - 4(z-5) = 0$$

La anterior ecuación se puede simplificar realizando los productos indicados con lo que finalmente resulta:

$$3x + 2y - 4z = -24$$

Distancia de un punto a un plano

Dado un plano M con un vector normal $\mathbf{n} = A\boldsymbol{i} + B\boldsymbol{j} + C\boldsymbol{k}$ y un punto P sobre el plano, la distancia de un punto A hasta el plano corresponde a la magnitud de la proyección del vector PA sobre el vector $\mathbf{n}$**,** esta distancia está dada por**:**

$$d = \left| \overrightarrow{PA} \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} \right|$$

Unidad 2

Cálculo con funciones vectoriales de variable real

Cálculo multivariado

Autor: Danilo de Jesús Ariza Agámez

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina
MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Introducción

En esta tercera cartilla iniciamos la aplicación de principios de cálculo diferencial e integral en contextos de varias variables, en este caso se tiene funciones vectoriales, entendidas como funciones de variable real cuyos valores son vectores en de varias componentes o variables. Abordamos particularmente temas relacionados con representación vectorial de una curva en el espacio, límite y continuidad de funciones vectoriales, así como derivadas e integrales de las mismas. Dentro del campo de estas temáticas nos encontramos con importantes aplicaciones como velocidad y aceleración asociados con una curva, vector tangente, vector normal y longitud de arco, entre otras. Su estudio se hace importante en el tratamiento de los temas de las unidades tres y cuatro las que a su vez son ampliamente aplicables en diferentes áreas de ciencias e ingeniería.

Recomendaciones metodológicas

El tratamiento básico de funciones vectoriales y la operaciones asociadas con límites, derivadas e integrales de las mismas es recomendable que el estudiante realice primero la lectura de esta cartilla, se recomienda que posteriormente haga uso de video capsulas y ejercicios resueltos que se presentan en las lecturas complementarias, de tal manera que se propicie el mejor acercamiento posible a la asimilación efectiva de conocimientos, con lo cual se espera que se encuentre lo suficientemente preparados para desarrollar los ejercicios que se proponen como actividad de repaso.

Desarrollo temático

Cálculo con funciones vectoriales de variable real

Representación vectorial de una curva en el espacio

Una curva en el espacio puede asociarse intuitivamente con el movimiento de un punto $P(x, y, z)$ durante un intervalo de tiempo I. En cada instante t las coordenadas x, y, z del punto corresponden a números reales asociadas a funciones reales de variable real, $x = f(t),\ y = g(t),\ z = h(t)$ con $t \in I,$ lo cual corresponde a una representación paramétrica de la curva. El conjunto de todos los puntos (x, y, z) o $(f(t),\ g(t),\ h(t))$ para todos los valores permitidos de t constituyen la curva o trayectoria del punto P.

Apoyados en los principios de vectores en el espacio, estudiados en la cartilla de la semana 2, podemos dar una representación vectorial de la curva, correspondiente al vector de posición de P en cada instante $t,$ la cual está dada por:

$$\mathbf{r}(t) = f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j} + h(t)\boldsymbol{k} \qquad (3.1)$$

Dado que en general t es un número real, $\mathbf{r}(t)$ es una función vectorial pero de variable real.

Ejemplo 3.1:

La figura 1 muestra la curva o gráfica de la función vectorial dada por:

$$\mathbf{r}(t) = (cost)\boldsymbol{i} + (sent)\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}$$

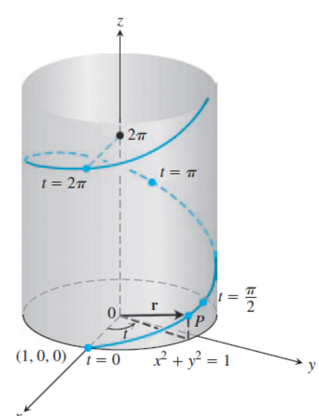

Figura 1. Ejemplo de representación de una curva en el espacio
Fuente: Propia.

Límites de funciones vectoriales

Teniendo en cuenta que los valores de las funciones vectoriales son vectores cuyas componentes son funciones reales de una variable real, se extiende a este caso los fundamentos de límite de funciones reales, en la siguiente sección se estudia la continuidad de funciones vectoriales de forma similar.

Definición de límite de una función vectorial

Dada una función vectorial de variable real $\mathbf{r}(t) = f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j} + h(t)\boldsymbol{k}$ con dominio D y $\boldsymbol{L}$ un vector. Se dice que la función $\mathbf{r}$ tiende o se aproxima al límite $\boldsymbol{L}$ cuando t tiende o se aproxima a t_0 si para todo valor de $\epsilon > 0$, existe un valor de $\delta > 0$, tal que para todo $t \in D$ se cumple que $|\mathbf{r}(t) - \boldsymbol{L}| < \epsilon$ siempre que $0 < |t - t_0| < \delta$. Para indicar que $\mathbf{r}$ tiende a $\boldsymbol{L}$ cuando t tiende a t_0 se escribe:

$$\lim_{t \to t_0} \mathbf{r}(t) = \boldsymbol{L} \qquad (3.2)$$

Si el vector $\boldsymbol{L}$ es $\boldsymbol{L} = L_1\boldsymbol{i} + L_2\boldsymbol{j} + L_3\boldsymbol{k}$**,** se encuentra que la ecuación (3.2) se cumple cuando:

$$\lim_{t \to t_0} f(t) = L_1 \,; \qquad \lim_{t \to t_0} g(t) = L_2 \,; \qquad \lim_{t \to t_0} h(t) = L_3$$

También se suele escribir la ecuación (3.2) como

$$\lim_{t \to t_0} \mathbf{r}(t) = (\lim_{t \to t_0} f(t))\boldsymbol{i} + (\lim_{t \to t_0} g(t))\boldsymbol{j} + (\lim_{t \to t_0} h(t))\boldsymbol{k} \qquad (3.3)$$

Ejemplo 3.2: Para la función $\mathbf{r}(t) = (sen^2 t)\boldsymbol{i} + (cost)\boldsymbol{j} - 3t^2\boldsymbol{k}$**,** se tiene que

$$\lim_{t \to \frac{\pi}{3}} \mathbf{r}(t) = \lim_{t \to \frac{\pi}{3}} (sen^2 t)\boldsymbol{i} + \lim_{t \to \frac{\pi}{3}} (cost)\boldsymbol{j} - \lim_{t \to \frac{\pi}{3}} (3t^2)\boldsymbol{k}$$

$$\lim_{t \to \frac{\pi}{3}} \mathbf{r}(t) = sen^2\left(\frac{\pi}{3}\right)\boldsymbol{i} + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\boldsymbol{j} - 3\left(\frac{\pi}{3}\right)^2\boldsymbol{k} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\boldsymbol{i} + \left(\frac{1}{2}\right)\boldsymbol{j} - \mathbf{3}\left(\frac{\pi^2}{9}\right)$$

$$\lim_{t \to \frac{\pi}{3}} \mathbf{r}(t) = \frac{3}{4}\boldsymbol{i} + \left(\frac{1}{2}\right)\boldsymbol{j} - \left(\frac{\pi^2}{3}\right)\boldsymbol{k}$$

Continuidad de una función vectorial

Una función vectorial $\mathbf{r}(t) = f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j} + h(t)\boldsymbol{k}$ es continua en $t = t_0$ si cada una de las funciones componentes $f(t),\ g(t),\ h(t)$ son continuas en $t = t_0$. Se dice que la función $\mathbf{r}(t)$ es continua si es continua en cada valor de t perteneciente a su dominio. La función del ejemplo 3.2 es una función continua en $(-\infty, \infty)$ en razón a que las funciones $sen^2 t,\ cost, 3t^2$ son funciones continuas en ese intervalo.

Derivadas de una función vectorial

Si $\mathbf{r}(t) = f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j} + h(t)\boldsymbol{k}$ es función vectorial, se define el incremento relativo de $\mathbf{r}(t)$ mediante:

$$\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta \boldsymbol{t}} = \frac{\mathbf{r}(t + \Delta \boldsymbol{t}) - \mathbf{r}(t)}{\Delta \boldsymbol{t}}$$

Lo que se desarrolla, mediante la aplicación de las definiciones de las funciones componentes, en la siguiente expresión.

$$\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta \boldsymbol{t}} = \frac{[f(t + \Delta t) - f(t)]\boldsymbol{i} + [g(t + \Delta t) - g(t)]\boldsymbol{j} + [h(t + \Delta t) - h(t)]}{\Delta t}$$

$$\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta \boldsymbol{t}} = \left[\frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}\right]\boldsymbol{i} + \left[\frac{g(t + \Delta t) - g(t)}{\Delta t}\right]\boldsymbol{j} + \left[\frac{h(t + \Delta t) - h(t)}{\Delta t}\right]\boldsymbol{k} \qquad (3.4)$$

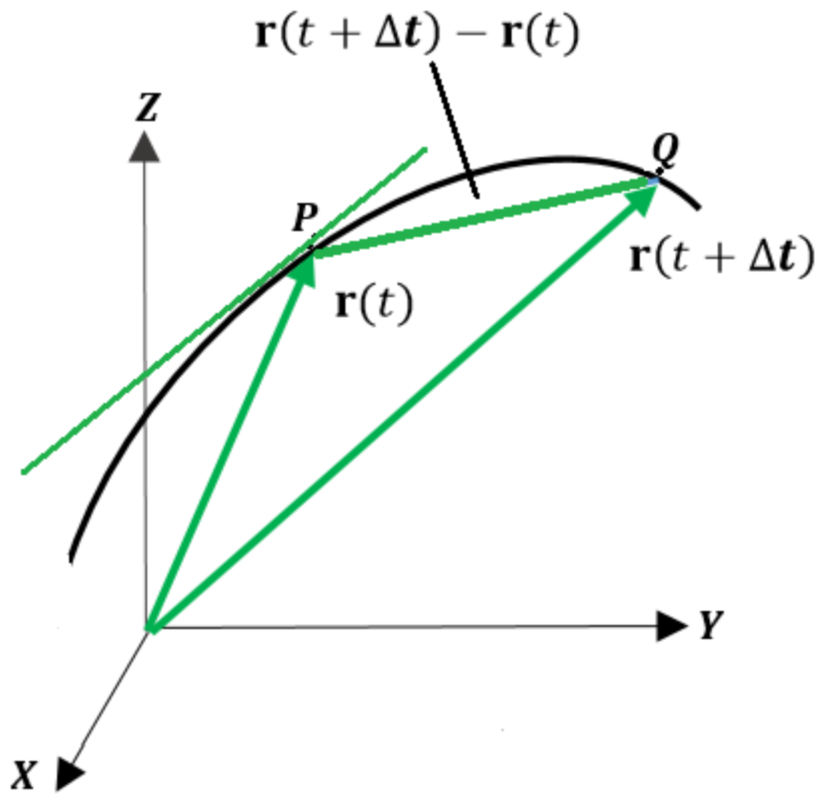

Figura 2. Variación de una función vectorial, preámbulo para la derivada
Fuente: Propia.

En la figura 2, a partir de (3.4), si $\Delta t \to 0$ el punto Q se aproxima al punto P, con lo cual la recta que contiene a PQ se aproxima a la recta tangente a la curva de la función $\mathbf{r}(t)$, además, el incremento relativo definido en (3.4) se aproxima al siguiente valor límite:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta \boldsymbol{t}}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} \right] \boldsymbol{i} + \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{g(t + \Delta t) - g(t)}{\Delta t} \right] \boldsymbol{j} + \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{h(t + \Delta t) - h(t)}{\Delta t} \right] \boldsymbol{k} \qquad (3.5)$$

Si cada una de las funciones componentes $f(t),\ g(t),\ h(t)$ son derivables en $x = t_0$, el lado derecho de la ecuación (3.5) se convierte en:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta \boldsymbol{t}} = \frac{df}{dt} \boldsymbol{i} + \frac{dg}{dt} \boldsymbol{j} + \frac{dh}{dt} \boldsymbol{k} \qquad (3.6)$$

La ecuación anterior precisamente define la derivada de la función vectorial $\mathbf{r}(t)$**,** que se resume formalmente en la siguiente definición.

Dada una función vectorial $\mathbf{r}(t) = f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j} + h(t)\boldsymbol{k}$, la derivada de $\mathbf{r}(t)$ en t existe si existen las derivadas $\frac{df}{dt}, \frac{dg}{dt}, \frac{dh}{dt}$ de sus funciones componentes, en cuyo caso la derivada $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ se define mediante:

$$\mathbf{r}'(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta \boldsymbol{t}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta \boldsymbol{t}) - \mathbf{r}(t)}{\Delta \boldsymbol{t}} = \frac{df}{dt}\boldsymbol{i} + \frac{dg}{dt}\boldsymbol{j} + \frac{dh}{dt}\boldsymbol{k}$$

Se dice además que una función $\mathbf{r}(t)$ es derivable si es derivable en todo punto de su respectivo dominio. El significado geométrico de la derivada de una función vectorial corresponde al vector tangente a la curva, elemento análogo al valor de la pendiente de la recta tangente a una curva plana. También se suele decir que una función vectorial es derivable si su curva es una curva suave, entendiéndose por curva suave aquella para la cual su derivada es continua y nunca es el vector nulo.

Derivada de una función vectorial como velocidad de una partícula

Si consideramos el vector $\mathbf{r}(t)$ que define una función vectorial como el vector posición de una partícula que se mueve sobre la curva, entonces la derivada de la función vectorial en cualquier instante t corresponde al vector velocidad de la partícula, es decir:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \qquad (3.7)$$

La dirección del vector $\mathbf{v}(t)$ es la dirección de la recta tangente a la trayectoria y su magnitud corresponde a la rapidez con que se mueve la partícula. La Figura 3.3 ilustra esta idea.

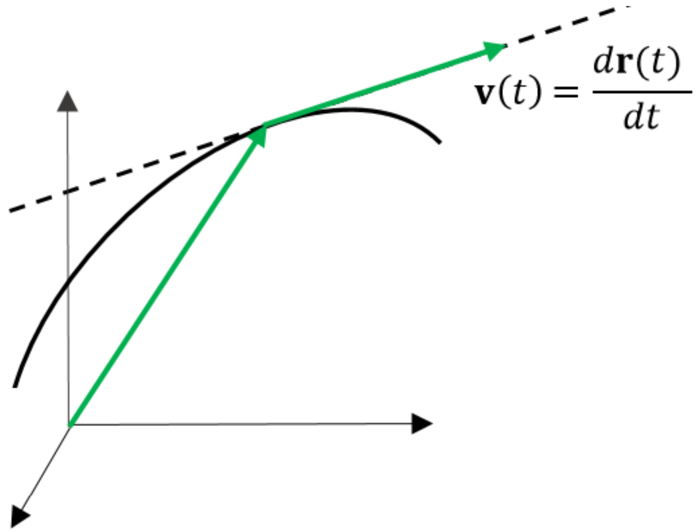

Figura 3. Ilustración del significado geométrico de la velocidad de una curva
Fuente: Propia.

Si existe la derivada de la derivada de $\mathbf{r}(t)$, es decir, la derivada de $\mathbf{v}(t)$ en un instante t el resultado es el vector aceleración de la partícula, es decir:

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\mathbf{v}(t)}{dt^2} \qquad (3.8)$$

Ejemplo 3.3: dada la función $\mathbf{r}(t) = (sen^2t)\boldsymbol{i} + (cost)\boldsymbol{j} - 3x^2\boldsymbol{k}$ hallar los vectores velocidad y aceleración, así como la rapidez de una partícula que se mueve sobre la curva.

Solución:

$$\mathbf{r}(t) = (sen^2t)\boldsymbol{i} + (cost)\boldsymbol{j} - 3t^2\boldsymbol{k}$$

$$\mathbf{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{dt} = (2sent.cost)\boldsymbol{i} - (sen)\boldsymbol{j} - 6t\boldsymbol{k} = (sen2t)\boldsymbol{i} - (sen)\boldsymbol{j} - 6t\boldsymbol{k}$$

$$\mathbf{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{dt} = (2cos2t)\boldsymbol{i} - (cost)\boldsymbol{j} - 6\boldsymbol{k}$$

La rapidez de la partícula es la magnitud del vector velocidad, es decir.

$$Rapidez = |\mathbf{v}(t)| = \sqrt{(sen2t)^2 + (sent)^2 + 36t^2}$$

Si se quiere el valor de la rapidez para un valor específico de t se debe remplazar t en la expresión de la rapidez.

Reglas de derivación de funciones vectoriales

Las derivadas de funciones vectoriales se dan en términos de las derivadas de sus funciones escalares componentes, razón por la cual se cumple las mismas reglas que en el caso de funciones reales de variable real, estas reglas se enuncian sin demostración seguidamente.

Dadas las funciones vectoriales derivables $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$, un vector constante $\mathbf{c}$ y una función escalar derivable f, se cumple el siguiente conjunto de reglas de derivación.

$$1\ De\ una\ función\ constante: \frac{d\mathbf{c}}{dt} = 0$$

$$1\ De\ una\ constante\ escalar\ por\ una\ función\ vectorial: \frac{d[\mathbf{cu}(t)]}{dt} = c\mathbf{u}'(t)$$

$$De\ una\ función\ escalar\ por\ una\ vectorial: \frac{d[f(t)\mathbf{u}(t)]}{dt} = f'(t)\mathbf{u}(t) + f(t)\mathbf{u}'(t)$$

$$De\ una\ suma\ o\ resta\ de\ funciones\ vectoriales: \frac{d[\mathbf{u}(t) \pm \mathbf{v}(t)]}{dt} = \mathbf{u}'(t) \pm \mathbf{v}'(t)$$

$$Del\ producto\ punto: \frac{d[\mathbf{u}(t).\mathbf{v}(t)]}{dt} = \mathbf{u}'(t).\mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t).\mathbf{v}'(t)$$

$$Del\ producto\ cruz: \frac{d[\mathbf{u}(t)\times\mathbf{v}(t)]}{dt} = \mathbf{u}'(t)\times\mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t)\times\mathbf{v}'(t)$$

$$De\ composición\ escalar: \frac{d[\mathbf{u}[f(t)]}{dt} = f'(t)\mathbf{u}'(f(t))$$

Integrales indefinidas de funciones vectoriales

Si $\mathbf{R}(t)$ es una función vectorial derivable, es también una antiderivada de otra función $\mathbf{r}(t)$ en un intervalo I si la derivada $\frac{d\mathbf{R}}{dt}$ es igual a $\mathbf{r}(t)$, análogo al caso de funciones escalares, se cumple que el conjunto de todas las antiderivadas de la función $\mathbf{r}(t)$, son de la forma $\mathbf{R}(t) + \mathbf{c}$ donde $\mathbf{c}$ es un vector constante arbitrario, este conjunto de antiderivadas es lo que se conoce como integral indefinida de $\mathbf{r}(t)$**,** que se define formalmente a continuación.

Dada una función vectorial $\mathbf{r}(t)$ su integral indefinida respecto a la variable t corresponde al conjunto de todas las antiderivadas de $\mathbf{r}(t)$, es decir:

$$\int \mathbf{r}(t)dt = \mathbf{R}(t) + \mathbf{c} \qquad con\ \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \mathbf{r}(t) \qquad (3.8)$$

Vale señalar que el cálculo de integrales indefinidas se realiza en términos de las integrales de las componentes. El ejemplo 3.4 muestra este hecho.

Ejemplo 3.4: Hallar la integral indefinida de la función

$$\mathbf{r}(t) = (sen\ 3t)\boldsymbol{i} + (4t)\boldsymbol{j} - (2cost)\boldsymbol{k}$$

Solución

$$\int \mathbf{r}(t)dt = \int [(sen\ 3t)\boldsymbol{i} + (4t)\boldsymbol{j} - (2cost)\boldsymbol{k}]dt$$

$$\int \mathbf{r}(t)dt = \int [(sen\ 3t)\boldsymbol{i}]dt + \int [(4t)\boldsymbol{j}]dt - \int [(2cost)\boldsymbol{k}]dt$$

$$\int \mathbf{r}(t)dt = -\frac{cos3t}{3}\boldsymbol{i} + (2t^2)\boldsymbol{j} - (2sent)\boldsymbol{k} + \mathbf{c}$$

Integral definida de una función vectorial

Dada una función vectorial $\mathbf{r}(t) = f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j} + h(t)\boldsymbol{k}$ cuyas componentes son integrables en un intervalo $[a,\ b]$, entonces $\mathbf{r}(t)$ también es integrable en $[a,\ b]$ y la integral está dada por:

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)dt = \left(\int_a^b f(t)dt\right)\boldsymbol{i} + \left(\int_a^{bg} (t)dt\right)\boldsymbol{j} + \left(\int_a^b h(t)dt\right)\boldsymbol{k} \qquad (3.9)$$

Ejemplo 3.5: La integral de $\mathbf{r}(t) = (sen\ 3t)\boldsymbol{i} + (4t)\boldsymbol{j} - (2cost)\boldsymbol{k}$ en el intervalo $[a,\ b]$ es:

$$\int_0^\pi \mathbf{r}(t)dt = \int_0^\pi [(sen\ 3t)\boldsymbol{i} + (4t)\boldsymbol{j} - (2cost)\boldsymbol{k}]\ dt$$

$$= \left(\int_0^\pi (sen\ 3t)\ dt\right)\boldsymbol{i} + \left(\int_0^\pi (4t)\ dt\right)\boldsymbol{j} - \left(\int_0^\pi (2cost)\right)\boldsymbol{k}$$

$$= \left[-\frac{cos3t}{3}i\right]_0^\pi + \left[\frac{4t^2}{2}\right]_0^\pi - [2sent]_0^\pi = -\left(\frac{-1-1}{3}\right)i + 2\pi^2\boldsymbol{j} + 0\boldsymbol{k} = -\frac{2}{3}\boldsymbol{i} + 2\pi^2\boldsymbol{j}$$

Longitud de arco de una curva en el espacio

El cálculo integral de funciones vectoriales nos permite hallar la longitud de arco de una curva en el espacio, la definición correspondiente se muestra a continuación:

Cálculo de la longitud de arco de una curva en el espacio

Dada una curva suave definida vectorialmente por $\mathbf{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}$ **en** $[a, b]$, la longitud de la curva recorrida una vez en desde $t = a$ hasta $t = b$ está dada por:

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt \quad (3.10)$$

En la ecuación (3.10) la raíz cuadrada corresponde a la magnitud del vector velocidad de la curva, o de una partícula que se mueve sobre ella, lo que nos permite escribir la longitud de arco en términos de la integral de la velocidad, es decir:

$$L = \int_a^b |\mathbf{v}| dt \qquad (3.11)$$

Ejemplo 3.6: una partícula se mueve en el espacio a lo largo de la curva dada por $\mathbf{r}(t) = (cost)\boldsymbol{i} + (sent)\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}$, la longitud de arco recorrida entre $t = 0$ y $t = 2\pi$ es:

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt \;=\int_0^{2\pi} \sqrt{(-sent)^2 + (cost)^2 + (1)^2 dt}$$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{sen^2 t + cos^2 2 + 1 dt} \;= \int_0^{2\pi} \sqrt{2} dt \;= \sqrt{2} t = 2\sqrt{2}\pi$$

Vector tangente unitario a una curva

Se sabe que la dirección de la velocidad a una curva suave en un punto dado es tangente a la curva, por tanto podemos definir el vector tangente unitario como se indica luego en la ecuación (3.2). La figura 4 ilustra la idea del vector tangente unitario a una curva

$$vector\ tangente\ unitarioa\ una\ curva = \mathbf{T} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \qquad (3.12)$$

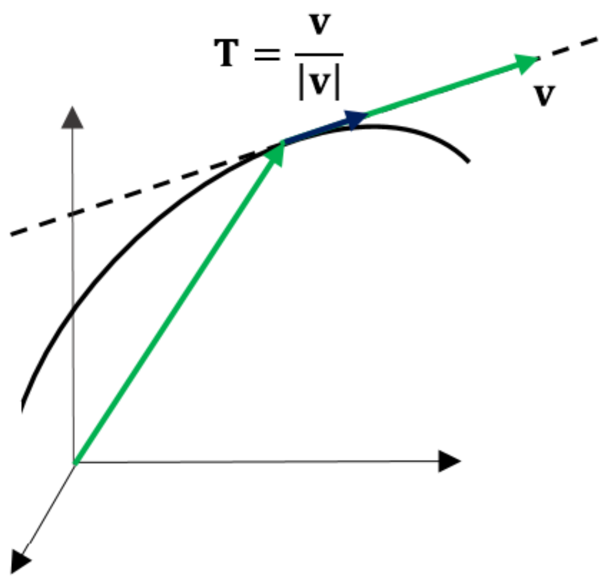

Figura 3. Vector tangente unitario a una curva
Fuente: Propia.

Curvatura de una curva plana

La curvatura se refiere a la forma y ritmo con que una curva va cambiando su dirección. En el caso de una curva suave en el plano esto corresponde al cambio de dirección del vector tangente unitario. Se define la curvatura de una curva suave a la razón de cambio por unidad de longitud del vector tangente unitario $\mathbf{T}$. Si se representa mediante κ, la curvatura se halla mediante:

$$\kappa = \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right| \qquad (3.13)$$

Un valor grande de κ en un punto P significa que $\mathbf{T}$ gira muy rápido dando una muy marcada curvatura en P.

Si la curva C está dada vectorialmente por $\mathbf{r}(t)$, teniendo en cuenta la regla de la cadena y otras sustituciones, la curvatura se calcula mediante:

$$\kappa = \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right| = \left|\frac{d\mathbf{T}}{dt}.\frac{dt}{ds}\right| = \frac{1}{\left|{ds}/{dt}\right|}\left|\frac{d\mathbf{T}}{dt}\right| = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\left|\frac{d\mathbf{T}}{dt}\right| \qquad (3.14)$$

Ejemplo 3.7: curvatura de una circunferencia de radio a. La circunferencia se representa paramétricamente mediante $\mathbf{r}(t) = (a\ cost)\boldsymbol{i} + (a\ sent)\boldsymbol{j}$, por tanto:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -(asent)\boldsymbol{i} + (acost)\boldsymbol{j}; \quad |\mathbf{v}(t)| = \sqrt{(-asent)^2 + (acost)^2} = a$$

Por tanto:

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{= -(asent)\boldsymbol{i} + (acost)\boldsymbol{j};}{a} = -(sent)\boldsymbol{i} + (cost)\boldsymbol{j};$$

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = -(cost)\boldsymbol{i} - (cost)\boldsymbol{j}\ ; \quad \left|\frac{d\mathbf{T}}{dt}\right| = \sqrt{(cost)^2 + (cost)^2} = 1$$

Con lo que finalmente:

$$\kappa = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\left|\frac{d\mathbf{T}}{dt}\right| = \frac{1}{a}.1 = \frac{1}{a}$$

Vector normal unitario de una curva plana

El vector normal $\mathbf{N}$ al vector tangente unitario $\mathbf{T}$, que apunta en la dirección de giro de la curva cambio de la curva, mostrado en la figura 5, se denomina vector unitario principal de la curva. La derivada $\frac{d\mathbf{T}}{dt}$ es ortogonal a $\mathbf{T}$ y si este valor se divide por κ, se tiene la siguiente expresión para el vector $\mathbf{N}$. La figura 5 muestra las ideas asociadas a vector normal unitario y tangente unitario a una curva plana.

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{1}}{\kappa}\frac{d\mathbf{T}}{dt} \qquad (3.15)$$

Sustituyendo $\kappa = \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right|$ se tiene entonces:

$$\mathbf{N} = \frac{\frac{d\mathbf{T}}{dt}}{\left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right|} \qquad (3.16)$$

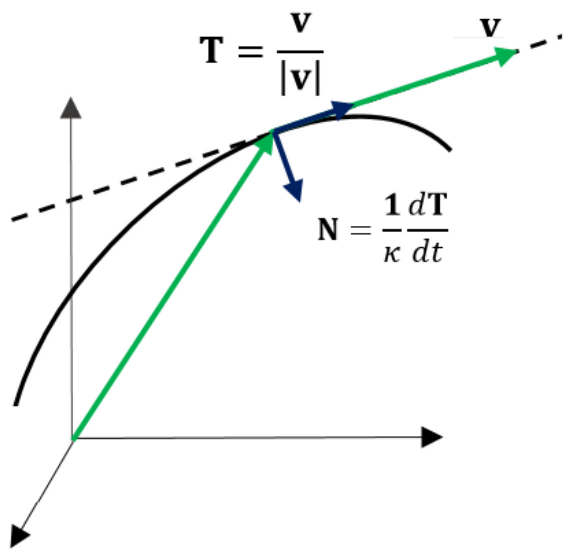

Figura 4. Vectores tangente unitario y normal unitario
Fuente: Propia.

Ejemplo 3.8: el vector tangente unitario $\mathbf{T}$**,** y el vector normal unitario $\mathbf{N}$ para la curva $\mathbf{r}(t) = (cos2t)\boldsymbol{i} + (sen2t)\boldsymbol{j}$ se hallan a partir de:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -(2sen2t)\boldsymbol{i} + (2cos2t)\boldsymbol{j}\ ;\ \ |\mathbf{v}(t)| = \sqrt{4sen^2 2t + 4cos^2 2t} = 2$$

El vector $\mathbf{T}$ es:

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{= -(2sen2t)\boldsymbol{i} + (2cos2t)\boldsymbol{j}}{2} = -(sen2t)\boldsymbol{i} + (cos2t)\boldsymbol{j}$$

Con lo anterior se tiene:

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = -(2cos2t)\boldsymbol{i} - (2sen2t)\boldsymbol{j}\ ;\ \left|\frac{d\mathbf{T}}{dt}\right| = \sqrt{4cos^2 2t + 4sen^2 2t} = 2$$

Y finalmente, el vector normal unitario es:

$$\mathbf{N} = \frac{\frac{d\mathbf{T}}{dt}}{\left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right|} = \frac{-(2cos2t)\boldsymbol{i} - (2sen2t)\boldsymbol{j}}{2} = -(cos2t)\boldsymbol{i} - (sen2t)\boldsymbol{j}$$

Curvatura de una curva en el espacio

Si la curva en cuestión es una curva suave en el espacio parametrizada mediante $\mathbf{r}(t)$ y s es el parámetro de longitud de arco. Las definiciones de vector tangente unitario, curvatura y vector normal unitario tienen análogo significado al caso bidimensional y sus valores están dados por:

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}; \qquad \kappa = \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right| = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\left|\frac{d\mathbf{T}}{dt}\right|; \qquad \mathbf{N} = \frac{\frac{d\mathbf{T}}{dt}}{\left|\frac{d\mathbf{T}}{dt}\right|}$$

2

Unidad 2

Cálculo diferencial con funciones de varias variables

Cálculo multivariado

Autor: Danilo de Jesús Ariza Agámez

Introducción

En la cartilla de la semana 3 abordamos las funciones vectoriales y vimos que son funciones que se evalúan en un número real t y su resultado es un vector de varias variables. Esta cuarta cartilla trata las funciones reales de varias variables, las cuales se evalúan en un punto asociado con varias componentes, y el resultado es un número real. Tratamos particularmente conceptos del contexto de funciones de varias variables, y posteriormente las relacionadas con límite y continuidad, lo que soportará el estudio de derivadas de parciales, las que a su vez son de capital importancia en procesos de optimización propios de la ingeniería.

Recomendaciones metodológicas

Se recomienda al estudiante que inicialmente realice la lectura de esta cartilla sobre funciones de varias variables y los principios relacionados con el cálculo diferencial de las mismas, para luego aprovechar los recursos de video capsulas y la revisión de los ejercicios resueltos presentados como lecturas complementarias. Una vez analizados los contenidos de los recursos antes señalados no se debe dejar pasar la oportunidad de desarrollar los ejercicios de repaso, mediante los cuales se puede poner a prueba.

Desarrollo temático

Cálculo diferencial con funciones de varias variables

Funciones de varias variables

En este punto, en que nos convoca el tema de funciones de varias variables vale la pena detenerse a mirar el recorrido que hemos hecho en el ámbito de las funciones, en los cursos de cálculo diferencial y cálculo integral el estudio se ha centrado fundamentalmente en funciones reales de una variable real, en la cartilla de la semana 3 de este curso hemos trabajado con funciones vectoriales de una variable real, es decir aquellas que asocian un número real a un vector en el espacio tridimensional XYZ, ahora abordamos el caso de funciones reales de varias variables, significando con ello que la función asigna un número a un valor compuesto por varias variables.

Definición de función real de varias variables

Sea D un conjunto de tuplas de compuesta cada una por n números reales $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Una función de f, del conjunto D en el conjunto de números reales R, asigna un número real w a cada tupla de D, en símbolo se suele escribir:

$$f\colon\ D \ \rightarrow \ R$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Dominio y rango de funciones de varias variables

El conjunto D se conoce como dominio de f, mientras que el conjunto de los valores w asignados por f a las tuplas de D se denomina rango de la función. En este caso decimos que f es una función de las n variables $x_1, x_2, \dots, x_n$ que son las variables independientes y w es la variable dependiente.

Casos particulares de funciones de varias variables son el caso $n = 2$ en el que se acostumbra escribir (x, y) en lugar de (x_1, x_2) y el caso y $n = 3$, en el que se escribe, (x, y, z) en lugar de (x_1, x_2, x_3). También es importante señalar que en situaciones prácticas es usual emplear letras que den información del contexto, por ejemplo el volumen V de un cilindro depende del radio r y su altura h.

Evaluación de funciones de varias variables

Al igual que en las funciones reales de variable real, la evaluación de funciones de varias variables se realiza generalmente con base en una fórmula o expresión algebraica.

Ejemplo 4.1: dada la función $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ hallar los valore de f para las ternas $(-1,3,2)$ y $(2,-1,0)$

Solución:

$$f(-1,3,2) \ = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$f(-1,3,2) = \sqrt{(-1)^2+3^2+2^2} = \sqrt{1+9+4} = \sqrt{14}$$

$$f(2,-1,0) = \sqrt{2^2+(-1)^2+0^2} = \sqrt{4+1+0} = \sqrt{5}$$

Determinación del dominio y rango de una función de varias variables

Frecuentemente se tiene la tarea de hallar el dominio o máximo dominio de una función dada su representación algebraica, generalmente el principio básico es excluir los valores no permitidos, bien sea porque dan como resultados números complejos o divisiones por cero. El rango se puede obtener a partir del análisis de los resultados que puede arrojar la correspondiente expresión algebraica. A continuación presentamos algunos ejemplos en los que se define el dominio y rango de funciones.

Ejemplo 4.2: hallar el dominio y rango de las funciones dadas en cada uno de los siguientes casos:

$a)\ f(x,y) = \sqrt{x^2-y}$

$b)\ f(x,y) = \dfrac{1}{x^2y}$

$c)\ f(x,y) = cosxy$

$d)\ f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$e)\ f(x,y,z) = xylnz$

Solución:

$a)$ $f(x,y) = \sqrt{x^2 - y}$ la expresión indica que $x^2 - y$ no puede ser un número negativo, entonces debe darse que $x^2 - y \geq 0$, entonces $D = \{(x,y): x^2 \geq y\}$. Los posibles resultados para $f(x,y) = \sqrt{x^2 - y}$ es el conjunto de todos los reales no negativos, entonces $Ran = [0, \infty)$.

$b)$ $f(x,y) = \frac{1}{x^2 y}$ en este caso no se permiten valores de (x,y) que hagan cero el denominador, por tanto el dominio es $D = \{(x,y): xy \neq 0\}$. Los posibles resultados dados por la expresión $f(x,y) = \frac{1}{x^2 y}$ excluyen solamente el valor cero, por tanto el rango es $Ran = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

$c)$ $f(x,y) = cosxy$. La función coseno está definida para cualquier número real, por tanto no hay valores de (x,y) que estén por fuera del dominio de esta función, lo que significa que el dominio es el conjunto de todos los puntos del plano, mientras que el rango es $Ran = [-1, 1]$

$d)$ $f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Dado que para cualquier terna de valores (x,y,z) el resultado de $f(x,y,z)$ es un número no negativo se concluye que el dominio de la función es todo el espacio, mientras que el rango es el conjunto de números reales contenidos en el intervalo ∞)

$e)$ $f(x,y,z) = xylnz$. La única restricción existente en este caso se refiere a la imposibilidad que x tome valores menores o iguales que cero, por tanto el dominio es el semiespacio $D = \{(x,y,z): z > 0\}$. El rango es el conjunto de todos los números reales.

Punto interior y punto frontera de una región plana

Dada una región Re del plano XY, se dice que un punto (x_0, y_0) es un punto interior de Re si es posible construir un disco de radio $r > 0$ y con centro (x_0, y_0) que esté en contenido totalmente en Re. El conjunto de todos los puntos interiores de Re se denomina el interior de Re. La figura 1 muestra la idea asociada con punto interior de una región plana.

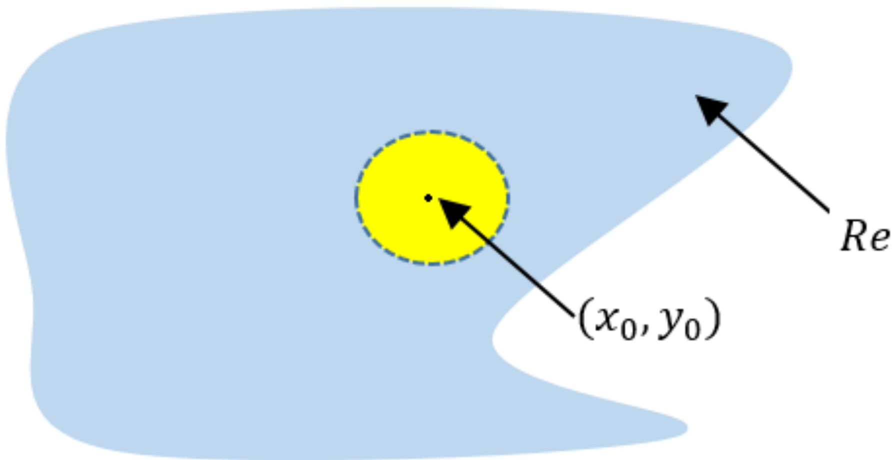

Figura 1. Ilustración del concepto de punto interior de una región plana
Fuente: Propia.

Un punto (x_0, y_0) es un punto frontera de Re si cualquier disco con centro en (x_0, y_0) contiene puntos que están dentro de Re y puntos que están fuera de Re. La figura 2 ilustra el caso de puntos frontera de una región. El conjunto de todos los puntos frontera de una región Re se llama frontera de la región. Un punto frontera de una región Re puede o no pertenecer a la región. Si a una región dada Re pertenece sus puntos frontera se dice que la región es cerrada, si los puntos frontera están por fuera de la región decimos entonces que la región es abierta; estas ideas de fronteras abiertas y cerradas son análogas a las de intervalos abiertos y cerrados en el conjunto de números reales.

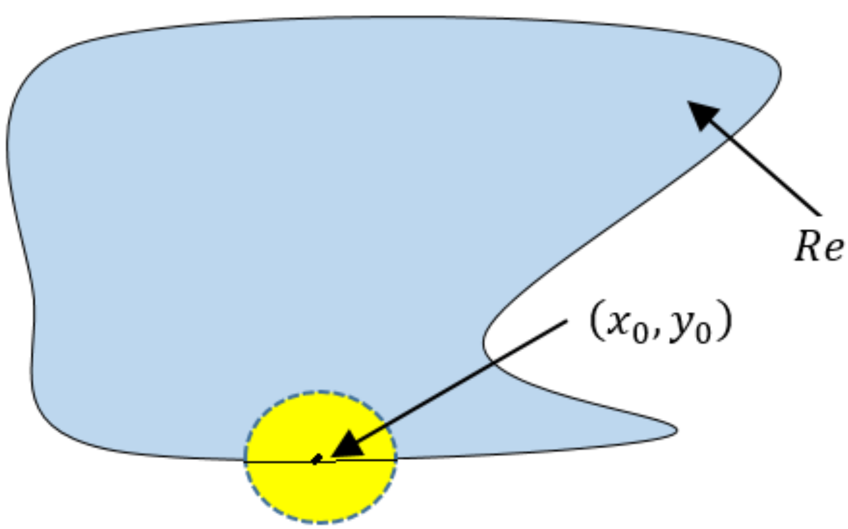

Figura 2. Ilustración del concepto de punto frontera de una región plana
Fuente: Propia.

Regiones acotadas y no acotadas

Una región Re del plano XY se dice que es acotada si es posible que quede completamente contenida en algún disco de radio fijo, en caso contrario es no acotada. Si la región no tiene fronteras se dice que es no acotada.

Ejemplo 4.3: dada la función $f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$ se tiene que su dominio es el conjunto $D = \{(x, y): x^2 \leq y\}$, la región correspondiente al dominio de la función se muestra en la figura 3. Puesto que la parábola $y = x^2$ se extiende indefinidamente, la región sombreada no se puede encerrar en un círculo de radio fijo. La frontera del dominio es el conjunto de puntos de la parábola mientras que el interior es el conjunto de puntos por encima de la curva.

Curvas de nivel, superficies y contorno de funciones de dos variables

Al observar la figura 3 nos damos cuenta que para cada punto (x, y) en el dominio de la función existe un valor $z = f(x, y)$, la totalidad de estos puntos da lugar a la superficie correspondiente a la gráfica de la función. Además, al trazar un plano paralelo al plano XY que corte la superficie, se obtiene una curva en el espacio con igual valor de z para todos sus puntos, es decir se tiene $z = f(x, y) = \ constante$. Estas ideas permiten definir a continuación los conceptos de curva de nivel, gráfica o superficie y curvas de contorno de una función de dos variables.

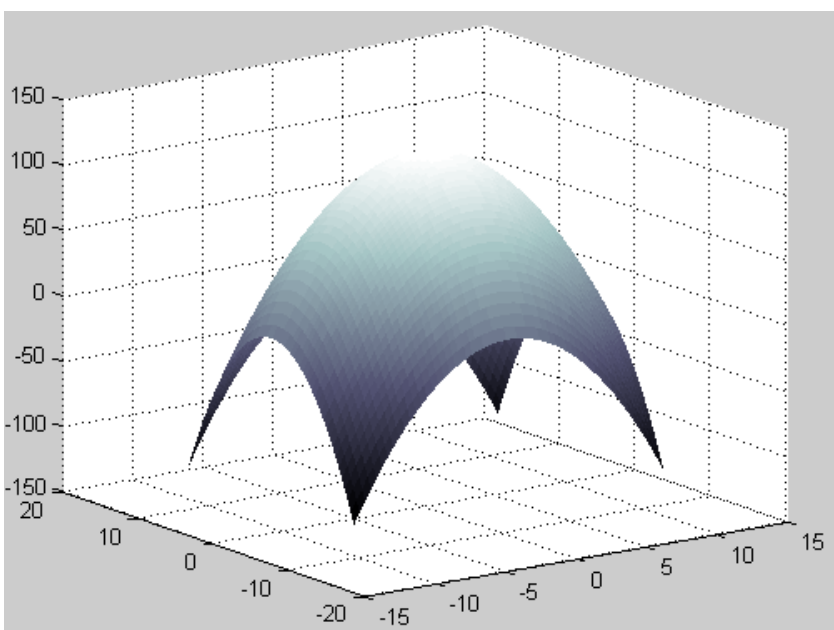

Figura 3. representación gráfica de una función de dos variables
Fuente: Propia.

Dada una función de dos variables $z = f(x, y)$, se define una curva de nivel de f como el conjunto de puntos del plano XY para los cuales la función tiene un valor constante $f(x, y) = c$. El conjunto de todos los puntos $(x, y, f(x, y))$, del espacio asociados a puntos (x, y) en el dominio de f se define como la gráfica o superficie de la función de dos variables $f(x, y)$, y las curvas $f(x, y) = c$ (constante) se llaman curvas de contorno. Nótese que la definición de curva de nivel se refiere a un conjunto de puntos (x, y), del dominio y no a la respectiva curva sobre la superficie, esta última es la respectiva curva de contorno.

Ejemplo 4.4: dada la función $f(x, y) = 121 - x^2 - y^2$, hallar el dominio, el rango, las curvas de nivel $f(x, y) = 0$; $f(x, y) = 51$; $f(x, y) = 75$.

Solución: se tiene la función $f(x, y) = 121 - x^2 - y^2$, en este caso, ya que no hay valores de (x, y) para los cuales no se pueda realizar la operación, el dominio de la función es el conjunto de todos los puntos (x, y) del plano, por su parte, dado que a 121 siempre se le resta valores no negativos, el rango de la función es el conjunto de números reales menores o iguales que 121.

La curva de nivel correspondiente a $f(x, y) = 0$ es:

$121 - x^2 - y^2 = 0$ o $x^2 + y^2 = 121$, que es una circunferencia de radio 11 y centro en $(0,0)$.

La curva de nivel de $f(x, y) = 21$ es:

$121 - x^2 - y^2 = 21$ o $x^2 + y^2 = 100$, que es una circunferencia de radio 10 y centro en $(0,0)$.

La curva de nivel de $f(x, y) = 72$ es:

$121 - x^2 - y^2 = 72$ o $x^2 + y^2 = 49$, que es una circunferencia de radio 7 y centro en $(0,0)$.

La superficie se muestra en la figura 3.

Superficies de nivel de funciones de tres variables

En el dominio de una función de dos variables existen las curvas de nivel, definidas como el conjunto de puntos del dominio para los cuales la función toma un valor constante, el concepto análogo en el caso de funciones de tres variables independientes es el de superficies de nivel, es decir, dada una función $f(x, y, z)$, el conjunto de puntos del espacio para los cuales la función toma un valor constante $f(x, y, z) = c$ es una curva de nivel de f.

En el caso de funciones de dos variables la representación gráfica de la función corresponde a la ubicación de puntos $\left(x, y, f(x, y)\right)$ en el espacio. Para el caso de funciones de tres variables independientes $f(x, y, z)$ no es posible realizar una representación gráfica de la función en razón a que se requeriría de un espacio geométrico de cuatro dimensiones para ubicar las tuplas $(x, y, z, f(x, y, z)$. Desde el punto de vista geométrico lo máximo que podemos hacer es analizar las superficies de nivel para tener una idea del comportamiento de la función.

Ejemplo 4.5: las curvas de nivel para la función $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ corresponden a los puntos del espacio para los cuales $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = c$, las cuales son esferas de radio c y centro en $(0, 0, 0)$. La figura 4 muestra las superficies de nivel para los casos $c = 1;\ c = 1, c = 3$. Es de aclarar que las superficies no corresponden a valores de la función. La utilidad de las superficies de nivel es ayudar a describir el comportamiento de la función a medida que se toma diferentes valores del dominio.

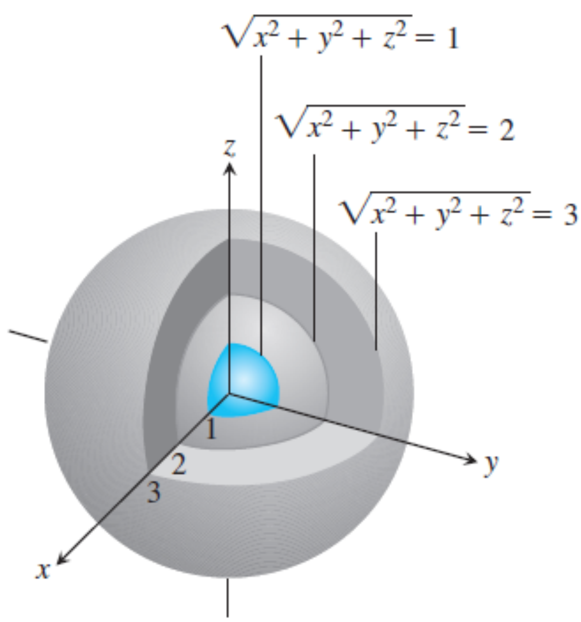

Figura 4. Representación de superficies de nivel del ejemplo 4.5
Fuente: Propia.

Puntos interiores y frontera de regiones en el espacio

En el espacio XYZ existen los términos análogos a punto interior, punto frontera, regiones acotadas y no acotadas definidas para el plano XY. Estos conceptos los presentamos a continuación.

Dada una región Re del espacio XYZ, se dice que un punto (x_0, y_0, z_0) es un punto interior de Re si es posible construir una esfera de radio $r > 0$ y con centro (x_0, y_0, z_0) que esté contenido totalmente en Re. El conjunto de todos los puntos interiores de Re se denomina el interior de Re.

Un punto (x_0, y_0, z_0) es un punto frontera de la región espacial Re si cualquier esfera con centro en (x_0, y_0) contiene puntos que están dentro de Re y puntos que están fuera de Re. El conjunto de todos los puntos frontera de una región se llama frontera de la región. Un punto frontera de una región Re puede o no pertenecer a la región. Si a una región dada Re pertenecen sus puntos frontera la región es cerrada, si los puntos frontera están por fuera, la región es abierta.

Límite de funciones de varias variables

En el curso de cálculo diferencial se estudia el cálculo de límites y la continuidad de funciones reales de una variable real, en esta sección de la cartilla extendemos inicialmente los conceptos y fundamentos asociados con los límites para en el caso de funciones reales de dos o más variables, en la sección 4.3 abordamos lo concerniente a continuidad.

Límite de una función real de dos variables

Si tenemos una función $f(x, y)$ de dos variables, podemos estar interesados en el comportamiento de la función cuando la pareja (x, y) toma valores tan cercanos como queramos a los valores de una pareja específica (x_0, y_0), esto está relacionado con el concepto de límite que presentamos a continuación.

Definición de límite de funciones de dos variables

Dada una función $f(x, y)$ y un número real L, decimos que $f(x, y)$ tiende a L cuando (x, y) tiende a (x_0, y_0), si para todo (x, y) del dominio de f y para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que:

$$|f(x, y) - L| < \epsilon \; siempre \; que \; 0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \qquad (4.1)$$

Propiedades de límites de funciones de dos variables

El cálculo de límites de funciones de dos variables cumple las propiedades que se enuncian a continuación.

Sea $f(x,y)$ y $g(x,y)$ funciones reales de dos variables independientes (x,y) tales que:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_o)} f(x,y) = L \qquad y \qquad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_o)} g(x,y) = M$$

Si además α es una constante, se cumplen las siguientes propiedades.

$1. Límite\ de\ una\ suma$: $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_o)} [f(x,y) \pm g(x,y)] = L \pm M$

$2. Límite\ del\ producto\ por\ una\ constante$: $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_o)} [\alpha f(x,y)] = \alpha L$

$3\ Límite\ de\ un\ producto$: $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_o)} [f(x,y)\ g(x,y)] = L.M$

$4\ Límite\ de\ un\ cociente$: $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_o)} \left[\frac{f(x,y)}{g(x,y)}\right] = \frac{L}{M}\ para\ M \neq 0$

$5\ Límite\ de\ una\ potencia$: $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_o)} [f(x,y)]^n = L^n\ para\ n\ entero\ positivo$

$6\ Límite\ de\ una\ raiz$: $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_o)} \sqrt[n]{f(x,y)} = \sqrt[n]{L}$

Se recomienda al estudiante la revisión de las demostraciones.

Ejemplo 4.6: Calcular:

$$a) \quad \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{2x - xy + 4}{x^2y + 3xy^2 - y} \qquad b) \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$$

Solución: $a)$ Aplicando sustitución directa de los valores de (x,y) se tiene:

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{2x - xy + 4}{x^2y + 3xy^2 - y} = \frac{2(0) - (0)(1) + 4}{(0)^2(1) + 3(0)(1)^2 - (1)} = \frac{0 - 0 + 4}{0 + 0 - (1)} = -4$$

$b)$ El denominador de la expresión tiende a cero cuando (x,y) tiende a $(0,0)$, por lo tanto no se puede aplicar la propiedad de límite de un cociente mediante sustitución directa, pero es posible hallar la solución mediante racionalización del denominador como se muestra a continuación.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2 - xy)}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})} \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x(x-y)(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{(x-y)}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} x\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right) = 0$$

Ejemplo 4.7: Analicemos la existencia de:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5xy^2}{x^2 + y^2}$$

En cálculo de límites de funciones de una variable nos referimos a los límites laterales como aquellos valores a los cuales se podría acercar la función cuando la variable x se acercaba al valor x_0 tomando valores mayores o menores que x_0, lo que se relaciona con la existencia del límite de la función, en el sentido que si los valores de tales límites laterales son diferentes se dice que el límite no existe. En el caso de funciones de dos variables (x, y) hay infinitas posibles trayectorias por las cuales (x, y) se puede acercar a $(x_0,\ y_0)$. En el caso de este ejemplo, vemos que a lo largo de la recta $x = 0,\ f(x, y) = 0$ siempre y cuando $y \neq 0$, y con un razonamiento análogo llegamos a que a lo largo de la recta $y = 0$, con $x \neq 0, f(x, y) = 0$. Lo anterior indica que si el límite existe debe ser igual a cero, veamos que efectivamente este es el valor del límite, pero usando la definición formal.

$$\left|\frac{5xy^2}{x^2 + y^2} - 0\right| < \epsilon \ siempre \ que \ 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$$

$$\frac{5y^2|x|}{x^2 + y^2} < \epsilon \ siempre \ que \ 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$$

En razón a que $y^2 \leq x^2 + y^2$ se cumple que

$$\frac{5y^2|x|}{x^2 + y^2} \leq 5|x| = 5\sqrt{x^2} \leq 5\sqrt{x^2 + y^2}$$

Si seleccionamos $\delta = \frac{\epsilon}{5}$ tenemos:

$$\left|\frac{5xy^2}{x^2 + y^2} - 0\right| \leq 5\sqrt{x^2 + y^2} < 5\delta = 5\left(\frac{\epsilon}{5}\right) = \epsilon$$

Lo que demuestra que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5xy^2}{x^2 + y^2} = 0$$

Continuidad de funciones de dos variables

Esta sección presenta el estudio de la continuidad de funciones reales de dos variables en términos de las condiciones que se deben cumplir. La definición es la siguiente:

Definición

Dada una función real $f(x, y)$ las condiciones que se deben cumplir para que f sea continua en un punto $(x_0,\ y_0)$ son las enunciadas a continuación:

1. $f\ esta\ deinida\ en\ (x_0,\ y_0), \qquad es\ decir, \qquad existe\ f(x_0,\ y_0)$
2. $Existe\ el\ límite$: $\lim_{(x,y)\to(x_0,\ y_0)} f(x, y)$
3. $\lim_{(x,y)\to(x_0,\ y_0)} f(x, y) = f(x_0,\ y_0)$

Las anteriores condiciones se refieren, como se ha indicado, a la continuidad de una función en un punto específico, por otro lado, se dice que una función es continua si es continua en todos los puntos de su dominio.

Ejemplo 4.8: estudiando la continuidad de la función:

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{5xy}{x^2 + y^2} & si\ \ (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & si\ \ (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Para los valores de $(x, y) \neq (0, 0)$ la función es continua porque corresponde a una función racional en x, y. El punto con el cual se debe tener mayor cuidado es precisamente $(x, y) = (0, 0)$, pero, tal como lo indica la definición, f está definida en $(0, 0)$, siendo $f(0, 0) = 0$, sin embargo, al considerar diferentes trayectorias de aproximación de (x, y) a $(0, 0)$ se obtiene diferentes valores de límites. Por ejemplo si tomamos la trayectoria $y = mx$ vemos que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5xy}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5x(mx)}{x^2 + (mx)^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5mx^2}{x^2(1 + m^2)}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5m}{(1 + m^2)}$$

Teniéndose por tanto que para diferentes valores de m se obtiene diferentes valores del límite, significando esto que la función dada no es continua en $(0,0)$. A manera de conclusión podemos indicar que la consideración de dos trayectorias nos pueden ayudar a demostrar la no existencia de un límite, sin embargo, no se puede usar como criterio de existencia la igualdad de límites calculados por diferentes trayectorias, en razón a que no podemos probar las infinitas trayectorias posibles.

Las ideas asociadas a cálculo de límites y estudio de continuidad de funciones de dos variables se extienden al caso de funciones de tres o más variables.

Derivación de funciones de varias variables

La derivación de funciones de una variable nos facilita el estudio de la variación de una función en relación con la variación de la variable independiente, por ejemplo, en un punto dado del plano XY, la pendiente de la recta tangente a la curva de la función corresponde a la derivada en dicho punto. En el caso de funciones de dos variables la gráfica de la función es una superficie en el espacio XYZ, la cual podemos cortar, por ejemplo, con el plano $y = y_0$, obteniéndose una curva plana para la que y es constante; la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto dado corresponde a la derivada de la función con respecto a x en dicho punto, porque y es constante. Esta situación se muestra en la figura 5.

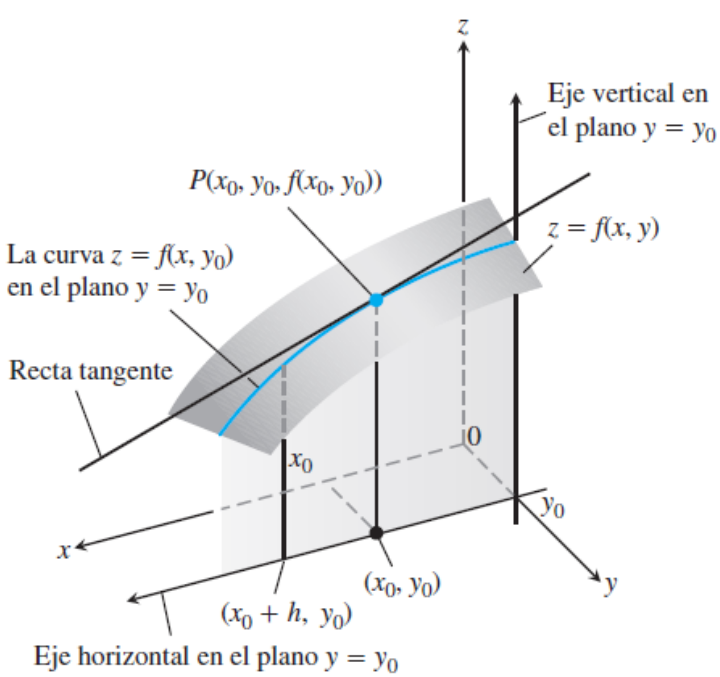

Figura 4: Representación gráfica de la derivada parcial respecto a x
Fuente: Propia.

Si el plano de corte de la superficie es $x = x_0$, la pendiente de la tangente se halla con base en la derivada de f respecto a y, lo que se ilustra geométricamente en la figura 6.

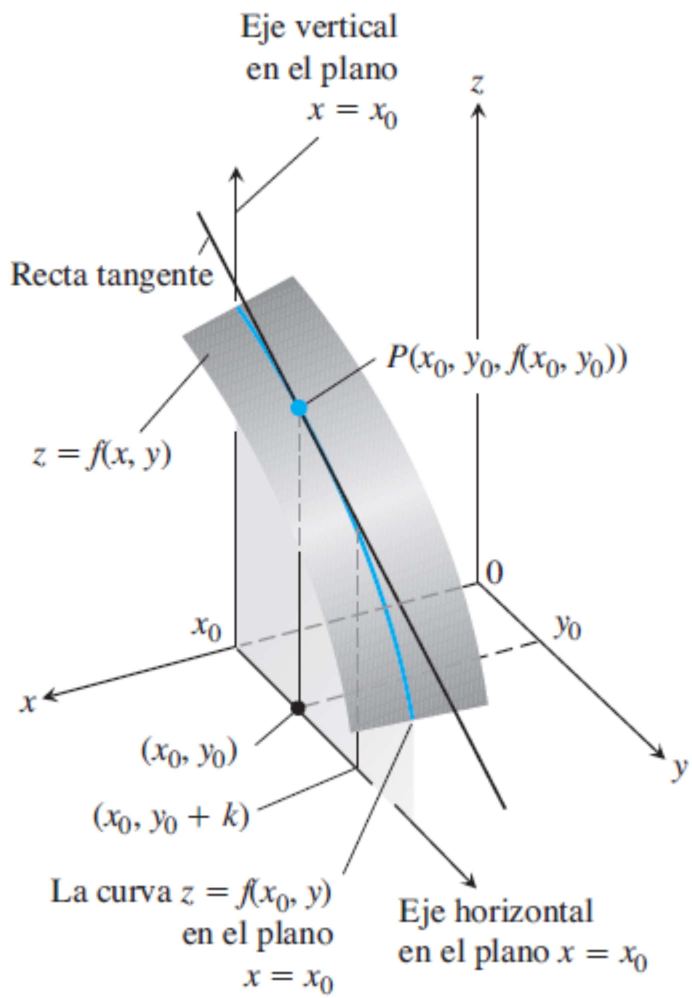

Figura 5. Representación gráfica de la derivada parcial respecto a.
Fuente: Propia.

Estas ideas en las que derivamos una función con respecto a una variable, mientras consideramos las demás como constante, da lugar al concepto de derivadas parciales, enunciado a continuación en forma análoga al caso de funciones de una variable.

Derivadas parciales

Sea $f(x, y)$ una función real, la derivada parcial de f con respecto a x en el punto (x_0, y_0), si existe, se simboliza y define de la siguiente forma:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

La correspondiente derivada parcial de f con respecto a y es:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Tal como lo plasmamos en razonamientos anteriores, el significado geométrico de la derivada parcial de f con respecto a x, en el punto (x_0, y_0), equivale a la pendiente de la recta tangente a la curva $z = f(x, y_0)$ en dicho punto y sobre el plano $y = y_0$. Significado similar tiene la derivada parcial de la función con respecto a y.

Los cálculos de derivadas parciales de funciones de dos variables se realizan de la misma forma que la de las funciones de una sola variable, siempre se debe tener presente la variable respecto a la cual se realiza la derivación. La definición de derivadas parciales respecto a x o y, así como los procedimientos de cálculo, se extienden al caso de tres o más variables, es decir para una función de tres variables $f(x, y, z)$, las tres derivadas parciales, en el punto (x_0, y_0, z_0), se definen como sigue:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{(x_0 + h, y_0, \; z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0, z_0 + h) - f(x_0, y_0, z_0)}{h}$$

En general, para una función de n variables $f(x_1, \ldots x_i, \ldots, x_n)$, la derivada parcial de f respecto la variable x_i en el punto $(x_{10}, \ldots, x_{i0}, \ldots, x_{n0})$, se definen como sigue:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_{10}, \ldots, x_{i0}, \ldots, x_{n0}) = \lim_{h \to 0} \frac{(x_{10}, \ldots, x_{i0} + h, \ldots, x_{n0}) - f(x_{10}, \ldots, x_{i0}, \ldots, x_{n0})}{h}$$

Derivadas parciales de orden superior

Dada la función $f = f(x, y, z)$, la segunda derivada de f respecto a x y la segunda derivada de f respecto a y son respectivamente:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}; \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

También se puede tener derivadas cruzadas, en las que se deriva parcialmente con respecto a una variable, la derivada parcial de f respecto a otra variable. La derivada de f respecto a x de la derivada con respecto a y, así como la derivada de f respecto a y de la derivada con respecto a x, son respectivamente las siguientes:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}; \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Continuidad e igualdad de derivadas parciales mixtas

Es posible que una función tenga derivadas parciales respecto a x y respecto a y, en un punto específico y no ser continua en ese punto. En este punto nos interesa plantear la relación entre la continuidad de la función y sus derivadas parciales mixtas, esta relación se presenta a continuación.

Dada una función $f(x, y)$ y sus derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ existentes y son continuas en una región plana abierta que contiene al punto (x_0, y_0). Entonces:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Esta expresión establece que para calcular una derivada mixta de segundo orden podemos derivar en cualquier orden siempre y cuando se cumpla la continuidad de la función y sus derivadas. Se recomienda al estudiante remitirse a los ejercicios resueltos propuestos como lecturas complementarias.

Funciones diferenciables

En el caso de funciones reales de una variable se tiene que una función $f(x)$ es derivable en un punto x_0 implica que un incremento en el valor de f está atado a un incremento h en el valor de x, en cuyo caso, según la definición operacional de derivada, un incremento se puede escribir, en términos de la derivada de la función, como: $\Delta y = f'(x)h + \epsilon h$. Al extender esta propiedad al caso de funciones de dos variables abordamos el concepto de diferenciabilidad que se enuncia a continuación.

Sea $f(x, y)$ una función para la cual existen y son continuas las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ en una región abierta del plano que contiene al punto (x_0, y_0). Se dice que f es diferenciable en (x_0, y_0) si el incremento $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$, cuando nos movemos de (x_0, y_0) a $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$, satisface la siguiente propiedad:

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y$$

En este caso ϵ_1, ϵ_2 tienden a cero cuando Δx y Δy tienden a cero. La función se dice que es diferenciable si es diferenciable en todo punto de su dominio. (Dándose además que su gráfica es una superficie suave).

Diferenciabilidad y continuidad

Existe un teorema análogo al del caso de funciones reales de una variable en el sentido que la diferenciabilidad implica continuidad, es decir, dada una función $f(x, y)$ que es diferenciable, se tiene entonces que f es continua.

Derivadas parciales de funciones compuestas

En el caso de funciones de una variable se realiza el cálculo de derivada de una función compuesta aplicando un principio conocido comúnmente como regla de la cadena, aquí se presenta la extensión de tales principios de derivación para aplicarlos al contexto de funciones compuestas, es decir, aquellas en las cuales x, y son funciones de una variable real.

Sea $z = f(x, y)$ una función derivable y $x(t), y(t)$ funciones derivables de t. La función compuesta $z = f(x(t), y(t))$ también es una función derivable de t y su derivada está dada por:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\big(x(t), y(t)\big)x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(x(t), y(t)\big)y'(t) \qquad (4.2)$$

Para una función de tres variables $f(x, y, z)$ su derivada, si existe, está dada por:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}y'(t) + \frac{\partial f}{\partial z}z'(t)$$

Ejemplo 4.9: sea la función $z = xy^2$ con $x = cos^2t$; $\quad y = sent$. La derivada de z con respecto a t corresponde a:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\big(x(t), y(t)\big)x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(x(t), y(t)\big)y'(t)$$

$$\frac{dz}{dt} = -2y^2cost.sent + 2xycost = -2sen^2t.cost.sent + 2cos^2t.sent.cost$$

$$\frac{dz}{dt} = -2sen^3t.cost + 2cos^3t.sent = 2sent.cost(cos^2t - sen^2t)$$

$$\frac{dz}{dt} = 2sent.cost(cos2t)$$

Derivación implícita

Sea $F(x, y)$ una función derivable y que $F(x, y) = 0$ define implícitamente a y como una función derivable de x. entonces, donde $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$, se tiene que:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

Ejemplo 4.10: dada la ecuación $x^2 - y^2 + 2xy = 0$, hallar la derivada de y con respecto a x.

Solución: aquí se tiene $F(x, y) = x^2 - y^2 + 2xy$, de donde se obtiene que:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + 2y = 2(x + y) \quad ; \frac{\partial F}{\partial y} = -2y + 2x = 2(x - y)$$

En los puntos en que $x \neq y$ se tiene que:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{2(x + y)}{2(x - y)} = \frac{(x + y)}{(x - y)}$$

Derivadas direccionales y gradiente

La ecuación xx nos da la derivada o tasa de cambio, con respecto a un parámetro t y en cualquier punto $P_0\big(x_0(t), y_0(t)\big)$ de una función $f(x, y)$ para la cual $x = x(t);\ y = y(t)$. Aquí definimos la derivada direccional de f en un punto dado como se indica a continuación.

Derivada direccional

Dada una función $f(x, y)$ en un punto $P_0(x_0, y_0)$, la derivada de f en P_0 en la dirección del vector unitario $u = u_1\boldsymbol{i} + u_2\boldsymbol{j}$**,** si existe es:

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{\mathbf{u},P_0} = \lim_{s\to 0}\frac{f(x_0 + su_1, y_0 + su_2) - x_0, y_0}{s}$$

Significado geométrico de la derivada direccional

Si consideramos la superficie S de una función $z\ = f(x, y)$, si el punto (x_0, y_0, z_0) es un punto sobre la superficie S, el plano vertical que pasa por P y $P_0(x_0, y_0)$ que es paralelo al vector $\mathbf{u}$ corta a la superficie S en una curva C. La tasa de cambio $\left(\frac{df}{ds}\right)_{\mathbf{u},P_0}$ es la pendiente de la recta tangente a la curva C en P.

Gradiente

En esta sección presentamos, sin demostración, un principio que permite calcular ágilmente la derivada direccional de una función f, para ello se hace uso de un concepto previo, el de vector gradiente definido a continuación.

Dada una función $z = f(x, y)$, el vector gradiente de f en un punto $P_0(x_0, y_0)$ es el vector:

$$\boldsymbol{\nabla} f_{P_0} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\boldsymbol{j} \quad (gradiente\ de\ f\ o\ nabla\ de\ f) \qquad (4.3)$$

Derivada direccional en términos del gradiente

Dada una función $z = f(x, y)$ derivable en una región abierta que contiene al punto $P_0(x_0, y_0)$, la derivada de f en la dirección de $\mathbf{u}$ en el punto $P_0(x_0, y_0)$, es igual al producto punto del gradiente de f en P_0 $(\boldsymbol{\nabla} f_{P_0})$ y el vector unitario $\mathbf{u}$**,** es decir:

$$\left(\frac{df}{ds}\right)_{\mathbf{u},P_0} = \big(\boldsymbol{\nabla} f_{P_0}\big).\,\mathbf{u} \qquad (4.4)$$

Unidad 3

Aplicaciones de las derivadas de funciones de varias variables

Cálculo multivariado

Autor: Danilo de Jesús Ariza Agámez

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina
MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Introducción

En las anteriores cartillas y semanas de estudio hemos estudiado las herramientas que han sido desarrolladas para el cálculo de integrales de funciones, sin embargo, esto no pasaría de ser curiosidades matemáticas si no tuvieran aplicación en la vida real, sin embargo, el cálculo de integrales tiene una gran cantidad de aplicaciones en la vida real las cuales estudiaremos en esta y la próxima semana. Una de las primeras aplicaciones es el cálculo de áreas, problema que fue uno de los orígenes de la definición de integral, y derivado de este está el cálculo de volúmenes de sólidos y de sólidos de revolución. A través de ejemplos estudiaremos estas aplicaciones y su relación con el mundo real.

Recomendaciones metodológicas

Se recomienda al estudiante que estudie de manera detallada y detenida cada ejemplo brindado en la cartilla y realice los ejercicios propuestos de la semana, así como otros ejercicios que puede encontrar en la bibliografía sugerida. A través del estudio y desarrollo de ejercicios el estudiante adquirirá mayor habilidad en el uso de herramientas matemáticas y podrá enfrentarse a problemas de mayor complejidad.

Desarrollo temático

Aplicaciones de las derivadas de funciones de varias variables

Valores extremos de una función de varias variables

Las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ de una función $f(x, y)$ resultan de gran utilidad al hallar los valores extremos de f en un dominio cerrado y acotado. Las funciones de dos variables toman sus valores extremos sólo en sus puntos frontera o en aquellos puntos interiores a su dominio donde las primeras derivadas parciales son iguales a cero o donde alguna de ellas no existe, pero se debe tener presente, tal como sucede con las funciones de una variable, que el hecho que la derivada se anule en un punto dado no implica que en tal punto exista un valor extremo. Recordamos que en las funciones de una variable podía haber un punto de inflexión, en el caso de superficies que son gráficas de funciones de dos variables este punto se llama punto de ensilladura. La figura 1 ilustra las posibles situaciones.

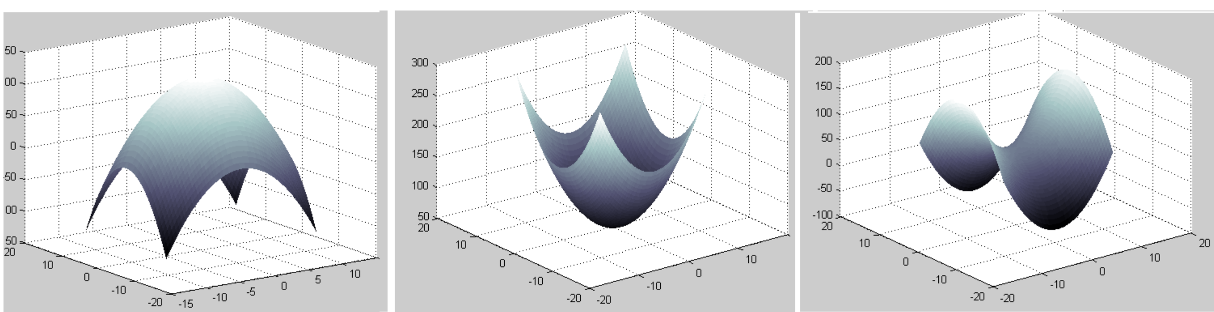

Figura 1. Representación de máximos, mínimos y puntos de silla de funciones
Fuente: Propia.

Valores extremos de una función de dos variables

Como es lógico, antes de abordar el uso de las derivadas parciales para determinar valores extremos, primero nos corresponde presentar los conceptos de valores máximos y mínimos locales de una función de dos variables, la definición es la siguiente.

Dada una función $f(x, y)$ definida en una región Re del plano que contiene al punto $(x_0,\ y_0)$ tenemos:

a) El valor $f(x_0,\ y_0)$ es un máximo local de f si $f(x_0,\ y_0) \geq f(x, y)$ para todos los puntos (x, y) del dominio en un disco abierto con centro en $(x_0,\ y_0)$.

b) El valor $f(x_0,\ y_0)$ es un mínimo local de f si $f(x_0,\ y_0) \leq f(x,y)$ para todos los puntos (x,y) del dominio en un disco abierto con centro en $(x_0,\ y_0)$.

Criterios de primeras derivadas para determinar extremos locales

Si necesitamos hallar los valores extremos de una función $f(x,y)$, en términos geométricos, nos corresponde hallar los puntos donde la superficie tenga un plano tangente horizontal ya que esos puntos pueden estar asociados a un valor máximo, a un valor mínimo o a un punto de ensilladura. Estos puntos se pueden hallar apoyados en el criterio de la primera derivada, el cual establece una condición necesaria para la existencia de extremos. El criterio dice lo siguiente:

Dada una función $f(x,y)$, si f tiene un máximo local o un mínimo local en un punto $(x_0,\ y_0)$ al interior del dominio de f y si existen las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$; $\frac{\partial f}{\partial y}$ en $(x_0,\ y_0)$, entonces $\frac{\partial f}{\partial x} = 0\ y\ \ \frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

Nótese que el hecho que las derivadas parciales sean iguales a cero no garantiza la existencia de un extremo local. Para mayor claridad sobre esto damos a continuación una importante definición.

Punto crítico de una función de dos variables

Dada una función $f(x,y)$ se define como puntos críticos de f a aquellos puntos al interior del dominio donde $\frac{\partial f}{\partial x} = 0\ y\ \ \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ o donde alguna de estas derivadas no existe.

Punto silla o de ensilladura

Siendo claro que en un punto crítico no necesariamente hay un máximo o un mínimo local vale la pena preguntar ¿qué otro tipo de punto puede existir? La respuesta es un punto de ensilladura, el cual se define formalmente a continuación.

Dada una función $f(x,y)$ derivable se dice que la superficie de f tiene un punto de ensilladura en $(x_0,\ y_0)$ si en un disco abierto con centro en $(x_0,\ y_0)$ existen puntos del dominio de la función f para los cuales $f(x_0,\ y_0) < f(x,y)$ y puntos del dominio para los cuales $f(x_0,\ y_0) > f(x,y)$.

Ejemplo 5.1: dada la función $f(x,y) = x^2 + y^2 - 4y + 9$, hallar sus valores extremos.

Solución: no hay restricciones de operación para la expresión que define la función, esto significa que el dominio es todo el plano XY. Las derivadas parciales son:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x; \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 4$$

Estas derivadas parciales existen en todo el plano, por tanto, si existen extremos locales estos se dan sólo cuando ambas derivadas se anulan, es decir si:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x = 0; \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 4 = 0 \text{ ó } en\ (x, y) = (0, 2)$$

Como $f(0,2) = 5$ y $f(x,y) = x^2 + y^2 - 4y + 9 = x^2 + (y-2)^2 + 5$ no puede ser menor que 5, por lo tanto la función tiene un mínimo en $(0,2)$.

La figura 2 muestra la representación gráfica de la función y evidencia la existencia de un valor mínimo.

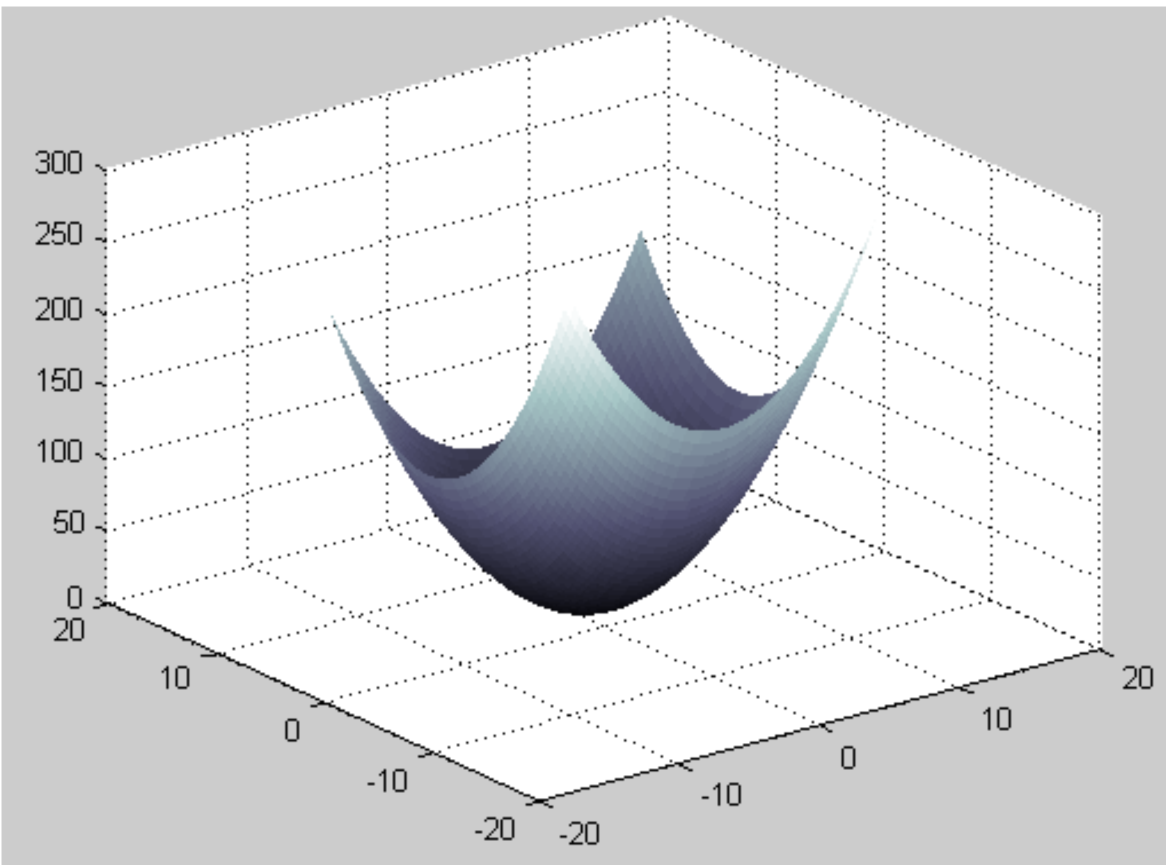

Figura 2. Representación gráfica de la superficie de la función del ejemplo 5.1
Fuente: Propia.

Ejemplo 5.2: para $f(x,y) = y^2 - x^2$ el dominio es todo el plano XY y las dos derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x} = -2x$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$ existen en todo el plano, esto conduce a que si existe un extremo local sólo se puede dar en $(0,0)$, pero podemos ver que para valores positivos de x sobre el eje X se tiene $f(x,y) = -x^2 < 0$, mientras que para valores sobre el eje Y se tiene $f(x,y) = y^2 > 0$. Lo que muestra que la función tiene un punto de ensilladura en el origen, como lo muestra la figura 3.

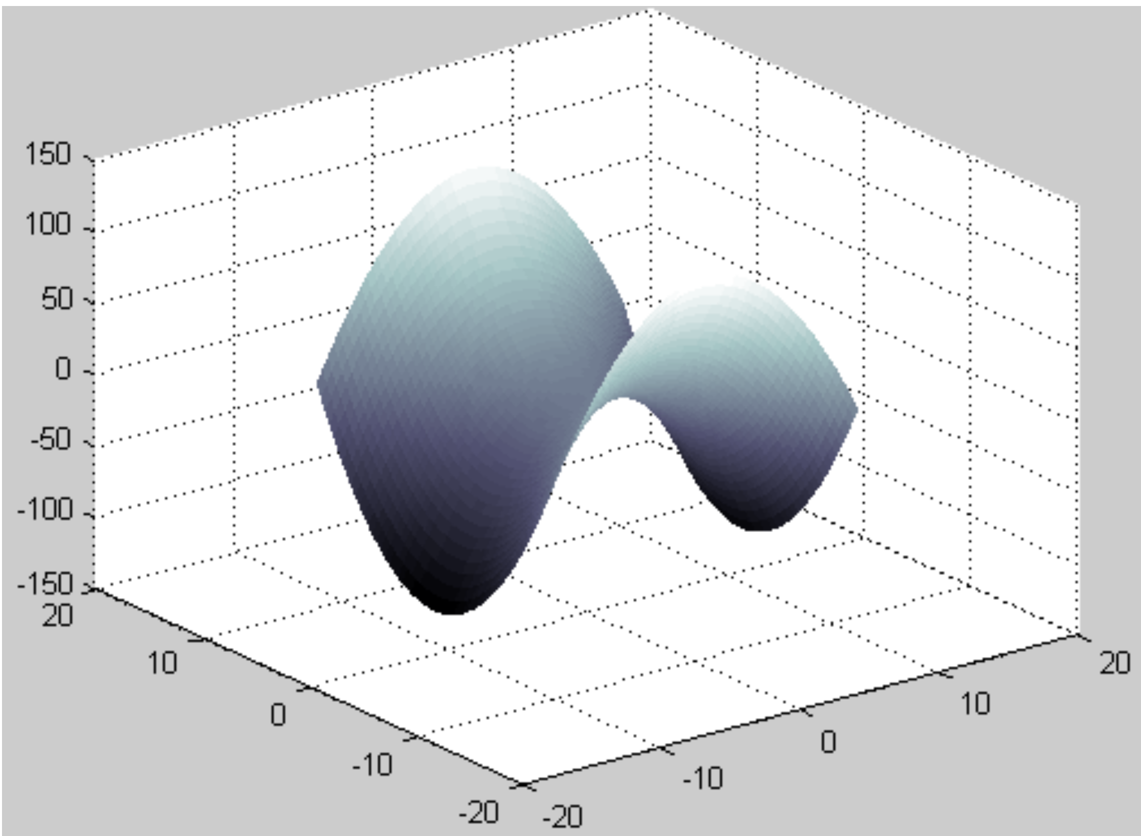

Figura 3: Representación gráfica de la función del ejemplo 5.2
Fuente: Propia.

Criterio de la segunda derivada para determinar extremos locales

Los dos ejemplos anteriores muestran que con los conceptos presentados hasta ahora se requiere de análisis algebraicos que permitan determinar si el valor de la función en un punto crítico es un máximo, un mínimo local o punto de ensilladura, hay o no valores menores o mayores. El principio de cálculo presentado a continuación constituye un eficiente criterio.

Criterio de la segunda derivada

Dada una función $f(x,y)$ con primeras y segundas derivadas parciales continuas en un disco con centro en el punto (x_0, y_0) y $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$, se tiene que:

$$a)\ f(x_0,y_0)\ es\ un\ máximo\ local\ \ si\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0\ y\ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)^2 > 0\ en\ (x_0,y_0)$$

$$b)\ f(x_0,y_0)\ es\ un\ mínimo\ local\ \ si\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0\ y\ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)^2 > 0\ en\ (x_0,y_0)$$

$$c)\ f\ tiene\ un\ punto\ de\ silla\ en\ (x_0,y_0)\ \ si\ \ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)^2 < 0\ en\ (x_0,y_0)$$

$$d)\ El\ criterio\ no\ ayuda\ a\ decidir\ si\ \ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)^2 = 0\ en\ \ (x_0,y_0)$$

La expresión: $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)^2$ se conoce como discriminante o Hessiano de la función f y corresponde al siguiente determinante:

$$H = H\big(f(x,y)\big) = \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) & \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) \\ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) & \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) \end{vmatrix}$$

Ejemplo 5.3 : analizando la función $f(x,y) = xy - x^2 - y^2 - 2x - 2y + 4$ encontramos que el dominio de la función es todo el plano y por tanto no tiene fronteras, lo que significa que si tiene valores extremos éstos se dan en los puntos donde las primeras derivadas parciales se anulan, esto sucede en:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y - 2x - 2 = 0; \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x - 2y - 2$$

Dando lugar a un sistema de dos ecuaciones lineales con solución $(x_0, y_0) = (-2, -2)$, que es el único punto posible en que se da un valor extremo. Calculamos ahora las segundas derivadas parciales y el discriminante:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 1; \;\; H = (-2)(-2) - (1) = 3$$

Con: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2 < 0$; $\;H = 3 > 0$ se concluye que la función dada tiene un máximo local en $(-2, -2)$.

Ejemplo 5.4: el dominio de la función $f(x, y) = 3y^2 - 2y^3 - 3x^2 + 6xy$ es todo el plano y la función es derivable en todo (x, y), los valores extremos se dan solo donde se anulan las primeras derivadas parciales, tenemos entonces:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6y - 6x = 0; \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 6y - 6y^2 + 6x = 0$$

De la primera ecuación tenemos $x = y$, que al ser sustituido en la segunda resulta en $2x(2 - x) = 0$ obteniéndose finalmente los puntos críticos $(0, 0)$ $(2, 2)$. Las segundas derivadas parciales y el discriminante son:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -6; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6 - 12y; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 6; \;\; H = (-36 + 72y) - 36 = 72y - 72$$

En $(0, 0), H = -72 < 0$, indicando que la función tiene un punto silla en el origen. En $(2, 2)$, los valores $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -6$; $H = 72 > 0$ indican que la función tiene un máximo local.

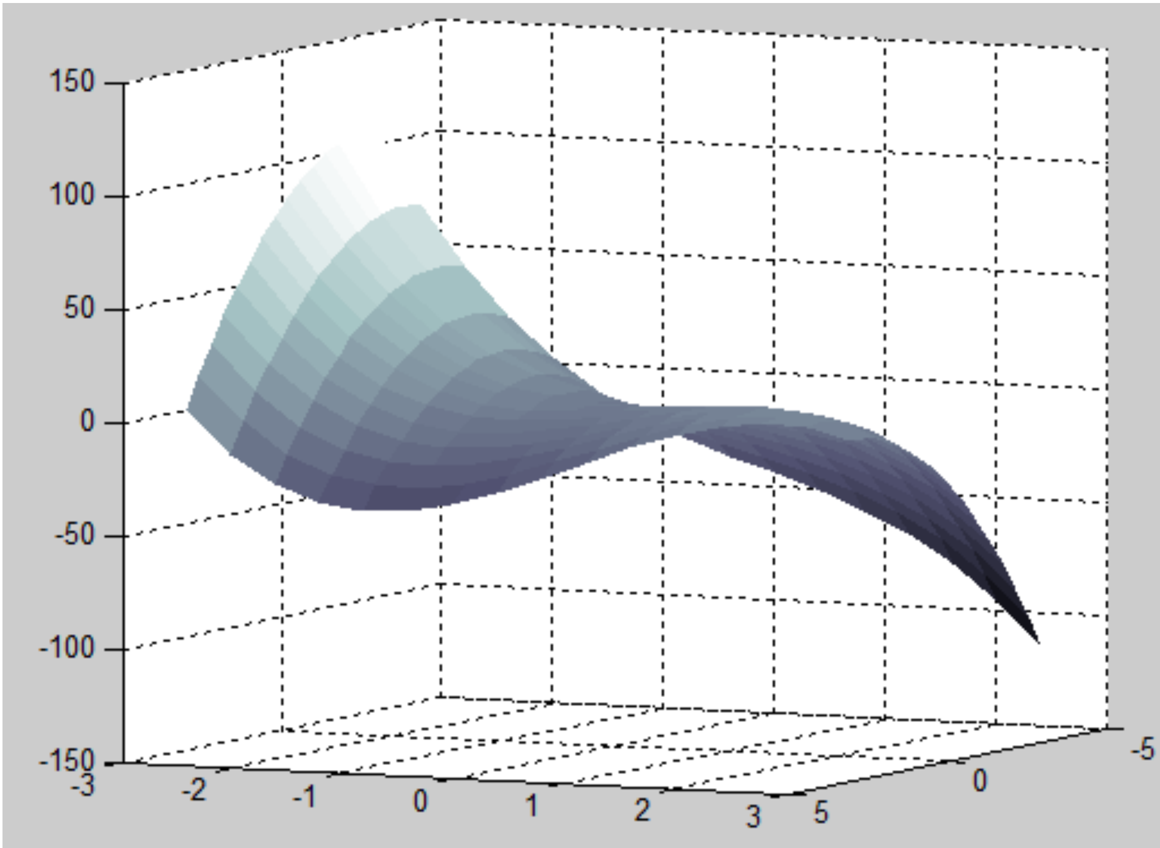

Figura 4: Gráfica del ejemplo 5.4
Fuente: Propia.

Valores extremos absolutos en regiones cerradas acotadas

Sí $f(x,y)$ es una función, $f(x_0,y_0)$ es máximo absoluto de f si $f(x,y) \leq f(x_0,y_0)$ para todo (x,y) en el dominio de f y es mínimo absoluto si $f(x,y) \geq f(x_0,y_0)$ para todo (x,y) en el dominio de f. Cuando se tiene regiones cerradas y acotadas, los extremos absolutos se pueden dar en los puntos críticos al interior del dominio o en puntos frontera, por lo tanto los pasos a seguir para hallar extremos relativos son:

1. Hallar los extremos locales, que se dan en puntos críticos.

2. Hallar los posibles extremos locales en puntos frontera del dominio de la función.

3. Determinar los máximos absolutos y mínimos absolutos a partir los resultados de los pasos 1 y 2.

Ejemplo 5.5: la función $f(x, y) = 2 + 2x + 2y - x^2 - y^2$ está definida en la porción del plano limitada por las rectas $x = 0$; $y = 9 - x$. La función es derivable en todo su dominio, por tanto los valores extremos solo se pueden dar en los puntos críticos y en los puntos frontera.

Con $\frac{\partial f}{\partial x} = 2 - 2x = 0$; $\frac{\partial f}{\partial y} = 2 - 2y = 0$, tenemos el punto crítico $(1, 1)$ y $f(1, 1) = 4$

Ahora tomamos cada lado del triángulo para determinar posibles extremos en puntos frontera, vemos que sobre la recta $y = 0$, $f(x, 0) = 2 + 2x - x^2$. Como nos interesa saber los valores extremos de $f(x, y) = 2 + 2x - x^2$, la podemos considerar como una función de una sola variable en el dominio $[0, 9]$. En los puntos frontera del intervalo se tiene $f(0, 0) = 2; f(9, 0) = -61$, mientras que en el interior del intervalo aplicamos principios de cálculo de funciones de una variable, obteniéndose $x = 1$ como único punto crítico y $f(1, 0) = 3$.

Sobre la frontera $x = 0$ encontramos que $f(0, y) = 2 + 2y - y^2$. Con un análisis similar al anterior encontramos que los posibles valores extremos en este caso son:

$f(0, 0) = 2;\ f(0, 9) = -61;\ f(0, 1) = 3$

Para la frontera correspondiente a la hipotenusa de la región triangular ya consideramos los puntos (9,0) y (0,9), para considerar los otros puntos que están sobre la recta $y = 9 - x$, remplazamos $y = 9 - x$ en la función se obtiene:

$$f(x, y) = 2 + 2x + 2(9 - x) - x^2 - (9 - x)^2$$

Al aplicar los principios de cálculo de una sola variable encontramos que un posible extremo se da en $x = \frac{9}{2}$, con lo cual $f\left(\frac{9}{2}, \frac{9}{2}\right) = -\frac{41}{2}$

Finalmente tenemos que las posibilidades de extremos absolutos se encuentran en:

$f(1, 1) = 4;\ f(9, 0) = -61;\ f(1, 0) = 3;\ f(0, 0) = 2;$

$f(0, 9) = -61;\ f(0, 1) = 3;\ f\left(\frac{9}{2}, \frac{9}{2}\right) = -\frac{41}{2}$

El máximo absoluto es $f(1, 1) = 4$ y el mínimo absoluto es $f(0, 9) = f(9, 0) = -61$

Los multiplicadores de Lagrange

Se habla de multiplicadores de Lagrange cuando se debe resolver situaciones de asociadas a la búsqueda de valores extremos de funciones con dominios limitados a una región específica del plano, en este contexto toma sentido los conceptos de máximos y mínimos sujetos a restricciones, los cuales tratamos a continuación.

Si se tiene una función $f(x, y, z)$ para la cual sus variables se encuentran sujetas a la restricción $g(x, y, z) = 0$, el método de los multiplicadores de Lagrange establece que los valores extremos de f se encuentran sobre la superficie $g = 0$ en aquellos puntos en que $\nabla f = \lambda \boldsymbol{\nabla} g$ para algún escalar por determinar denominado multiplicador de Lagrange. El uso del método de multiplicadores de Lagrange requiere que abordemos primero otros principios.

Teorema del gradiente ortogonal

Sea $f(x, y, z)$ una función derivable en una región que en su interior contiene una curva suave C dada vectorialmente por:

$$\mathbf{r}(t) = g(t)\boldsymbol{i} + h(t)\boldsymbol{j} + k(t)\boldsymbol{k}$$

Si el punto P_0 es un punto de C donde f tiene un extremo local relativo a valores sobre C, entonces el vector ∇f es ortogonal a la curva C en P_0

Corolario del teorema del gradiente ortogonal

Sea $f(x, y)$ derivable, en los puntos de una curva suave $\mathbf{r}(t) = g(t)\boldsymbol{i} + h(t)\boldsymbol{j} + k(t)\boldsymbol{k}$**,** donde f alcanza sus extremos locales en relación con sus valores en la curva, se cumple que $\nabla f . \mathbf{v} = 0$, siendo $\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{dt}$.

El método de los multiplicadores de Lagrange con una restricción

Sean las funciones derivables $f(x, y,\ z)$ y $g(x, y, z)$, tal que $\boldsymbol{\nabla} g \neq 0$ para $g(x, y, z) = 0$. Podemos hallar los valores extremos locales de la función f sujeta a la restricción $g(x, y, z) = 0$ hallando el conjunto de valores x, y, z, λ que satisfacen el sistema de ecuaciones:

$$\nabla f = \lambda \nabla g; \qquad g(x, y, z) = 0$$

Ejemplo 5.5: hallar los valores extremos de $f(x, y) = xy$ sobre la elipse definida por:

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$$

Solución:

Este ejemplo es un caso particular del método expuesto usando sólo dos variables, aquí la restricción $g(x, y) = 0$ corresponde a $g(x, y) = \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0$.

Según la ecuación tenemos:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} = y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}$$

$$\nabla g = \frac{\partial g}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial g}{\partial y}\boldsymbol{j} = \frac{x}{4}\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$$

Al aplicar las ecuaciones $\nabla f = \lambda \nabla g$, encontramos:

$$y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} = \frac{x\lambda}{4}\boldsymbol{i} + y\lambda\boldsymbol{j}$$

Con lo cual sigue que:

$$y = \frac{\lambda x}{4}; \quad x = \lambda y$$

$$y = \frac{\lambda x}{4} = \frac{\lambda(\lambda y)}{4} = \frac{\lambda^2}{4}y$$

De la última igualdad se puede dar: $y = 0 \; o \; \lambda = \pm 2$, en caso que $y = 0, x = y = 0$, lo cual no es posible en razón a que el punto $(0,0)$ no está sobre la elipse, por tanto se tiene $y \neq 0$. Con $y \neq 0$, $\lambda = \pm 2$, por lo que se da entonces que $x = \lambda y = \pm 2y$. Usando este hecho en la ecuación $g(x, y) = 0$, tenemos:

$$\frac{(\pm 2y)^2}{8} + \frac{y^2}{2} = \frac{4y^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1; \; y^2 = 1 \quad o \; y = \pm 1$$

Con lo cual se concluye que la función toma sus valores extremos en la función los puntos $(-2,-1), (-2,1), (2,-1), (2,1)$ y los valores entremos en sí son -2 y 2. La figura 4 muestra las curvas de nivel de la función $f(x, y)$.

Método de los multiplicadores de Lagrange con dos restricciones

En la sección anterior tratamos el problema de hallar valores extremos de una función $f(x, y, z)$ sujeta a una restricción $g(x, y, z) = 0$, sin embargo existen situaciones en las cuales el número de restricciones es mayor, por ejemplo, dos restricciones $g_1(x, y, z) = 0$ y $g_2(x, y, z) = 0$, asociadas a las funciones derivables $g_1(x, y, z)$ y $g_2(x, y, z)$ para las cuales los vectores ∇g_1 y ∇g_2 no son paralelos. La descripción formal del método es la siguiente.

Sean las funciones derivables $f(x, y, z)$, $g_1(x, y, z)$, y $g_2(x, y, z)$ tales que $\nabla g_1 \neq 0$, $\nabla g_2 \neq 0$ para $g_1(x, y, z) = 0$ y $g_2(x, y, z) = 0$. Podemos hallar los valores extremos locales de f sujeta a las restricciones $g_1(x, y, z) = 0$ y $g_2(x, y, z) = 0$ hallando el conjunto de valores x, y, z, λ, μ que satisfacen el sistema de ecuaciones:

$$\nabla f = \lambda \nabla g_1; + \mu \nabla g_2 \qquad g_1(x,y,z) = 0\,; \qquad g_2(x,y,z) = 0$$

Es importante hacer notar el hecho que la necesidad de satisfacer las dos restricciones $g_1 = 0$; $g_2 = 0$ significa geométricamente que las superficies definidas por estas restricciones se cortan en una curva C.

Ejemplo 5.6: si cortamos el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ con el plano $x + y + z = 1$ el corte correspondiente es una elipse. Hallar las menores y mayores distancias desde el origen hasta la elipse.

Solución: la función de la cual se quiere hallar valores extremos es la distancia de puntos (x, y) al origen, es decir, $d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, pero se puede considerar la función:

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$

Y como restricciones:

$$g_1(x,y,z) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \;\; ; \quad g_2(x,y,z) = x + y + z - 1 = 0$$

De la ecuación de gradientes $\nabla f = \lambda \nabla g_1; + \mu \nabla g_2$ se obtiene:

$$2x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j} + 2z\boldsymbol{k} = \lambda(2x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j}) + \mu(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}) = (2\lambda x + \mu)\boldsymbol{i} + (2\lambda y + \mu)\boldsymbol{j} + \mu\boldsymbol{k}$$

$$2x = 2\lambda x + \mu; \qquad 2y = 2\lambda y + \mu; \qquad 2z = \mu$$

Remplazando $2z = \mu$ en $2x = 2\lambda x + \mu$; $\quad 2y = 2\lambda y + \mu$ se obtiene:

$$2x = 2\lambda x + 2z \qquad \text{y} \qquad 2y = 2\lambda y + 2z$$

$$z = (1 - \lambda)x \qquad \text{y} \qquad z = (1 - \lambda)y$$

Las soluciones del sistema de las últimas ecuaciones son:

$$z = 0 \;\; si\; \lambda = 1 \qquad \text{o} \qquad x = \frac{z}{1-\lambda}; \quad y = \frac{z}{1-\lambda} \quad si \quad \lambda \neq 1$$

Si sustituimos $z = 0$ en las restricciones $g_1(x,y,z) = 0$ y $g_2(x,y,z) = 0$ y resolvemos el sistema resultante encontramos $x = 0$; $y = 1$ y $x = 1$; $y = 0$, que da finalmente las soluciones $(1, 0{,}0)$ y $(0, 1{,}0)$.

Al tomar $x = y$, de la restricciones $g_1(x,y,z) = 0$ y $g_2(x,y,z) = 0$ se obtiene

$$2x^2 = 1 \quad \text{y} \quad z = 1 - 2x$$

$$x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{y} \qquad z = 1 \mp \sqrt{2}$$

De donde se obtiene las soluciones:

$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ 1-\sqrt{2}\right)$ y $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},\ 1+\sqrt{2}\right)$

Los puntos de la elipse que se encuentran más cerca del origen son $(1, 0,0)$ y $(0, 1,0)$, los que corresponden a una distancia mínima $d = 1$, mientras que el punto más alejado es $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},\ 1+\sqrt{2}\right)$.

3

Unidad 3

Integrales múltiples y algunas aplicaciones

Cálculo multivariado

Autor: Danilo de Jesús Ariza Agámez

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina
MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Introducción

En el estudio de integral definida de una función real de una variable real, el estudiante recordara que la misma se realiza sobre un intervalo $[a, b]$ asociado con un segmento de recta, en esta cartilla se calcula inicialmente la integral de una función de dos variables sobre una superficie, lo que da origen a las integrales dobles y a los teoremas o principios en los que se basa su cálculo, distinguiendo los casos de regiones de integración rectangulares y no rectangulares. Se estudia también las aplicaciones de las integrales dobles al cálculo de áreas de regiones planas acortadas por funciones y al cálculo de volúmenes que se levantan sobre regiones planas. Los fundamentos de cálculo de las integrales doble se extienden al de integrales triple.

Recomendaciones metodológicas

Aunque el estudiante autónomamente puede abordar el estudio de las temáticas de la semana a parir de cualquiera de sus recursos, se le recomienda hacerlo a partir de la lectura de esta cartilla sobre integrales doble, donde presentamos específicamente tópicos como integrales dobles sobre superficies rectangulares y sobre superficies más generales. Luego de la lectura conviene trabajar con base en recursos como lecturas complementarias, donde se presentan ejercicios resueltos, y video capsulas o videos que explican algunos ejemplos y fundamentos de su desarrollo. Luego de abordar los recursos antes señalados resulta conveniente afrontar los ejercicios de repaso a través de los cuales usted puede validar sus avances en la incorporación de los contenidos a su cúmulo de conocimientos.

Desarrollo temático

Integrales múltiples y algunas aplicaciones

Integrales múltiples

En el curso de Cálculo Integral se estudió la integral definida de una función real de una variable, en un intervalo cerrado $[a, b]$, con base en el paso al límite de la suma de las áreas de infinitos rectángulos de base infinitesimal y altura igual al valor de la función. Nuestro cometido en esta sección de Integrales múltiples consiste en ampliar la misma idea de sumas infinitas para hallar la integral definida de funciones de varias variables, se considera inicialmente el caso de integrales dobles de funciones $f(x, y)$ definidas sobre un rectángulo acotado en el plano XY.

Integrales dobles sobre regiones rectangulares

Si tenemos una función de dos variables independientes $f(x, y)$, definida sobre el rectángulo Re: $a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d$, podemos dividir el rectángulo en muchos rectángulos más pequeños mediante el trazado de múltiples líneas rectas paralelas a los ejes coordenados X, Y, como muestra la figura 1, el conjunto de todos los pequeños rectángulos forma una partición de Re. Un pequeño rectángulo de ancho Δx y altura Δy, tendrá un área $\Delta A = (\Delta x)(\Delta y)$. Es claro que a mayor número de rectángulos el área de cada uno es más pequeña, si en total hay n pequeños rectángulos, sus área son $\Delta A_1, \dots, \Delta A_k, \dots, \Delta A_n$, donde ΔA_k es el área de $k - esimo$ rectángulo, asociado con la ubicación del punto (x_k, y_k). La suma de Riemann sobre el rectángulo corresponde a la suma de productos de cada rectángulo por el valor de la función, es decir.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta A_k \qquad (6.1)$$

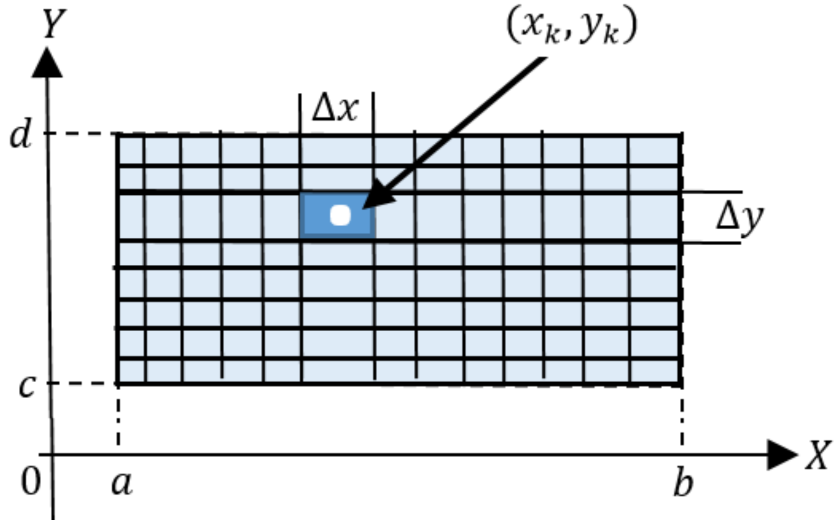

Figura 1. Región rectangular dividida en muchos pequeños rectángulos
Fuente: Propia.

Es de anotar que existen muchísimas formas de realizar la partición, por tanto se puede obtener diferentes valores de la suma de Riemann. Si las medidas de los lados de cada rectángulo son muy pequeñas, es decir tienden a cero, el número de rectángulos será muy grande o tiende a infinito, en cuyo caso el valor de la suma estaría dado por:

$$S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta A_k \qquad (6.2)$$

Si el límite definido en la ecuación (6.2) existe se dice que la función $f(x,y)$ es integrable y el respectivo límite recibe el nombre de integral doble de $f(x,y)$ sobre la región Re. Una forma de representar una integral doble sobre una región Re es:

$$\iint_{Re} f(x,y)dA$$

Significado geométrico de la integral doble sobre una región rectangular

Así como la integral definida de una función de una variable corresponde al área bajo la curva de la función, si la función $f(x,y)$ definida sobre el rectángulo Re es positiva, su integral doble sobre Re se interpreta como el volumen del sólido limitado por el rectángulo Re y la superficie de $f(x,y)$. La figura 2 sugiere la integración de elementos infinitesimales de volumen sobre una región plana.

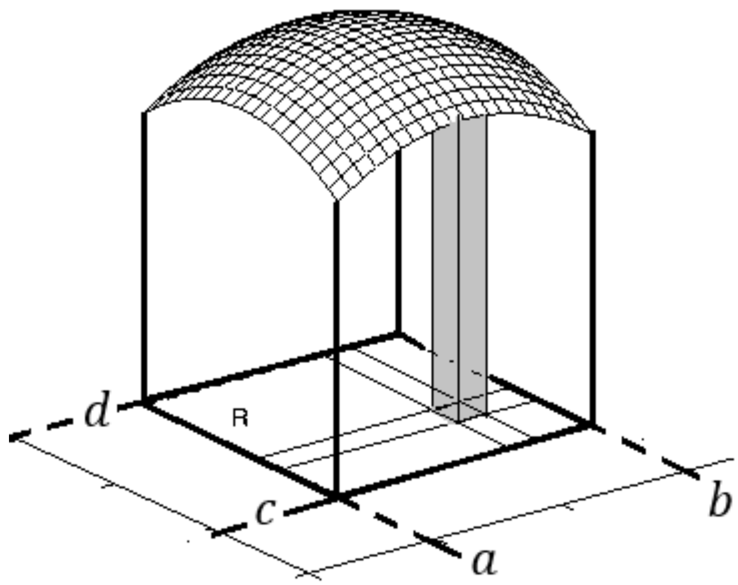

Figura 2 Ilustración del significado geométrico de la integral doble de una función de dos variables sobre una región rectangular

Fuente: Propia.

Cálculo de integral doble sobre una región rectangular

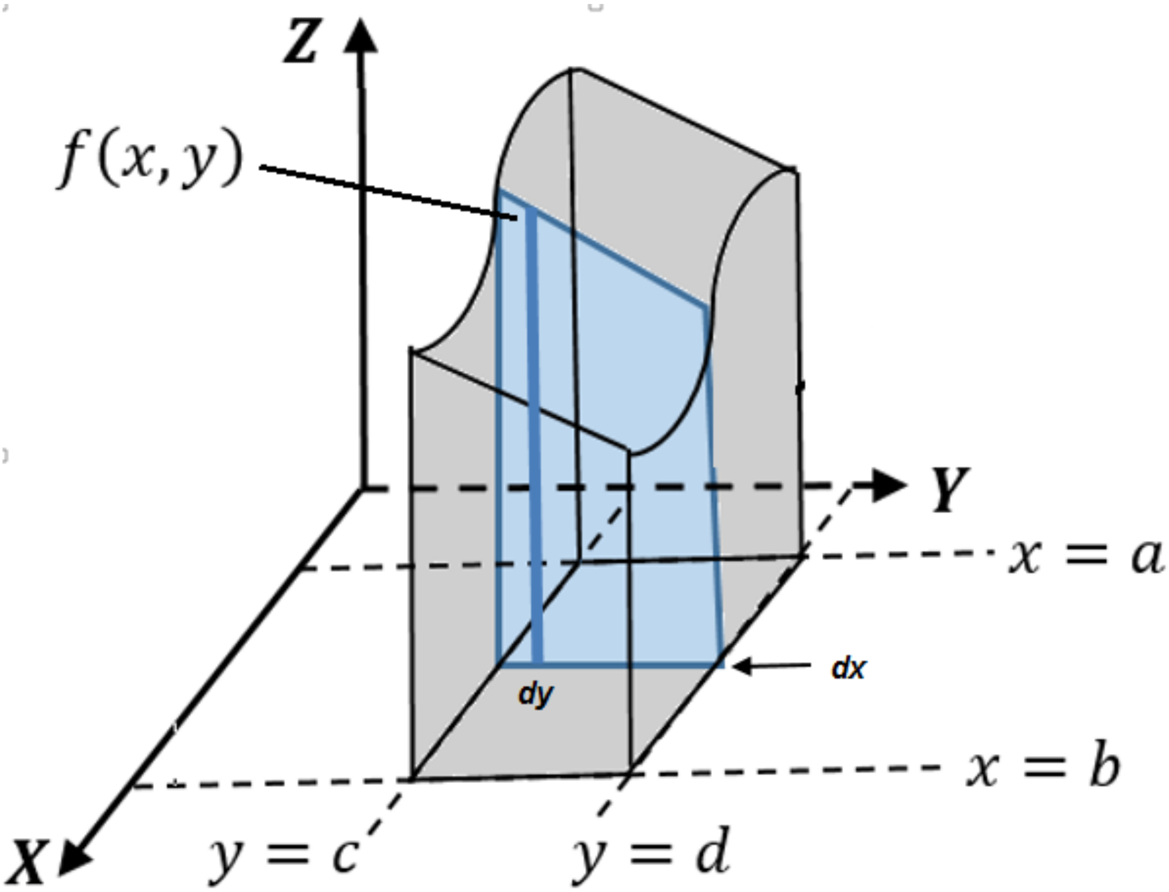

Figura 3. Ilustración del razonamiento para calcular una integral doble sobre una región rectangular
Fuente: Propia.

Para hallar el volumen del solido limitado por la parte superior por la superficie de la función $f(x, y)$ y por la parte inferior por el rectángulo Re: $a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d$, podemos considerar un elemento infinitesimal de volumen consistente en una sección transversal perpendicular al plano XY y paralela al plano YZ, la cual tiene espesor dx y área $A(x)$, tal como se sugiere en la figura 3, por lo que el volumen corresponde a:

$$V = \int_a^b A(x)dx \qquad (6.3)$$

Para hallar el área de la sección transversal $A(x)$ consideramos en ella un elemento infinitesimal de área consistente en una sección franja perpendicular al Y, la cual tiene ancho dy y altura $f(x, y)$, como muestra la misma figura 3, por lo tanto el área $A(x)$ es:

$$A(x) = \int_c^d f(x,y)dy \qquad (6.4)$$

Podemos notar que esta es el área para una sección transversal fija, por lo que al integrar con respecto a la variable y, se mantiene constante el valor de x. Si sustituimos la integral que da el área $A(x)$ de la ecuación (6.4) en la expresión del volumen de la ecuación (6.3), encontramos que el volumen está dado ahora por:

$$V = \int_a^b A(x)dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dy\, dx$$

$$V = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dy\, dx \qquad (6.5)$$

Según (6.5) se puede hallar el volumen integrando la función dada respecto a y e integrar luego este primer resultado respecto a x. Las integrales en (6.5) se llaman integrales iteradas.

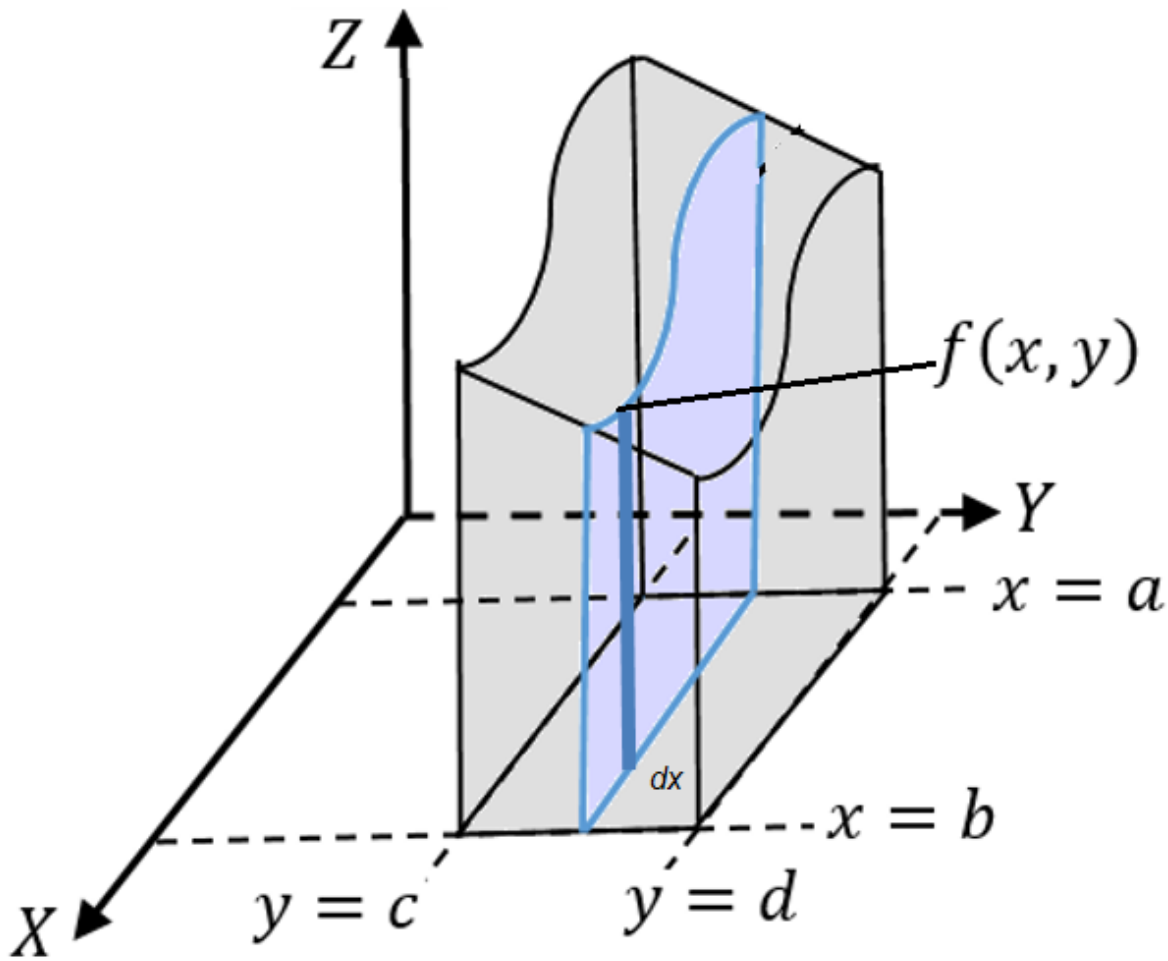

Figura 4. Ilustración del razonamiento para calcular una integral doble sobre una región rectangular
Fuente: Propia.

Si realizamos un procedimiento similar, basado en la figura 4, podemos llegar a la siguiente expresión en la cual se realiza primero la integración respecto a la variable x y luego respecto a y, como se indica en la ecuación (6.6). La realización de este procedimiento se propone al estudiante sea desarrollado por el estudiante.

$$V = \int_{c}^{d} \int_{a}^{b} f(x, y) dx\, dy \qquad (6.6)$$

Primera forma del Teorema de Fubini

Los razonamientos y procedimientos anteriores y el hecho que el valor de la integral doble de una función $f(x,y)$, definida en una región rectangular del plano XY, equivale al volumen del solido limitado por la región rectangular y la superficie de la función, hace parte de lo que se conoce como primera forma del Teorema de Fubini y se enuncia formalmente a continuación.

Sea $f(x,y)$ una función continua en la región rectangular Re: $a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d$, entonces el valor de la integral doble de $f(x,y)$ sobre Re está dado por:

$$\iint_{Re} f(x,y)dA = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dy\,dx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dy\,dx$$

Ejemplo 6.1: Hallar el valor de la siguiente integral doble:

$$\iint_{Re} (20-6xy^2)dA, \qquad con\ 0 \leq x \leq 2; \quad -1 \leq y \leq 1$$

Solución:

$$\iint_{Re} (20-6xy^2)dA = \int_{-1}^{1}\int_0^2 (20-6xy^2)dxdy = \int_{-1}^{1}\left(\int_0^2 (20-6xy^2)dx\right)dy$$

$$\iint_{Re} (20-6xy^2)dA = \int_{-1}^{1} (20x-3x^2y^2)|_0^2 dy = \int_{-1}^{1} (40-12y^2)dy$$

$$\iint_{Re} (20-6xy^2)dA = \int_{-1}^{1} (40-12y^2)dy = (40y-4y^3)|_{-1}^{1} = (40-4)-(-40+4)$$

$$\iint_{Re} (20-6xy^2)dA = 36+36 = 72$$

Integrales dobles sobre cualquier región plana

Cuando calculamos integrales dobles sobre regiones rectangulares contábamos con la facilidad de tener los límites de integración definidos desde el comienzo en razón a que los límites de la región son segmentos de recta paralelos a los ejes, en el caso que estudiamos aquí, los límites de integración pueden estar dados en términos variables.

Para hallar la integral doble de una función $f(x, y) \geq 0$, vista como el volumen de un sólido sobre una región del plano, podemos trazar rectas paralelas a los ejes X, Y, con lo cual se obtiene un conjunto de rectángulos del plano, debido a la curvatura de la región, solo algunos de estos rectángulos están totalmente en ella y algunos otros están parcialmente, como se muestra en la figura 4. Si tomemos los rectángulos con medidas muy pequeñas, se tiene un número muy grande de rectángulos, y estaremos más cerca de abarcar el área de la región con rectángulos totalmente contenidos en ella, y el volumen aproximado del sólido también será la suma de Riemann dada en la ecuación 6.1.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta A_k$$

Si las medidas de los rectángulos son tan pequeñas que tienden a cero, el número de rectángulos será tan grande que tiende a infinito y el volumen será el mismo límite de la ecuación 6.2, en general si el límite existe se dice que la función $f(x, y)$ es integrable y respectivo límite recibe el nombre de integral doble de $f(x, y)$ sobre la región Re, esto se representar mediante:

$$V = S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta A_k = \iint_{Re} f(x, y)dA$$

Para una función $f(x, y)dy \geq 0$ sobre Re, acotada por $x = a, x = b,\ g_1(x), g_2(x)$, encontramos que

$$A(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dA = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)dy$$

Y el volumen es:

$$V = \int_a^b dV = \int_a^b A(x)dx = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)dy\, dx$$

También se puede presentar el caso de una región limitada por $x = h_1(y),\ x = h_2(y),\ \ y = c,\ \ y = d$ como muestra la figura 5, sobre la cual el volumen del sólido sería:

$$V = \int_c^d A(y)dy = \int_c^d \int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x, y)dx\, dy$$

Estos razonamientos constituyen el fundamento de la segunda forma del Teorema de Fubini que se presenta a continuación:

Segunda forma del Teorema de Fubini

Dada una función $f(x, y)$ continua en una región Re, $g_1(x) \leq g_2(x)$ continuas en un intervalo $[a, b]$; , $h_1(y) \leq h_2(y)$ continuas en un intervalo $[c, d]$, entonces:

1. Para Re definida mediante $a \leq x \leq b,\ \ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$, se tiene:

$$\iint\limits_{Re} f(x, y)dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)dydx$$

2. Para Re definida mediante $c \leq y \leq d,\ \ h_1(x) \leq y \leq h_2(x)$, se tiene:

$$\iint\limits_{Re} f(x, y)dA = \int_c^d \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x, y)dxdy$$

Ejemplo 6.2: un prisma tiene como base el triángulo en sobre el plano XY limitado las rectas $y = x,\ \ x = 1$ y el eje Y. Sobre cada punto (x, y) del dominio, la altura del prisma está dado por $f(x, y) = 3 - x - y$. Hallar el volumen del sólido.

Solución: el volumen total se puede hallar mediante la integración de elementos infinitesimales de volumen dV, como el mostrado en el esquema de la figura 5, sobre toda la región Re Vemos que cada uno es igual al área de su base cuadrada $dxdy \quad o \quad dxdy$ por su altura $f(x, y)$.

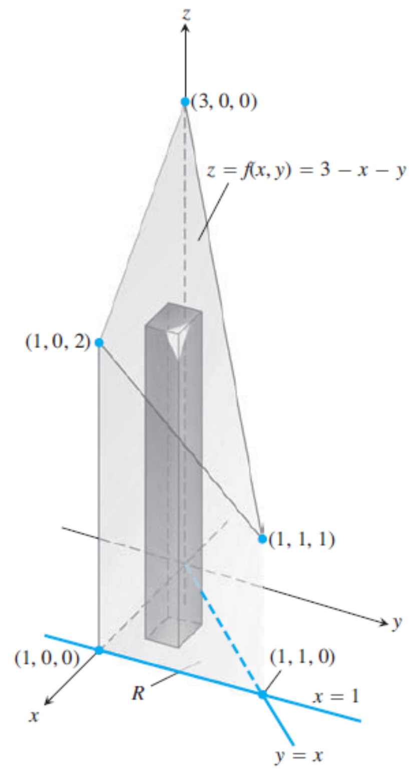

Figura 5. Ilustración del ejemplo 6
Fuente: Propia.

Si integramos primero respecto a la variable y y luego respecto a x debemos ver que la variable y toma valores comprendidos entre $y = 0$ a $y = x$, mientras que x lo hace entre $x = 0$ a $x = 1$, con lo cual la integral doble que da el volumen es:

$$V = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dydx = \int_0^1 \int_0^x (3 - x - y)dydx = \int_0^1 \left(3y - xy - \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^x dx$$

$$V = \int_0^1 \left(3x - x^2 - \frac{x^2}{2}\right)dx = \int_0^1 \left(3x - \frac{3x^2}{2}\right)dx = \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{2}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$$

Se recomienda al estudiante realizar el proceso invirtiendo el orden de integración.

Propiedades de las integrales dobles

A continuación se presenta el conjunto de propiedades que se cumple en el contexto de cálculo de las integrales doble.

Dadas las funciones $f(x,y)$ y $g(x,y)$ continuas en la frontera de una región Re, el cálculo de integrales dobles cumple lo siguiente.

$$1.\, producto\ por\ un\ múltiplo\ constante \iint\limits_{Re} cf(x,y)dA = c\iint\limits_{Re} f(x,y)dA$$

$$2.\ \ Suma\ o\ diferencia \iint\limits_{Re} [f(x,y) \pm g(x,y)]dA = \iint\limits_{Re} f(x,y)dA \pm \iint\limits_{Re} g(x,y)dA$$

$3.\, Dominación$

$$a. \iint\limits_{Re} f(x,y)dA \geq 0 \quad si\ \ f(x,y) \geq 0\ en\ Re$$

$$b. \iint\limits_{Re} f(x,y)dA \geq \iint\limits_{Re} g(x,y)dA\ si\ \ f(x,y) \geq f(x,y)\ en\ Re$$

$Aditividad$

$$\iint\limits_{R} f(x,y)dA = \iint\limits_{R_1} f(x,y)dA + \iint\limits_{R_1} f(x,y)dA\ \ si\ Re = R_1 \cup R_2\ y\ R_1 \cup R_2 = \phi$$

Área de regiones planas por integrales dobles

El cálculo de área de una región plana Re se reduce el cálculo de integrales de la forma:

$$A = \iint_{Re} dA$$

El procedimiento tiene como parte fundamental la determinación de los límites de integración de la misma forma que se hace para el cálculo de volumen. Nótese que no se multiplica por la función $f(x, y)$ que corresponde a la altura de un sólido, ya que solo se realiza el cálculo del área de la región.

Ejemplo 6.3: hallar el área de la región Re limitada por las curvas $y = x$; $y = x^2$ para valores positivos de x, y.

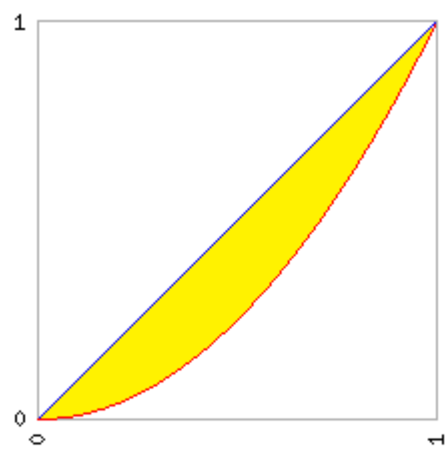

Figura 6. Representación gráfica de la situación del ejemplo 6.3
Fuente: Propia.

Solución: la figura 6 muestra la región Re, las dos curvas se cortan en (0, 0) y (1, 1). El área está dada por:

$$A = \iint_{Re} dA = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} dydx = \int_0^1 [y]_{x^2}^{x} \, dx = \int_0^1 (x^2 - x)dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{6}$$

Ejemplo 6.4: hallar el área de la región acotada por $y = x^2$; $y = x + 2$

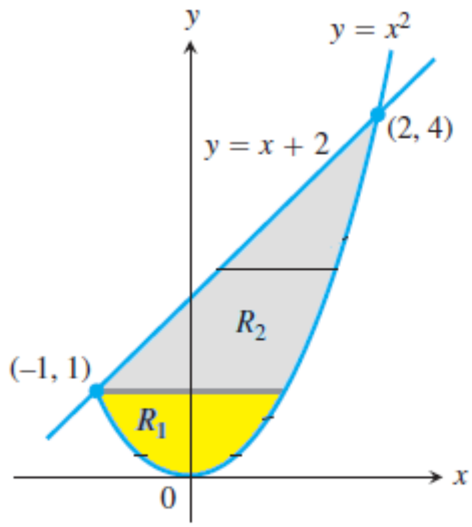

Figura 7. Representación de la situación del ejemplo 6.4
Fuente: Propia.

Solución: la figura 7 muestra la región y los puntos de corte de las dos curvas, así como los puntos de corte $(-1,1),(2,4)$. El área se puede calcular mediante:

$$A = \iint_{Re} dA = \int_{-1}^{2}\int_{x^2}^{x+2} dydx = \int_{-1}^{2}[y]_{x^2}^{x+2}\,dx = \int_{-1}^{2}(x+2-x^2)dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{6}$$

$$A = \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} = \frac{9}{2}$$

Integrales dobles en coordenadas polares

La utilidad de las integrales dobles en coordenadas polares radica en que algunos cálculos se realizan más fácilmente si se realiza la transformación de la forma cartesiana a forma polar.

Si una función $f(r,\theta)$ se define sobre la región Re limitada por $\theta = \alpha,\ \theta = \beta;\ r = g(\theta); r = h(\theta)$ con $0 \leq g(\theta) \leq h(\theta) \leq a$, entonces la región Re se encuentra en el interior de la región definida por $0 \leq r \leq a;\ \alpha \leq \theta \leq \beta$ y mostrada en la figura 8, en la que se resalta un elemento infinitesimal de área dA asociado con un "sector polar". En este caso la integral corresponde al siguiente límite de la suma:

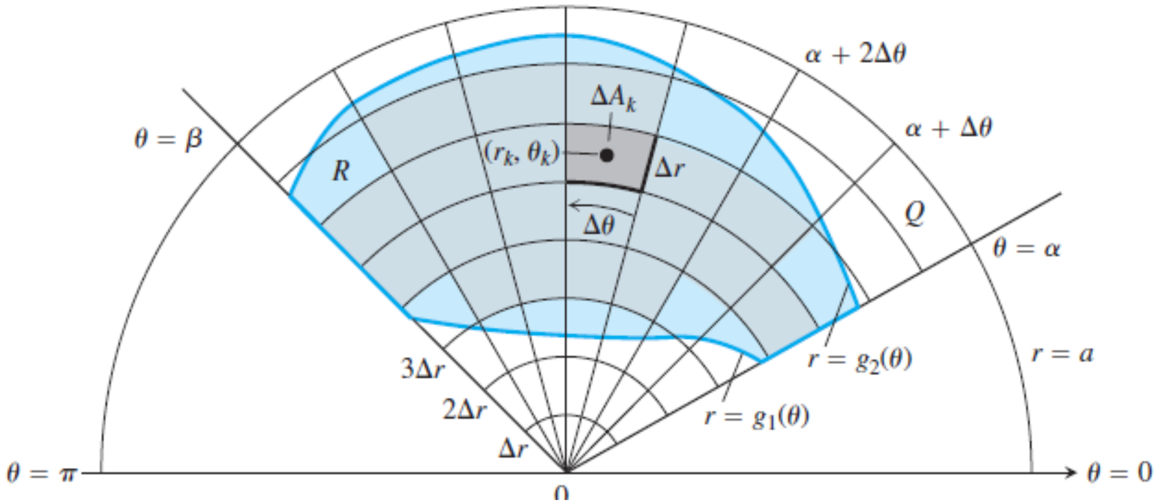

Figura 6. Una región Re en coordenadas polares
Fuente: Propia.

$$\iint_{Re} f(r,\theta)dA = S_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(r_k,\theta_k)\Delta A_k$$

El cálculo del anterior límite debe considerar se requiere expresar el área ΔA_k en función de Δr y $\Delta\theta$. El valor r_k señalado en la figura 8 se puede tomar como el promedio de los radios mayor y menor que limitan el respectivo sector polar, lo cual significa que $r_k = \frac{r_{mayor}+r_{menor}}{2}$, con $\Delta r = r_{mayor} - r_{menor}$. El estudiante puede verificar fácilmente que:

$$r_{mayor} = \Delta r + \frac{r_k}{2};\ r_{menor} = \Delta r - \frac{r_k}{2}$$

Además:

$$\Delta A_k = A_{mayor} - A_{menor} = (r_{mayor} - r_{menor})\Delta\theta = \left[\Delta r + \frac{r_k}{2} - \Delta r + \frac{r_k}{2}\right]\Delta\theta =$$

$$\Delta A_k = \left[\frac{r_k}{2} + \frac{r_k}{2}\right]\Delta\theta = r_k\Delta\theta$$

Con lo cual el límite asociado con la integral se convierte en:

$$\iint_{Re} f(r,\theta)dA = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(r_k,\theta_k)r_k\Delta\theta = \iint_{Re} f(r,\theta)drd\theta = \int_{\alpha}^{\beta}\int_{g(\theta)}^{h(\theta)} f(r,\theta)rdrd\theta$$

Integral triple y volumen de una región en el espacio

En esta sección se trata la ampliación de los principios de cálculo de integrales dobles al cálculo de integrales triples…

Integrales triples

Dada una función $f(x, y, z)$ definida en una región E, cerrada y acotada, del espacio XYZ, la integral de la función se puede calcular extendiendo el procedimiento aplicado para calcular la integral de una función de dos variables definida sobre una región plana, en este caso la integral corresponde al límite de la suma de los productos de la función f y cada elemento infinitesimal de volumen $\Delta V_k = (\Delta x_k)(\Delta y_k)(\Delta z_k)$, es decir:

$$\iiint_E f(x, y, z)dV = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x, y, z)\Delta V_k$$

$$\iiint_E f(x, y, z)dV = \iiint_E f(x, y, z)dxdydz$$

Volumen de una región del espacio

Al igual que el cálculo de área de regiones planas mediante integrales dobles, en lo cual se integraba los elementos infinitesimales de área $dxdy$, el volumen de una región del espacio corresponde a la integral triple de los elementos infinitesimales de volumen $dV = dxdydz$, es decir:

$$V = \iiint_E dV = \iiint_E dxdydz$$

Para el cálculo de estas integrales se debe estudiar la definición de los límites de integración según la región. Se propone al estudiante revisar la sección de lecturas complementarias de esta semana, donde se encuentra un conjunto de ejercicios resueltos sobre el tema, de igual forma se recomienda la visualización de videcápsulas.

Unidad 4

Integrales de línea de campos vectoriales

Cálculo multivariado

Autor: Danilo de Jesús Ariza Agámez

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina

MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Introducción

Tal como lo recordamos en la cartilla anterior, las integrales definidas de funciones de una variable se calculan sobre un segmento de recta, las integrales dobles se calculan en referencia a una región plana. En esta cartilla se estudia las integrales de línea, las cuales se calculan sobre una curva en el espacio. Los conceptos tratados se relacionan con la integración en campos vectoriales. Reconociéndose importantes aplicaciones en ciencias e ingeniería, tales como trabajo y flujo. Se trata también un importante resultado que relaciona el cálculo de una integral de línea con el de una integral doble, el teorema de Green.

Recomendaciones metodológicas

Las principales recomendaciones que damos sobre los temas de esta semana atañen a la juiciosa lectura de esta cartilla sobre integrales de línea, sin embargo, no sobra el repaso de los temas dados en cartillas anteriores sobre operaciones entre vectores, lo que ayudará a una mejor comprensión de sus contenidos. Luego de su lectura, conviene llevar a cabo acciones como las sugeridas en las cartillas anteriores en relación con el aprovechamiento de recursos como lecturas complementarias y video capsulas ofrecidos aquí. Luego de abordar lo anterior resulta pertinente enfrentarse a la solución de los ejercicios de repaso.

Desarrollo temático

Integrales de línea de campos vectoriales

Integrales de línea en el espacio

Si el estudiante recuerda los estudios de física relacionados con el cálculo del trabajo realizado por una fuerza, tendrá presente que el trabajo realizado por una fuerza conservativa, como la gravedad, no depende de la trayectoria sobre la cual se realiza el trabajo, situación contraria se da si la fuerza es no conservativa, como es el caso de las fuerzas resistivas. Los conceptos e ideas sobre la integral de línea o de trayectoria, se refieren precisamente a casos en que el valor de la integral en general depende de la trayectoria seguida.

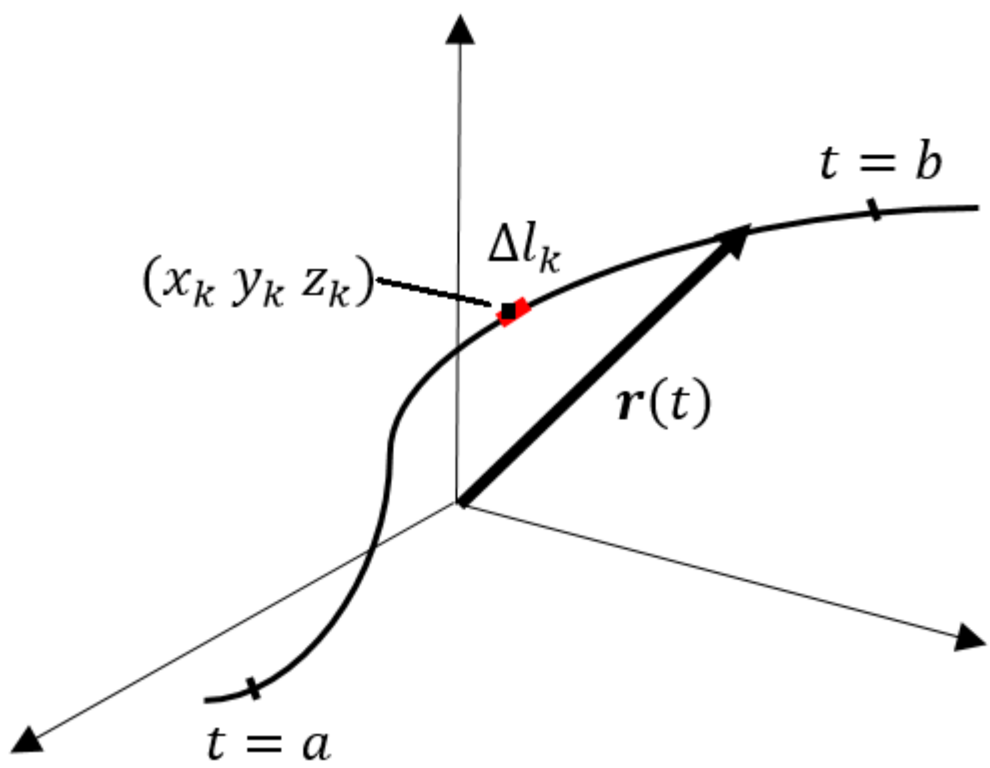

Figura 1. Curva en el espacio vista como la composición de muchos pequeños segmentos
Fuente: Propia.

Si $f(x, y, z)$ es una función real de variables reales y C es una curva en el dominio de la función, expresada paramétricamente mediante $\mathbf{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}$, con t en el intervalo $[a, b]$, los valores de f a lo largo de C corresponden a $f(x(t), y(t), z(t))$**.** La integral de f a lo largo de la trayectoria, con respecto a la longitud de arco, en el intervalo de valores de t se puede hallar considerando inicialmente un elemento de arco de longitud Δl_k sobre la curva C, asociado con el punto (x_k, y_k, z_k). A partir de lo anterior tenemos la siguiente suma aproximada:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta l_k$$

Si la función $f(x, y, z)$ es continua y las primeras derivadas de $x(t), y(t), z(t)$ son continuas, al tomar Δl_k muy pequeño, el número n de porciones de arco se hace muy grande, y en el caso límite en que cada Δl_k tiende a cero, n tiende a infinito, por lo que la integral de f a lo largo C corresponde a tal límite. Formalmente, con base en los anteriores razonamientos, presentamos a continuación la definición de integral de línea.

Definición de integral de línea

Dada una función $f(x, y, z)$ sobre una curva C, definida paramétricamente por el vector $\mathbf{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}$ en el intervalo $[a, b]$, entonces la integral de f sobre C está dada por el siguiente límite, si existe:

$$\int_C f(x, y, z)dl = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta l_k \qquad (7.1)$$

Decir que una curva C es suave para $t \in [a, b]$, significa que la derivada de la función vectorial que define su parametrización es continua y no se anula en $[a, b]$, es decir, $\mathbf{v} = \frac{dr}{dt} \neq 0$. La suavidad de la curva C y la continuidad de f sobre C son garantía de la existencia del límite dado en la ecuación (7.1) y por tanto de la integral de línea.

Longitud de arco

De la ecuación (3.11) de la cartilla de la semana 3, si tomamos $t_0 = a$, encontramos que la longitud de arco está dada por:

$$L(t) = \int_a^t |\mathbf{v}(\tau)|\, d\tau \qquad (7.2)$$

Al aplicar el teorema fundamental del cálculo tenemos que $dL = |\mathbf{v}(t)|dt$. Con lo cual la ecuación (7.1) que define la integral de línea sobre la curva se transforma en la integral simple en términos del parámetro t, tal como se muestra a continuación:

$$\int_C f(x,y,z)dl = \int_a^b f\big(x(t),y(t),z(t)\big)|\mathbf{v}(t)|dt \qquad (7.3)$$

Ejemplo 7.1: se tiene la función $f(x,y,z) = x - 3y^2 + z$. Hallar la integral sobre la trayectoria recta que va del origen al punto $(1,1,1)$.

Solución: una sencilla parametrización de la trayectoria es $\mathbf{r}(t) = t\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}; \quad t \in [0,1]$. Aquí se cuenta con la existencia y continuidad de las derivadas de las componentes del vector $\mathbf{r}(t)$ y además $|\mathbf{v}(t)| = |\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}| = \sqrt{3}$, lo que indica que $\mathbf{v}(t)$ no se anula, con lo cual la trayectoria es una curva suave y la integral estará dada por:

$$\int_C f(x,y,z)dl = \int_0^1 \sqrt{3}f(t,t,t)\,dt = \int_0^1 \sqrt{3}(t - 3t^2 + t)dt = \sqrt{3}\int_0^1 (2t - 3t^2)dt$$

$$\int_C f(x,y,z)dl = \sqrt{3}\int_0^1 (2t - 3t^2)dt = \sqrt{3}(t^2 - t^3)\Big|_0^1 dt = 0$$

Campos vectoriales e integrales de línea

Para el estudiante debe resultar familiar que algunas magnitudes físicas tales como las fuerzas gravitacionales, magnéticas y eléctricas, por ejemplo, se describen y estudian como vectores asociados con puntos del espacio, lo que da lugar a un campo vectorial.

Campo vectorial

Un campo vectorial se define como una función que asocia un vector con cada punto de su dominio. Por ejemplo en cada punto en los alrededores de un cuerpo cargado eléctricamente existe un campo eléctrico, el cual puede impactar el estado de movimiento de una carga de prueba, la magnitud y dirección del campo en cada punto del espacio depende de la magnitud de la carga, de la geometría del cuerpo y de la ubicación del punto. Un campo vectorial tridimensional es una función de la forma:

$$F(x,y,z) = M(x,y,z)\boldsymbol{i} + N(x,y,z)\boldsymbol{j} + P(x,y,z)\boldsymbol{k}$$

Si las funciones $M,\ N, P$ son continuas se dice que el campo también es continuo, y es derivable si sus componentes también lo son.

El conjunto de vectores tangentes, así como los de vectores normal a una curva son ejemplos de campos vectoriales a lo largo de la curva. Otra situación de este tipo corresponde al asocio del vector gradiente de una función escalar $f(x, y, z)$ con cada punto de alguna superficie de nivel. Para representar gráficamente los campos vectoriales, se acostumbra tomar puntos del dominio y trazar los respectivos vectores, teniendo en cuenta que es la flecha la que se asocia al punto.

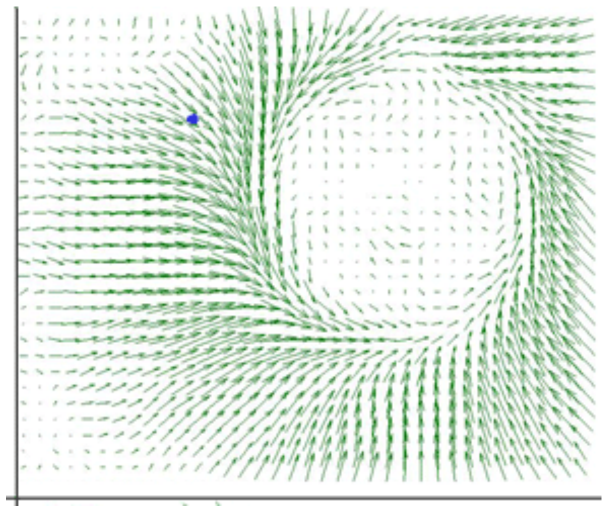

Figura 2. Ejemplo de representación de campo vectorial
Fuente: https://encrypted-tbn0.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcTJNYoSiquDiJ9lRektdT-T-Xf7FltJXIFmlieEN7JJVAMuf89OmQ

Campo vectorial gradiente

El campo vectorial gradiente de una función derivable $f(x, y, z)$ corresponde al campo de vectores gradiente de la función, es decir:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{k}$$

El campo gradiente en cada punto del espacio da un vector en la dirección de mayor crecimiento de la función, cuyo módulo es el valor de la derivada direccional. Este campo no necesariamente se refiere a fuerzas.

Ejemplo 7.2: la temperatura T en cada punto de cierta región del espacio obedece la ecuación:

$$T(x, y, z) = 120 - x^2 - y^3 - z^2$$

Y un campo $\mathbf{F}(x, y, z)$ es el gradiente de la función $T(x, y, z)$, entonces:

$$\mathbf{F} = \nabla \mathrm{T} = \frac{\partial T}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial T}{\partial x}\boldsymbol{j} + \frac{\partial T}{\partial x}\boldsymbol{k} = -2x\boldsymbol{i} - 3y^2\boldsymbol{j} \pm 2z\boldsymbol{k}$$

Integrales de línea en campos vectoriales

Ya que anteriormente hemos definido integrales de línea de funciones escalares sobre trayectorias, pasamos a realizar cálculos de integrales de línea de campos vectoriales.

Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\boldsymbol{i} + N(x, y, z)\boldsymbol{j} + P(x, y, z)\boldsymbol{k}$ un campo vectorial de componentes continuas que se definen a lo largo de una curva suave C parametrizada por un vector $\mathbf{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}$ en un intervalo cerrado $[a, b]$, sea $\mathbf{T}$ el vector tangente unitario en cada punto de la curva en la dirección de avance. Se define la integral de línea del campo $\mathbf{F}$ a lo largo de C mediante:

$$\int_C \mathbf{F}.\mathbf{T}ds = \int_C \mathbf{F}.\left(\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right)ds = \int_C \mathbf{F}.d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)).\frac{d\mathbf{r}}{dt}dt \qquad (7.4)$$

Donde $\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$

La definición dada permite ver que esta integral de línea corresponde a la integral de línea de la componente escalar tangencial del campo $\mathbf{F}$ a lo largo de la curva.

Para realizar el cálculo de la integral de línea de un campo vectorial se recomienda inicialmente expresar $\mathbf{F}(x, y, z)$ en términos de $r(t)$ mediante la sustitución de los componentes escalares M, N, P de $\mathbf{F}$ en términos de $x = x(t)$, $y = y(t), z = z(t)$, luego hallar $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ y finalmente calcular la integral según se indica a continuación:

$$\int_C \mathbf{F}.d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)).\frac{d\mathbf{r}}{dt}dt$$

Ejemplo 7.3: hallar la integral de línea del campo $\mathbf{F}$ definido por $\mathbf{F}(x, y, z) = z\boldsymbol{i} + xy\boldsymbol{j} - y^2\boldsymbol{k}$ a lo largo de $\mathbf{r}(t) = t^2\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j} + \sqrt{t}\boldsymbol{k}$ en $[0,1]$

Solución: teniendo en cuenta las recomendaciones anteriores y que:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = z\boldsymbol{i} + xy\boldsymbol{j} - y^2\boldsymbol{k}$$
$$\mathbf{r}(t) = t^2\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j} + \sqrt{t}\boldsymbol{k} = \left(t^2, t, \sqrt{t}\right)$$

Encontramos que:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \mathbf{F}\left(t^2, t, \sqrt{t}\right) = \sqrt{t}\boldsymbol{i} + t^3\boldsymbol{j} - t^2\boldsymbol{k}$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = 2t\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \frac{1}{2\sqrt{t}}\boldsymbol{k}$$

Con lo cual la integral correspondiente es:

$$\int_C \mathbf{F}.d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)).\frac{d\mathbf{r}}{dt}dt = \int_0^1 (\sqrt{t}\boldsymbol{i} + t^3\boldsymbol{j} - t^2\boldsymbol{k}).\left(2t\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \frac{1}{2\sqrt{t}}\boldsymbol{k}\right)dt$$

$$\int_C \mathbf{F}.d\mathbf{r} = \int_0^1 \left(2t^{\frac{3}{2}} + t^3 - \frac{1}{2}t^{\frac{3}{2}}\right).dt = \int_0^1 \left(\frac{3}{2}t^{\frac{3}{2}} + t^3\right)dt = \left[\frac{\frac{3}{2}t^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{t^3}{4}\right]_0^1 = \frac{17}{20}$$

Algunas aplicaciones de las integrales de línea

En esta sección se presenta brevemente algunas de las aplicaciones del cálculo de integral de línea.

Trabajo realizado por una fuerza a lo largo de una curva

Si C es una curva suave parametrizada por $\mathbf{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}$ con $t \in [a, b]$ y $\mathbf{F}$ es una fuerza dada por el campo $\mathbf{F} = M(x, y, z)\boldsymbol{i} + N(x, y, z)\boldsymbol{j} + P(x, y, z)\boldsymbol{k}$ de componentes continuas en una región que contiene a C. El trabajo realizado por $\mathbf{F}$ al mover un cuerpo desde $\mathbf{r}(a)$ hasta $\mathbf{r}(b)$ a lo largo de C se calcula mediante:

$$W = \int_C \mathbf{F}.\mathbf{T}\,ds = \int_a^b F\big(\mathbf{r}(t)\big).\frac{d\mathbf{r}}{dt}dt \qquad (7.5)$$

Ejemplo 7.4: hallar el trabajo realizado por la fuerza $\mathbf{F} = (y - x^2)\boldsymbol{i} + (z - y^2)\boldsymbol{j} + (x - z^2)\boldsymbol{k}$ a lo largo de $\mathbf{r}(t) = t\boldsymbol{i} + t^2\boldsymbol{j} + t^3\boldsymbol{k}$ con $t \in [0, 1]$, desde $(0, 0, 0)$ hasta $(1, 1, 1)$.

Solución:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (y - x^2)\boldsymbol{i} + (z - y^2)\boldsymbol{j} + (x - z^2)\boldsymbol{k}$$

$$\mathbf{r}(t) = t\boldsymbol{i} + t^2\boldsymbol{j} + t^3\boldsymbol{k}\ t \in [0, 1]\ \boldsymbol{;}$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \mathbf{F}(t, t^2, t^3\ ) = (t^2 - t^2)\boldsymbol{i} + (t^3 - t^4)\boldsymbol{j} + (t - t^6)\boldsymbol{k}$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = (t^3 - t^4)\boldsymbol{j} + (t - t^6)\boldsymbol{k}$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \boldsymbol{i} + 2t\boldsymbol{j} + 3t^2\boldsymbol{k}$$

$$F(\mathbf{r}(t)).\frac{d\mathbf{r}}{dt} = [(t^3 - t^4)\boldsymbol{j} + (t - t^6)\boldsymbol{k}].[\boldsymbol{i} + 2t\boldsymbol{j} + 3t^2\boldsymbol{k}]$$

$$F(\mathbf{r}(t)).\frac{d\mathbf{r}}{dt} = 2t(t^3 - t^4) + 3t^2(t - t^6) = 2t^4 - 2t^5 + 3t^3 - 3t^8$$

Entonces:

$$W = \int_a^b F(\mathbf{r}(t)).\frac{d\mathbf{r}}{dt}dt = \int_0^1 (2t^4 - 2t^5 + 3t^3 - 3t^8)dt$$

$$W = \left[\frac{2}{5}t^5 - \frac{1}{3}t^6 + \frac{3}{4}t^4 - \frac{1}{3}t^5\right]_0^1 = \frac{29}{60}$$

Integrales de flujo

Si C es una curva suave parametrizada por $\mathbf{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}$ con $t \in [a, b]$ y $\mathbf{F} = M(x, y, z)\boldsymbol{i} + N(x, y, z)\boldsymbol{j} + P(x, y, z)\boldsymbol{k}$ es un campo continuo de velocidad, el flujo a lo largo de la curva desde $\mathbf{r}(a)$ hasta $\mathbf{r}(b)$ a lo largo de C se calcula mediante:

$$Flujo = \int_C \mathbf{F}.\mathbf{T}\,ds = \int_a^b F(\mathbf{r}(t)).\frac{d\mathbf{r}}{dt}dt \qquad (7.6)$$

En el caso que $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$ el flujo corresponde a la circulación alrededor de C.

Ejemplo 7.5: la función $\mathbf{F}(x, y, z) = x\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k}$ representa el campo vectorial de velocidad de un fluido, calcular el flujo a lo largo de la curva C parametrizada por el vector $\mathbf{r}(t) = (cost)\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}; t \in [0, \ {}^{\pi}/_{2}]$.

Solución:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k}$$
$$\mathbf{r}(t) = (cost)\boldsymbol{i} + (sent)\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}; t \in [0, \ {}^{\pi}/_{2}].$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \mathbf{F}(cost, sent, t) = (cost)\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j} + (sent)\boldsymbol{k}$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = (-sent)\boldsymbol{i} + (cost)\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)).\frac{d\mathbf{r}}{dt} = [(cost)\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j} + (sent)\boldsymbol{k}].[(-sent)\boldsymbol{i} + (cost)\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}]$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)).\frac{d\mathbf{r}}{dt} = (-sent)(cost) + tcost + sent$$

Entonces:

$$Flujo = \int_C \mathbf{F}.\mathbf{T}\, ds = \int_a^b F(\mathbf{r}(t)).\frac{d\mathbf{r}}{dt}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}}[(-sent)(cost) + tcost + sent]\ dt = \frac{1}{2}$$

Flujo a través de una curva plana simple y cerrada

Una curva se denomina simple si no se intersecta con ella misma, y es cerrada cuando el punto de inicio coincide con el final. En estos casos interesa calcular la tasa a la que un fluido ingresa o sale de la región plana limitada por la curva cerrada, lo que corresponde al componente escalar del campo vectorial velocidad en la dirección normal a la curva, para ello se hace uso de integral de línea como se presenta a continuación.

Sea $\mathbf{F} = M(x,y)\boldsymbol{i} + N(x,y)\boldsymbol{j}$ un campo vectorial continuo en el plano, sea C una curva suave, simple y cerrada en el dominio de $\mathbf{F}$, y $\mathbf{n}$ el vector unitario normal a C en dirección hacia afuera, el flujo del campo $\mathbf{F}$ a través de la curva C se calcula mediante:

$$Flujo\ de\ \mathbf{F} = a\ \ través\ de\ C = \int_C \mathbf{F}.\mathbf{n}\, ds \qquad (7.7)$$

Para efectos de cálculo, para $M(x,y)\boldsymbol{i} + N(x,y)\boldsymbol{j}$ y cualquier parametrización suave $x = x(t), y = y(t); t \in [a,b]$ de C, que la recorra en sentido anti horario una sola vez, se puede demostrar que

$$(Flujo\ de\ \mathbf{F} = M\boldsymbol{i} + N\boldsymbol{j}\ a\ \ través\ de\ C) = \int_C \mathbf{F}.\mathbf{n}\, ds = \oint_C (Mdy - Ndx) \quad (7.8)$$

Ejemplo 7.6: hallar el flujo del campo $\mathbf{F} = (x-y)\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}$ a través de la curva $x^2 + y^2 = 1$ en el plano XY.

Solución: se toma $\mathbf{r}(t) = (cost)\boldsymbol{i} + (sent)\boldsymbol{j}; t \in [0,\ {}^{\pi}/_{2}]$ como parametrización de C y se tiene $M = x - y = cost - sent,\ dy = (cost)dt; N = x = cost, dx = -sent$, entonces:

$$Flujo = \int_C (Mdy - Ndx) = \int_0^{2\pi}(cos^2t - sent.cost + cost.sent)dt$$

$$Flujo = \int_0^{2\pi}(cos^2t)dt = \int_0^{2\pi}\frac{1 + cos2t}{2}dt = \left[\frac{t}{2} + \frac{sen2t}{4}\right]_0^{2\pi} = \pi$$

Campos conservativos

Un campo vectorial $\mathbf{F}$ definido en una región abierta Re del espacio se califica como conservativo si para cualquier par de puntos P y Q en Re, la integral de línea $\int_C \mathbf{F}.d\mathbf{r}$ desde P hasta Q tiene el mismo valor sin importar la trayectoria que una P y Q. Un ejemplo de campo conservativo es el campo gravitacional, en el cual el trabajo realizado por la fuerza de gravedad es independiente de la trayectoria. Si bien es cierto que la integral correspondiente es una integral de línea, la independencia de la trayectoria lleva a pensar que lo importante son los puntos P y Q por lo cual se expresa como una integral definida entre P y Q.

Se podría demostrar que un campo vectorial F es conservativo si y sólo si corresponde al campo vectorial gradiente de una función escalar, es decir, para alguna función f, se cumple que $\mathbf{F} = \nabla f$, la función f recibe el nombre de función potencial. Ejemplos importantes en el mundo de la física son las funciones de potencial gravitacional y potencial eléctrico. Según la relación entre campo vectorial conservativo y su respectiva función potencial, tenemos que:

$$\int_P^Q \mathbf{F}.d\mathbf{r} = \int_P^Q \nabla f.d\mathbf{r} = f(Q) - f(P) \qquad (7.9)$$

Integrales de línea en campos conservativos

Vimos en la sección anterior que un campo conservativo es el campo gradiente de alguna función escalar. El siguiente teorema brinda un procedimiento de evaluación de integrales de línea de campos gradiente.

Teorema fundamental de integrales de línea

Dada una curva suave C, que une los puntos P y Q, parametrizada por la función vectorial $\mathbf{r}(t)$. Una función f diferenciable con vector gradiente continuo $\mathbf{F} = \nabla f$ que contiene a C, se tiene entonces que:

$$\int_C \mathbf{F}.d\mathbf{r} = f(Q) - f(P) \qquad (7.10)$$

Ejemplo 7.7: sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial de fuerzas que corresponde al gradiente de la función

$$f(x,y,z) = -\frac{1}{x^2+y^2+z^2}$$

Hallar el trabajo necesario para mover un cuerpo desde el punto $(1,0,0)$ hasta $(0,0,2)$ a lo largo de una curva suave que no pasa por $(0,0,0)$.

Solución: el trabajo realizado corresponde a:

$$\int_C \mathbf{F}.\,d\mathbf{r} = f(0,0,2) - f(1,0,0) = -\frac{1}{4} - (-1) = \frac{3}{4}$$

Tal como lo muestra el teorema anterior y se evidencia a través de la solución del ejemplo, solo se requiere conocer la respectiva función f para facilitar significativamente el cálculo de integrales.

Una importante consecuencia del teorema fundamental de las integrales de línea es el hecho que cualquier campo conservativo es un campo gradiente, lo cual se enuncia como el siguiente teorema.

Teorema: todo campo conservativo es un campo gradiente

Dado un campo vectorial $\mathbf{F} = M(x,y,z)\boldsymbol{i} + N(x,y,z)\boldsymbol{j} + P(x,y,z)\boldsymbol{k}$ en una región conexa abierta del espacio. $\mathbf{F}$ es un capo conservativo si y solo si $\mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla} f$ para alguna función diferenciable f.

Otro hecho importante que surge en el cálculo de integrales de línea de campos conservativos se refiere al hecho que en una trayectoria cerrada la correspondiente integral es igual a cero, es decir, dada una curva cerrada C, el campo $\mathbf{F}$ es conservativo si y solo si $\int_C \mathbf{F}.\,d\,\mathbf{r} = 0$.

Lo estudiado hasta este momento en relación con campos conservativos y funciones potenciales nos hace plantear el interrogante sobre cómo saber si un campo $\mathbf{F}$ es conservativo y, de ser así, como hallar la función potencial asociada. Para responder a estos interrogantes presentamos a continuación condiciones necesarias y suficientes para que un campo vectorial sea conservativo.

Condiciones para que un campo $\mathbf{F}$ sea conservativo

Dado un campo vectorial $\mathbf{F} = M(x,y,z)\boldsymbol{i} + N(x,y,z)\boldsymbol{j} + P(x,y,z)\boldsymbol{k}$ en un dominio conexo y simplemente conexo, con componentes M, N, P tales que sus primeras derivadas parciales son continuas. El campo $\mathbf{F}$ es un capo conservativo si y solo si

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial z}; \ \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x}; \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y} \qquad (7.11)$$

Si se sabe que un campo es conservativo la función f que satisface $\mathbf{F} = \nabla f$, es decir

$$M(x,y,z)\boldsymbol{i} + N(x,y,z)\boldsymbol{j} + P(x,y,z)\boldsymbol{k} = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

Lo anterior implica que

$$M(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}; \quad N(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial y}; \quad P(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial z} \qquad (7.12)$$

En lo que atañe a esta sección 7.4, se invita al estudiante a consultar los ejercicios resueltos contenidos en las lecturas complementarias de esta semana, tales ejemplos brindan un mayor panorama del uso de tales principios.

Teorema de Green

Un importante número de situaciones en el campo de la ciencia se relacionan con integrales de campos no conservativos a lo largo de curvas planas cerradas, un ejemplo de ello lo constituye el trabajo realizado por fuerzas disipativas. Para el cálculo de tales integrales, existe un procedimiento denominado Teorema de Green, a través del cual el problema de calcular la integral de línea, se convierte en el cálculo de una integral doble sobre la región plana limitada por la curva cerrada C. El teorema de Green se relaciona con dos importantes cantidades asociadas con un campo vectorial, denominadas divergencia o densidad de flujo y densidad de circulación o componente k del rotacional. Estas cantidades se definen a continuación como parte de esta sección.

Divergencia de un campo vectorial

Dado un campo vectorial $\mathbf{F}(x,y) = M(x,y)\boldsymbol{i} + N(x,y)\boldsymbol{j}$ la divergencia del campo $[\text{div}\,\mathbf{F}](x,y)$ o densidad de flujo, mide el grado de concentración del campo en el punto (x,y), su valor está dado por

$$[\text{div}\,\mathbf{F}](x,y) = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \qquad (7.13)$$

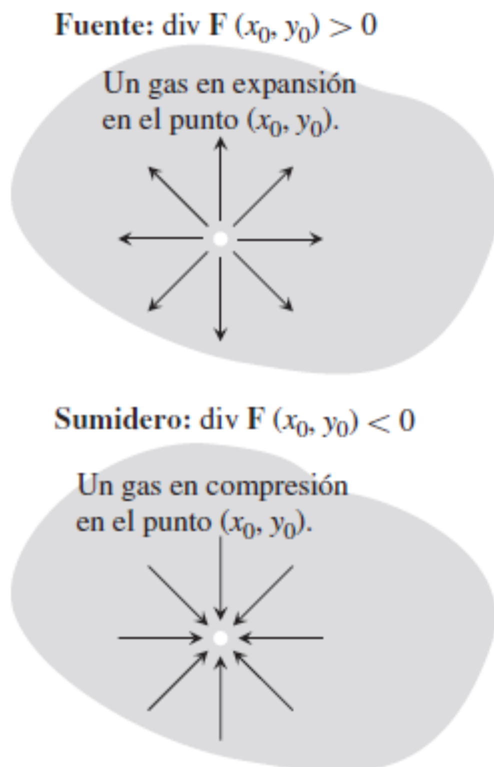

Figura 2. Representación gráfica asociada a la divergencia
Fuente: Propia.

Un acercamiento a la comprensión de este concepto se da al consideramos la compresión o expansión de un gas, si el gas se comprime en un punto (x, y) las líneas que indican la dirección del flujo convergen hacia el punto (x, y), mientras que si se expande, las líneas de campo son divergentes desde (x, y). La figura 3ilustra esta idea.

Densidad de circulación de un campo vectorial

Dado un campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\boldsymbol{i} + N(x, y)\boldsymbol{j}$ su densidad de circulación mide el grado de concentración del campo en el punto (x, y), su valor está dado por:

$$[\text{rot } \mathbf{F}].\boldsymbol{k} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \qquad (7.14)$$

Para comprender mejor su significado consideremos el movimiento del agua sobre una región del plano en una delgada capa, la densidad de circulación es entonces una medida de la rapidez y dirección de giro de la una rueda de hélices ubicada con su eje perpendicular al plano dentro del agua. La figura 3 ilustra esta idea.

Formas del Teorema de Green

Siempre que se habla del Teorema de Green se tiene dos formas de expresarlo, una de ellas hace referencia de la divergencia de un campo vectorial, mientras que la otra se refiere al componente k del rotacional.

Teorema de Green en términos de la divergencia

Esta forma del Teorema de Green establece que, bajo ciertas condiciones, el flujo saliente de un campo vectorial a través de una curva cerrada simple en el plano es igual a la doble integral de la divergencia del campo. La formulación de esta forma del teorema es la siguiente:

Sea Re una región plana encerrada por una curva C, suave, cerrada y simple. Si $\mathbf{F}(x,y) = M(x,y)\boldsymbol{i} + N(x,y)\boldsymbol{j}$ es un campo vectorial en el plano tal que las componentes M y N tienen primeras derivadas parciales continuas en todo punto de una región abierta que contiene a Re, entonces el flujo del campo $\mathbf{F}$ hacia afuera y a través de C está dado por:

$$\int_C \mathbf{F}.\mathbf{n}ds = \int_C (Mdy - Ndx) = \iint_{Re} \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right) dxdy \qquad (7.15)$$

Donde el cálculo de la integral corresponde al recorrido de la curva C en sentido anti horario.

Teorema de Green en términos del rotacional

Esta forma del Teorema indica que la circulación de flujo en sentido anti horario alrededor de una curva C, cerrada y simple, corresponde a la doble integral del componente k del rotacional. La formulación de esta segunda forma es la siguiente:

Sea Re una región plana encerrada por una curva C, suave, cerrada y simple. Si $\mathbf{F}(x,y) = M(x,y)\boldsymbol{i} + N(x,y)\boldsymbol{j}$ es un campo vectorial en el plano tal que las componentes M y N tienen primeras derivadas parciales continuas en todo punto de una región abierta que contiene a Re, entonces la circulación del campo $\mathbf{F}$ en sentido anti horario alrededor de C está dado por:

$$\int_C \mathbf{F}.\mathbf{T}ds = \int_C (Mdx - Ndy) = \iint_{Re} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dxdy \qquad (7.16)$$

Donde el cálculo de la integral corresponde al recorrido de la curva C en sentido anti horario.

Se reitera al estudiante la recomendación de remitirse a las lecturas complementarias donde encontrará ejercicios resueltos y video capsulas que explican en detalle algunos procedimientos que le permiten una mayor apropiación del tema.

4

Unidad 4

Integrales de superficie

Cálculo multivariado

Autor: Danilo de Jesús Ariza Agámez

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina
MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Introducción

Con el estudio de las integrales de superficie en esta octava semana llegamos al final del curso de cálculo multivariado. En las integrales de superficie reconocemos que el dominio de integración de un campo vectorial es una superficie en el espacio, lo que claramente se diferencia del caso de funciones de una variable en la que el dominio de integración es un intervalo de números reales, las integrales dobles calculadas sobre regiones planas y las integrales de línea calculadas sobre curvas en el espacio. Estos temas también se relacionan con la integración en campos vectoriales. Reconociéndose importantes aplicaciones en ciencias e ingeniería, tales como trabajo y flujo. El resultado más importante que se estudies el teorema de Stokes.

Recomendaciones metodológicas

Las recomendaciones finales del curso corresponden como en todos los casos anteriores a iniciar con la lectura de esta cartilla sobre integrales de superficie, pero considerando conceptos y fundamentos dados en las semanas anteriores, con lo que se contará con mejores elementos para afrontar la presentación del examen final. Luego de su lectura, se recomienda aprovechar los recursos adicionales ofrecidos en esta semana y en las semanas anteriores. Luego de realizado lo anterior, resulta conveniente intentar resolver los ejercicios propuestos como actividad de repaso.

Desarrollo temático

Integrales de superficie

Representación de superficies en el espacio

En la cartilla de la semana 3, al abordar las funciones de varias variables, tratamos las funciones de la forma $z = f(x, y)$, cuya representación geométrica es una superficie en el espacio. La ecuación $z = f(x, y)$ es la forma o expresión explicita de la superficie en razón a que expresa el valor z explícitamente en términos de las variables x, y. Una superficie se puede expresar también implícitamente mediante una ecuación de la forma $F(x, \; y, z) = 0$. Una nueva forma de expresión que nos interesa es la representación paramétrica vectorial, la cual se presenta a continuación.

Representación paramétrica de una superficie

Dada la función vectorial $\mathbf{r}(u, v) = \; f(u, v)\boldsymbol{i} + g(u, v)\boldsymbol{j} + h(u, v)\boldsymbol{k}$ continua en una región Re del plano uv y uno a uno en el interior de Re. El rango de la función $\mathbf{r}$ es la superficie S determinada por $\mathbf{r}$. Se dice entonces que $\mathbf{r}(u, v)$ es una representación paramétrica vectorial de la superficie S, de parámetros u, v y dominio de parámetros Re.

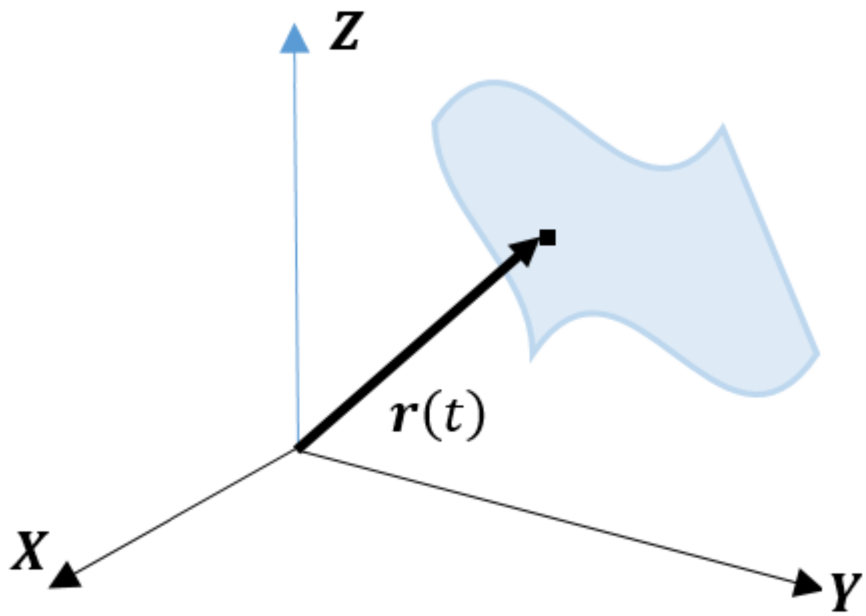

Figura 1. Representación del vector P de un punto sobre una superficie
Fuente: Propia.

A partir de la representación paramétrica de S podemos escribir las siguientes expresiones paramétricas individuales.

$$x = f(u,v), \quad y = g(u,v), \quad z = h(u,v)$$

En la anterior representación paramétrica, vale la pena señalar la asociación entre puntos del plano UV y puntos del espacio XYZ, se puede decir que una superficie en el espacio XYZ es la imagen de una región del plano UV.

Ejemplo 8.1: representación paramétrica de una superficie esférica. Las ecuaciones $x = a\, cosu.cosv, \quad y = asenu.cosv, \quad z = asenv)$ corresponden a una representación paramétrica de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, esto se puede verificar remplazando las expresiones dadas para x, y, z en la ecuación cartesiana de la esfera.

Superficie suave

Parte del interés en relación con las superficies es contar con procedimientos que nos permitan calcular su área, para hallar el área con base en integrales dobles, se requiere que la curva sea suave, la suavidad de una curva se define a continuación en términos de la representación paramétrica vectorial.

Dada superficie S con representación paramétrica vectorial dada por la ecuación $\mathbf{r}(u,v) = f(u,v)\boldsymbol{i} + g(u,v)\boldsymbol{j} + h(u,v)\boldsymbol{k}, \ a \le u \le b, \quad c \le v \le d,\ S$ es una superficie suave si las derivadas parciales $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial u}\boldsymbol{i} + \frac{\partial g}{\partial u}\boldsymbol{j} + \frac{\partial h}{\partial u}\boldsymbol{k}$; $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial u}\boldsymbol{i} + \frac{\partial g}{\partial u}\boldsymbol{j} + \frac{\partial h}{\partial u}\boldsymbol{k}$ son continuas y además el producto cruz $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ nunca se anula en el dominio de los parámetros u, v. Esta definición concretamente indica que los vectores $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ siempre determinan un plano tangente a la superficie.

Cálculo de área de superficies suave

Esta sección se dedica al cálculo de área de superficies suave, se presenta las bases del razonamiento para hallar la expresión correspondiente a superficies dadas en forma paramétrica vectorial y luego se presenta las expresiones para hallar el área de las superficies dadas en formas explícita e implícita.

Área de una superficie definida paramétricamente

Para abordar el análisis que permita establecer expresiones de cálculo de área de una superficie suave, tomamos un pequeño rectángulo ΔA_{uv} cuyos lados están en las rectas $u = u_0, \ u = u_0 + \Delta u, \quad v = v_0 \quad y \quad v = v_0 + \Delta v$, con cada pequeño rectángulo en el plano UV se asocia una pequeña superficie en el espacio XYZ, de área $\Delta\sigma_{uv}$, como se muestra en la figura 2.

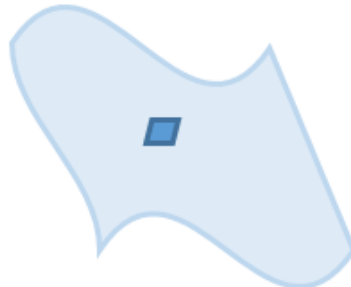

Figura 2. Superficie suave vista como la composición de muchos rectángulos infinitesimales
Fuente: Propia.

Razonamientos basados en paso al límite, en que rectángulos infinitesimales del plano UV se asocian con superficies infinitesimales del espacio XYZ, conducen a la siguiente afirmación respecto al cálculo de área de una superficie suave expresada en forma paramétrica vectorial.

Dada la representación $\mathbf{r}(u,v) = f(u,v)\boldsymbol{i} + g(u,v)\boldsymbol{j} + h(u,v)\boldsymbol{k},\ \ u \in [a,b], v \in [c,d]$ de una superficie suave S, el área de S está dada por:

$$A(S) = \iint_{Re} \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| dA = \int_c^d \int_a^b \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| dudv \qquad (8.1)$$

Ejemplo 8.2: hallar el área de la superficie de un cono definido por:

$$r(r,\theta) = (rcos\theta)i + (rsen\theta)j + rk; \qquad r \in [0,1], \qquad \theta \in [0,2\pi]$$

Solución: inicialmente hallamos $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}$ así:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = cos\theta\boldsymbol{i} + sen\theta\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}; \ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = -rsen\theta\boldsymbol{i} + rcos\theta\boldsymbol{j}$$

Entonces:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ cos\theta & sen\theta & 1 \\ -rsen\theta & rcos\theta & 0 \end{vmatrix} = -(rcos\theta)\boldsymbol{i} - (rsen\theta)\boldsymbol{j} + r\boldsymbol{k}$$

Por tanto:

$$\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| = \sqrt{(rcos\theta)^2 + (rsen\theta)^2 + r^2} = r\sqrt{2}$$

Con lo que finalmente el área del cono es:

$$A(S) = \iint\limits_{Re} \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}\right| dA = \int_c^d \int_a^b \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}\right| dudv = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}\right| dudv$$

$$A(S) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r\sqrt{2}drd\theta = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 rdr\right) d\theta = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}d\theta$$

$$A(S) = \frac{\sqrt{2}}{2}2\pi = \sqrt{2}\pi$$

Área de una superficie definida implícitamente

Si una superficie S está definida implícitamente por la ecuación $F(x, y, z) = c$ sobre una región plana Re cerrada y acotada, el área de la superficie es:

$$A(S) = \iint\limits_{Re} \frac{|\nabla f|}{|\nabla f.\mathbf{p}|} dA; \quad \nabla f.\mathbf{p} \neq 0 \qquad (8.2)$$

Donde $\mathbf{p}$ es uno de los vectores unitarios $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, perpendicular a la superficie Re.

Ejemplo 8.3: hallar el área de la superficie inferior que resulta cuando la superficie definida por $x^2 + y^2 - z = 0$ es cortada por el plano $z = 4$

Solución: la figura 2 muestra la superficie cortada por el plano, la superficie S es parte de la superficie de nivel $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z = 0$ y la región Re es el círculo $x^2 + y^2 \leq 4$. El vector unitario perpendicular a Re es $\mathbf{p} = \boldsymbol{k}.$

A partir de $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$ se encuentra que:

$$\nabla f = 2xi + 2yj - k; \quad |\nabla f| = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1};$$

$$|\nabla f.\mathbf{p}| = |\nabla f.\boldsymbol{k}| = |-1| = 1;$$

El área es entonces:

$$A(S) = \iint\limits_{Re} \frac{|\nabla f|}{|\nabla f.\mathbf{p}|} dA = \iint\limits_{x^2+y^2\leq 4} \left[\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\right] dxdy = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^2 \sqrt{4r^2 + 1}\, dr\right] d\theta$$

$$A(S) = \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{12}(4r^2 + 1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2 d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{12}(17^{\frac{3}{2}} - 1)\, d\theta = \frac{\pi}{6}(17^{\frac{3}{2}} - 1)$$

Área de una superficie definida explícitamente

En esta sección presentamos la fórmula de cálculo del área de una superficie suave dada en la forma $z = f(x, y)$ sobre una región Re del plano XY, la fórmula es:

$$A(S) = \iint_{Re} \left[\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1} \right] dxdy \qquad (8.3)$$

Integrales de superficie

La idea de integral de superficie es el análogo a integral de línea estudiado en la semana 7, la integral de línea es útil, por ejemplo para calcular el flujo de un campo a lo largo de una curva dada. La integral de superficie puede usarse para calcular el flujo de un campo a través de una membrana asociada con una superficie en el espacio. En física eléctrica encontramos un importante caso en el que se pone de manifiesto el uso de integrales de superficie, este corresponde a una carga distribuida sobre una superficie S según lo indica una función $G(x, y, z)$ que define la densidad de carga en cada punto (x, y, z) de S. El interés entonces es calcular la carga total, para lo cual consideramos que la superficie S se define paramétricamente mediante $\mathbf{r}(u, v) = f(u, v)\boldsymbol{i} + g(u, v)\boldsymbol{j} + h(u, v)\boldsymbol{k},\ u, v \in R$.

La figura ilustra el caso de una superficie genérica S compuesta por pequeños elementos de área, según indicó la formula xx de la sección xx, el área de cada elemento se puede escribir aproximadamente como:

$$\Delta A_k \approx \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| (\Delta u)(\Delta v)$$

Con el ΔA anterior y con la función densidad de carga $G(x, y, z)$ se encuentra que la carga aproximada contenida en cada elemento de superficie es:

$$\Delta Q_k \approx \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| G(x, y, z)(\Delta u)(\Delta v)$$

Procedimientos basados en paso al límite cuando el tamaño de cada elemento de área es infinitesimales y el número de elementos tiende a infinito, nos lleva a establecer que la carga total se obtiene mediante:

$$Q = \iint_S dQ = \iint_S G dA = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \Delta Q_k = \iint_S \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| G(x, y, z) dudv$$

Estas ideas se extienden a cualquier función continua $G(x, y, z)$ sobre una apropiada superficie S. Dado que una la expresión que define la superficie se puede dar en diferentes formas, se tiene a continuación un resumen de fórmulas de cálculo de integrales de superficie según la forma en que esté dada S.

Cálculo de integral de superficie una función $\boldsymbol{G(x,y,z)}$

En este aparte presentamos solo el resumen de expresiones de cálculo de integrales de superficie de una función $G(x,y,z)$ definida sobre una superficie S, teniendo en cuenta la forma de representación de S. Se debe tener cuidado de no confundir con las expresiones usadas para el cálculo de área.

Integral de superficie de $\boldsymbol{G(x,y,z)}$ si $\boldsymbol{S}$ se define paramétricamente

Dada una superficie suave S definida por $\mathbf{r}(u,v) = f(u,v)\boldsymbol{i} + g(u,v)\boldsymbol{j} + h(u,v)\boldsymbol{k}$ para (u,v) en una región Re, y una función continua $G(x,y,z)$ definida sobre S. El valor de la integral de superficie de $G(x,y,z)$ sobre S se encuentra mediante la siguiente integral doble sobre Re.

$$\iint_S G(x,y,z)dA = \iint_{Re} \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| G(f(u,v), g(u,v), h(u,v))dudv \qquad (8.4)$$

Integral de superficie de $\boldsymbol{G(x,y,z)}$ si $\boldsymbol{S}$ se define implícitamente

Dada una superficie suave S definida implícitamente por la función derivable continua $F(x,y\ ,z) = c$ con S ubicada por encima de su sombra cerrada y acotada en una región Re en el plano coordenado debajo de ella. El valor de la integral de superficie de $G(x,y,z)$ sobre S se encuentra mediante la siguiente integral doble sobre Re.

$$\iint_S G(x,y,z)dA = \iint_{Re} \frac{|\nabla f|}{|\nabla f.\mathbf{p}|} G(x,y,z)\, dA; \qquad \nabla f.\mathbf{p} \neq 0 \qquad (8.5)$$

Donde $\mathbf{p}$ es el vector unitario perpendicular a Re.

Integral de superficie de $\boldsymbol{G(x,y,z)}$ si $\boldsymbol{S}$ se define explícitamente

Dada una superficie suave S definida explícitamente por la función $z = f(x,y)$, derivable y continua sobre una región Re del plano XY. El valor de la integral de superficie de $G(x,y,z)$ sobre S se encuentra mediante la siguiente integral doble sobre Re.

$$\iint_S G(x,y,z)dA = \iint_S G\big(x,y,f(x,y)\big)dxdy \qquad (8.6)$$

Ejemplo 8.4: hallar la integral de superficie de la función $G(x, y, z) = x^2$ sobre la superficie S definida por:

$$r(r, \theta) = (rcos\theta)i + (rsen\theta)j + rk; \quad r \in [0,1], \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

Solución: este caso corresponde a una superficie S definida paramétricamente con parámetros $(u, v) = (r, \theta)$, por tanto la integral correspondiente es:

$$\iint_S G(x, y, z)dA = \iint_{Re} \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}\right| G(f(r, \theta), g(r, \theta), h(r, \theta))drd\theta$$

Del ejemplo 8.2 tenemos que:

$$\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| = r\sqrt{2}$$

Además, con $G(x, y, z) = x^2$ se tiene que

$$G\big(f(r, \theta), g(r, \theta), h(r, \theta)\big) = \big(f(r, \theta)\big)^2 = (rcos\theta)^2 = r^2cos^2\theta$$

Entonces:

$$\iint_S G(x, y, z)dA = \iint_{Re} \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}\right| G(f(r, \theta), g(r, \theta), h(r, \theta))drd\theta$$

$$= \iint_S G(x, y, z)dA = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 (r^2cos^2\theta)(r\sqrt{2})dr\right] d\theta = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left[cos^2\theta \int_0^1 r^3dr\right] d\theta$$

$$\iint_S G(x, y, z)dA = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \frac{cos^2\theta}{4} d\theta = \frac{\sqrt{2}}{8} \int_0^{2\pi} (cos2\theta + 1)d\theta$$

$$\iint_S G(x, y, z)dA = \frac{\sqrt{2}}{8} \left[\frac{sen2\theta}{2} + \theta\right]_0^{2\pi} = \frac{\sqrt{2}}{8}(2\pi) = \frac{\sqrt{2}\pi}{4}$$

Superficies orientables y flujo de un campo vectorial

Se dice que una superficie es orientable si se puede definir un campo $\mathbf{n}$ de vectores unitarios normales a la superficie, que continuamente cambia con la posición. De una superficie orientable se dice también que es de dos lados, para una mayor comprensión del concepto, la superficie y su campo normal en conjunto se llama superficie orientada vale la pena señalar que la banda de Möbios, mostrada en la figura 3 no es una superficie orientada.

Si un campo vectorial $\mathbf{F}(x, y\ z)$ se define sobre una superficie orientada S y $\mathbf{n}$ es el campo de vectores unitarios normales, la integral de $\mathbf{F}.\mathbf{n}$ sobre S en la dirección positiva se denomina flujo de $\mathbf{F}$ a través de S en dirección positiva, es decir:

$$Flujo = \iint_S \mathbf{F}.\mathbf{n}d\sigma \qquad (8.7)$$

Ejemplo 8.5: hallar el flujo del campo $F = yz\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$ hacia afuera a través de la superficie S cortada de $y^2 + z^2 = 1$ por los planos $x = 0, x = 1$ con $z \geq 0$.

Solución: utilizamos aquí el hecho que el campo de vectores normales a S corresponde al gradiente de la función $g(x, y, z) = y^2 + z^2$, es decir:

$$\mathbf{n} = +\frac{\nabla g}{|\nabla g|} = \frac{2y\boldsymbol{j} + 2z\boldsymbol{k}}{\sqrt{4y^2 + 4z^2}} = \frac{2y\boldsymbol{j} + 2z\boldsymbol{k}}{\sqrt{4(y^2 + z^2)}} = \frac{2y\boldsymbol{j} + 2z\boldsymbol{k}}{\sqrt{4(1)}} = \frac{2y\boldsymbol{j} + 2z\boldsymbol{k}}{2} = y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

Con el vector unitario $\mathbf{p} = \boldsymbol{k}$ encontramos que:

$$d\sigma = \frac{\nabla g}{|\boldsymbol{\nabla} g.\boldsymbol{k}|}dA = \frac{2}{|2z|}dA = \frac{1}{z}dA$$

El producto punto $\mathbf{F}.\mathbf{n}$ sobre S está dado por:

$$\mathbf{F}.\mathbf{n} = (yz\boldsymbol{j} + z^2k).(y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}) = y^2z + z^3 = z(y^2 + z^2) = z(1) = z$$

La superficie proyecta una sombra rectangular sobre la región R_{xy} en el plano XY como se muestra en la figura 3, el flujo del campo $\mathbf{F}$ es entonces:

$$\iint_S \mathbf{F}.\mathbf{n}d\sigma = \iint_S z\left(\frac{1}{z}\right)dA = \iint_{R_{xy}} dA = 2$$

Teorema de Stokes

En el numeral 7.5.3 de la cartilla de la semana 7 al tratar de la densidad de circulación o componente rotacional de un campo vectorial en un punto del plano se describía mediante un escalar, dado en términos de las derivadas parciales de las componentes del campo. En el caso tridimensional la circulación de un flujo de campo vectorial $\mathbf{F}$ alrededor de un punto $P(x, y\ , z)$ en un plano, la descripción es mediante un vector, y así como existe el teorema de Green para el caso de flujo de campo en el caso bidimensional, en esta sección se estudia el Teorema de Stokes, el cual se constituye en la extensión del teorema de Green al caso tridimensional. Para acercarnos a la comprensión de estas ideas, vale la pena tener presente el movimiento de las partículas de agua en las cercanías de un sifón o sumidero, debido al movimiento de rotación de la tierra vemos que éste es un movimiento de giro alrededor del sumidero, el que podemos considerar como un eje perpendicular al plano. Es decir el giro es alrededor de un vector que, para el caso general, definiremos formalmente como el rotacional del campo vectorial.

Vector rotacional de un campo vectorial

Dado el campo vectorial espacial $\mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\boldsymbol{i} + N(x, y, z)\boldsymbol{j} + P(x, y, z)\boldsymbol{k}$, el vector rotacional de $\mathbf{F}$ se define como:

$$rot\ \mathbf{F} = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\boldsymbol{k} \qquad (\mathbf{8.8})$$

Vector Operador ∇ nabla

Por conveniencia podemos definir el operador ∇ como:

$$\boldsymbol{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

Al aplicarlo a una función $f(x, y, z)$ se tendría:

$$\boldsymbol{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k} \qquad (\mathbf{8.9})$$

Si realizamos el producto vectorial del vector operador $\boldsymbol{\nabla}$ (sin aplicarlo a una función) y el campo vectorial $\mathbf{F} = M\boldsymbol{i} + N\boldsymbol{j} + P\boldsymbol{k}$**,** tenemos:

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F} = (\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k})\times(M\boldsymbol{i} + N\boldsymbol{j} + P\boldsymbol{k})$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} - \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial z}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\boldsymbol{k} = rot\ \boldsymbol{F}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F} = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\boldsymbol{k} = rot\ \boldsymbol{F} \qquad (\mathbf{8.10})$$

Ejemplo 8.6: hallar el rotacional del campo vectorial $\mathbf{F} = (x^2 - z)\boldsymbol{i} + xe^z\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k}$

Solución:

$$rot\ \boldsymbol{F} = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ (x^2 - z) & (xe^z) & (xy) \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial y}(xy) - \frac{\partial}{\partial z}(xe^z)\right)\boldsymbol{i} - \left(\frac{\partial}{\partial x}(xy) - \frac{\partial}{\partial z}(x^2 - z)\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x}(xe^z) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - z)\right)\boldsymbol{k}$$

$$= (x - xe^z)\boldsymbol{i} - (y+1)\boldsymbol{j} + e^z\boldsymbol{k} = x(1 - e^z)\boldsymbol{i} - (y+1)\boldsymbol{j} + e^z\boldsymbol{k}$$

El teorema de Stokes

Señalamos anteriormente que el Teorema de Stokes constituye la extensión del Teorema de Green al caso tridimensional. El Teorema de Stokes presenta la relación de la circulación de un campo $\mathbf{F}$ alrededor de la frontera C de una superficie suave orientada S con una integral de superficie sobre S. El teorema establece lo siguiente:

Dada una superficie suave orientada S, cuya frontera es una curva suave C, sea además un campo $\mathbf{F} = M(x,y,z)i + N(x,y,z)j + P(x,y,z)k$, tal que sus componentes M, N, P tienen primeras derivadas parciales continuas sobre una región abierta que contiene a S. La circulación del campo F alrededor de C en sentido anti horario con respecto al vector unitario $\mathbf{n}$ normal a S es igual a la integral de $\boldsymbol{\nabla}\times(\mathbf{F}.\mathbf{n})$, es decir:

$$\oint_C F.dr = \iint_S \boldsymbol{\nabla}\times(\mathbf{F}.\mathbf{n})dA \qquad (8.11)$$

Donde la curva C se recorre en sentido anti horario.

Ejemplo 8.7: hallar la circulación del campo vectorial $F = (x^2 - y)\boldsymbol{i} + 4z\boldsymbol{j} + x^2\boldsymbol{k}$ alrededor de la curva C en la que el plano $z = 2$ corta a la superficie $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ en sentido positivo vista desde arriba.

Solución: la parametrización de $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ es:

$$\mathbf{r}(r,\theta) = (r cos\theta)\boldsymbol{i} + (r sen\theta)\boldsymbol{j} + r\boldsymbol{k}\ con\ 0 \le r \le 2,\ \ 0 \le \theta \le 2\pi$$

Por tanto:

$$n = \frac{\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta}{|\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta|} = \frac{-(rcos\theta)\boldsymbol{i} - (rsen\theta)\boldsymbol{j} + r\boldsymbol{k}}{r\sqrt{2}} = \frac{-(cos\theta)\boldsymbol{i} - (sen\theta)\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}}{\sqrt{2}}$$

$$d\sigma = r\sqrt{2}drd\theta$$

$$\nabla\times\mathbf{F} = -4\boldsymbol{i} - 2x\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k} = -4\boldsymbol{i} - 2rcos\theta\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$$

Por tanto:

$$\nabla\times\mathbf{F}.\mathbf{n} = (-4\boldsymbol{i} - 2rcos\theta\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}).\left(\frac{-(cos\theta)\boldsymbol{i} - (sen\theta)\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(4cos\theta + 2r)$$

$$\nabla\times\mathbf{F}.\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(4cos\theta + 2rcos\theta sen\theta + 1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(4cos\theta + rsen2\theta + 1)$$

Finalmente la circulación es:

$$\oint_C F.dr = \iint_S \nabla\times\mathbf{F}.\mathbf{n}d\sigma = \int_0^{2\pi}\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2}}(4cos\theta + rsen2\theta + 1)r\sqrt{2}drd\theta$$

$$\oint_C F.dr = \int_0^{2\pi}\left[\frac{4cos\theta r^2}{2} + \frac{r^3 sen2\theta}{3} + \frac{r^2}{2}\right]_0^2 d\theta = \int_0^{2\pi}\left(8cos\theta + \frac{8sen2\theta}{3} + 2\right)d\theta =$$

$$\oint_C F.dr = \left[8sen\theta - \frac{4cos2\theta}{3} + 2\theta\right]_0^{2\pi}$$

Bibliografia

- Edwards, C. & Penney, D. (2008). Calculus Early Trascendentals. 7ª Edición. Editorial Pearson Educación. New Jersey.
- Marsden, J. & Tromba, A. (2004). Cálculo Vectorial. Edición. Editorial Addison Wesley. España.
- Larson, R., Hostetler, R. & Edwards, B. (1999). Cálculo y geometría analítica. Vol. 2, Editorial McGraw- Hill, Barcelona.
- Leithold, L. (1998). El cálculo / Louis Leithold. Oxford University Press.
- Stewart, J. (2002). Cálculo multivariable. Edición. Internacional Thomson Editores. México.
- Thomas. Jr. (2005). Cálculo varias variables. Edición. Editorial Pearson Educación. México.
- Zill, G. & Wright, W. (2011). Cálculo, trascendentes tempranas. Cuarta edición, editorial Mc Graw Hill.

Esta obra se terminó de editar en el mes de noviembre
Tipografá Myriad Pro 12 puntos
Bogotá D.C,-Colombia.

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina

MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO