ECUACIONES DIFERENCIALES

Autor: Luis Guillermo Caro Pineda

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina

MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Ecuaciones Diferenciales / Luis Guillermo Caro Pineda, / Bogotá D.C.,
Fundación Universitaria del Área Andina. 2017

978-958-5459-92-2

Catalogación en la fuente Fundación Universitaria del Área Andina (Bogotá).

Edición:
Fondo editorial Areandino
Fundación Universitaria del Área Andina
Calle 71 11-14, Bogotá D.C., Colombia
Tel.: (57-1) 7 42 19 64 ext. 1228
E-mail: publicaciones@areandina.edu.co
http://www.areandina.edu.co

Primera edición: noviembre de 2017

Corrección de estilo, diagramación y edición: Dirección Nacional de Operaciones virtuales
Diseño y compilación electrónica: Dirección Nacional de Investigación

Hecho en Colombia
Made in Colombia

ECUACIONES DIFERENCIALES

Autor: Luis Guillermo Caro Pineda

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina
MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Índice

Índice

1 Unidad 1

Modelación y soluciones

Ecuaciones Diferenciales

Autor: Luis Guillermo Caro Pineda

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina

MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Introducción

En esta cartilla se define con precisión una ecuación diferencial ordinaria, su grado, orden y linealidad; se identifican las ecuaciones diferenciales de primer orden, segundo orden y de orden superior. Así mismo, se precisa si cierta función es solución de una ecuación diferencial y bajo qué condiciones es una solución particular o general, así como las formas explícitas e implícitas en que se pueden presentar dichas soluciones. Veremos problemas en los que buscamos una solución $y(x)$ de una ecuación diferencial pero sujeta a unas condiciones que se han establecido previamente, es decir, proponen un valor inicial para la variable independiente (x) y la variable dependiente (y) o sus derivadas sucesivas.

De manera muy general mostraremos unas pocas situaciones que se modelan a través de ecuaciones diferenciales; la ampliación de éstas y la aparición de otras, serán ampliadas a lo largo del módulo.

Recomendaciones metodológicas

La presente cartilla, Modelación y soluciones, se desarrolla a través de explicaciones de los fundamentos teóricos y la solución de ejemplos que ilustran los procedimientos para clasificar ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales, verificar si cierta función es solución general o particular, y explícita o implícita de una ecuación diferencial. Lograr este propósito obliga a repasar los fundamentos teóricos requeridos como álgebra y cálculo diferencial e integral. Así mismo, antes de comenzar el estudio de cada una de las secciones de esta cartilla, es requisito indispensable que el estudiante perfeccione las nociones básicas y los métodos para resolver derivadas y con mayor rigurosidad los procedimientos relacionados con la integración de funciones de variable real.

Como señalamos al inicio del módulo, para garantizar su éxito en la revisión y estudio de los temas seleccionados, usted debe realizar una revisión exhaustiva de la cartilla, las lecturas complementarias y los recursos audiovisuales, ya que además de ubicar las definiciones pertinentes, encontrará explicaciones desde varios autores y ejercicios resueltos que despejarán dudas. El desarrollo del módulo exige disciplina y trabajo permanente, usted debe acostumbrarse a la revisión frecuente de los recursos y a la realización de las actividades en los tiempos señalados. Se convierte en requisito indispensable el uso de un programa de Cálculo simbólico como Geogebra, Derive, Matlab, etc.

Además de revisar los textos propuestos en la bibliografía, usted debe estudiar de manera permanente los libros digitales *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado, novena edición,* de Dennis Zill y *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas* de George Simmons; que se encuentran en pdf en la sección de recursos para el aprendizaje.

Desarrollo temático

Modelación matemática con ecuaciones diferenciales

A diferencia de lo que posiblemente creemos, muchos aspectos de la cotidianidad se relacionan con las ecuaciones diferenciales, y sus aplicaciones en el mundo físico que vivimos son muy amplias, de tal suerte que a través de la evolución de las ciencias físicas su aparición y desarrollo han permitido modelar, entre otros, un número considerable de fenómenos en disciplinas como la economía, la biología, la química, y la astronomía, siendo por supuesto la Física una de las disciplinas que quizá aportó más conceptos y nociones para su desarrollo.

Observemos de manera muy general unas pocas situaciones que se modelan a través de ecuaciones diferenciales; la ampliación de éstas y la aparición de otras, serán ampliadas a lo largo del módulo.

En general podemos considerar que la población mundial está creciendo a un ritmo acelerado ya que cada vez hay más personas y menos recursos alimenticios y energéticos para hacerla sostenible. Aún más, supongamos que dicho crecimiento es exponencial y claramente el aumento de personas en cierta ciudad es proporcional al número de habitantes que hay en un instante cualquiera; Este es un problema típico que relaciona una ecuación diferencial de primer orden de la forma

$\frac{dP}{dt} = kP \ (1),$

cuya solución es:

$$P(t) = P_0 e^{kt}$$

En geología y arqueología interesan las ideas que tratan sobre desintegración radiactiva; los elementos radiactivos que se encuentran en la tierra pueden usarse para ubicarnos en el tiempo sucesos que ocurrieron hace millones de años y la ecuación diferencial que resulta de las consideraciones pertinentes es (Simmons, G. Ecuaciones diferenciales. p.20.):

$$-\frac{dx}{dt} = kx, k > 0 \ (2)$$

Aunque todos nosotros realizamos transacciones financieras a diario, no todos sabemos que cuando depositamos cierto capital *C* en una cuenta bancaria que rinde una tasa compuesta cada cierto tiempo *t*, digamos anualmente, este capital crece exponencialmente y el modelo matemático que expresa esta variación está dado por la ecuación diferencial

$$\frac{\boldsymbol{dA/A}}{\boldsymbol{dt}} = \boldsymbol{k}\ (3),$$

donde $\boldsymbol{A}$ representa el capital acumulado después de *t* años y $\boldsymbol{k}$ muestra el cambio relativo de *A* por unidad de tiempo t.

En economía pueden interesar por ejemplo las preferencias de consumo que van ligadas al precio de un artículo en algún momento, este precio está determinado por la condición de que en cierto instante, cierta función de variable real llamada función de oferta sea igual a otra función de variable real llamada función de demanda; este equilibrio, llamado principio económico de la oferta y la demanda resulta en una ecuación diferencial de primer orden. Así mismo, se pueden abordar la aplicación de los modelos de Maclaurin-Taylor y de ecuaciones diferenciales en la dirección y gestión de unidades de producción (tomado de http://www.urosario.edu.co/urosario_files/b8/b8887954-9f29-4bd1-9a19-94a0b050dc16.pdf).

La Física es la disciplina donde sin lugar a dudas aparecen con mayor firmeza las ecuaciones diferenciales. Algunos ejemplos se relacionan con caída de cuerpos y variados problemas de movimiento como el pendular y el tiro parabólico; la ley de la gravitación de Newton, los períodos de revolución de los planetas y la tercera ley de Kepler; circuitos eléctricos simples, vibraciones en sistemas mecánicos y eléctricos, y osciladores armónicos acoplados; problemas clásicos como el de encontrar la forma que adopta una cadena flexible suspendida entre dos puntos y que cuelga por la acción de su peso (cadena colgante) o el problema de la braquistocrona.

En gran variedad de aplicaciones de las ecuaciones diferenciales que veremos durante todo el curso aparecen con mucha las funciones exponenciales, mostrando cierto crecimiento o decrecimiento (decaimiento) que experimentan las variables involucradas; en estas aplicaciones generalmente la variable independiente es el tiempo, $\boldsymbol{t}$. La figura 1 muestra el comportamiento de la función exponencial cuando la función crece, es decir, donde la constante $k > 0$, y cuando la función decrece, es decir, donde la constante $k < 0$.

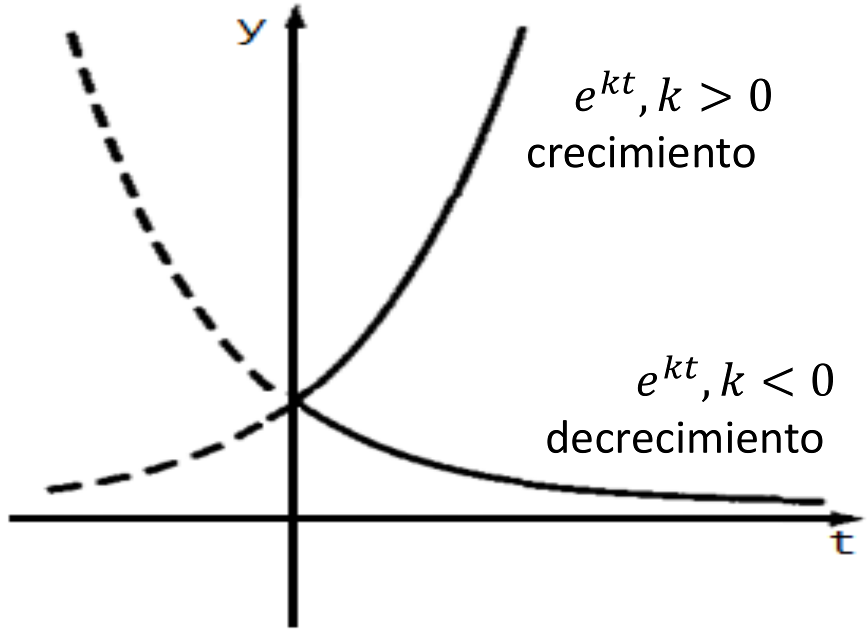

Figura 1. Crecimiento y decrecimiento

Fuente: Propia.

Aunque en el recorrido que haremos por una parte importante del universo de las ecuaciones diferenciales ordinarias aparecerán muchas aplicaciones y muchas formas de modelar situaciones y fenómenos en varias disciplinas, el propósito principal del curso tiene relación directa con la modelación y aplicaciones de las ecuaciones diferenciales en ingeniería.

Definición de una ecuación diferencial

En términos generales una ecuación es una igualdad de dos expresiones, no importa su "longitud", que se caracterizan porque ambas o alguna de ellas tienen una o más incógnitas; éstas representan o esconden el valor de "algo" que debe ser encontrado, si se puede. Al reemplazar cierto valor o ciertos valores en la incógnita- generalmente números reales, funciones de variable real, vectores, matrices- la igualdad puede o no darse. Cuando se reemplaza un valor o varios valores que verifican la igualdad al realizar las operaciones indicadas, se dice que este valor o estos valores son el *conjunto solución* o las *soluciones* de la igualdad. Aunque estamos acostumbrados a resolver ecuaciones de tipo algebraico donde las soluciones son números reales, debemos advertir que la solución o soluciones de una ecuación diferencial es una función o una familia de funciones.

Una ecuación diferencial es una ecuación que contiene las derivadas de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes:

$$\boldsymbol{F(x, y', \cdots, y^n) = 0}$$

Para los propósitos del presente módulo fijaremos nuestra atención en las *ecuaciones diferenciales ordinarias*, ecuaciones diferenciales que relacionan una función, una sola variable independiente y las derivadas con respecto a esa variable independiente, por ejemplo la ecuación diferencial

$\boldsymbol{\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = x - 1, o\ y'' + \ y' = x - 1}$

Observe que es la misma ecuación diferencial escrita con dos notaciones diferentes. Quizá el uso diferenciado de alguna de ellas se deba a su aparición histórica en alguna de las aplicaciones que veremos, pero para nuestro uso podemos utilizar cualquiera de ellas.

Otros ejemplos de ecuaciones diferenciales ordinarias son:

$$\boldsymbol{xy''' + 2x^2y' = xy} \ (4)$$

$$\boldsymbol{y' = x^2} \ (5)$$

$$\boldsymbol{(y'')^3 - 4xy' = x^2} \ (6)$$

$$\boldsymbol{\frac{d^3y}{dx^3} + x\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = x^3} \ (7)$$

$$\boldsymbol{(y^{(4)})^3 - 3x(y^{(3)})^2 = x^3y^2} \ (8)$$

$$\boldsymbol{-\frac{dx}{dt} = kx, k > 0} \ (9)$$

Al lado de las ecuaciones diferenciales ordinarias, existen las *ecuaciones diferenciales parciales* o ecuaciones en derivadas parciales, éstas tienen más de una variable independiente y las derivadas (parciales) se calculan con respecto a estas variables independientes. Aunque algunas de ellas aparecen en este módulo, solamente se referencian por su aparición en algunas aplicaciones.

Algunos ejemplos de ecuaciones diferenciales parciales son:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 3\frac{\partial u}{\partial y} = 4\frac{\partial u}{\partial x} - u \ (10) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \ (11)$$

Orden, grado y linealidad

Las ecuaciones diferenciales se pueden clasificar según su tipo, orden y linealidad.

De acuerdo a su tipo, pueden ser ordinarias o parciales como vimos en la sección anterior.

Si en la definición de una ecuación diferencial, F es un polinomio, se define el grado de la ecuación diferencial como el grado de $y(x)$ y el de sus derivadas, es decir, el exponente al que está elevada la derivada de mayor orden que aparece en ella. Si este número no es natural, no se puede determinar el grado de la ecuación diferencial.

El orden de una ecuación diferencial se define como el orden de la derivada más alta que aparece en ella.

La ecuación diferencial $F(x, y, y', \cdots, y^n) = 0$ se llama lineal si F es una función lineal de las variables $y, y', \cdots, y^n$. La forma general de una *ecuación diferencial lineal* de orden n es:

$$a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = h(x).$$

Estas se caracterizan porque son de grado 1 en la variable dependiente y y en todas sus derivadas, y todos los coeficientes:

$$a_n(x), a_{n-1}(x), a_1(x), a_0(x)$$

sólo dependen de x.

Identifiquemos estas características en las ecuaciones diferenciales (4) al (9).

$\boldsymbol{xy''' + 2x^2y' = xy}$ es de grado 1 porque el exponente al que está elevada la derivada de mayor orden que aparece en ella es 1; es de tercer orden porque la derivada más alta que aparece es 3; es lineal porque todos sus coeficientes solo dependen de $\boldsymbol{x}$, y es de grado 1 en $\boldsymbol{y}$ y todas sus derivadas.

$\boldsymbol{y' = x^2}$ es de grado 1 porque el exponente al que está elevada la derivada de mayor orden que aparece en ella es 1; es de primer orden porque la derivada más alta que aparece es 1; es lineal porque todos sus coeficientes solo dependen de $\boldsymbol{x}$, y es de grado 1 en $\boldsymbol{y}$ y todas sus derivadas.

Verifique que las otras ecuaciones diferenciales señaladas anteriormente cumplen las condiciones descritas:

$\boldsymbol{(y'')^3 - 4xy' = x^2}$ es de grado 3, segundo orden y no lineal.

$\boldsymbol{\frac{d^3y}{dx^3} + x\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = x^3}$ es de grado 1, tercer orden y lineal.

$\boldsymbol{(y^{(4)})^3 - 3x(y^{(3)})^2 = x^3y^2}$ es de grado 3, cuarto orden y no lineal.

$\boldsymbol{-\frac{dx}{dt} = kx, k > 0}$ es de grado 1, primer orden y lineal.

Para las ecuaciones en derivadas parciales (10) y (11):

$\boldsymbol{\frac{\partial u}{\partial t} + 3\frac{\partial u}{\partial y} = 4\frac{\partial u}{\partial x} - u}$ es de grado 1, primer orden y lineal.

$\boldsymbol{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0}$ es de grado 1, segundo orden y lineal.

Revise las referencias bibliográficas, allí puede complementar el estudio de estas características de las ecuaciones diferenciales; les recomiendo la sección 1.3 de la unidad 1 del libro Ecuaciones diferenciales de Ana García que lo encuentra en versión electrónica en ProQuest ebrary, en la dirección http://site.ebrary.com.proxy.bidig.areandina.edu.co:2048/lib/bibliotecafuaasp/detail.action?docID=11017467.

Soluciones generales y particulares de una ecuación diferencial

Resolver una ecuación diferencial es hallar una función $y = f(x)$ definida en algún intervalo (a, b) y algunas de sus derivadas, $y', y'', \cdots, y^n$ que satisfacen la ecuación.

Más adelante, podemos demostrar que las funciones(http://personal.us.es/niejimjim/tema01.pdf):

$\mathbf{y} = \ln \boldsymbol{x}$ (12) y $\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{x^2} - \mathbf{1})^{-\mathbf{1}}$ (13)

son soluciones respectivas de las ecuaciones diferenciales:

$\boldsymbol{x}\frac{\boldsymbol{d^2y}}{\boldsymbol{dx^2}} + \frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{dx}} = \mathbf{0}$ (14) y $\frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{dx}} + \mathbf{2}\boldsymbol{xy^2} = \mathbf{0}$ (15)

Sin embargo, en el caso de (12), comprobaremos que esta solución solamente existe en el intervalo $(0, \infty)$, mientras que (13) satisface a (15) solamente en el intervalo $(-1,1)$. Si no advertimos otra cosa, suponemos que estos intervalos son conjuntos de números reales.

Existen formas diversas que se presentan al respecto de las soluciones de una ecuación diferencial, aunque en la gran mayoría de casos se presentan las soluciones infinitas que se pueden expresar mediante una expresión general.

La gran mayoría de ecuaciones diferenciales tiene un conjunto infinito de soluciones. Por ejemplo la ecuación diferencial:

$\boldsymbol{y''} - \mathbf{5}\boldsymbol{y'} - \mathbf{14}\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$ (16),

que discutiremos en la siguiente sección, tiene como conjunto solución todas las funciones de variable real que se pueden escribir de la forma:

$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{k_1}\boldsymbol{e^{-2x}} + \boldsymbol{k_2}\boldsymbol{e^{7x}}$ (17) , con $\boldsymbol{k_1}, \boldsymbol{k_2}$ constantes.

Soluciones como (17), que incluyen parámetros $\boldsymbol{k_1}, \boldsymbol{k_2}, \cdots, \boldsymbol{k_n}$, se enmarcan dentro de la expresión:

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{k_1}, \boldsymbol{k_2}, \cdots \boldsymbol{k_n}) = \mathbf{0} \ (18)$$

A la familia $n - paramétrica$ de funciones que define (18) la llamaremos ***solución general de la ecuación diferencial.*** Dicha solución general representa geométricamente una familia de curvas que se pueden graficar de manera muy fácil dando valores a los parámetros mediante el uso de algún “programa de Cálculo simbólico” como Geogebra, Derive. Matlab, etc.

Si por ejemplo de manera arbitraria en (17) reemplazamos $k_1 = 3$, y $k_2 = 2$, esta solución se convierte en $\boldsymbol{y = 3e^{-2x} + 2e^{7x}}$; esta última función es una solución particular de la solución general.

Entonces, una ***solución particular de una ecuación diferencial*** es cualquier solución específica que hace parte de su conjunto solución; ésta se obtiene al dar valores específicos a todos los parámetros que aparecen en la solución general.

Algunas ecuaciones diferenciales *no tienen solución* en el conjunto de los números reales, por ejemplo $(\boldsymbol{\frac{dy}{dx}})^{\boldsymbol{2}} + 1 = 0$; y otras soluciones son *únicas*, esto ocurre con la ecuación diferencial $\boldsymbol{(\frac{dy}{dx})^2 + y^2 = 0}$, cuya única solución es $\mathrm{y} = 0$.

Se denomina *solución singular* de una ecuación diferencial a una solución que no está incluida en la solución general. Aunque este tipo de soluciones no aparecen con frecuencia, revisaremos estas soluciones cuando estudiemos las ecuaciones diferenciales de orden superior.

Soluciones explícitas e implícitas de una ecuación diferencial

Verificar si cierta función definida de manera **explícita** es solución de una ecuación diferencial es una tarea relativamente fácil si se tienen los conocimientos necesarios sobre derivación; sin embargo, existen soluciones de ecuaciones diferenciales definidas de manera **implícita**, lo que implica que en algunas ocasiones sea muy difícil (o imposible) expresar la variable dependiente explícitamente en términos de la variable independiente.

Ejemplo 1. Soluciones explícitas. Las funciones:

$$\boldsymbol{y = e^{-2x}}\ (19)\ ,\ \boldsymbol{y = e^{7x}}\ (20)$$

son ambas soluciones explícitas de la ecuación diferencial de segundo orden:

$$\boldsymbol{y'' - 5y' - 14y = 0}\ (21)$$

Y de manera más general, la función:

$\boldsymbol{y = k_1 e^{-2x} + \ k_2 e^{7x}}$ (22),

es igualmente una solución explícita para (8), sin importar qué valores asignemos a las constantes k_1 y k_2

Estemos seguros que efectivamente (19), (20) y (22) verifican lo dicho.

De (19) sabemos que:

$$\boldsymbol{y = e^{-2x}, y' = \ -2e^{-2x}\ , y'' = 4e^{2x}},$$

al reemplazar los respectivos valores de y, y', y'' en (21) nos queda:

$$\boldsymbol{y'' - 5y' - 14y = 4e^{-2x} - 5(-2e^{-2x}) - 14(e^{-2x}) = 4e^{2x} + 10e^{2x} - 14e^{2x}\ = 0},$$

y se verifica la igualdad.

De (20) sabemos que:

$$\boldsymbol{y = e^{7x}, y' = 7e^{7x}, y'' = 49e^{7x}},$$

al reemplazar los respectivos valores de y, y', y'' en (21) nos queda:

$$\boldsymbol{y'' - 5y' - 14y = 49e^{7x} - 5(7e^{7x}) - 14(e^{7x}) = 49e^{7x} - 35e^{7x} - 14e^{7x} = 0},$$

y se verifica la igualdad.

De (22) sabemos que:

$$\boldsymbol{y = k_1 e^{-2x} + \ k_2 e^{7x}\ , y' = -2k_1 e^{-2x} + 7k_2 e^{7x}, y'' = \ 4k_1 e^{-2x} + 49k_2 e^{7x}}$$

al reemplazar los respectivos valores de $\boldsymbol{y, y', y''}$ en (21) nos queda:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y'' - 5y' - 14y}&\\ &\boldsymbol{= \ (4k_1 e^{2x} + 49k_2 e^{7x}) - 5(-2k_1 e^{-2x} + 7k_2 e^{7x})}\\ &\boldsymbol{- 14(k_1 e^{-2x} + \ k_2 e^{7x}) =}\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{4k_1 e^{-2x} + 49k_2 e^{7x} + 10k_1 e^{-2x} - 35k_2 e^{7x} - 14k_1 e^{-2x} - 14k_2 e^{7x} = 0},$$

y se verifica la igualdad. Así hemos comprobado que las tres funciones (19), (20) y (22) son soluciones de la ecuación diferencial (21).

Aunque posiblemente ya lo advirtió, al encontrar la solución de una ecuación diferencial es necesario especificar cómo están definidas las funciones que componen su conjunto solución, es decir, especificar en qué intervalo o intervalos están definidas; en otras palabras, la solución de una ecuación diferencial.

Ahora revisemos en los ejemplos 2 y 3 funciones que están expresadas de manera implícita y son solución de una ecuación diferencial.

Ejemplo 2. Soluciones implícitas. Dada la función:

$\boldsymbol{x^3 y^4 = 1 + x y^4 \cos x}$ (23),

verifiquemos que es solución de la ecuación diferencial:

$$\boldsymbol{y' = \frac{-3x^2 + x \sin x - \cos x}{4(x^3 - x\cos x)}} \quad (24)$$

Solución. Al contrario del procedimiento anterior, en este caso no podemos encontrar $\boldsymbol{y'}$ de manera inmediata al calcular la derivada de $\boldsymbol{y}$ porque simplemente $\boldsymbol{y}$ no aparece de manera explícita, es decir, está definida de manera implícita. En (23) dejemos solamente el 1 en el segundo miembro de la igualdad y factoricemos $\boldsymbol{y^4}$:

$\boldsymbol{y^4(x^3 - x\cos x) = 1}$,

Dejamos $\boldsymbol{y^4}$ a la izquierda de la igualdad y derivemos:

$$\boldsymbol{y^4 = \frac{1}{(x^3 - x\cos x)} \Longrightarrow 4y^3 \frac{dy}{dx} = \frac{-3x^2 - [x(-\sin x) + \cos x]}{(x^3 - x\cos x)^2} \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-3x^2 + x(\sin x) - \cos x}{4(x^3 - x\cos x)^2 y^3}},$$

Multiplicando el segundo miembro por $\boldsymbol{\frac{y}{y}}$, y reemplazando $\boldsymbol{y^4}$ nos queda

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = \frac{[-3x^2 + x(\sin x) - \cos x]y}{4(x^3 - x\cos x)^2 y^4} = \frac{[-3x^2 + x(\sin x) - \cos x]y}{4(x^3 - x\cos x)^2 \left[\frac{1}{(x^3 - x\cos x)}\right]} = \frac{[-3x^2 + x(\sin x) - \cos x]y}{4(x^3 - x\cos x)}}$$

Entonces hemos mostrado que (23) es una solución implícita de la ecuación diferencial $\boldsymbol{y' = \frac{-3x^2 + x\sin x - \cos x}{4(x^3 - x\cos x)}}$

Ejemplo 3. Soluciones implícitas. Utilizando derivación implícita verifiquemos que las funciones definidas de manera implícita por la ecuación[1]:

$\boldsymbol{4xy + 2x^3y^2 = 5}$ (25),

[1] Una relación $F(x, y) = 0$ es solución de una ecuación diferencial si define una o más soluciones explícitas.

son soluciones de la ecuación diferencial

$$\boldsymbol{y}' = -\frac{\boldsymbol{4y + 12x^2y^2}}{\boldsymbol{4x + 4x^3y}} \ (26)$$

Solución. Usando reglas elementales de derivación para derivar (24) con respecto a $\boldsymbol{x}$ tenemos

$$(\boldsymbol{4xy' + 4y}) + \boldsymbol{2}[\boldsymbol{x^3 2yy' + 6x^2y^2}] = \boldsymbol{0} \ \Longrightarrow (\boldsymbol{4xy' + 4x^3yy'}) + \boldsymbol{4y + 12x^2y^2} \ \Longrightarrow$$

$$\boldsymbol{y}' = -\frac{\boldsymbol{4y + 12x^2y^2}}{\boldsymbol{4x + 4x^3y}}$$

Ejemplo 4. Soluciones implícitas con diferenciales. Probemos que la función:

$\frac{\boldsymbol{x^3 - y^2}}{\boldsymbol{2}} + \boldsymbol{x + 4y = k}$ (27)

define de manera implícita la solución general de la ecuación diferencial:

$(\frac{\boldsymbol{3}}{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{x^2 + 1})\boldsymbol{dx} - (\boldsymbol{2y - 4})\boldsymbol{dy}$=0 (28)

Solución. Recuerde de sus cursos de Cálculo que si $f(x)$ es una función derivable, la diferencial de $f(x)$, representada por dy, se define como $dy = f'(x)dx$; ésta es una cantidad infinitesimal mientras que su derivada es una cantidad finita que resulta del cociente de dos diferenciales $\frac{dy}{dx}$. Además, cuando se calculan derivadas, éstas se calculan respecto de "algo", es decir, con respecto a una variable independiente, mientras que una diferencial es un incremento de una sola función. Además, las reglas para diferenciales y derivadas son equivalentes.

Entonces calculando las diferenciales para (27):

$$\boldsymbol{d}\left(\frac{\boldsymbol{x^3 - y^2}}{\boldsymbol{2}} + \boldsymbol{x + 4y}\right) = \boldsymbol{d(k)} \Longrightarrow \ \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}(\boldsymbol{3x^2dx - 2ydy}) + \boldsymbol{dx + 4dy = 0} \Longrightarrow$$

$(\frac{\boldsymbol{3}}{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{x^2 + 1})\boldsymbol{dx} - (\boldsymbol{2y - 4})\boldsymbol{dy}$=0

En las secciones precedentes hemos visto la forma de comprobar si una función expresada en forma explícita o implícita hace parte del conjunto solución de una ecuación diferencial dada y hemos destacado la diferencia entre soluciones generales y particulares. Sin embargo, aún no hemos resuelto preguntas relacionadas con los requisitos y condiciones de existencia y unicidad de dichas soluciones y no hemos tratado los llamados problemas de valor inicial.

Problemas con valores iniciales (PVI)

Como una aplicación inmediata de resolver una ecuación diferencial, habitualmente interesan problemas en los que buscamos una solución $y(x)$ de una ecuación diferencial pero sujeta a unas condiciones que se han establecido previamente, es decir, proponen un valor inicial para la variable independiente (x) y la variable dependiente (y) o sus derivadas sucesivas.

Se dice que se resuelve un *problema de valores iniciales* cuando se pide resolver una ecuación diferencial:

$$\boldsymbol{\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right)},$$

que está sujeta a las condiciones iniciales:

$$\boldsymbol{y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}},$$

donde los valores $\boldsymbol{y_0}$, $\boldsymbol{y_1}$, $\boldsymbol{y_{n-1}}$ son constantes de valor real arbitrario y los valores de $\boldsymbol{y(x)}$ y de sus primeras $n-1$ derivadas en un solo punto $\boldsymbol{x_0}$, $\boldsymbol{y(x_0) = y_0}$, $\boldsymbol{y'(x_0) = y_1}$, … , $\boldsymbol{y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}}$ se llaman *condiciones iniciales.*

En general, el problema con valores iniciales descrito anteriormente, se llama problema con valores iniciales de $n - ésimo$ orden.

En particular, el problema de valor inicial:

Resolver $\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = f(x, y)}$,

sujeto a la condición

$$\boldsymbol{y(x_0) = y_0}$$

Se llama un *problema de valor inicial de primer orden*. El cálculo diferencial nos enseñó que este problema se puede interpretar geométricamente: se trata de buscar una solución de una ecuación diferencial en un intervalo I que contenga a $\boldsymbol{x_0}$ tal que su gráfica pase por el punto dado $(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})$. en la figura 2 se presenta una curva solución.

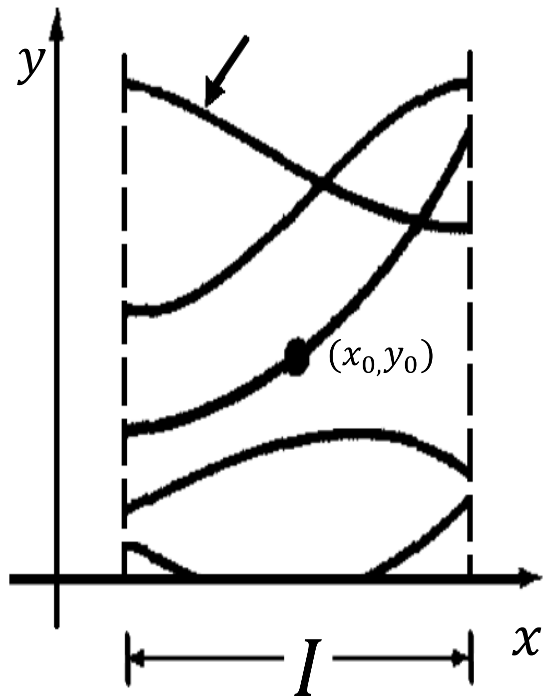

Figura 2. Interpretación geométrica problema de valor inicial de primer orden

Fuente: Propia.

En particular, el problema de valores iniciales:

Resolver $\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, y')$,

sujeto a las condiciones:

$$y(x_0) = y_0 \,, y'(x_0) = y_1$$

Se llama un *problema con valores iniciales de segundo orden*. Para interpretarlo geométricamente, de manera similar al caso anterior, se busca una solución de la ecuación diferencial en un intervalo I que contenga a x_0 de tal manera que su gráfica no solo pase por el punto dado $(x_0 \,, y_0)$, sino que también la pendiente a la curva en ese punto sea el número y_1. En la figura 3 se presenta una curva solución.

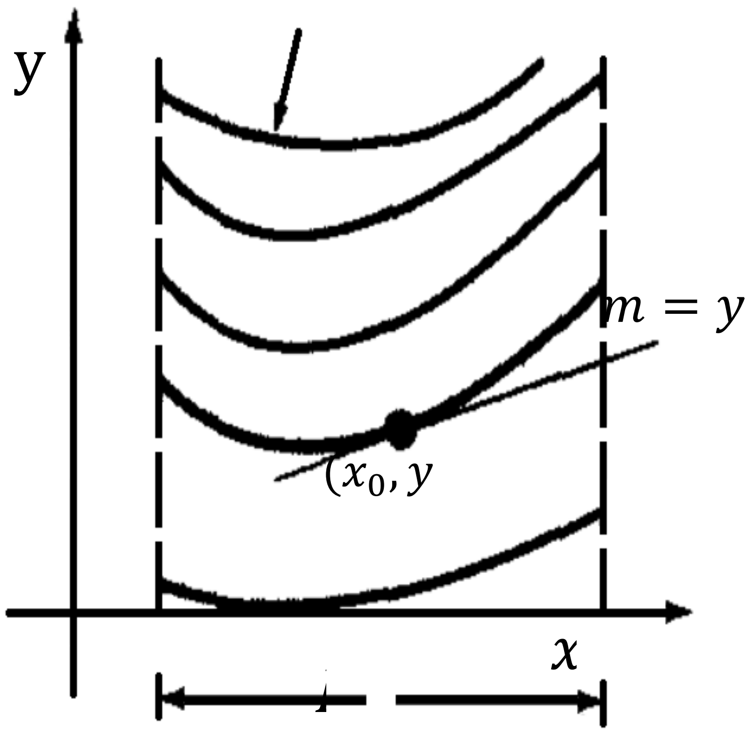

Figura 3. Interpretación geométrica problema de valores iniciales de segundo orden

Fuente: Propia.

Ejemplo 5. PVI. Encuentre la solución para el problema con valor inicial $\boldsymbol{y' + y = 0}$; $\boldsymbol{y(-1) = 2}$, si se sabe que la solución general para esta ecuación diferencial es $\boldsymbol{y(x) = c_1 e^{-x}}$, con c_1 constante arbitraria.

Solución. Este es un caso de problema con valor inicial de primer orden.

Reemplazando $\boldsymbol{y(-1) = 2}$ en la solución, es decir, en $\boldsymbol{y(x) = c_1 e^{-x}}$, nos queda $\boldsymbol{y(-1) = c_1 e^{-2} \Rightarrow 2 = c_1 e^{-2} \Rightarrow c_1 = \frac{2}{e^{-2}} = c_1 = 2e^2}$, lo que significa que debemos seleccionar $c_1 = 2e^2$. Al reemplazar este valor de $\boldsymbol{c_1}$ en $\boldsymbol{y(x) = c_1 e^{-x}}$ nos queda $\boldsymbol{y(x) = c_1 e^{-x} \Rightarrow y(x) = 2e^2\, e^{-x} \Rightarrow y\,(x) = 2e^{2-x}}$ como la solución del problema de valor inicial.

Ejemplo 6. PVI. Determine si alguna de las funciones $\boldsymbol{y_1(x) = \sin 2x}$, $\boldsymbol{y_2(x) = \frac{1}{2}\sin 2x}$, $\boldsymbol{y_3(x) = x}$ es una solución para el problema con valor inicial $\boldsymbol{y'' + 4y = 0}$, $\boldsymbol{y(0) = 0}$, $\boldsymbol{y'(0) = 1}$.

Solución. Este es un caso de problema con valores iniciales de segundo orden.

Analicemos la posible solución $\boldsymbol{y_1(x) = \sin 2x}$:

$\boldsymbol{y_1(x) = \sin 2x}$ sí es solución de $\boldsymbol{y'' + 4y = 0}$. ya que con $\boldsymbol{y_1(x) = \sin 2x \Rightarrow}$

$$\boldsymbol{y'_1(x) = 2\cos 2x \Rightarrow y''_1(x) = -4\sin 2x \Rightarrow y'' + 4y = 0}$$
$$\boldsymbol{\Rightarrow -4\sin 2x + 4(\sin 2x) = 0},$$

Además, se cumple que $\boldsymbol{y(0) = 0}$, ya que $\boldsymbol{y_1(x) = \sin 2x \Rightarrow y_1(0) = \sin 2(0) = \sin 0 = 0}$; pero no se cumple la segunda condición, $\boldsymbol{y'(0) = 1}$, ya que $\boldsymbol{y'_1(x) = 2\cos 2x \Rightarrow y'_1(0) = 2\cos 2(0) = 2\cos 0 = 2 * 1 = 2 \neq 1 = y'(0)}$, luego $\boldsymbol{y_1(x)}$ no cumple la segunda condición inicial, lo que implica que $\boldsymbol{y_1(x) = \sin 2x}$ no sea una solución de valor inicial.

Analicemos la posible solución $\boldsymbol{y_2(x) = \frac{1}{2}\sin 2x}$:

$\boldsymbol{y_2(x) = \frac{1}{2}\sin 2x \Rightarrow y'_2(x) = \cos 2x}$, $\boldsymbol{y''_2(x) = -2\sin 2x}$, reemplazando en $\boldsymbol{y'' + 4y = 0 \Rightarrow -2\sin 2x + 4\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right) = -2\sin 2x + 2\sin 2x = 0}$, luego $\boldsymbol{y_2(x)}$ sí es solución de $\boldsymbol{y'' + 4y = 0}$. Además se cumple que $\boldsymbol{y(0) = 0}$, ya que

$\boldsymbol{y_2(x) = \frac{1}{2}\sin 2x \Rightarrow y_2(0) = \frac{1}{2}\sin 2(0) = 0}$, y $\boldsymbol{y'(0) = 1}$, ya que

$\boldsymbol{y'_2(x) = \cos 2x \Rightarrow y'_2(0) = \cos 2(0) = 1}$. Entonces, $\boldsymbol{y_2(x) = \frac{1}{2}\sin 2x}$ satisface la ecuación diferencial $\boldsymbol{y'' + 4y = 0}$ y cumple las dos condiciones iniciales $\boldsymbol{y(0) = 0}$, $\boldsymbol{y'(0) = 1}$, lo que implica que $\boldsymbol{y_2(x) = \frac{1}{2}\sin 2x}$ sí es una solución con valores iniciales.

Analicemos la posible solución $\boldsymbol{y_3(x) = x}$:

$\boldsymbol{y_3(x) = x \Rightarrow y'_3(x) = 1, y''_3(x) = 0}$, como $\boldsymbol{y'' + 4y = 0 \Rightarrow 0 + 1 = 1 \neq 0}$, luego $\boldsymbol{y_3(x) = x}$ no satisface la ecuación diferencial dada.

Un preámbulo a la solución de ecuaciones diferenciales

Con el propósito de comenzar el productivo camino en la aplicación de métodos para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden y orden superior, en especial las de segundo orden, emprenderemos el análisis del tipo de ecuaciones diferenciales cuya solución no presenta mayores dificultades, ya que se “limitan” a resolver integrales por los métodos vistos en cursos anteriores.

Ya sospechará usted que iniciar la búsqueda de una solución a partir de la ecuación diferencial dada es un camino que seguramente va a presentar obstáculos. Aunque en este módulo se presentan algunos métodos y procesos para lograrlo, nuevamente debe tener presente que los fundamentos de derivación, y por supuesto de integración, son requisito indispensable, parte de su éxito depende de este hecho.

Soluciones sencillas de la forma $\frac{dy}{dx} = f(x)$.

Las ecuaciones diferenciales más sencillas de resolver son aquellas de la forma

$\frac{dy}{dx} = f(x)$ (28) .

Éstas se resuelven escribiendo $\frac{dy}{dx} = f(x)$ de la forma:

$y = \int f(x)dx + c$ (29),

utilizando métodos propios del Cálculo integral; como usted sabe, algunas integrales suelen ser muy complicadas de resolver y varias de ellas se resisten a ser resueltas.

Ejemplo 7. Soluciones de ecuaciones diferenciales que resultan en una integral indefinida.

Resolvamos la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} - x^2(4 - x^3) = 0 \quad (30)$$

Solución. Despejando $\frac{dy}{dx}$ nos queda $\frac{dy}{dx} = x^2(4 - x^3)$, con lo cual la integral solución es:

$$y = \int x^2(4 - x^3)dx \quad (31)$$

Haciendo la sustitución $u = (4 - x^3)$, tenemos que $du = -3x^2dx$ y $dx = -\frac{du}{3x^2}$. La integral queda entonces:

$-\int \boldsymbol{x^2 u} \frac{du}{3x^2} = -\frac{1}{3}\int \boldsymbol{u}\, du = -\frac{1}{3}\left(\frac{u^2}{2}\right) + c = -\left(\frac{u^2}{6}\right) + c = -\frac{\left(4-x^3\right)^2}{6} + c$, y la solución (explícita) de (19) es:

$$\boldsymbol{y = -\frac{(4 - x^3)^2}{6} + c}$$

1

Unidad 1

Introducción a las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

Ecuaciones Diferenciales

Autor: Luis Guillermo Caro Pineda

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina

MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Introducción

Comenzamos el estudio de algunas ecuaciones diferenciales de primer orden. Estudiaremos las soluciones de las ecuaciones separables, luego estudiaremos los métodos para resolver ecuaciones que se pueden convertir en separables, las ecuaciones homogéneas y aquellas que se pueden transformar en homogéneas. La cartilla termina con una revisión exhaustiva de dos aplicaciones de las ecuaciones diferenciales de primer orden: Ley de Enfriamiento de Newton y Crecimiento poblacional.

Recomendaciones metodológicas

La presente cartilla, Introducción a las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, se desarrolla a través de explicaciones de los fundamentos teóricos y la solución de ejemplos que ilustran los procedimientos para comenzar nuestra tarea de resolver ecuaciones diferenciales de primer orden. Lograr este propósito obliga a repasar los métodos de derivación e integración de funciones de variable real.

Para garantizar su éxito en la revisión y estudio de los temas seleccionados, usted debe realizar una revisión exhaustiva de la cartilla, las lecturas complementarias y los recursos audiovisuales, ya que además de ubicar las definiciones pertinentes, encontrará explicaciones desde varios autores y ejercicios resueltos que despejarán dudas. El desarrollo del módulo exige disciplina y trabajo permanente, usted debe acostumbrarse a la revisión frecuente de los recursos y a la realización de las actividades en los tiempos señalados. Se convierte en requisito indispensable el uso de un programa de Cálculo simbólico como Geogebra, Derive, Matlab, etc.

Además de revisar los textos propuestos en la bibliografía, usted debe estudiar de manera permanente los libros digitales *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado, novena edición,* de Dennis Zill y *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas* de George Simmons; que se encuentran en pdf en la sección de recursos para el aprendizaje. Del libro de Simmons se resuelven muchos ejercicios propuestos de las secciones finales de los capítulos seleccionados.

Desarrollo temático

Introducción a las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

Ecuaciones diferenciales separables de primer orden

Al final de la cartilla 1, presentamos ejemplos de las ecuaciones diferenciales de primer orden cuya forma es la más simple; su solución aparece al resolver una integral indefinida, es decir,

$\frac{dy}{dx} = f(x) \Longrightarrow \int dy = \int f(x)dx \,. \Longrightarrow y = \int f(x)dx.$

Existe otra forma muy sencilla en que se pueden presentar las ecuaciones diferenciales de primer orden, cuya solución después de ciertos arreglos algebraicos, es muy similar al nivel más sencillo presentado en el ejemplo 5; se trata de las *ecuaciones diferenciales separables*, aquellas que se pueden escribir de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y).$$

Estas ecuaciones se caracterizan porque en la parte derecha de la igualdad aparecen dos funciones que se multiplican entre sí; una de ellas depende de la variable dependiente (casi siempre y) y la otra de la variable independiente (casi siempre x). Para resolverlas, separamos las variables y resolvemos por integración:

$\int \boldsymbol{\frac{dy}{h(y)}} = \int \boldsymbol{g(x)dx + k}$.

Ejemplo 1. Soluciones de **ecuaciones diferenciales separables.** Resolver la ecuación diferencial:

$\frac{dy}{dx} = 5x(y+3)^2.$

Al separar las variables y escribir las integrales nos queda:

$\int \frac{dy}{(y+3)^2} = \int 5xdx.$

Resolvamos cada integral por separado:

Para la integral $\int \frac{dy}{(y+3)^2}$ realizamos la sustitución $u = y + 3 \;\Longrightarrow dy = du$, con lo que:

$\int \frac{dy}{(y+3)^2} = \int \frac{du}{u^2} = \int u^{-2}du = \frac{u^{-1}}{-1} + k = \frac{(y+3)^{-1}}{-1} + k.$

La integral $\int 5xdx = 5\int xdx = \frac{5x^2}{2} + k$.

Al igualar las soluciones de las integrales respectivas nos queda:

$\frac{(y+3)^{-1}}{-1} + k = \frac{5x^2}{2} + k \Longrightarrow -\frac{1}{(y+3)} = \frac{5x^2}{2} + k = \frac{5x^2+2k}{2} = \frac{5x^2+k}{2} \Longrightarrow -\frac{1}{(y+3)} = \frac{5x^2+k}{2}$. Esta última igualdad se convierte en la solución implícita de (34); sin embargo, en este caso podemos despejar y para obtener su solución explícita, es decir, despejar y:

$$\frac{-1 \cdot 2}{(5x^2 + k)} = y + 3 \Longrightarrow y = \frac{-2}{(5x^2 + k)} - 3$$

Recuerde que siempre que la constante k sea multiplicada (u otra operación que la afecte) por un nuevo número, de manera automática se genera una nueva constante k.

Ejemplo 2. Resolver la ecuación diferencial $e^x dx = 2ydy$ con condiciones iniciales $y(1) = 1$.

Al separar las variables y escribir las integrales nos queda:

$-2\int ydy + \int e^x\, dx = c \Longrightarrow y^2 = e^x + c$. Al sustituir la condición inicial $y(1) = 1$, nos queda $(1)^2 = e^1 + c \Longrightarrow 1 = e + c \Longrightarrow c = 1 - e$. Entonces una solución particular con las condiciones iniciales $y(1) = 1$ es:

$y^2 = e^x + 1 - e$.

Ecuaciones convertibles a separables

En las secciones precedentes hemos resuelto ecuaciones diferenciales de primer orden en las que de manera inmediata se pudieron separar sus variables de la forma $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$.

Mediante algún método de solución de integrales se llegó a la solución $f(x, y) = c$.

No existe una regla general que nos brinde una sustitución adecuada para que una ecuación diferencial de primer orden se pueda expresar de una manera "más sencilla" para tratar de resolverla por alguno de los métodos vistos en los cursos de Cálculo diferencial e integral. La experiencia nos indica que la mejor regla es la práctica constante y el ensayo y el error a la hora de transformar dicha ecuación en una expresión más simple.

En los dos ejemplos siguientes, las sustituciones realizadas transforman esas ecuaciones aparentemente "difíciles" en ecuaciones diferenciales con variables separables.

Ejemplo 3. Resolver la ecuación diferencial:[1]

$(x^2y^3 + y)dx = (x^3y^2 - x)dy.$

Organizando los diferenciales tenemos $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2y^3+y}{x^3y^2-x}$. Claramente en esta ecuación no se pueden separar las variables, es decir, no se puede obtener una expresión de la forma

$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$. Sin embargo, la ecuación propuesta se puede transformar en una ecuación diferencial separable utilizando la sustitución $z = xy$. Veamos una forma de hacerlo.

Sea $z = xy \implies dz = xdy + ydx \implies \frac{dz}{dx} = x\frac{dy}{dx} + y \implies x\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - y \implies \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dz}{dx}-y}{x}$.

Reemplazando en la ecuación diferencial propuesta, tenemos

$$\frac{\frac{dz}{dx} - y}{x} = \frac{y(x^2y^2+1)}{x(x^2y^2-1)} \implies \frac{dz}{dx} - y = \frac{y(z^2+1)}{(z^2-1)} \implies \frac{dz}{dx} = \frac{y(z^2+1)}{(z^2-1)} + y = \frac{yz^2 + y + yz^2 - y}{(z^2-1)} \implies$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{2yz^2}{(z^2-1)} = \frac{2(\frac{z}{x})z^2}{(z^2-1)} = \frac{2z^3}{x(z^2-1)} \implies \frac{dz}{dx} = \frac{2z^3}{x(z^2-1)} \implies \int \frac{(z^2-1)}{2z^3}dz = \int \frac{dx}{x} \implies$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{z^2}{z^3}dz - \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z^3}dz = \ln x + c \implies \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z} - \frac{1}{2}\int z^{-3}dz = \ln x + c \implies \frac{1}{2}\ln z - \frac{1}{2}\cdot\frac{z^{-2}}{-2} = \ln x + c \implies$$

$$\frac{1}{2}\ln z + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{z^2} = \ln x + c \implies \ln z + \frac{1}{2z^2} = 2\ln x + c \implies \ln xy - \ln x^2 + c = -\frac{1}{2(xy)^2} \implies$$

$$\ln(\frac{xy}{x^2}) + c = -\frac{1}{2x^2y^2} \implies -\frac{1}{2x^2y^2} = \ln(\frac{y}{x}) + c.$$

Ejemplo 4. Resolver la ecuación diferencial:[2]

$\cos(x+y)\,dx = x\sin(x+y)\,dx + x\sin(x+y)\,dy.$

[1] Ejercicio número 6 de la sección de **ejercicios propuestos** del capítulo 1 del libro Ecuaciones diferenciales de **Simmons**, p.79.
[2] Ejercicio número 15 de la sección de **ejercicios propuestos** del capítulo 1 del libro Ecuaciones diferenciales de **Simmons**, p.79.

Casi de manera inmediata debemos advertir que el ángulo de las funciones seno y coseno, $x+y$, que aparece en la ecuación diferencial impiden separar las variables. Para buscar la forma $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$, quizá parezca evidente la sustitución $u=x+y$.

Primero escribamos la ecuación diferencial propuesta de la forma $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$:

$$[\cos(x+y)-x\sin(x+y)]\,dx = x\sin(x+y)\,dy \Longrightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{[\cos(x+y)-x\sin(x+y)]}{x\sin(x+y)}$$

Ahora sigamos los pasos con la sustitución elegida: Sea $u=x+y \Longrightarrow du=dx+dy \Longrightarrow \frac{du}{dx}=1+\frac{dy}{dx} \Longrightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}-1$. Y reemplacemos:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{[\cos(x+y)-x\sin(x+y)]}{x\sin(x+y)} \Longrightarrow \frac{du}{dx}-1=\frac{[\cos u - x\sin u]}{x\sin u} \Longrightarrow \frac{du}{dx} = \frac{\cos u - x\sin u}{x\sin u}+1 \Longrightarrow$$

$$\frac{du}{dx}=\frac{\cos u - x\sin u + x\sin u}{x\sin u} \Longrightarrow \frac{du}{dx}=\frac{\cos u}{x\sin u} \Longrightarrow \int \frac{\sin u}{\cos u}du = \int \frac{dx}{x} \Longrightarrow$$

$$\int \tan u\,du = \int \frac{dx}{x} \Longrightarrow \ln\sec u = \ln x + c \Longrightarrow \ln\left(\frac{1}{\cos u}\right) - \ln x = c \Longrightarrow \ln\frac{1}{x\cos u}=c \Longrightarrow$$

$$e^{\ln\frac{1}{x\cos x}} = e^{c} \Longrightarrow \frac{1}{x\cos(x+y)} = c \Longrightarrow \frac{1}{c} = x\cos(x+y) \Longrightarrow x\cos(x+y)=c.$$

Comprobación. Verifiquemos entonces que la solución de la ecuación diferencial

$\cos(x+y)\,dx = x\sin(x+y)\,dx + x\sin(x+y)\,dy$, es $x\cos(x+y)=c$.

La expresión $x\cos(x+y)$ se deriva como un producto:

$$[x\cos(x+y)]' = [x\cdot(-\sin(x+y)\cdot(1+y') + \cos(x+y)\cdot(1)]$$

$$= -x\sin(x+y) - [x\sin(x+y)]\cdot y' + \cos(x+y)$$

$$= -x\sin(x+y) - [x\sin(x+y)]\cdot\frac{dy}{dx} + \cos(x+y) =$$

$$= -x\sin(x+y)dx - [x\sin(x+y)]dy + \cos(x+y)dx \Longrightarrow$$

$$\cos(x+y)\,dx = x\sin(x+y)\,dx + x\sin(x+y)\,dy.$$

En ocasiones, algunas ecuaciones diferenciales de primer orden se resuelven de una manera más sencilla usando la sustitución $u = \frac{x}{y}$. Esta sustitución nos lleva a $x = uy \implies dx = udy + ydu$, de donde $\frac{dx}{dy} = u + y\frac{du}{dy}$.

Adicionalmente, debe advertir que en buena parte de las ecuaciones diferenciales que aparecerán a lo largo del presente curso, se requiere un uso adecuado de álgebra elemental. Buena parte de su éxito, dependerá de su habilidad en las "artimañas" y "trucos" algebraicos que descubra y aplique.

Ejemplo 5. Resolver la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xye^{\left(\frac{x}{y}\right)^2}}{y^2 + y^2e^{\left(\frac{x}{y}\right)^2} + 2x^2e^{\left(\frac{x}{y}\right)^2}} \implies \frac{dx}{dy} = \frac{y^2 + y^2e^{\left(\frac{x}{y}\right)^2} + 2x^2e^{\left(\frac{x}{y}\right)^2}}{2xye^{\left(\frac{x}{y}\right)^2}} \implies$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2e^{\left(\frac{x}{y}\right)^2}} \cdot \left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{y}{x}\right) + \frac{x}{y} = \frac{1}{2e^{\left(\frac{x}{y}\right)^2}} \cdot \left(\frac{1}{\left(\frac{x}{y}\right)}\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{\left(\frac{x}{y}\right)}\right) + \frac{x}{y}.$$

La sustitución $u = \frac{x}{y}$, nos lleva a:

$$u + y\frac{du}{dy} = \frac{1}{2e^{(u)^2}} \cdot \left(\frac{1}{(u)}\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{(u)}\right) + u \implies y\frac{du}{dy} = \frac{1}{2e^{(u)^2}} \cdot \left(\frac{1}{(u)}\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{(u)}\right) \implies$$

$$y\frac{du}{dy} = \frac{1 + e^{u^2}}{2ue^{u^2}} \implies 2\int \frac{ue^{u^2}}{1 + e^{u^2}}du = \int \frac{dy}{y}$$

Ecuaciones diferenciales homogéneas

Una ecuación diferencial escrita en la forma $y' = f(x, y)$ es homogénea de grado n si

$f(tx, ty) = t^n f(x, y)$ para todo $t \epsilon \mathbb{R}$.

Esto quiere decir que al reemplazar x por tx y y por ty, en la expresión resultante se obtienen dos factores, uno de ellos es precisamente t^n y el otro factor es la función original $f(x, y)$.

La expresión $x^2 - y^2$, es homogénea de grado 2, ya que $(tx)^2 - (ty)^2 = t^2(x^2 - y^2)$.

La expresión $\cos\frac{x}{y}$, es homogénea de grado 0, ya que $\cos\frac{xt}{ty} = \cos\frac{x}{y} = t^2 \cos\frac{x}{y}$.

La expresión $\sqrt{y^2 + x^2}$, es homogénea de grado 1, ya que

$\sqrt{(ty)^2+(tx)^2} = \sqrt{(ty)^2+(tx)^2} = \sqrt{t^2(y^2+x^2)} = t^1(\sqrt{y^2+x^2})$.

La ecuación $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ siempre se puede transformar en una ecuación diferencial separable (vista en secciones anteriores), mediante la sustitución:

$z = \frac{y}{x} \Longrightarrow y = x \cdot z.$

Al derivar con respecto a x nos queda:

$$\frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}$$

Al reemplazar estas expresiones en la ecuación inicial, se obtiene una ecuación diferencial en términos de x y z, esta ecuación se resuelve como una ecuación diferencial separable.

Ejemplo 6. Resolver la ecuación diferencial homogénea:[3]

$$(3x^2y - y^3)dx - (3xy^2 - x^3)dy = 0 \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2y - y^3}{3xy^2 - x^3} \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{3x^2y}{x^3} - \frac{y^3}{x^3}}{\frac{3xy^2}{x^3} - \frac{x^3}{x^3}} \Longrightarrow$$

$\frac{dy}{dx} = \frac{3(\frac{y}{x}) - (\frac{y}{x})^3}{3(\frac{y}{x})^2 - 1}$. Hacemos la sustitución $y = z \cdot x \Longrightarrow z = \frac{y}{x} \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx} \Longrightarrow$

$$z + x\frac{dz}{dx} = \frac{3z - z^3}{3z^2 - 1} \Longrightarrow x\frac{dz}{dx} = \frac{3z - z^3}{3z^2 - 1} - z = \frac{3z - z^3 - 3z^3 + z}{3z^2 - 1} = \frac{4z - 4z^3}{3z^2 - 1} \Longrightarrow$$

$$\int \frac{3z^2 - 1}{4(z - z^3)}dz = -\frac{1}{4}\int \frac{3z^2 - 1}{(z^3 - z)}dz = \int \frac{dx}{x}$$

Como la derivada de $(z^3 - z)$ es $(3z^2 - 1) \Longrightarrow$

$-\frac{1}{4}\int \frac{3z^2 - 1}{(z^3 - z)}dz = -\frac{1}{4}\ln(z^3 - z) \Longrightarrow$

$$-\frac{1}{4}\ln(z^3 - z) + c_1 = \ln x + c_2 \Longrightarrow -\ln(z^3 - z) = 4\ln x + 4c_3 \Longrightarrow$$

$$\ln x^4 + \ln(z^3 - z) = c_4 \Longrightarrow \ln x^4 + \ln\left((\frac{y}{x})^3 - (\frac{y}{x})\right) = c_4 \Longrightarrow \ln\left(x^4 \cdot \frac{y^3 - x^2y}{x^3}\right) = c_4 \Longrightarrow$$

$$e^{\ln(xy^3 - x^3y)} = e^{c_4} \Longrightarrow xy^3 - x^3y = c$$

[3] Ejercicio número 36 de la sección de **ejercicios propuestos** del capítulo 1 del libro Ecuaciones diferenciales de Simmons, p.79.

Comprobación.

Derivemos en la misma la línea la solución encontrada $xy^3 - x^3y = c$:

$$3xy^2y' + y^3 - x^3y' - 3x^2y = (3xy^2 - x^3)y' + (3x^2y - y^3) = 0$$

Ejemplo 7. Resolver la ecuación diferencial homogénea[4] $xydy = x^2dy + y^2dx$.
Busquemos la forma $\frac{dy}{dx} = f(x,y) \Longrightarrow\ y^2dx + (xy - x^2)dy \Longrightarrow 0 \Longrightarrow$

$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy-x^2} = \frac{\frac{y^2}{y^2}}{\frac{xy-x^2}{y^2}} = \frac{1}{\frac{x}{y}-(\frac{x}{y})^2}$.

En este caso la sustitución $z = \frac{y}{x}$ no sirve porque al dividir cada término por y^2 con el propósito de eliminar la variable y , no es posible reemplazar $z = \frac{y}{x}$, sino $z = \frac{x}{y}$.

La nueva sustitución[5] es entonces $z = \frac{x}{y}\ \Longrightarrow \frac{dx}{dy} = z + y\frac{dz}{dy}$.

Teníamos que $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{x}{y}-(\frac{x}{y})^2}\ \Longrightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{x}{y} - (\frac{x}{y})^2 \Longrightarrow z + y\frac{dz}{dy} = z - z^2 \Longrightarrow \frac{dz}{z^2} = -\frac{dy}{y}$

$$\int \frac{dz}{z^2} = -\int \frac{dy}{y} \Longrightarrow \int z^{-2}\,dz = -\ln y + c_1 \Longrightarrow -\frac{1}{z} = -\ln y + c_1 \Longrightarrow\Longrightarrow \frac{y}{x} = \ln y + c_1 \Longrightarrow$$

$\mathrm{y} = \mathrm{x}\ln y + cx$. Verifique el resultado.

Ejemplo 8. Resolver la ecuación diferencial homogénea:[6]

$(y^2 - 3\mathrm{x}y - 2x^2)dx = (x^2 - xy)dy$.

Dividiendo la expresión por x^2 y haciendo la sustitución $z = \frac{y}{x}, \frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}$, nos queda

[4] Ejercicio número 9 de la sección de **ejercicios propuestos** del capítulo 1 del libro Ecuaciones diferenciales de Simmons, p.79.

[5] Con la nueva sustitución $z = \frac{x}{y} \Longrightarrow x = uy \Longrightarrow dx = udy + ydu \Longrightarrow \frac{dx}{dy} = u + y\frac{du}{dy}$.

[6] Ejercicio número 20 de la sección de **ejercicios propuestos** del capítulo 1 del libro Ecuaciones diferenciales de Simmons, p.79.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(y^2-3x\mathrm{y}-2x^2)}{(x^2-xy)}=\frac{\frac{y^2}{x^2}-3\frac{x\mathrm{y}}{x^2}-\frac{2x^2}{x^2})}{\left(\frac{x^2}{x^2}-\frac{xy}{x^2}\right)}=\frac{\frac{y^2}{x^2}-3\frac{x\mathrm{y}}{x^2}-\frac{2x^2}{x^2})}{\left(\frac{x^2}{x^2}-\frac{xy}{x^2}\right)}\Longrightarrow$$

$$z+x\frac{dz}{dx}=\frac{z^2-3z-2}{1-z}\Longrightarrow$$

$$x\frac{dz}{dx}=\frac{z^2-3z-2}{1-z}-z=\frac{z^2-3z-2-z+z^2}{1-z}=\frac{2z^2-4z-2}{1-z}=\frac{2(z^2-2z-1)}{1-z}\Longrightarrow$$

$$\int\frac{1-z}{(z^2-2z-1)}dz=2\int\frac{dx}{x}\Longrightarrow-\frac{1}{2}\ln(z^2-2z-1)+c_1=2\ln x+c_2\Longrightarrow$$

$$-\ln(z^2-2z-1)=4\ln x+4c_2\Longrightarrow\ln[(x^4)\cdot\frac{(y^2-2x\mathrm{y}-x^2)}{x^2}]=c_3$$

$$\Longrightarrow\ln\left[\,x^2\,(y^2-2x\mathrm{y}-x^2)\right]=c_3\Longrightarrow$$

$$e^{\ln[x^2(y^2-2x\mathrm{y}-x^2)]}=e^{c_3}\Longrightarrow x^2(y^2-2x\mathrm{y}-x^2)=c$$

Ecuaciones diferenciales convertibles a homogéneas

Existen ecuaciones diferenciales que no siendo homogéneas, sí podemos convertirlas a homogénea. Estas ecuaciones son de la forma:

$$\frac{dy}{dx}=F(\frac{ax+by+c}{dx+ey+f})$$

Mediante las sustituciones $x=u+h\ \Longrightarrow dx=du$, y $y=v+k\ \Longrightarrow dy=dv$, con h,k constantes, estas ecuaciones se reducen a una ecuación homogénea.

A continuación dos ejemplos que nos muestran el procedimiento utilizado.

Ejemplo 9. Resolver la ecuación diferencial:[7]

$(2x+3y+1)dx+(2y-3x+5)dy=0.$

Aunque esta ecuación diferencial no es homogénea, sí podemos convertirla a homogénea mediante las sustituciones $x=u+h\ \Longrightarrow dx=du$, y $y=v+k\ \Longrightarrow dy=dv$, con h,k constantes.

[7] Ejercicio número 3 de la sección de **ejercicios propuestos** del capítulo 1 del libro Ecuaciones diferenciales de Simmons, p.79.

La ecuación $(2x+3y+1)dx+(2y-3x+5)dy=0$ es equivalente a $\frac{dy}{dx}=\frac{(2x+3y+1)}{(2y-3x+5)}$.

Reemplazando las sustituciones propuestas tenemos:

$$\frac{dv}{du}=\frac{2(u+h)+3(v+k)+1}{3(u+h)-2(v+k)-5}=\frac{2u+2h+3v+3k+1}{3u+3h-2v-2k-5}=$$

$$\frac{2u+3v+2h+3k+1}{3u-2v+3h-2k-5}$$

Hacemos[8] $2h+3k=-1$ y $3h-2k=5 \implies h=1$ y $k=-1 \implies$

$\frac{dv}{du}=\frac{2u+3v+2(1)+3(-1)+1}{3u-2v+3(1)-2(-1)-5}=\frac{2u+3v}{3u-2v} \implies \frac{dv}{du}=\frac{2u+3v}{3u-2v}$ que ya es homogénea.

$$\frac{dv}{du}=\frac{2u+3v}{3u-2v}=\frac{\frac{2u}{u}+\frac{3v}{u}}{\frac{3u}{u}-\frac{2v}{u}} \implies \frac{dv}{du}=\frac{2+3\frac{v}{u}}{3-2\frac{v}{u}} \implies w=\frac{v}{u} \implies \frac{dv}{du}=w+u\frac{dw}{du} \implies$$

$$w+u\frac{dw}{du}=\frac{2+3w}{3-2w} \implies u\frac{dw}{du}=\frac{2+3w}{3-2w}-w=\frac{2+3w-3w+2w^2}{3-2w}=\frac{2+2w^2}{3-2w} \implies$$

$$\implies \frac{(3-2w)}{2(1+w^2)}dw=\frac{du}{u} \implies \frac{1}{2}\left[3\int\frac{dw}{1+w^2}-\int\frac{2w}{1+w^2}dw\right]=\int\frac{du}{u} \implies$$

Evaluemos cada integral de la parte izquierda de la última expresión:

$$3\int\frac{dw}{1+w^2}=3\tan^{-1}w.$$

$$\int\frac{2w}{1+w^2}dw \implies t=1+w^2 \implies dt=2wdw \implies dw=\frac{dt}{2w} \implies$$

$$\int\frac{2w}{1+w^2}dw=\int\frac{2w}{t}\frac{dt}{2w}=\int\frac{dt}{t}=\ln t=\ln(1+w^2)$$

[8] Este es un sistema de ecuaciones 2x2. Podemos resolverlo por el método de reducción, así:

$$\begin{Bmatrix}(2h+3k=-1)\cdot(2)\\(3h-2k=5)\cdot(3)\end{Bmatrix} \implies \begin{Bmatrix}4h+6k=-2\\9h-6k=15\end{Bmatrix} \implies 13h=13 \implies h=1 \implies$$

$$2(1)+3k=-1 \implies k=-1.$$

Entonces:

$$\frac{1}{2}\left[3\int\frac{dw}{1+w^2}-\int\frac{2w}{1+w^2}dw\right]=\int\frac{du}{u}\Longrightarrow 3\tan^{-1}w-\ln(1+w^2)=2\ln u+c\Longrightarrow$$

$3\tan^{-1}\frac{v}{u}-\ln\left(1+(\frac{v}{u})^2\right)=2\ln u+c.$

Recordemos que $x=u+h, y=v+k\ \Longrightarrow u=x-h, v=y-k$. Como $h=1, k=-1\Longrightarrow$

$$u=x-1, v=y+1\ \Longrightarrow$$

$$3\tan^{-1}\frac{v}{u}-\ln\left(1+\left(\frac{v}{u}\right)^2\right)=2\ln u+c\Longrightarrow 3\tan^{-1}\left(\frac{y+1}{x-1}\right)-\ln\left(1+\left(\frac{y+1}{x-1}\right)^2\right)=2\ln(x-1)+c\Longrightarrow$$

$$3\tan^{-1}\left(\frac{y+1}{x-1}\right)=\ln\left(1+\left(\frac{y+1}{x-1}\right)^2\right)+\ln(x-1)^2+c=\ln\left[(x-1)^2\frac{(x-1)^2+(y+1)^2}{(x-1)^2}\right]+c\Longrightarrow$$

$3\tan^{-1}(\frac{y+1}{x-1})=\ln(x-1)^2(y+1)^2+c.$

Ejemplo 10. Resolver la ecuación diferencial: $\frac{dy}{dx}=\frac{x+2y+2}{-2x+y}$.

Esta ecuación es otro ejemplo de una ecuación diferencial que aunque no es homogénea, sí podemos convertirla a homogénea mediante las sustituciones $x=u+h\ \Longrightarrow dx=du$, y $y=v+k\ \Longrightarrow dy=dv$, con h, k constantes.

Reemplazando las sustituciones propuestas tenemos:

$$\frac{dv}{du}=\frac{u+h+2v+2k+2}{-2u-2h+v+k}=\frac{u+2v+(h+2k)+2}{-2u+v+(-2h+k)}\Longrightarrow$$

Hacemos[9] $h+2k=-2, -2h+k=0 \Longrightarrow h=\frac{-2}{5}, k=\frac{-4}{5} \Longrightarrow$

$$\frac{dv}{du}=\frac{u+2v+(-2)+2}{-2u+v+(0)} \Longrightarrow \frac{dv}{du}=-\frac{u+2v}{2u-v} \Longrightarrow w=\frac{v}{u} \Longrightarrow \frac{dv}{du}=w+u\frac{dw}{du} \Longrightarrow$$

Dividiendo por u cada término de la expresión $\frac{u+2v}{2u-v}$ y haciendo las sustituciones propuestas nos queda:

$$w+u\frac{dw}{du}=-\frac{1+2w}{2-w} \Longrightarrow u\frac{dw}{du}=-\frac{1+2w}{2-w}-w=\frac{-1-2w-2w+w^2}{2-w}$$
$$=\frac{-1-4w+w^2}{2-w} \Longrightarrow$$

$$\int \frac{(2-w)}{(w^2-4w-1)}dw=\int \frac{du}{u}$$

Al evaluar las integrales[10] nos queda:

$$-\frac{1}{2}\ln[(w-2)^2-5]=\ln u+c \Longrightarrow \ln u^2+\ln[(w-2)^2-5]=c \Longrightarrow$$

$$\ln[((w-2)^2-5)\cdot(u^2)]=c \Longrightarrow e^{\ln[((w-2)^2-5)\cdot(u^2)]}=e^c \Longrightarrow ((w-2)^2-5)(u^2)=c.$$

$$\Longrightarrow ((\frac{v}{u}-2)^2-5)(u^2)=c \Longrightarrow (\frac{(v-2u)^2-5u^2}{u^2})(u^2)=c \Longrightarrow v^2-4uv-u^2=c \Longrightarrow$$

---

[9] Este es un sistema de ecuaciones 2x2. Podemos resolverlo por el método de reducción, así:

$$\begin{cases}(h+2k=-2)\cdot(2)\\(-2h+k=0)\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}2h+4k=-4\\-2h+k=0\end{cases} \Longrightarrow 5k=-4 \Longrightarrow k=\frac{-4}{5} \Longrightarrow$$

$$-2h+(\tfrac{-4}{5})=0 \Longrightarrow h=\tfrac{-2}{5}.$$

[10] Es pertinente recordar cómo se debe evaluar la integral de la izquierda:

$$\int \frac{(2-w)}{(w^2-4w-1)}dw=\int \frac{-(w-2)}{(w^2-4w+4-5)}dw$$
$$=\int \frac{-(w-2)}{(w-2)^2-5)}dw.$$

Sea $t=(w-2)^2-5) \Longrightarrow dt=2(w-2)dw \Longrightarrow dw=\frac{dt}{2(w-2)} \Longrightarrow$

$$\int \frac{-(w-2)}{(w-2)^2-5)}dw=\frac{-1}{2}\int \frac{dt}{t}=\frac{-1}{2}\ln t+c=-\frac{1}{2}\ln[(w-2)^2-5]-5$$

$$\left(y+\frac{4}{5}\right)^2-4\left(y+\frac{4}{5}\right)\left(x+\frac{2}{5}\right)-\left(x+\frac{2}{5}\right)^2=c$$

$$\Rightarrow\left(\frac{5y+4}{5}\right)^2-4\left(\frac{5y+4}{5}\right)\left(\frac{5x+2}{5}\right)-\left(\frac{5x+2}{5}\right)^2=c$$

$$\Rightarrow(5y+4)^2-4(5y+4)(5x+2)-(5x+2)^2=25c$$

$$\Rightarrow(5y+4)^2-4(5y+4)(5x+2)-(5x+2)^2=c.$$

Problemas de crecimiento y decrecimiento

Ley de Enfriamiento de Newton

Isaac Newton[11], uno de nuestros grandes protagonistas en la creación de muchos resultados relacionados con el Cálculo diferencial e integral y por supuesto con las ecuaciones diferenciales, estableció una ley para el calentamiento y enfriamiento de los cuerpos. Esta ley establece que la variación de la temperatura de un cuerpo con respecto al tiempo (o la razón de cambio en el tiempo de la temperatura de un cuerpo) es proporcional a la diferencia de temperatura entre el cuerpo y el medio que lo rodea. Sea T_m la temperatura del medio ambiente, T la temperatura del cuerpo, $\frac{dT}{dt}$ la razón de cambio en el tiempo de la temperatura del cuerpo, entonces la ley de enfriamiento de Newton se puede escribir como:

$$\frac{dT}{dt}=-k(T-T_m)$$

La constante de proporcionalidad k, se toma como positiva (Figura 1); al hacerlo, se requiere el signo menos en esta ley para hacer que la razón de cambio $\frac{dT}{dt}$ sea negativa en un proceso de enfriamiento cuando T es mayor que T_m y positiva en un proceso de calentamiento cuando T es menor que T_m.

[11] En la línea del tiempo de este módulo encuentra ideas importantes sobre Newton y otros científicos relacionadas con el desarrollo histórico de las ecuaciones diferenciales.

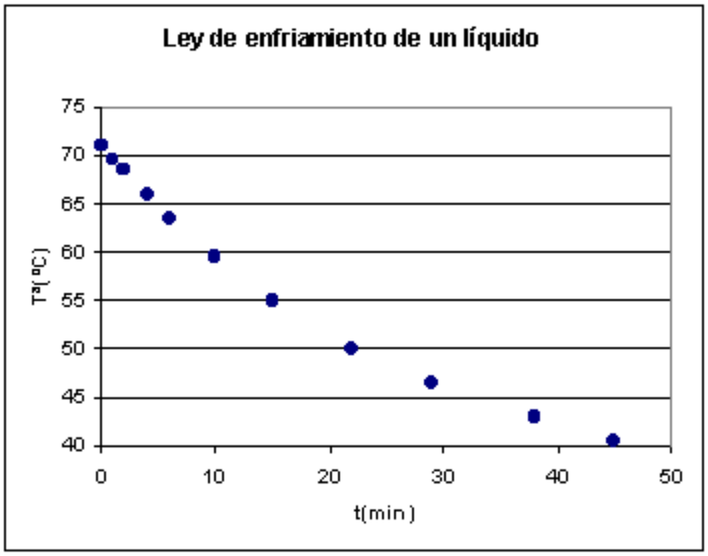

Figura 1. Ley de Enfriamiento de un líquido

Fuente: https://majocosno.wordpress.com/about/calor/transferencia-de-calor/ley-del-enfriamiento/

Ejemplo 11. Ley de Enfriamiento de Newton.

Se coloca una barra de metal a 90 $^{\circ}C$ en un laboratorio con una temperatura constante de 18 $^{\circ}C$. Si después de un cuarto de hora la temperatura de la barra de metal disminuye a 40 $^{\circ}C$, determine:

El tiempo requerido para que la barra alcance una temperatura de 20 $^{\circ}C$.

La temperatura de la barra transcurridos 10 minutos.

Primero resolvamos la ecuación para T, de la siguiente manera:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_m) \Longrightarrow \frac{dT}{(T - T_m)} = -kdt$$
$$\Longrightarrow \int \frac{dT}{(T - T_m)} = \int -kdt \Longrightarrow \ln T - T_m = -kt + c \Longrightarrow e^{\ln(T - T_m)}$$
$$= e^{-kt+c} \Longrightarrow T - T_m = e^{-kt}e^{c} \Longrightarrow T - T_m = ce^{-kt}$$

De donde T es la solución buscada para la temperatura del cuerpo después de cierto tiempo t:

$$T = T_m + ce^{-kt}$$

Con los datos del problema, la temperatura del medio ambiente es la temperatura del laboratorio, es decir, $T_m = 18\,^{\circ}C$. La temperatura del cuerpo en el instante inicial, cuando $t = 0$ minutos, corresponde a $T = 90\,^{\circ}C$.

Advierta que en la ecuación $T = T_m + ce^{-kt}$ aparecen dos constantes por descubrir, c y k. Entonces usemos las condiciones iniciales del problema para encontrarlas:

Busquemos c . Como $T_m = 18$ y $t = 0$ cuando $T = 90$, entonces $T = T_m + ce^{-kt}$ nos queda:

$90 = 18 + ce^0 \Longrightarrow c = 72.$

Busquemos k. Con el valor de $c = 72$, volvamos a la ecuación $T = T_m + ce^{-kt}$ que nos queda $T = 18 + 72e^{-kt}$. Sabemos que $t = 15$ cuando $T = 40$, entonces:

$$T = 18 + 72e^{-kt} \Longrightarrow 40 = 18 + 72e^{-k(15)} \Longrightarrow \frac{22}{72} = e^{-15k} \Longrightarrow$$

$\ln\frac{22}{72} = \ln e^{-15k} \Longrightarrow k = \frac{\ln\frac{22}{72}}{-15}$ =0,0790, de donde:

$T = 18 + 72e^{-0{,}0790t}$.

Ya podemos calcular tiempo requerido para que la barra alcance una temperatura de 20 $^{\circ}C$, es decir, despejar la variable t para el valor $T = 20$. Nos queda:

$T = 18 + 72e^{-0{,}0790t} \Longrightarrow 20 = 18 + 72e^{-0{,}0790t} \Longrightarrow e^{-0{,}0790t} = \dfrac{20-18}{72} \Longrightarrow$

$\ln e^{-0{,}0790t} = \ln\frac{2}{72} \Longrightarrow -0{,}0790t = \ln\frac{2}{72} \Longrightarrow t = \frac{-3{,}5835}{-0{,}0790} = 45{,}3.$

Para que la barra alcance una temperatura de 20 $^{\circ}C$ deben transcurrir aproximadamente 45 minutos.

Busquemos ahora la temperatura de la barra transcurridos 10 minutos:

$T = 18 + 72e^{-0{,}0790t} \Longrightarrow T = 18 + 72e^{-0{,}0790(10)} \Longrightarrow T = 18 + 32{,}7 \Longrightarrow T = 50{,}7$

Después de 10 minutos la barra alcanza una temperatura de $50{,}7\,^{\circ}C$.

Crecimiento poblacional

En las ciencias naturales (biología) interesa mucho la forma como una población de especies crece con respecto al tiempo. Se sabe que en períodos de tiempo relativamente cortos la velocidad con que crecen algunas poblaciones como animales muy pequeños o bacterias, es proporcional a la población que se tenga en algún momento del presente. Supongamos que $P(t)$ es una población de bacterias en el tiempo t y que, como ya se dijo, la población está creciendo de manera constante a un ritmo proporcional a la población presente en ese momento, entonces interesa establecer como está relacionado P con t, o en otras palabras, determinar P como función de x. Volviendo al concepto de razón de cambio, como el ritmo de crecimiento de P es proporcional a P , entonces podemos escribir esta variación en términos de la ecuación diferencial.

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

Resolviendo para P, tenemos $\frac{dP}{dt} = kP \Longrightarrow \frac{dP}{P} = kdt \Longrightarrow \ln P = kt + c$. Para determinar la constante de integración c, es necesario establecer las condiciones iniciales, es decir, para una población en determinado instante que tomamos como inicial, $P = P_0$ cuando $t = 0$.

Volviendo al resultado preliminar $\ln P = kt + c \Longrightarrow \ln P_0 = k(0) + c \Longrightarrow c = \ln P_0$. Entonces, $\ln P = kt + c \Longrightarrow \ln P = kt + \ln P_0 \Longrightarrow e^{\ln P} = e^{(kt+\ln P_0)} \Longrightarrow P = e^{kt} \cdot e^{\ln P_0}$. En esta última expresión el término $e^{\ln P_0}$ es una nueva constante P_0, y llegamos a

$P = P_0 e^{kt}$.

El propósito de establecer esta dependencia de P con respecto a t es muy útil ya que nos sirve para predecir la población en cualquier instante de tiempo t o bien para determinar qué tiempo puede demorarse alcanzar cierta población (figura 2).

Aunque en la introducción del problema actual consideramos el contexto de animales muy pequeños y bacterias, supongamos, sin molestar a la raza humana, que aplica para nosotros. En este sentido, la tasa de crecimiento es el promedio porcentual anual del cambio en el número de habitantes, como resultado de un superávit (o déficit) de nacimientos y muertes, y el balance de los migrantes que entran y salen de un país.

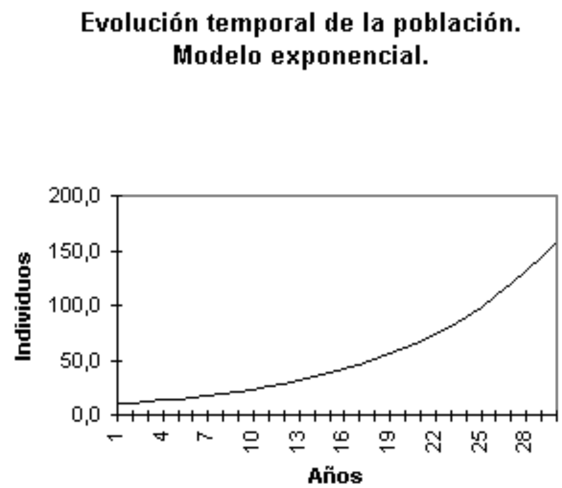

Figura 2. Evolución temporal de la población

Fuente: http://tarwi.lamolina.edu.pe/~acg/Capitulo%20III%20Ecologia.htm

Ejemplo 12. Para 2014 en Colombia[12] la población está creciendo a una tasa media aproximada de 1,07 por 100 anual, es decir, $k = 0{,}0107$. Entonces la expresión $P = P_0 e^{kt}$ aplicada a la tasa de crecimiento de la población colombiana en 2014 se transforma en:

$P = P_0 e^{0{,}0107t}$.

Si por ejemplo nos queremos preguntar cuánto tiempo debe transcurrir para que la población colombiana se duplique, entonces:

$P = 2P_0 \implies 2P_0 = P_0 e^{0{,}0107t} \implies 2 = e^{0{,}0107t} \implies \ln 2 = \ln e^{0{,}0107t} \implies \ln 2 = 0{,}0107t \implies t = \frac{\ln 2}{0{,}0107} \implies t = 64{,}7$ años.

Este resultado nos dice que si en la actualidad tenemos aproximadamente 48000000 de habitantes en Colombia, entonces deben pasar aproximadamente 65 años para que esta cifra se duplique.

[12] http://www.indexmundi.com/es/colombia/tasa_de_crecimiento.html, consultado [23082015]

2

Unidad 2

Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden (parte I)

Ecuaciones Diferenciales

Autor: Luis Guillermo Caro Pineda

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina
MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Introducción

Continuamos con la revisión de las ecuaciones diferenciales de primer orden. Estudiaremos los métodos de solución de las ecuaciones diferenciales exactas lo que nos obliga a revisar el concepto de diferencial total y de derivada parcial, y veremos el proceso para determinar un factor integrante cuando una ecuación diferencial de primer orden no cumple las condiciones para ser exacta. La cartilla culmina con una aplicación de las ecuaciones diferenciales: la desintegración de sustancias radiactivas.

Recomendaciones metodológicas

La presente cartilla, Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden (parte I), se desarrolla a través de explicaciones de los fundamentos teóricos y la solución de ejemplos que ilustran los procedimientos para resolver ecuaciones diferenciales exactas y encontrar un factor integrante para las que no lo son.

Para garantizar su éxito en la revisión y estudio de los temas seleccionados, usted debe realizar una revisión exhaustiva de la cartilla, las lecturas complementarias y los recursos audiovisuales, ya que además de ubicar las definiciones pertinentes, encontrará explicaciones desde varios autores y ejercicios resueltos que despejarán dudas. El desarrollo del módulo exige disciplina y trabajo permanente, usted debe acostumbrarse a la revisión frecuente de los recursos y a la realización de las actividades en los tiempos señalados. Se convierte en requisito indispensable el uso de un programa de Cálculo simbólico como Geogebra, Derive, Matlab, etc.

Además de revisar los textos propuestos en la bibliografía, usted debe estudiar de manera permanente los libros digitales *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado, novena edición,* de Dennis Zill y *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas* de George Simmons; que se encuentran en pdf en la sección de recursos para el aprendizaje.

Del libro de Simmons se resuelven muchos ejercicios propuestos de las secciones finales de los capítulos seleccionados.

Desarrollo temático

Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden (parte I)

Ecuaciones diferenciales exactas

Para iniciar el estudio de las ecuaciones diferenciales exactas de primer orden debemos recordar el concepto de *diferencial total* visto en cursos anteriores.

Diferencial total y derivadas parciales

Si se tiene una función $z = f(x, y)$, la diferencial total de z, dz, es la suma de las funciones, $f_x dx$ y $f_y dy$, donde f_x y f_y son las derivadas parciales de $f(x, y)$.

$dz = d(f(x, y)) = f_x dx + f_y dy.$

En la definición expuesta se supone por supuesto que las derivadas parciales deben ser continuas en algún intervalo de $\mathbb{R}^3$.

Como usted recordará, encontrar las derivadas parciales de una función $f(x, y)$ exige que las variables x, y se examinen como variables independientes entre sí; es decir, al derivar $f(x, y)$ parcialmente con respecto a la variable x, la variable y es constante y así se asumirá siempre que aparezca en los cálculos. Así mismo, al derivar $f(x, y)$ parcialmente con respecto a la variable y, la variable x es constante.

En sus cursos anteriores de Cálculo, usted resolvió derivadas parciales. Sin embargo, es prudente calcular algunas derivadas parciales para recordar y extender las ideas previas.

Ejemplo 1. Determinar la diferencial total de la función:

$z = f(x, y) = 5x^4y^2 - 4xy^3 + 8.$

Calculemos primero la derivada parcial de $f(x, y)$ con respecto a la variable independiente x:

$\frac{\partial z}{\partial x} = 20x^3y^2 - 4y^3,$

y ahora calculemos la derivada parcial de $f(x, y)$ con respecto a la variable independiente y:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 10x^4y - 12xy^2$$

Entonces el resultado de la diferencial total de la función:

$z = f(x, y) = 5x^4y^2 - 4xy^3 + 8$ es

$dz = d(f(x, y)) = f_x dx + f_y dy = (20x^3y^2 - 4y^3)dx + (10x^4y - 12xy^2)dy.$

Advierta que la notación para derivadas parciales utiliza la notación con los símbolos $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Ejemplo 2. Determinar la diferencial total de la función:

$$z = f(x, y) = \frac{x^3 - 2y^3 + y^2}{x^2+y^2}$$

Debemos usar inicialmente la regla para un cociente:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$$

Calculemos primero la derivada parcial de $f(x, y)$ con respecto a la variable independiente x:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(x^2+y^2)\frac{\partial(x^3-2y^3+y^2)}{\partial x} - (x^3 - 2y^3 + y^2)\frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial x}}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(x^2+y^2)(3x^2) - (x^3 - 2y^3 + y^2)(2x)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3x^4+3x^2y^2 - 2x^4 + 2xy^3 + 2xy^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x^4+3x^2y^2 + 2xy^3 + 2xy^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

Y ahora calculemos la derivada parcial de $f(x, y)$ con respecto a la variable independiente y:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{(x^2+y^2)\frac{\partial(x^3-2y^3+y^2)}{\partial y} - (x^3 - 2y^3 + y^2)\frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial y}}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{(x^2+y^2)(-6y^2 + 2y) - (x^3 - 2y^3 + y^2)(2y)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-6x^2y^2 + 2x^2y - 6y^4 + 2y^3 - 2x^3y + 2y^4 - 2y^3}{(x^2+y^2)^2}$$
$$= \frac{-4y^4 - 6x^2y^2 + 2x^2y - 2x^3y}{(x^2+y^2)^2}$$

Y el resultado de la diferencial total de la función:

$$z = f(x,y) = \frac{x^3 - 2y^3 + y^2}{x^2+y^2}$$

es

$$dz = \left(\frac{x^4+3x^2y^2 + 2xy^3 + 2xy^2)}{(x^2+y^2)^2}\right)dx + \left(\frac{-4y^4 - 6x^2y^2 + 2x^2y - 2x^3y}{(x^2+y^2)^2}\right)dy$$

Solución de ecuaciones diferenciales exactas

Con las definiciones de diferencial total y el repaso del procedimiento para calcular derivadas parciales con respecto a las variables independientes x y y, ya podemos resolver otro tipo de ecuaciones diferenciales que se presentan en la lista de ecuaciones diferenciales de primer orden, las ecuaciones diferenciales exactas.

Una ecuación diferencial de la forma:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

es una ecuación diferencial exacta si:

$M(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} = f_x$ y $N(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y} = f_y$.

En esta definición suponemos que $M(x,y)$ y $N(x,y)$ son funciones continuas y por lo menos para cada una de ellas se pueden determinar sus primeras derivadas parciales (que deben ser continuas) en algún intervalo de $\mathbb{R}^2$.

Resolver una ecuación diferencial exacta consiste en encontrar una función $f(x,y)$ de tal manera que su diferencial total sea *exactamente* la ecuación diferencial dada.

Para hacerlo, primero escribamos por simplicidad $M = \frac{\partial f}{\partial x}$ y $N = \frac{\partial f}{\partial y}$. Derivemos ahora a M

con respecto a y, y derivemos a N con respecto a x:

$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, y $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

Como suponemos que las derivadas parciales son continuas podemos concluir que:

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, con lo que $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.

Entonces para que la ecuación diferencial:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

sea exacta se debe verificar que $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.

Antes de encontrar un método para resolver ecuaciones diferenciales exactas, verifiquemos a través de los dos ejemplos siguientes, la condición de exactitud.

Ejemplo 3. Verificar que la ecuación diferencial $xdy + ydx = x\cos x\, dx$ es exacta[1].

Inicialmente verificamos que la ecuación es de la forma:

$Mdx + Ndy = 0.$

$xdy + ydx = x\cos x\, dx \implies xdy + ydx - x\cos x\, dx = 0 \implies$

$$(y - x\cos x)dx + xdy = 0$$

con $M = \ y - x\cos x$, y $N = x$.

La condición de exactitud exige que $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial(y - x\cos x)}{\partial y} = 1$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial(x)}{\partial x} = 1$$

Luego $xdy + ydx = x\cos x\, dx$ es exacta.

Ejemplo 4. Verificar que la ecuación diferencial:

$(e^x - 3x^2y^2)y' + ye^x = 2xy^3$ es exacta[2].

[1] Ejercicio número 8 de la sección de ejercicios propuestos del capítulo 1 del libro Ecuaciones diferenciales de Simmons, p.79.

Inicialmente verificamos que la ecuación es de la forma:

$Mdx + Ndy = 0.$

$$(e^x - 3x^2y^2)y' + ye^x = 2xy^3 \Longrightarrow (e^x - 3x^2y^2)\frac{dy}{dx} = 2xy^3 - ye^x \Longrightarrow$$

$$(e^x - 3x^2y^2)dy = -(ye^x - 2xy^3)dx \Longrightarrow (ye^x - 2xy^3)dx + (e^x - 3x^2y^2)dy = 0$$

Tenemos entonces que $M = ye^x - 2xy^3$ y $N = e^x - 3x^2y^2$.

La condición de exactitud exige que $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial (ye^x - 2xy^3)}{\partial y} = e^x - 6xy^2$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial (e^x - 3x^2y^2)}{\partial x} = e^x - 6xy^2$$

Teniendo claridad en la identificación de una ecuación diferencial exacta, a continuación se expone el procedimiento para su resolución.

Método de solución de una ecuación diferencial exacta de primer orden

Paso 1. Identificar que efectivamente la ecuación diferencial es exacta, es decir verificar que $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.

Paso 2. Debemos encontrar una función f tal que $\frac{\partial f}{\partial x} = M$. sabemos que esto se logra integrando la función M con respecto a x, es decir, integrar parcialmente $M(x, y)$ con respecto a x.

$f = \int Mdx + g(y).$

Paso 3. Derivamos parcialmente f con respecto a y, es decir,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \int Mdx}{\partial y} + \frac{dg}{dy}$$

Paso 4. Igualamos $\frac{\partial f}{\partial y} = N$.

Paso 5. Integrar $\frac{dg}{dy}$ para determinar la función g, es decir, $g = \int \frac{dg}{dy}$.

[2] Ejercicio número 10 de la sección de ejercicios propuestos del capítulo 1 del libro Ecuaciones diferenciales de Simmons, p.79.

La solución requerida es:

$\int Mdx + g(y) = c.$

Ejemplo 5. Volvamos al ejemplo 4. Allí se propuso la ecuación diferencial

$(e^x - 3x^2y^2)y' + ye^x = 2xy^3$. Esta ecuación se llevó a la forma

$(ye^x - 2xy^3)dx + (e^x - 3x^2y^2)dy = 0$ y se verificó el **paso 1**, es decir, que es exacta.

Paso 2. Debemos encontrar una función f tal que $\frac{\partial f}{\partial x} = M$. sabemos que esto se logra integrando la función M con respecto a x, es decir, integrar parcialmente $M(x, y)$ con respecto a x:

$f = \int Mdx + g(y)$. Entonces:

$f = \int Mdx + g(y) = \int (ye^x - 2xy^3)dx + g(y) = \int ye^x dx - \int 2xy^3\, dx + g(y) \Longrightarrow$

$f = ye^x - 2y^3 + g(y).$

Paso 3. Derivamos parcialmente f con respecto a y, es decir,

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \int Mdx}{\partial y} + \frac{dg}{dy}.$

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial (ye^x - 2y^3)}{\partial y} + \frac{dg}{dy} = e^x - 6y^2 + \frac{dg}{dy}.$

Paso 4. Igualamos $\frac{\partial f}{\partial y} = N.$

$e^x - 6y^2 + \frac{dg}{dy} = e^x - 3x^2y^2 \Longrightarrow \frac{dg}{dy} = 6y^2 - 3x^2y^2.$

Paso 5. Integrar $\frac{dg}{dy}$ para determinar la función g, es decir, $g = \int \frac{dg}{dy}.$

$\int \frac{dg}{dy} = g = \int (6y^2 - 3x^2y^2)dy = \int 6y^2dy - \int 3x^2y^2dy = 2y^3 - x^2y^3.$

Entonces la solución es:

$\int Mdx + g(y) = c.$

Es decir,

$ye^x - 2y^3 + 2y^3 - x^2y^3 = c.$

$ye^x - x^2y^3 = c.$

Como se pude sospechar es necesario saber si la respuesta obtenida es correcta. Por supuesto que podemos comprobarlo, atendiendo el teorema fundamental del Cálculo, es decir, derivando la solución $ye^x - x^2y^3 = c$, obtenemos la ecuación diferencial propuesta como lo estudiamos en la cartilla 1.

Advierta que para verificar la solución encontrada, debemos nuevamente considerar que la variable dependiente es y y la variable independiente es x.

Comprobación. Verifiquemos entonces que la solución de la ecuación diferencial exacta:

$$(ye^x - 2xy^3\ )dx + \ (e^x - 3x^2y^2)dy = 0$$

Es:

$ye^x - x^2y^3 = c.$

Como la solución tiene dos términos vamos a derivar cada término por aparte y luego los ubicamos en la solución final:

$(ye^x)' = ye^x + y'e^x.$

$(-x^2y^3)' = -x^2 3y^2y' - 2xy^3.$

Entonces la solución nos queda:

$ye^x + y'e^x - x^2 3y^2y' - 2xy^3 = 0 \ \Longrightarrow (e^x - 3x^2y^2)y' + (ye^x - 2xy^3) = 0.$

Es conveniente escribir y' de la forma $\frac{\partial y}{\partial x}$, lo que convierte la expresión anterior en

$(e^x - 3x^2y^2)\frac{dy}{dx} + (ye^x - 2xy^3) = 0.$

Multiplicando por dx cada término de la igualdad llegamos a la ecuación diferencial exacta propuesta

$(ye^x - 2xy^3\ )dx + \ (e^x - 3x^2y^2)dy = 0.$

Ejemplo 6. Volvamos al ejemplo 3. Allí se propuso la ecuación diferencial

$(y - x\cos x)dx + xdy = 0$ y se verificó el paso 1, es decir, que es exacta.

A continuación detallaremos el mismo procedimiento descrito en el ejemplo 5 pero empezando con la integral de la función N con respecto a y, es decir, integrar parcialmente $N(x, y)$ con respecto a y. El método previsto cambia las variables de integración y derivación respectivamente, pero evidentemente nos lleva al mismo resultado.

Paso 2. Debemos encontrar una función f tal que $\frac{\partial f}{\partial y} = N$. Sabemos que esto se logra integrando la función N con respecto a y, es decir, integrar parcialmente $N(x, y)$ con respecto a y:

$f = \int N dy + g(x)$.

Entonces $f = \int N dy + g(x) = \int x dy + g(x) = xy + g(x)$.

Paso 3. Derivamos parcialmente f con respecto a x, es decir, $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \int N dy}{\partial x} + \frac{dg}{dx}$.

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial (xy)}{\partial x} + \frac{dg}{dx} = y + \frac{dg}{dx}$.

Paso 4. Igualamos $\frac{\partial f}{\partial x} = M$.

$y + \frac{dg}{dx} = y - x \cos x \implies \frac{dg}{dx} = -x \cos x$.

Paso 5. Integrar $\frac{dg}{dx}$ para determinar la función g, es decir, $g = \int \frac{dg}{dx}$.

$g = \int -x \cos x \, dx$[3] $= -x \sin x - \cos x$.

Entonces la solución es:

$\int N dy + g(x) = c$.

Es decir,

$xy - x \sin x - \cos x = c$.

Comprobación. Debemos comprobar que la solución de la ecuación diferencial exacta

$$(y - x \cos x)dx + xdy = 0$$

---

[3] Quizá sea conveniente evaluar el resultado de la integral $\int -x \cos x \, dx = -x \sin x - \cos x$, que se resuelve por el método llamado integración por partes.

$$\int uv' dx = uv - \int u' v dx.$$

Hagamos $u = x \implies du = dx$, $dv = \cos x dx \implies v = \int \cos x dx = \sin x$. Entonces

$\int -x \cos x \, dx = x \sin x - \int \sin x \, dx = x \sin x + \cos x$.

es

$xy - x\sin x - \cos x = c.$

Como la solución tiene tres términos vamos a derivar cada término por aparte y luego los ubicamos en la solución final:

$(xy)' = y + xy'.$

$(x\sin x)' = x\cos x + \sin x.$

$(\cos x)' = -\sin x.$

Entonces la solución completa nos queda

$$y + xy' - x\cos x - \sin x + \sin x = 0$$
$$\Longrightarrow\ y - x\cos x + xy' = 0\ \Longrightarrow y - x\cos x + x\frac{dy}{dx} = 0$$

Es decir, $(y - x\cos x)dx + xdy = 0$, que era el resultado por verificar.

Ejemplo 7. Resolver la ecuación diferencial:[4]

$$(\frac{3y^2}{x^2+3x})dx + (2y\ln\frac{5x}{x+3} + 3\sin y)dy = 0$$

Paso 1. Verifiquemos que sea exacta:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial\left(\frac{3y^2}{x^2+3x}\right)}{\partial y} = \frac{3}{x^2+3x}2y$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial(2y\ln\frac{5x}{x+3} + 3\sin y)}{\partial x} &= 2y\frac{(x+3)}{5x}\cdot\frac{(x+3)(5)-(5x)(1)}{(x+3)^2}\\ &= 2y\frac{1}{5x}\cdot\frac{5x+15-5x}{(x+3)} = 2y\frac{1}{5x}\cdot\frac{5x+15-5x}{(x+3)^2} = 2y\frac{15}{5x(x+3)}\\ &= \frac{3}{x^2+3x}2y\end{aligned}$$

Paso 2. Debemos encontrar una función f tal que $\frac{\partial f}{\partial y} = N\ \Longrightarrow f = \int Ndy + g(x).$

[4] Ejercicio número 32 de la sección de ejercicios propuestos del capítulo 1 del libro Ecuaciones diferenciales de Simmons, p.79.

$$f = \int (2y \ln \frac{5x}{x+3} + 3 \sin y) dy + g(x) = \ln \frac{5x}{x+3} \int 2y dy + 3 \int \sin y dy + g(x)$$

$$f = y^2 \ln(\frac{5x}{x+3}) - 3 \cos y + g(x)$$

Paso 3. Derivamos parcialmente f con respecto a x,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \left(y^2 \ln(\frac{5x}{x+3}) - 3 \cos y\right)}{\partial x} + \frac{dg}{dx} = y^2 \frac{(x+3)}{5x} \cdot \frac{(x+3)(5) - (5x)(1)}{(x+3)^2} + \frac{dg}{dx} = \frac{3y^2}{x^2+3x} + \frac{dg}{dx}.$$

Paso 4. Igualamos $\frac{\partial f}{\partial x} = M$.

$$\frac{3y^2}{x^2+3x} + \frac{dg}{dx} = \frac{3y^2}{x^2+3x} \implies \frac{dg}{dx} = 0 \implies g(x) = 0.$$

Entonces la solución es

$$y^2 \ln(\frac{5x}{x+3}) - 3 \cos y = c$$

Comprobación. Derivemos en la misma la línea la solución encontrada:

$$[y^2 \ln(\frac{5x}{x+3}) - 3 \cos y = c]' = y^2 \frac{3}{x^2+3x} + 2yy' \ln(\frac{5x}{x+3}) + 3 \sin(y) \cdot y' = 0$$

$$= \frac{3y^2}{x^2+3x} + \left[\left(2y \ln(\frac{5x}{x+3}) + 3 \sin(y)\right)\right] y' \implies (\frac{3y^2}{x^2+3x}) dx + (2y \ln \frac{5x}{x+3} + 3 \sin y) dy = 0.$$

Factor integrante

En muy pocas ocasiones la ecuación diferencial de la forma $Mdx + Ndy = 0$, es exacta, ya que la exactitud que supone requiere un adecuado cálculo en que se debe presentar dicha ecuación; entonces usted advertirá sobre la aparente necedad de querer resolverlas. Sin embargo, en la presente sección justificaremos el esfuerzo causado.

Si la ecuación diferencial $Mdx + Ndy = 0$ no es exacta, en algunas ocasiones es posible transformarla en una ecuación que sí lo sea, buscando una función $H(x, y)$ que al ser multiplicada por dicha ecuación, la convierta en exacta. Esto es:

$H(x, y)[Mdx + Ndy] = 0$ es exacta.

A la función $H(x, y)$ se le llama ***factor de integración*** de la ecuación $Mdx + Ndy = 0$.

Existen tres formas posibles de encontrar la función $H(x, y)$:

La función $H(x, y)$ solo depende de la variable x.

Si $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = f(x)$, entonces el factor integrante

$H(x, y) = e^{\int f(x)dx}$

La función $H(x, y)$ solo depende de la variable y.

Si $\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = g(y)$, entonces el factor integrante

$H(x, y) = e^{\int g(y)dy}$

Si $M = yf(xy)$ y $N = xg(xy) \implies H(x, y) = \frac{1}{xM - yN}$.

Como lo hemos advertido, la búsqueda de un factor integrante puede no tener éxito, y no queda otra alternativa que buscar soluciones en otros métodos. Por otra parte, si la búsqueda del factor integrante, $H(x, y)$ tiene éxito, solo nos queda resolverla por los métodos vistos en la sección anterior para ecuaciones diferenciales exactas.

En el ejemplo siguiente, nos presentan una ecuación diferencial que no es exacta, pero que se puede transformar en exacta mediante la condición 2, es decir, la función $H(x, y)$ solo depende de la variable y.

Ejemplo 8. Resolver la ecuación diferencial:[5]

$(1 - xy)y' = y^2$.

Esta ecuación diferencial no es exacta, ya que aunque podemos escribirla de la forma:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

Es decir, $y^2dx + (xy - 1)dy = 0$. Las derivadas parciales correspondientes no son iguales como se verifica enseguida:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial(\, y^2)}{\partial y} = 2y$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial(xy - 1)}{\partial x} = y$$

[5] Ejercicio número 2 de la sección de **ejercicios propuestos** del capítulo 1 del libro Ecuaciones diferenciales de Simmons, p.79.

Volviendo a la condición 2, como la ecuación no es exacta, procedemos a encontrar un factor integrante de la forma:

Si $\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)=g(y)$, entonces el factor integrante es:

$H(x,y)=e^{\int g(y)dy}$

Busquémoslo:

$=\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)=\frac{1}{y^2}(y-2y)=\frac{-y}{y^2}\Longrightarrow H(x,y)=g(y)=e^{-\int\frac{dy}{y}}=\ e^{\ln y^{-1}}=\ y^{-1}=\frac{1}{y}.$

El factor integrante es entonces $g(y)=\frac{1}{y}$, y éste multiplica a cada uno de los términos de la ecuación $y^2dx+(xy-1)dy=0$. Así:

$y^2dx+(xy-1)dy=0\ \Longrightarrow\frac{1}{y}y^2dx+\frac{1}{y}(xy-1)dy=ydx+\left(x-\frac{1}{y}\right)dy=0.$
Verifiquemos que la nueva ecuación $ydx+\left(x-\frac{1}{y}\right)dy=0$ es exacta con $M=y$, y N=$\left(x-\frac{1}{y}\right)\Longrightarrow$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial(y)}{\partial y}=1\,,\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial(x-\frac{1}{y})}{\partial x}=1.$$

Para resolver $ydx+\left(x-\frac{1}{y}\right)dy=0$ sigamos los **5 pasos** en la misma línea:

Encontrar una función f tal que $\frac{\partial f}{\partial x}=M\ \Longrightarrow f\ =\int Mdx+g(y)\Longrightarrow f\ =\int ydx+g(y)\Longrightarrow$ $f\ =xy+g(y)$. Derivar parcialmente f con respecto a y, es decir, $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial\int Mdx}{\partial y}+\frac{dg}{dy}\ \Longrightarrow$ $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial(xy)}{\partial y}+\frac{dg}{dy}\ \Longrightarrow\frac{\partial f}{\partial y}=x+\frac{dg}{dy}$. Igualar $\frac{\partial f}{\partial y}=N\Longrightarrow x+\frac{dg}{dy}=x-\frac{1}{y}\ \Longrightarrow\ \frac{dg}{dy}=$ $-\frac{1}{y}$. Integrar $\frac{dg}{dy}$ para determinar la función $g\Longrightarrow g\ =\ -\int\frac{dy}{y}=\ -\ln y=\ln y^{-1}=\ln\frac{1}{y}$.

Y la solución es

$\int Mdx+g(y)=c.$

Es decir,

$$c=xy+\ln\frac{1}{y}$$

Comprobación. Derivemos en la misma la línea la solución encontrada[6] $c = xy + \ln\frac{1}{y}$:

$$0 = xy' + y + \frac{1}{\frac{1}{y}} \cdot \frac{-y'}{y^2} = xy' + y - \frac{y'}{y} = \left(x - \frac{1}{y}\right)y' + y \Rightarrow ydx + \left(x - \frac{1}{y}\right)dy = 0.$$

Ejemplo 9. Resolver la ecuación diferencial[7] $e^x(1+x)dx = (xe^x - ye^y)dy$. Organizando los términos de la forma $Mdx + Ndy = 0 \Rightarrow e^x(1+x)dx + (ye^y - xe^x)dy = 0$, vemos que no es exacta porque $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial(e^x(1+x))}{\partial y} = 0 \neq \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial(ye^y - xe^x)}{\partial x} = -e^x(1+x)$.
Buscamos el factor integrante que debe ser:

$$M(y) = ce^{\int \frac{w}{-M}dy}, \text{ con } w = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow w = \frac{\partial(e^x(1+x))}{\partial y} - \frac{\partial(ye^y - xe^x)}{\partial x} = e^x(1+x) \Rightarrow$$

$$M(y) = e^{\int \frac{e^x(1+x)}{-e^x(1+x)}dy} = e^{-\int dy} = e^{-y} = \frac{1}{e^y}.$$

El factor integrante es entonces $M(y) = \frac{1}{y}$, y éste multiplica a cada uno de los términos de la ecuación $e^x(1+x)dx + (ye^y - xe^x)dy = 0$. Así:

$$\frac{1}{e^y}e^x(1+x)dx + \frac{1}{e^y}(ye^y - xe^x)dy = 0 \Rightarrow \frac{e^x}{e^y}(1+x)dx + \left(y - \frac{xe^x}{e^y}\right)dy = 0 \Rightarrow$$

$e^{x-y}(1+x)dx + (y - xe^{x-y})dy = 0$. Verifique que efectivamente es exacta ya que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial\left(e^{x-y}(1+x)\right)}{\partial y} = -(1+x)e^{x-y} = \frac{\partial(-xe^{x-y})}{\partial x}.$$

Para resolver[8] $e^{x-y}(1+x)dx + (y - xe^{x-y})dy = 0$ sigamos los **5 pasos** en la misma línea:

Encontrar una función f tal que $\frac{\partial f}{\partial y} = N \Rightarrow f = \int Ndy + g(x) \Rightarrow$

$$f = \int(y - xe^{x-y})dy + g(x) = \int ydy - \int xe^{x-y}dy + g(x) \Rightarrow f = \frac{y^2}{2} + xe^{x-y} + g(x).$$

Derivar parcialmente f con respecto a x, $\frac{\partial f}{\partial x} = -(1+x)e^{x-y} + \frac{dg}{dx}$. Igualar $\frac{\partial f}{\partial x} = M \Rightarrow$

---

[6] En la comprobación aparece la derivada de un logaritmo: $(\ln u)' = \frac{1}{u}u'$.

[7] Ejercicio número 25 de la sección de **ejercicios propuestos** del capítulo 1 del libro Ecuaciones diferenciales de Simmons, p.79.

[8] Miremos la solución de $\int xe^{x-y}dy$. Sea $u = x - y \Rightarrow du = -dy \Rightarrow \int xe^{x-y}dy = -x\int e^u\,du = -xe^u = -xe^{x-y}$.

$$= -(1+x)e^{x-y} + \frac{dg}{dx} = e^{x-y}(1+x) \Longrightarrow \frac{dg}{dx} = 0 \ \Longrightarrow g(x) = 0.$$

Y la solución es

$\int N dy + g(x) = c.$

Es decir,

$$c = y^2 + 2xe^{x-y}$$

Comprobación

Derivemos en la misma la línea la solución encontrada $c = y^2 + 2xe^{x-y}$:

$$0 = 2yy' + 2[x(e^{x-y}(1-y') + e^{x-y}] \Longrightarrow 0 = y'(y - xe^{x-y}) + (1+x)e^{x-y} \ \Longrightarrow$$

$e^{x-y}(1+x)dx + (y - xe^{x-y})dy = 0.$

Algunos de los factores de integración que se presentan con mayor frecuencia se muestran en la tabla 1.

Algunos factores de integración

Forma de los términos de la ecuación diferencial	Factor de integración $H(x,y)$	Diferencial exacta
$\boldsymbol{ydx - xdy}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{xdy - ydx}{x^2} = d(\frac{y}{x})$
$\boldsymbol{ydx - xdy}$	$\frac{1}{y^2}$	$\frac{xdy - ydx}{y^2} = d(\frac{x}{y})$
$\boldsymbol{ydx - xdy}$	$-\frac{1}{xy}$	$\frac{xdy - ydx}{xy} = d(\ln\frac{y}{x})$
$\boldsymbol{ydx - xdy}$	$-\frac{1}{x^2+y^2}$	$\frac{xdy - ydx}{x^2+y^2} = d(\tan^{-1}\frac{x}{y})$
$\boldsymbol{ydx + xdy}$	$\frac{1}{xy}$	$\frac{ydx + xdy}{xy} = d(\ln xy)$
$\boldsymbol{ydx + xdy}$	$\frac{1}{(xy)^n}$,$n > 1$	$\frac{ydx + xdy}{(xy)^n} = d[(\frac{-1}{(n-1)(xy)^{n-1}})]$

$\boldsymbol{ydx + xdy}$	$\frac{1}{x^2 + y^2}$	$\frac{ydy + xdx}{x^2 + y^2} = d(\frac{1}{2}\ln x^2 + y^2)$
$\boldsymbol{ydx + xdy}$	$\frac{1}{(x^2 + y^2)^n}$, $n > 1$	$\frac{ydy + xdx}{(x^2 + y^2)^n} = d[(\frac{-1}{2(n-1)(x^2 + y^2)^{n-1}})]$
$\boldsymbol{aydx - bxdy\ a, b}$ **constantes**	$x^{a-1},\ y^{b-1}$	$x^{a-1}\ y^{b-1}(aydx + bxdy) = d(x^a y^b)$

Tabla 1. Algunos factores de integración

Fuente: Propia.

Una aplicación de las ecuaciones diferenciales: desintegración de sustancias radiactivas

Como sabemos, los núcleos de los átomos son composiciones combinadas de neutrones y protones, pero por muchas razones, algunas de esas combinaciones son inestables hasta llevar a la desintegración de los átomos. Esta condición se conoce como desintegración radiactiva. La razón de cambio (o tasa de cambio) con que los núcleos de una sustancia se desintegran es proporcional al número de núcleos de la sustancia restante en cierto tiempo t. Si N es la cantidad de núcleos ya podemos sospechar (por la similitud de este modelo matemático con las aplicaciones de los ejemplos anteriores), que la relación de proporcionalidad nos queda (figura 1):

$$\frac{dN}{dt} = kN.$$

Aunque el modelo matemático para la desintegración radiactiva que acabamos de deducir es utilizado en el universo de las ciencias físicas, también se aplica en sistemas biológicos, por ejemplo para calcular cuánto puede ser la vida de un medicamento, es decir, una medida de tendencia central que nos describa su vida media. En otras palabras, el tiempo que tarda el organismo en eliminar la mitad de éste por los procesos biológicos de metabolización o excreción.

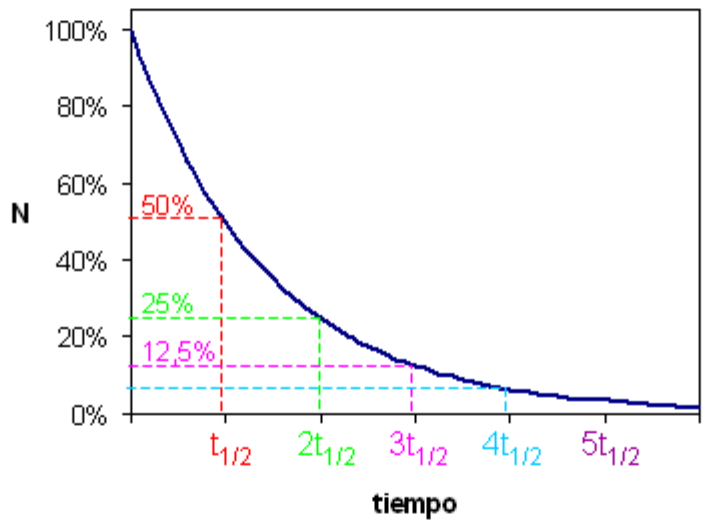

Figura 1. Desintegración de sustancias radiactivas

Fuente: Propia.

Ejemplo 10. Desintegración radiactiva[9] del PB-209, isótopo radiactivo del plomo.

El PB-209, isótopo radiactivo del plomo, se desintegra con una rapidez proporcional a la cantidad presente en algún instante y tiene una vida promedio de 3,3 horas[10]. Si inicialmente se tiene un gramo de plomo, ¿cuánto tiempo debe transcurrir para que se desintegre un 80%?

Sea $N(t)$ la cantidad de PB-209 (gramos) presente en el instante t (horas).

El modelo matemático para la desintegración radiactiva es:

$$\frac{dN}{dt} = -kN, k > 0.$$

Resolviendo para N, tenemos $\frac{dN}{dt} = -kN \Longrightarrow \frac{dN}{N} = -kdt \Longrightarrow \ln N = kt + c$. Para determinar la constante de integración c, es necesario establecer las condiciones iniciales, es decir, para una población en determinado instante que tomamos como inicial, $N = N_0$ cuando $t = 0$.

[9] Adaptación de un problema similar encontrado en http://ocw.uc3m.es/matematicas/ecuaciones-diferenciales-ordinarias/pruebas-de-evaluacion-1/EDOexamsolene09.pdf

[10] Esto significa que en cualquier momento hay el doble de isótopo que 3,3 horas después.

Volviendo al resultado preliminar $\ln N = kt + c \Longrightarrow \ln N_0 = k(0) + c \Longrightarrow c = \ln N_0$.
Entonces, $\ln N = kt + c \Longrightarrow \ln N = kt + \ln N_0 \Longrightarrow e^{\ln N} = e^{(kt+\ln N_0)} \Longrightarrow$

$P = e^{kt} \cdot e^{\ln N_0}$.

En esta última expresión el término $e^{\ln N_0}$ es una nueva constante P_0, y llegamos a

$N = N_0 e^{kt}$.

Sabemos que en el instante inicial se tiene un gramo de plomo, es decir,

$$N(0) = 1 \Longrightarrow 1 = N_0 e^{k(0)} \Longrightarrow 1 = N_0$$

Nos falta determinar k. Para hacerlo sabemos que la semivida del plomo es 3,3 horas, lo que significa que después de 3,3 horas debe quedar la mitad del PB-209 del inicio, es decir, $N(3{,}3) = 0{,}5$. Entonces:

$$\frac{1}{2} = e^{(-3{,}3)k} \Longrightarrow \ln\frac{1}{2} = \ln e^{(-3{,}3)k} \Longrightarrow \ln\frac{1}{2} = -3{,}3k \Longrightarrow k = \frac{\ln\frac{1}{2}}{-3{,}3} \Longrightarrow k = \frac{\ln 2}{3{,}3}$$

Al reemplazar los valores $1 = N_0$ y $k = \frac{\ln 2}{3{,}3}$ encontrados, la ecuación diferencial particular nos queda:

$$N = e^{-\frac{\ln 2}{3{,}3}t}$$

Con el modelo matemático encontrado, nos piden el tiempo que debe transcurrir para que se desintegre un 80%, es decir, $N(t) = 0{,}2$. Entonces

$0{,}2 = e^{-\frac{\ln 2}{3{,}3}t} \Longrightarrow \ln 0{,}2 = -\frac{\ln 2}{3{,}3}t \Longrightarrow t = 3{,}3\frac{\ln 0{,}2}{-\ln 2} \Longrightarrow t = 3{,}3\frac{\ln 20}{\ln 2} \Longrightarrow t = 14{,}26.$

Es decir, deben pasar un poco más de 14 horas para que PB-209, isótopo radiactivo del plomo se desintegre un 80%.

2

Unidad 2

Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden (parte II)

Ecuaciones Diferenciales

Autor: Luis Guillermo Caro Pineda

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina
MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Introducción

Avanzaremos en el estudio de las ecuaciones diferenciales lineales y la ecuación diferencial de Bernoulli a la vez que revisaremos una aplicación de las ecuaciones diferenciales lineales: Circuitos en serie. Luego ingresaremos al estudio de unas ecuaciones diferenciales de segundo orden que se pueden reducir a ecuaciones de primer orden ya sea por ausencia de la variable dependiente o la ausencia de la variable independiente.

Recomendaciones metodológicas

La presente cartilla, Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden (parte II), se desarrolla a través de explicaciones de los fundamentos teóricos y la solución de ejemplos que ilustran los procedimientos para resolver ecuaciones diferenciales lineales, la ecuación diferencial de Bernoulli y una parte introductoria a las ecuaciones diferenciales de segundo orden.

Para garantizar su éxito en la revisión y estudio de los temas seleccionados, usted debe realizar una revisión exhaustiva de la cartilla, las lecturas complementarias y los recursos audiovisuales, ya que además de ubicar las definiciones pertinentes, encontrará explicaciones desde varios autores y ejercicios resueltos que despejarán dudas. El desarrollo del módulo exige disciplina y trabajo permanente, usted debe acostumbrarse a la revisión frecuente de los recursos y a la realización de las actividades en los tiempos señalados. Se convierte en requisito indispensable el uso de un programa de Cálculo simbólico como Geogebra, Derive, Matlab, etc.

Además de revisar los textos propuestos en la bibliografía, usted debe estudiar de manera permanente los libros digitales *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado, novena edición,* de Dennis Zill y *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas* de George Simmons; que se encuentran en pdf en la sección de recursos para el aprendizaje.

Del libro de Simmons se resuelven muchos ejercicios propuestos de las secciones finales de los capítulos seleccionados.

Desarrollo temático

Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden (parte II)

Ecuaciones diferenciales lineales

En la cartilla 1 revisamos el concepto de una ecuación diferencial lineal.

La ecuación diferencial $F(x, y, y', \cdots, y^n) = 0$ se llama lineal si F es una función lineal de las variables $y, y', \cdots, y^n$. La forma general de una *ecuación diferencial lineal* de orden n es:

$$\boldsymbol{a_n(x)y^n + \ a_{n-1}(x)y^{n-1} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = h(x)}.$$

Estas se caracterizan porque son de grado 1 en la variable dependiente $\boldsymbol{y}$ y en todas sus derivadas, y todos los coeficientes

$$\boldsymbol{a_n(x), a_{n-1}(x), a_1(x), a_0(x)}$$

sólo dependen de $\boldsymbol{x}$.

Si la función $f(x, y)$ se puede escribir como $f(x, y) = -P(x)y + Q(x)$, entonces $f(x, y)$ es lineal.

En general, las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden se pueden escribir como:

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

Debe advertir que los coeficientes, $P(x)$ y $Q(x)$ solo dependen de la variable x (o en su defecto funciones constantes).

La forma más sencilla de resolver una ecuación diferencial lineal de primer orden de la forma $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$, se basa en la solución de la derivada del producto de las funciones $e^{\int Pdx}$ y y:

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\int Pdx}.y\right) = e^{\int Pdx}\frac{dy}{dx} + yPe^{\int Pdx} = e^{\int Pdx}(\frac{dy}{dx} + Py)$$

Multiplicando $\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$ por $e^{\int Pdx}$ se obtiene:

$$\frac{dy}{dx}e^{\int Pdx} + P(x)ye^{\int Pdx} = Q(x)e^{\int Pdx} \Rightarrow e^{\int Pdx}\left(\frac{dy}{dx} + Py\right) = Q(x)e^{\int Pdx} \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\int Pdx}.y\right) = Q(x)e^{\int Pdx}$$

Integrando a ambos lados de la igualdad:

$$\int d\left(e^{\int Pdx}.y\right) = \int Q(x)e^{\int Pdx}dx \Longrightarrow e^{\int Pdx}.y = \int Q(x)e^{\int Pdx}dx + c \ \Longrightarrow$$

$$e^{\int Pdx}.y = \int Q(x)e^{\int Pdx}dx + c \ \Longrightarrow y = \frac{1}{e^{\int Pdx}}\int Q(x)e^{\int Pdx}dx + c \ \Longrightarrow$$

$y = e^{-\int Pdx}(\int Q(x)e^{\int Pdx}dx + c\ )$ es la solución de $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$.

Ejemplo 1. Resolver la ecuación diferencial lineal de primer orden $y\acute{} - 2y = 5$.

Esta ecuación es lineal con $P(x) = -2$ y $Q(x) = 5$. Entonces

$\int Pdx = \int -2dx = -\,2x \Longrightarrow e^{\int Pdx} = \ e^{-2x}$. Al multiplicar cada término de $\frac{dy}{dx} - 2y = 5$ por e^{-2x} nos queda

$\frac{dy}{dx}e^{-2x} - 2ye^{-2x} = 5\,e^{-2x} \Longrightarrow \frac{d}{dx}(ye^{-2x}) \Longrightarrow 5\,e^{-2x} \Longrightarrow$
$\int \frac{d}{dx}(ye^{-2x})dx = \int 5\,e^{-2x}dx \Longrightarrow$

$$ye^{-2x} = -\frac{5}{2}e^{-2x} + c \ \Longrightarrow y = \frac{-\frac{5}{3}e^{-2x}}{e^{-2x}} + \frac{c}{e^{-2x}} \Longrightarrow y = ce^{2x} - \frac{5}{2}$$

Advierta que uno bien puede aplicar la fórmula:

$$y = e^{-\int Pdx}(\int Q(x)e^{\int Pdx}dx + c\ )$$

para resolver la ecuación diferencial dada; sin embargo, si observa la solución del ejemplo anterior, es más práctico llevar a cabo la forma como se dedujo dicha solución, es decir, multiplicar por $e^{\int Pdx}$ e integrar la parte derecha de la ecuación.

Ejemplo 2. Resolver la ecuación diferencial lineal[1] de primer orden $xy\acute{} + y = x^2\cos x$.

Busquemos la forma $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$. Dividiendo la ecuación propuesta por $x \ \Longrightarrow$

$\frac{x}{x}\frac{dy}{dx}\acute{} + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x}x^2\cos x \ \Longrightarrow \frac{dy}{dx} + (\frac{1}{x})y = (\frac{1}{x})x^2\cos x \ \Longrightarrow \frac{dy}{dx} + (\frac{1}{x})y = x\cos x.$

[1] Ejercicio número 13 de la sección de **ejercicios propuestos** del capítulo 1 del libro Ecuaciones diferenciales de Simmons, p.79.

Nos quedó entonces $P(x) = \frac{1}{x}$ y $Q(x) = x \cos x$.

Entonces $\int P dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln x \Longrightarrow e^{\int P dx} = e^{\ln x} = x$. Al multiplicar cada término de $\frac{dy}{dx} + (\frac{1}{x})y = x \cos x$ por x nos queda

$$\frac{dy}{dx} \cdot x + x \cdot \left(\frac{1}{x}\right) y = x(x \cos x) \Longrightarrow x \frac{dy}{dx} + y = x^2 \cos x \Longrightarrow$$

$$xdy + ydx = x^2 \cos x\, dx \Longrightarrow d(xy) = x^2 \cos x\, dx \Longrightarrow \int d(xy) = \int x^2 \cos x\, dx \Longrightarrow$$

$$xy = \int x^2 \cos x\, dx \Longrightarrow xy = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + c \Longrightarrow$$

$$y = x \sin x + 2 \cos x - 2x^{-1} \sin x + cx^{-1}$$

Quizá sea prudente recordar que la solución[2] de $\int x^2 \cos x\, dx$ se realiza por repetición del método de integración por partes.

A estas alturas del curso, usted ya debe suponer que algunas ecuaciones diferenciales de primer orden se pueden resolver por diferentes métodos. En el ejemplo siguiente vamos a resolver la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = y + 4$ por dos de los métodos vistos: ecuaciones diferenciales lineales y ecuaciones diferenciales exactas con factor integrante.

Ejemplo 3. Resolver la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = y + 4$.

La ecuación $\frac{dy}{dx} - y = 4$ es lineal con $P(x) = -1$ y $Q(x) = 4$. Entonces

$\int P dx = -1dx = -x \Longrightarrow e^{\int P dx} = e^{-x}$. Al multiplicar cada término de $\frac{dy}{dx} - y = 4$ por e^{-x} nos queda $\frac{dy}{dx} e^{-x} - e^{-x} y = 4e^{-x} \Longrightarrow \frac{d}{dx}(ye^{-x}) = 4e^{-x}$.

Integrando a ambos lados de la última ecuación se obtiene

$$ye^{-x} = -4e^{-x} + c \Longrightarrow y = ce^{x} - 4.$$

Ahora analicemos otro camino de solución de $\frac{dy}{dx} = y + 4$, el método de las ecuaciones diferenciales exactas.

---

[2] Sea $u = x^2 \Longrightarrow du = 2xdx, dv = \int \cos x \Longrightarrow v = \sin x \Longrightarrow$
$\int x^2 \cos x\, dx = x^2 \sin x - 2 \int x \sin x dx$.
Sea $z = x \Longrightarrow dz = dx, dw = \int \sin x \Longrightarrow w = -\cos x \Longrightarrow$

$$\int x^2 \cos x\, dx = x^2 \sin x - 2 \int x \sin x dx = x^2 \sin x - 2[-x \cos x - \int -\cos x dx \Longrightarrow$$

$$\int x^2 \cos x\, dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x$$

Escribamos $\frac{dy}{dx} = y + 4$ de la forma $Mdy + Ndx$, es decir $(y+4)dx + (-1)dy = 0$, con $M = y + 4$, y $N = -1$. Esta ecuación no es exacta ya que:

$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial(\,y+4)}{\partial y} = 1$ y $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial(-1)}{\partial x} = 0$.

Como la ecuación no es exacta, procedemos a encontrar un factor integrante de la forma:

Si $\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = g(y)$, entonces el factor integrante es

$H(x,y) = e^{\int g(y)dy}$

Busquémoslo:

$$= \frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = \frac{1}{y+4}(0-1) = -\frac{1}{y+4} \Longrightarrow H(x,y) = g(y) = e^{-\int \frac{dy}{y+4}} = \frac{1}{y+4}$$

El factor integrante es entonces $g(y) = \frac{1}{y+4}$, y éste multiplica a cada uno de los términos de la ecuación $y^2dx + (xy-1)dy = 0$. Así:

$$\frac{1}{y+4}(y+4)dx + \frac{1}{y+4}(-1)dy = 0 \Longrightarrow (1)dx - \frac{1}{y+4}dy = 0$$

Verifiquemos que la nueva ecuación $(1)dx - \frac{1}{y+4}dy = 0$ es exacta con $M = 1$, y N=$-\frac{1}{y+4} \Longrightarrow$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial(1)}{\partial y} = 0\,, \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial(-\frac{1}{y+4})}{\partial x} = 0.$$

Para resolver $\Longrightarrow dx - \frac{1}{y+4}dy$ sigamos los **5 pasos** en la misma línea:

Encontrar una función f tal que $\frac{\partial f}{\partial x} = M \;\Longrightarrow f = \int Mdx + g(y) \Longrightarrow f = \int 1dx + g(y) \Longrightarrow$ $f = x + g(y)$. Derivar parcialmente f con respecto a y, es decir, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \int Mdx}{\partial y} + \frac{dg}{dy} \;\Longrightarrow$ $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial(x)}{\partial y} + \frac{dg}{dy} \;\Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = +\frac{dg}{dy}$. Igualar $\frac{\partial f}{\partial y} = N \Longrightarrow +\frac{dg}{dy} = -\frac{1}{y+4}$. Integrar $\frac{dg}{dy}$ para determinar la función $g \Longrightarrow g = -\int \frac{dy}{y+4} = -\ln(y+4) = \ln(y+4)^{-1} = \ln\frac{1}{y+4}$.

Y la solución es:

$\int Mdx + g(y) = c$.

Es decir:

$$c = x + \ln \frac{1}{y+4}$$

Entonces hemos resuelto la ecuación $\frac{dy}{dx} = y + 4$.

Vista como ecuación diferencial lineal se obtuvo la solución $y = ce^{x} - 4$.

Vista por el método de ecuaciones diferenciales exactas mediante el método del factor integrante, se obtuvo la solución $c = x + \ln \frac{1}{y+4}$.

Aparentemente usted advertirá que las soluciones son diferentes, pero

$$c = x + \ln \frac{1}{y+4} \Longrightarrow c - x = \ln \frac{1}{y+4} \Longrightarrow e^{c-x} = e^{\ln \frac{1}{y+4}} = \frac{1}{y+4} \Longrightarrow$$

$y + 4 = \frac{1}{e^{c}e^{-x}} = ce^{x} \Longrightarrow y = ce^{x} - 4$.

Una aplicación de las ecuaciones diferenciales lineales: circuitos en serie

Circuito en serie LR (figura 1)

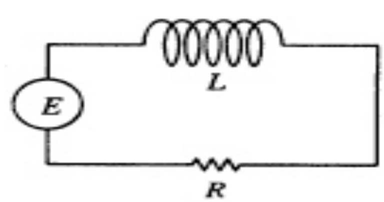

Figura 1. Circuito en serie LR

Fuente: http://www.profesormolina.com.ar/tutoriales/circ_elec/img00055.gif

En un circuito en serie muy simple como el de la figura, dotado de un resistor y un inductor, la segunda ley de Kirchhoff establece que la suma de la caída de voltaje a través del inductor, más la caída de voltaje a través del resistor es igual al voltaje aplicado al circuito.

En un circuito, L se define como la Inductancia y R es la resistencia del circuito; ambos, L y R son valores constantes. La corriente $\boldsymbol{i(t)}$ se denomina la *respuesta* del sistema.

Si representamos la caída de voltaje a través del inductor por $\boldsymbol{L\left(\frac{di}{dt}\right)}$, la la caída de voltaje a través del resistor por $\boldsymbol{Ri}$ y el voltaje aplicado al circuito por $\boldsymbol{E(t)}$, entonces la segunda ley de Kirchhoff para determinar la corriente en el circuito en serie LR en cualquier instante se puede escribir mediante la ecuación diferencial

$$\boldsymbol{L\left(\frac{di}{dt}\right) + Ri = E(t)}$$

En un circuito, L se define como la Inductancia y R es la resistencia del circuito; ambos, L y R son valores constantes.

Circuito en serie RC (figura 2)

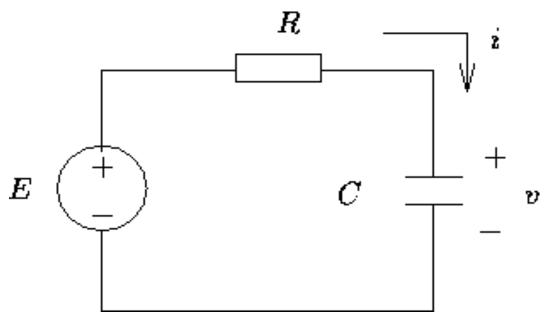

Figura 2. Circuito en serie RC.

Fuente: http://elluishinojos.blogspot.com.co/2015/04/circuitos-rc-y-constante-de-tiempo.html

La caída de voltaje a través de un capacitor de capacitancia C es $\frac{q(t)}{C}$ donde q es la carga del capacitor. Al aplicar nuevamente la segunda ley de Kirchhoff

$$\boldsymbol{Ri + \frac{1}{C}q = E(t)}$$

La corriente i y la carga q se relacionan mediante la expresión $i = \frac{dq}{dt}$ entonces para determinar la corriente en el circuito en serie RC en cualquier instante nos queda la ecuación diferencial:

$$\boldsymbol{R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t)}$$

Ejemplo 4. Circuito en serie:[3]

Una batería de 12 voltios se conecta a un circuito en serie en el que el inductor es de $\frac{1}{2}$ henry y la resistencia es de 10 ohms. Determine la corriente $\boldsymbol{i}$ si la corriente inicial es cero.

Sabemos que la ecuación diferencial para este circuito es:

$$\boldsymbol{L\left(\frac{di}{dt}\right) + Ri = E(t)}$$

Como $\boldsymbol{L} = \frac{1}{2}$, $R = \mathbf{10}$, y $\boldsymbol{E} = \mathbf{12}$, nos queda

$\boldsymbol{\frac{1}{2}\frac{di}{dt}} + \mathbf{10}\boldsymbol{i} = 12$ con la condición inicial $i(0) = 0$.

Multiplicando la ecuación $\boldsymbol{\frac{1}{2}\frac{di}{dt}} + \mathbf{10}\boldsymbol{i} = 12$ por 2 nos queda:

$\frac{di}{dt} + 20i = 24.$

Esta es una ecuación diferencial lineal de la forma $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ con $P(x) = 20$ y $Q(x) = 24$. Entonces $\int Pdt = \int 20dt = 20t \Longrightarrow e^{\int Pdt} = e^{20t}$.

Al multiplicar cada término de $\frac{di}{dt} + 20i = 24$ por e^{20t} nos queda $\frac{di}{dt}e^{20t} + 20ie^{20t} = 24\,e^{20t} \Longrightarrow \frac{d}{dt}(ie^{20t}) \Longrightarrow 24\,e^{20t} \Longrightarrow$

$$\int \frac{d}{dt}(e^{20t} \cdot i) = 24\int e^{20t}dt \Longrightarrow$$

$e^{20t} \cdot i = 24 \cdot \frac{1}{20}e^{20t} + c \Longrightarrow i = \frac{\frac{6}{5}e^{20t}}{e^{20t}} + \frac{c}{e^{20t}} \Longrightarrow i = \frac{6}{5} + ce^{-20t}.$

Como $i(0) = 0$, debemos encontrar el valor de la constante de integración c, entonces:

$i = \frac{6}{5} + ce^{-20t} \Longrightarrow 0 = \frac{6}{5} + ce^{-20(0)}$, de donde $c = -\frac{6}{5}$, luego la expresión que permite determinar la corriente en el circuito en cualquier instante es:

$$i = \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-20t}$$

[3] Ejemplo 6 del capítulo 3 del libro Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado, p.88.

Ecuación diferencial de Bernoulli

La ecuación diferencial de la forma $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$ con $n\epsilon\mathbb{R}$, se llama ecuación diferencial de Bernoulli. Advierta que si $n = 0$, o $n = 1$ la ecuación diferencial de Bernoulli se transforma en una ecuación diferencial lineal de primer orden.

Sospechará usted que la ecuación diferencial de Bernoulli se puede transformar en una ecuación diferencial lineal de primer orden. Efectivamente esto se logra mediante la sustitución

$$v = y^{1-n}$$

Que transforma la ecuación $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$ en una ecuación diferencial lineal donde la función que se debe encontrar es $v(x)$.

Ejemplo 5. Resolver la ecuación diferencial $y' - xy^2 + xy = 0$:

Organizando los términos de la ecuación nos queda con la forma de la ecuación diferencial de Bernoulli:

$$\frac{dy}{dx} + xy = xy^2$$

Con $n = 2$, $P(x) = x$ y $Q(x) = x$. Haciendo la sustitución sugerida nos queda:

$$v = y^{1-2} = y^{-1} = \frac{1}{y} \Longrightarrow y = \frac{1}{v} \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx}.$$

Entonces la ecuación $\frac{dy}{dx} + xy = xy^2$ se transforma en $-\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} + x \cdot \left(\frac{1}{v}\right) = x \cdot \left(\frac{1}{v^2}\right) \Longrightarrow$

$\frac{dv}{dx} - xv = -x$ que claramente es lineal con variable dependiente v, variable independiente x, $P(x) = -x$ y $Q(x) = -x$.

Entonces $\int Pdx = \int -xdx = -\frac{x^2}{2} \Longrightarrow e^{\int Pdx} = e^{-\frac{x^2}{2}}$. Al multiplicar cada término de $\frac{dy}{dx} + (\frac{1}{x})y = x\cos x$ por x nos queda:

$e^{-\frac{x^2}{2}}\frac{dv}{dx} - xe^{-\frac{x^2}{2}}v = -xe^{-\frac{x^2}{2}} \Longrightarrow \frac{d}{dx}\left(ve^{-\frac{x^2}{2}}\right) = -xe^{-\frac{x^2}{2}}$, integrando a ambos lados de la última ecuación se obtiene:

$$ze^{-\frac{x^2}{2}} = e^{-\frac{x^2}{2}} + c \implies z(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{e^{-\frac{x^2}{2}}} + ce^{\frac{x^2}{2}} \implies z(x) = 1 + ce^{\frac{x^2}{2}}$$

Devolviéndonos a la sustitución $y = \frac{1}{v}$, la solución es $y = \frac{1}{1+ce^{\frac{x^2}{2}}}$.

Ejemplo 6. Resolver la ecuación diferencial[4] $(xy^2 + y)dx + xdy = 0$:

Busquemos la forma de la ecuación de Bernoulli $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$.

$$(xy^2 + y)dx + xdy = 0 \implies \frac{dy}{dx} = \frac{xy^2 + y}{-x} = \frac{xy^2}{-x} + \frac{y}{-x} = -y^2 - \frac{y}{x} \implies \frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = -y^2$$

Sea $u = y^{1-n} \implies u = y^{1-2} = y^{-1} \implies u = \frac{1}{y} \implies \frac{du}{dy} = -\frac{1}{y^2}$.

Por otra parte, $\frac{du}{dx} = \frac{du}{dy}\frac{dy}{dx} \implies \frac{du}{dx} = -\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} \implies \frac{du}{dx} - \frac{1}{x}y^{-1} = 1 \implies \frac{du}{dx} - \frac{1}{x}u = 1$. Esta ecuación es lineal con $P(x) = -\frac{1}{x}$ y $Q(x) = 1$.

Entonces $\int Pdx = \int -\frac{1}{x}dx = \ln x^{-1} = \ln\frac{1}{x} \implies e^{\int Pdx} = e^{\ln\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$. Al multiplicar cada término de $\frac{du}{dx} -\cdot \frac{1}{x}u = 1$ por $\frac{1}{x}$ nos queda

$$\frac{1}{x}\frac{du}{dx} - \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}u = \frac{1}{x} \implies \frac{1}{x}du - \frac{1}{x^2}udx = \frac{1}{x}dx \implies \frac{xdu - udx}{x^2} = \frac{1}{x}dx \implies$$

$d\left(\frac{u}{x}\right) = \frac{1}{x}dx$, integrando a ambos lados de la última ecuación se obtiene

$\frac{u}{x} = \ln x + c \implies \frac{y^{-1}}{x} = \ln x + c \implies \ln x - \frac{1}{xy} = c.$

[4] Ejercicio número 34 de la sección de **ejercicios propuestos** del capítulo 1 del libro Ecuaciones diferenciales de Simmons, p.79.

Ejemplo 7. Resolver la ecuación diferencial[5] $xy' + y = y^2 \ln x$:

Busquemos la forma de la ecuación de Bernoulli $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$. Al dividir la ecuación por x y por $-\frac{1}{y^2}$ nos queda:

$$\left(-\frac{1}{y^2}\right)\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y^{-1} = -\frac{\ln x}{x}$$

Sea $u = y^{1-n} \Longrightarrow u = y^{1-2} \Longrightarrow u = y^{-1} \Longrightarrow \frac{du}{dy} = -\frac{1}{y^2}$.

Como $\frac{du}{dx} = \frac{du}{dy}\frac{dy}{dx} \Longrightarrow \frac{du}{dx} = -\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx}$, remplazando en $(-\frac{1}{y^2})\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y^{-1} = \ln x \Longrightarrow$

$\frac{du}{dx} - \frac{1}{x}y^{-1} = -\frac{\ln x}{x} \Longrightarrow \frac{du}{dx} - \frac{1}{x}u = -\frac{\ln x}{x}$, lineal con $P(x) = -\frac{1}{x}$ y $Q(x) = -\frac{\ln x}{x}$.

Entonces $\int Pdx = \int -\frac{1}{x}dx = -\ln x = \ln x^{-1} = \ln\frac{1}{x} \Longrightarrow e^{\ln\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$. Al multiplicar cada término de $\frac{du}{dx} - \frac{1}{x}u = -\frac{\ln x}{x}$ por $\frac{1}{x}$ nos queda

$$\frac{1}{x}\cdot\frac{du}{dx} - \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}u = \frac{1}{x}\cdot -\frac{\ln x}{x} \Longrightarrow \frac{1}{x}\cdot\frac{du}{dx} -\cdot \frac{1}{x^2}u = -\frac{\ln x}{x^2} \Longrightarrow$$

$$\frac{xdu - udx}{x^2} = -\frac{\ln x}{x^2} \Longrightarrow d\left(\frac{u}{x}\right) = -\frac{\ln x}{x^2}dx \Longrightarrow$$

$$\int d\left(\frac{u}{x}\right) = -\int \frac{\ln x}{x^2}dx$$

Integrando[6] a ambos lados de la última ecuación se obtiene

$$\frac{u}{x} = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + c \Longrightarrow u = \ln x + cx + 1 \Longrightarrow \frac{1}{y} = \ln x + cx + 1$$

[5] Ejercicio número 44 de la sección de **ejercicios propuestos** del capítulo 1 del libro Ecuaciones diferenciales de Simmons, p.79.

[6] Usando el método de integración por partes, resolvamos la integral $\int \frac{\ln x}{x^2}dx = \int x^{-2}\ln x dx$.

Sean $w = \ln x$ y $dv = x^{-2}dx \Longrightarrow dw = \frac{1}{x}dx$ y $v = -\frac{1}{x}$, entonces

$$\int x^{-2}\ln x dx = (\ln x)\left(-\frac{1}{x}\right) - \int\left(-\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x}dx \Longrightarrow$$

$$\int x^{-2}\ln x dx = -\frac{\ln x}{x} + \int x^{-2}dx = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + c.$$

Una aplicación de las ecuaciones diferenciales de primer orden: cables suspendidos[7]

Existen muchas construcciones que utilizan cables suspendidos como el cable de suspensión de un puente (figura 3) o los alambres de teléfonos (Figura 4). Pensemos en un cable flexible, alambre o cuerda pesada que está suspendida entre dos soportes verticales.

Figura 3. Cable de suspensión de un puente

Fuente: Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado de Zill, 9° ed. p.25

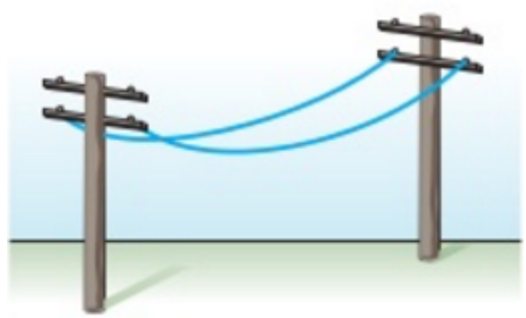

Figura 4. Alambres de teléfonos

Fuente: Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado de Zill, 9° ed. p.25

Podemos construir un modelo matemático que se describe por medio de una ecuación diferencial de primer orden para describir la forma que tiene el cable (figura 5).

[7] Aplicación adaptada del libro Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado de Dennis Zill, p.25.

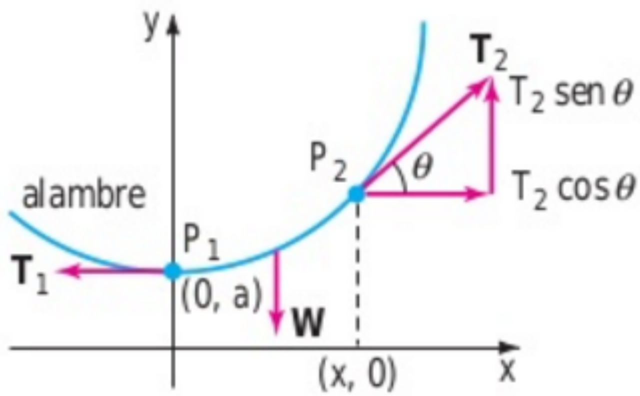

Figura 5. Elemento del cable

Fuente: Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado de Zill, 9° ed. p.25

Examinemos un trozo del cable que comprende entre el punto más bajo P_1 y otro punto tomado de manera arbitraria P_2. Este elemento de cable es la curva en un sistema de coordenadas rectangulares eligiendo al eje y para que pase a través de P_1 y eligiendo al eje x para que pase a a unidades debajo de P_1.

Analizando las fuerzas que actúan sobre el cable tenemos:

Las fuerzas de tensión (vectores), $\mathbb{T}_1, \mathbb{T}_2$ en el cable que son tangentes al cable en P_1 y P_2 respectivamente.

La parte $\mathbb{W}$ de la carga total vertical entre los puntos P_1 y P_2.

Nos interesan las magnitudes de estos vectores:

$\boldsymbol{T_1} = |\mathbb{T}_1|$, $\boldsymbol{T_2} = |\mathbb{T}_2|$ y $\boldsymbol{W} = |\mathbb{W}|$.

Las componentes horizontal y vertical de la fuerza de tensión $\boldsymbol{T_2}$ son

$\boldsymbol{T_2 \cos\theta}$ y $\boldsymbol{T_2 \sin\theta}$. Usando el concepto físico del equilibrio estático para el cable tenemos:

$$\boldsymbol{T_1 = T_2 \cos\theta} \text{ y } \boldsymbol{W = T_2 \sin\theta}$$

Al dividir término a término estas expresiones,

$\frac{\boldsymbol{W=T_2 \sin\theta}}{\boldsymbol{T_1=T_2\cos\theta}} = \frac{W}{\boldsymbol{T_1}} = \frac{\boldsymbol{\sin\theta}}{\boldsymbol{\cos\theta}} = \tan\theta \Longrightarrow \frac{W}{\boldsymbol{T_1}} = \tan\theta$. Como $\frac{dy}{dx} = \tan\theta \Longrightarrow$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{W}{\boldsymbol{T_1}}$$

Introducción a las ecuaciones diferenciales de segundo orden. Reducción del orden

Aunque en este módulo el análisis de las ecuaciones diferenciales de segundo orden es el propósito de la siguiente unidad, existen dos tipos de ecuaciones diferenciales de segundo orden que se pueden resolver por métodos de las ecuaciones diferenciales de primer orden.

Ausencia de la variable dependiente

Sabemos que la forma general de una ecuación diferencial de segundo orden tiene la forma:

$$F(x, y, y', y'').$$

Si y no aparece de manera explícita, esta ecuación puede escribirse:

$$F(x, y', y'').$$

Para reducir su orden, es decir, transformarla en una ecuación diferencial de primer orden, introducimos una nueva variable dependiente, por ejemplo p , haciendo:

$$p = y' \text{ y } \frac{dp}{dx} = y''$$

La nueva ecuación diferencial de primer grado nos queda:

$$f(x, p, \frac{dp}{dx}).$$

En la resolución de esta ecuación, simplemente se reemplaza la variable p por $\frac{dy}{dx}$ y se resuelve lo que aparezca, es decir, dos ecuaciones diferenciales de primer orden de manera sucesiva.

Ejemplo 8. Resolver la ecuación diferencial[8] $(1 + x^2)y'' + xy' = 0$.

Esta ecuación es diferencial de segundo orden. Se trata entonces de reducir su orden mediante las sustituciones

$p = y'$ y $\frac{dp}{dx} = y''$. Reemplazando en $(1 + x^2)y'' + xy' = 0$, nos queda $(1 + x^2)\frac{dp}{dx} + xp = 0$ que podemos transformar en separable[9]

---

[8] Ejercicio número 23 de la sección de **ejercicios propuestos** del capítulo 1 del libro Ecuaciones diferenciales de Simmons, p.79.

[9] Resolvamos la integral $\int \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}$ por el método de sustitución trigonométrica.

$\Longrightarrow (1+x^2)\frac{dp}{dx} = -xp \;\Longrightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{x}{1+x^2} \;\Longrightarrow \int \frac{dp}{p} = -\int \frac{x}{1+x^2}dx \Longrightarrow$

$$\ln p = -\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \ln c \;\Longrightarrow \ln p = \ln\frac{c}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} = e^{\ln p} = e^{\ln\frac{c}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}} \Longrightarrow$$

$$p = \frac{c}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} \;\Longrightarrow y' = \frac{c}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} \;\Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{c}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} \;\Longrightarrow \frac{dy}{c} = \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} \;\Longrightarrow$$

$$\frac{1}{c}\int dy = \int \frac{c}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}dx \;\Longrightarrow \frac{y}{c} = \ln((1+x^2)^{\frac{1}{2}} + x) + c_2$$

$$y = c[\ln((1+x^2)^{\frac{1}{2}} + x)] + c_3.$$

El siguiente ejemplo es muy interesante porque se parte de una ecuación diferencial de segundo orden que se reduce a una ecuación diferencial de Bernoulli de primer orden y finalmente en una ecuación diferencial lineal de primer orden.

Ejemplo 9. Resuelva la ecuación diferencial $x^2y'' = y'(3x - 2y')$.

Esta ecuación es diferencial de segundo orden. Se trata entonces de reducir su orden mediante las sustituciones

$p = y'$ y $\frac{dp}{dx} = y''$. Reemplazando en $x^2y'' = y'(3x - 2y')$, nos queda

$x^2\frac{dp}{dx} = p(3x - 2p) \Longrightarrow \frac{dp}{dx} = \frac{3p}{x} - \frac{2p^2}{x^2} \Longrightarrow \frac{dp}{dx} - \left(\frac{3}{x}\right)p = (\frac{-2}{x^2})p^2$ que es una ecuación diferencial de Bernoulli.

Sea $u = p^{1-n} \;\Longrightarrow u = p^{1-2} = p^{-1}$, de donde

$\frac{du}{dp} = -\frac{1}{p^2} \;\Longrightarrow \frac{du}{dx} = \frac{du}{dp}\frac{dp}{dx} \Longrightarrow \frac{du}{dx} = -\frac{1}{p^2}\frac{dp}{dx}$, entonces volviendo a la ecuación de Bernoulli, dividiendo por $-p^2$, y haciendo las sustituciones propuestas

$\frac{dp}{dx} - \left(\frac{3}{x}\right)p = \left(\frac{-2}{x^2}\right)p^2 \Longrightarrow -\frac{1}{p^2}\frac{dp}{dx} - \frac{1}{p^2}\left(-\frac{3}{x}\right)p = \frac{2}{x^2} \;\Longrightarrow \frac{du}{dx} + \left(\frac{3}{x}\right)p^{-1} = \frac{2}{x^2} \;\Longrightarrow$

$\frac{du}{dx} + \left(\frac{3}{x}\right)u = \frac{2}{x^2}$,

Sea $x = \tan\theta \;\Longrightarrow dx = \sec\theta^2 \;\Longrightarrow \int \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} = \int \frac{\sec\theta^2}{\sec\theta}d\theta \;\Longrightarrow$

$\int \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} = \int \sec\theta d\theta = \ln(\sec\theta + \tan\theta) + c_2 = \ln((1+x^2)^{\frac{1}{2}} + x) + c_2$.

que es una ecuación diferencial lineal con $P(x) = \frac{3}{x}$ y $Q(x) = \frac{2}{x^2}$.

Al multiplicarla por el factor x^3 nos queda

$$x^3 \cdot \frac{du}{dx} + x^3 \cdot \left(\frac{3}{x}\right) u = x^3 \cdot \frac{2}{x^2} \Longrightarrow x^3 \frac{du}{dx} + 3x^2 u = 2x \Longrightarrow x^3 du + 3x^2 u dx = 2x dx \Longrightarrow$$

$$d(x^3 \cdot u) = 2x dx \Longrightarrow \int d(x^3 \cdot u) = 2 \int x dx \Longrightarrow x^3 \cdot u = x^2 + c_1 \Longrightarrow$$

$p^{-1} x^3 = x^2 + c_1 \Longrightarrow \frac{x^3}{p} = x^2 + c_1 \Longrightarrow \frac{x^3}{y'} = x^2 + c_1 \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x^3}{x^2 + c_1}. \int dy = \int \frac{x^3}{x^2 + c_1} dx \Longrightarrow$
$y = \int \frac{x^3}{x^2 + c_1} dx$, resolviendo la integral de la derecha[10] nos queda:

$y = \frac{x^2}{2} - \frac{c}{2} \ln(x^2 + c) + c_2.$

Ausencia de la variable independiente

Cuando la variable independiente x no está presente de manera explícita la ecuación diferencial de segundo orden $F(x, y, y', y'')$ se convierte en

$g(y, y', y'') = 0.$

De manera similar al proceso anterior, introducimos la nueva variable dependiente p expresando la segunda derivada, y'' , en términos de la derivada de p con respecto a y:

$$p = y' \Longrightarrow y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$$

Luego $g(y, y', y'') = 0$, se puede escribir como

---

[10] Solución de $\int \frac{x^3}{x^2 + c} dx$.
$\int \frac{x^3}{x^2+c} dx = \int \frac{x^3 + cx - cx}{x^2 + c} dx = \int \frac{x^3 + cx}{x^2 + c} dx - \int \frac{cx}{x^2 + c} dx$. Resolvemos cada integral por separado:

$$\int \frac{x^3 + cx}{x^2 + c} dx = \int \frac{x(x^2 + c)}{x^2 + c} dx = \int x dx = \frac{x^2}{2} .$$

$\int \frac{cx}{x^2 + c} dx$. Sea $z = x^2 + c \Longrightarrow dz = 2x dx \Longrightarrow dx = \frac{dz}{2x} \Longrightarrow \int \frac{cx}{x^2 + c} dx = \int \frac{cx}{z}\frac{dz}{2x} = \frac{c}{2} \int \frac{dz}{z} \Longrightarrow$
$\frac{c}{2} \int \frac{dz}{z} = \frac{c}{2} \ln z + c_2 \Longrightarrow \int \frac{cx}{x^2 + c} dx = \frac{c}{2} \ln(x^2 + c) + c_2.$

$g\left(y, p, p\frac{dp}{dy}\right) = 0.$

Y otra vez se trata de resolver dos ecuaciones diferenciales de primer orden de manera sucesiva.

Ejemplo 10. Resolver la ecuación diferencial $yy'' = (y')^2$.

Sea $p = y' \implies y'' = p\frac{dp}{dy}$. entonces $yy'' = (y')^2$ se transforma en

$$y \cdot p\frac{dp}{dy} = p^2 \implies \frac{dp}{p} = \frac{dy}{y} \implies \int \frac{dp}{p} = \int \frac{dy}{y} \implies \ln p = \ln y + c \implies e^{\ln p} = e^{\ln y + c} \implies$$

$$p = e^{\ln y} e^{c} = c_1 y \implies \frac{dy}{dx} = c_1 y \implies \frac{dy}{y} = c_1 dx \implies \int \frac{dy}{y} = c_1 \int dx \implies \ln y = c_1 x + c_2$$

$$e^{\ln y} = e^{c_1 x + c_2} \implies y = e^{c_1 x} e^{c_2} \implies y = c_3 e^{c_1 x}.$$

3

Unidad 3

Ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden (parte I)

Ecuaciones Diferenciales

Autor: Luis Guillermo Caro Pineda

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina
MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Introducción

Iniciamos el estudio de las ecuaciones diferenciales de orden superior, enfocando nuestra atención en las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden.

Como antesala al estudio de los métodos para resolver ecuaciones diferenciales de segundo orden, revisaremos cuatro teoremas. El primero nos garantiza la existencia de una solución para una ecuación diferencial bajo ciertas condiciones, y afirma que dicha solución es única; el teorema dos determina la solución general de una ecuación que relaciona la ecuación completa y su ecuación reducida; el teorema tres, llamado teorema de superposición, nos indica que cualquier combinación lineal de dos soluciones de una ecuación diferencial homogénea es también solución; el teorema cuatro explica el uso del Wronskiano para analizar soluciones linealmente dependientes.

Además, analizaremos una ecuación fundamental en el estudio de las ecuaciones diferenciales de segundo orden, la *ecuación diferencial lineal de segundo orden de Cauchy-Euler* y estudiaremos soluciones combinadas de ecuaciones diferenciales como la suma de una ecuación diferencial completa y una ecuación diferencial reducida. La cartilla culmina con la revisión del uso de una solución conocida para hallar otra.

Recomendaciones metodológicas

La presente cartilla, Ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden (parte I), inicia con la identificación de las ecuaciones diferenciales de orden superior y de manera especial, las ecuaciones diferenciales de segundo orden. Se desarrolla a través de explicaciones de los fundamentos teóricos y la solución de ejemplos que ilustran los procedimientos para resolver ecuaciones diferenciales de segundo orden.

Es importante que tenga en cuenta los cuatro teoremas que se presentan, ya que son fundamentales en la exposición de los ejercicios resueltos; éstos presentan un nivel de exigencia superior al anterior para cada sección revisada.

Para garantizar su éxito en la revisión y estudio de los temas seleccionados, usted debe realizar una revisión exhaustiva de la cartilla, las lecturas complementarias y los recursos audiovisuales, ya que además de ubicar las definiciones pertinentes, encontrará explicaciones desde varios autores y ejercicios resueltos que despejarán dudas. El desarrollo del módulo exige disciplina y trabajo permanente, usted debe acostumbrarse a la revisión frecuente de los recursos y a la realización de las actividades en los tiempos señalados. Se convierte en requisito indispensable el uso de un programa de Cálculo simbólico como Geogebra, Derive, Matlab, etc.

Además de revisar los textos propuestos en la bibliografía, usted debe estudiar de manera permanente el libro digital *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas* de George Simmons, capítulo 3, secciones 14 a 16 que se encuentran en pdf en la sección de recursos para el aprendizaje y el pdf *ED lineales de orden superior* de Ana García. Unidad 3.

Del libro de Simmons se resuelven algunos ejercicios propuestos de las secciones finales de los capítulos seleccionados.

Desarrollo temático

Ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden (parte I)

Forma general de la ecuación diferencial lineal de orden superior

Dijimos en secciones anteriores que en general la ecuación diferencial lineal de orden n es de la forma:

$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots . + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = R(x)$ (1).

Si en esta ecuación diferencial, $R(x) = 0$, la ecuación diferencial se llama *ecuación diferencial homogénea* de orden n, es decir,

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots . + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0 \ (2)$$

Cuando en la ecuación (2) los coeficientes de las derivadas y de la variable dependiente no dependen de la variable independiente, es decir, si los coeficientes $a_i(x)$ son todos constantes o números reales, ésta se transforma en una ecuación con coeficientes constantes:

$$a_n\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots . + a_1\frac{dy}{dx} + a_0 y = 0 \ (3)$$

En general, la ecuación (3) se llama *ecuación diferencial homogénea con coeficientes constantes* de orden n.

Forma general de la ecuación diferencial lineal de segundo orden

En lo que viene de la presente cartilla, nuestro interés se concentrará en las ecuaciones diferenciales lineales de orden 2. Esperaremos entonces ecuaciones de la forma:

$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = R(x)$ (4),

que como sabemos podemos escribir como:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x) \ (5).$$

Volvamos a la ecuación (4), $\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = R(x)$. Esta ecuación se llama *ecuación diferencial lineal de segundo orden*, pero si $R(x) = 0$, la ecuación (4) se transforma en:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0\ (6),$$

La ecuación (6) se llama *ecuación diferencial homogénea de segundo orden.* Si $R(x) \neq 0$, como en (5), se dice que es una *ecuación diferencial no homogénea de segundo orden.*

En la tarea de encontrar la solución de estas ecuaciones diferenciales a la ecuación (5) la llamaremos ecuación diferencial completa y a la ecuación (6) ecuación diferencial reducida.

Si además, hacemos que los coeficientes $P(x), Q(x)$ sean números reales (valores constantes), (6) se transforma en:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a_1\frac{dy}{dx} + a_0y = 0\ (7).$$

La ecuación (7) se llama *ecuación diferencial homogénea con coeficientes constantes* de orden 2.

Advierta que en la ecuación (5) el coeficiente de la segunda derivada de y, es decir, $\frac{d^2y}{dx^2}$ es 1. Pero puede ocurrir que no lo sea, es decir, supongamos un coeficiente $T(x)$ que la transforma en:

$$T(x)\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0.$$

Con una simple división de cada término de la última ecuación por el término $T(x)$ se vuelve a la ecuación (5).

Antes de verificar si una función o una familia paramétrica de funciones es o son soluciones de una ecuación diferencial, y como requisito previo al estudio de los métodos para resolver ecuaciones diferenciales de segundo orden, es necesario revisar cuatro teoremas. El primero nos garantiza la existencia de una solución para una ecuación diferencial bajo ciertas condiciones, y afirma que dicha solución es única; el teorema dos determina la solución general de una ecuación que relaciona la ecuación completa y su ecuación reducida; el teorema tres, llamado teorema de superposición, nos indica que cualquier combinación lineal de dos soluciones de una ecuación diferencial homogénea es también solución; el teorema cuatro explica el uso del Wronskiano para analizar soluciones linealmente dependientes.

Teorema 1. Teorema de existencia y unicidad

Si en la ecuación:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x),$$

suponemos que las funciones $P(x), Q(x)$ y $R(x)$ son continuas en algún subconjunto de números reales, por ejemplo en el intervalo cerrado de números reales $[a, b]$, y si $y_{0,}\ y_0'$ son números reales arbitrarios, podemos afirmar que la ecuación (5) tiene una y sólo una solución $y(x)$ en $[a, b]$ de tal menara que se cumple:

$y(x_0) = y_{0,}$ y $y'(x_0) = y_0'$.

Entonces, el teorema nos afirma que, bajo esas condiciones, toda ecuación tiene al menos una solución y que dicha solución debe ser única.

Teorema 2. Solución combinada con una ecuación completa y una ecuación reducida

Si y_g es la solución general de la ecuación reducida:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0,$$

y si y_p es una solución particular de la ecuación completa:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x),$$

entonces $y_g + y_p$ es la solución general de la ecuación completa.

Teorema 3. Superposición

Si $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son dos soluciones diferentes de la ecuación homogénea:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0,$$

entonces $c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ también es una solución para cualquier par de constantes c_1 y c_2.

El teorema de superposición nos garantiza que cualquier combinación lineal de dos soluciones cualesquiera de una ecuación diferencial homogénea es también una solución. Advierta que si ninguna de las soluciones $y_1(x)$ y $y_2(x)$ es múltiplo de la otra, entonces $c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ será la solución general de la ecuación homogénea. Para verificar esta condición, simplemente se debe dividir una función entre la otra y constatar que el resultado no sea una constante.

En los siguientes ejemplos revisaremos algunos aspectos relacionados con la verificación de soluciones de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden y detalles que relacionan los teoremas anteriores.

Ejemplo 1. Verificación de soluciones. Verificar[1] que las funciones $y_1(x) = 1$ y $y_2(x) = \ln x$ son soluciones de la ecuación diferencial:

$xy'' + y' = 0$, y escribir la solución general.

Solución.

Si $y(x) = 1 \Longrightarrow y'(x) = 0$, y $y''(x) = 0$. Como $xy'' + y' = 0 \Longrightarrow x(0) + 0 = 0$, entonces $y_1(x) = 1$ es solución.

Si $y(x) = \ln x \Longrightarrow y'(x) = \frac{1}{x}$, y $y''(x) = -\frac{1}{x^2}$. Como $xy'' + y' = 0 \Longrightarrow$

$x\left(-\frac{1}{x^2}\right) + \left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x} = 0$, entonces $y_2(x) = \ln x$ también es solución.

Por el teorema de superposición para ecuaciones homogéneas sabemos que la combinación lineal $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ también es una solución, es decir, $y = c_1(1) + c_2 \ln x$ es solución de la ecuación dada.

Advierta que el cociente entre $y_1(x) = 1$ y $y_2(x) = \ln x$, $\frac{1}{\ln x}$, claramente no es constante.

Ejemplo 2. Verificación de soluciones.[2]

a. Comprobar que $y_1(x) = e^{-x}$ y $y_2(x) = e^{2x}$ son soluciones de la ecuación reducida $y'' - y' - 2y = 0$. ¿Cuál es su solución general.
b. Hallar a y b tales que $y_p = ax + b$ sea una solución particular de la ecuación completa $y'' - y' - 2y = 4x$. Usar esta solución junto con el resultado del apartado a para escribir la solución general de esta ecuación.

---

[1] Ejercicio número 2 de la sección de ejercicios propuestos del capítulo 3 del libro Ecuaciones diferenciales de Simmons, p.89.
[2] Ejercicio número 3 de la sección de ejercicios propuestos del capítulo 3 del libro Ecuaciones diferenciales de Simmons, p.89.

a. Si $y(x) = e^{-x} \Longrightarrow y'(x) = -e^{-x}$, y $y''(x) = e^{-x}$. Como $y'' - y' - 2y = 0 \Longrightarrow e^{-x} - (-e^{-x}) - 2(e^{-x}) = e^{-x} + e^{-x} - 2e^{-x} = 0$, entonces $y_1(x) = e^{-x}$ es solución.
Si $y(x) = e^{2x} \Longrightarrow y'(x) = 2e^{2x}$, y $y''(x) = 4e^{2x}$. Como $y'' - y' - 2y = 0 \Longrightarrow 4e^{2x} - 2e^{2x} - 2(e^{2x}) = 4e^{2x} - 2e^{2x} - 2e^{2x} = 0$, entonces $y_2(x) = e^{2x}$ es solución.
Por el teorema de superposición para ecuaciones homogéneas sabemos que la combinación lineal $c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ también es una solución, es decir, $y_c = c_1e^{-x} + c_2e^{2x}$ es solución o solución complementaria de la ecuación dada.

b. Revisemos la ecuación completa (no homogénea) $y'' - y' - 2y = 4x$.
Como se supone que $y_p = ax + b$ es una solución particular de la ecuación completa, debemos encontrar los valores de a y b :
$y_p = ax + b \Longrightarrow y_p' = a$, y $y_p'' = 0$. Reemplazando en $y'' - y' - 2y = 4x \Longrightarrow$
$0 - a - 2(ax + b) = 4x \Longrightarrow a - 2ax - 2b = 4x \Longrightarrow (-2b + a) - (2a)x = 4x$, entonces igualando los coeficientes en x nos queda que
$-2b + a = 0$, y $-(2a) = 4 \Longrightarrow a = -2$.
Como $-2b + a = 0 \Longrightarrow b = -\frac{a}{2} \Longrightarrow b = -\frac{-2}{2} \Longrightarrow b = 1$, luego la solución particular es $y_p = -2x + 1$, y la solución general de la ecuación completa no homogénea $y'' - y' - 2y = 4x$ es $y_c + y_p$, es decir,

$$y = c_1e^{-x} + c_2e^{2x} - 2x + 1).$$

Ejemplo 3. Verificación de soluciones. A simple vista o a base de ensayos hallar una solución particular de la ecuación diferencial.[3]

$$y'' - 2y = \sin x.$$

Recordemos que al derivar la función $\sin x$ siempre llegamos a una función $\cos x$ y cuando derivamos la función $\cos x$ siempre llegamos a una función $\sin x$. Esta idea, y la experiencia que usted ya debe ir ganando después de haber tratado durante el módulo con estas funciones trigonométricas, nos hace pensar que la solución particular puede ser de la forma $y_p = A\cos x + B\sin x$. Entonces calculemos y_p', y y_p'' :

$y_p = A\cos x + B\sin x \Longrightarrow y_p' = -A\sin x + B\cos x$, y $y_p'' = -A\cos x - B\sin x$. Como $y'' - 2y = \sin x \Longrightarrow (-A\cos x - B\sin x) - 2(A\cos x + B\sin x) = \sin x \Longrightarrow$

$-A\cos x - B\sin x - 2A\cos x - 2B\sin x = \sin x \Longrightarrow -3A\cos x - 3B\sin x = \sin x$, entonces igualando los coeficientes en $\sin x$ y $\cos x$ nos queda que:

[3] Ejercicio número 4c de la sección de ejercicios propuestos del capítulo 3 del libro Ecuaciones diferenciales de Simmons, p.89.

$-3A = 0 \implies A = 0$, y $-3B = 1 \implies B = -\frac{1}{3}$, luego la solución particular buscada es $y_p = 0\cos x + -\frac{1}{3}\sin x$, es decir, $y_p = -\frac{1}{3}\sin x$.

Solución general de la ecuación homogénea de segundo orden

El Wronskiano

Supongamos que cada una de las funciones $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$ tiene al menos $n-1$ derivadas. El determinante:

$$w\big(f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)\big) = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1^{'} & f_2^{'} & \cdots & f_n^{'} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ f_1^{n-1} & f_2^{n-1} & \cdots & f_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

en el que aparecen las funciones y sus $n-1$ derivadas inclusive, se llama el wronskiano de las funciones $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$.

Para el caso que nos interesa, la ecuación diferencial homogénea de orden 2, el Wronskiano es:

$$w\big(y_1(x), y_2(x)\big) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1^{'} & y_2^{'} \end{vmatrix} = y_1 \cdot y_2^{'} - y_2 \cdot y_1^{'} .$$

Como se ilustró en ejemplos anteriores, si dos funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$ están definidas sobre algún conjunto de números reales, por ejemplo el intervalo $[a, b]$, y alguna de ellas es múltiplo constante de la otra, es decir, $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ es diferente de cero, se dice que $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son linealmente dependientes. Por otro lado, si ninguna es múltiplo constante de la otra, se afirma que $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son linealmente independientes.

El siguiente teorema nos permite identificar la linealidad o no linealidad de dos soluciones de una ecuación diferencial homogénea de orden 2.

Teorema 4. Soluciones linealmente dependientes

Dos soluciones $y_1(x)$, $y_2(x)$ de la ecuación $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ definidas sobre algún conjunto de números reales, por ejemplo el intervalo $[a, b]$, son linealmente dependientes sobre $[a, b]$ si y solo si su Wronskiano es igual a cero, es decir, si:

$$y_1 \cdot y_2^{'} - y_2 \cdot y_1^{'} = 0.$$

Analicemos la independencia lineal de las funciones que componen la solución general $y = c_1 \sin x + c_2 \cos x$ de la ecuación diferencial $y´´ + y = 0$ sobre cualquier intervalo y encontremos una solución particular con $y(0) = 2, y´(0) = 3$.

Verifiquemos que $y_1(x) = c_1 \sin x$, y $y_2(x) = c_1 \cos x$ son soluciones.

Si $y(x) = c_1 \sin x \implies y´(x) = c_1 \cos x\,, y´´(x) = -c_1 \sin x$.

Como $y´´ + y = 0 \implies -c_1 \sin x + c_1 \sin x = 0$, entonces $y_1(x) = c_1 \sin x$ es solución.

Si $y(x) = c_2 \cos x \implies y´(x) = -c_2 \sin x\,, y´´(x) = -c_2 \cos x$.

Como $y´´ + y = 0 \implies -c_2 \cos x + c_2 \cos x = 0$, entonces $y_2(x) = c_2 \cos x$ es solución.

Para analizar la linealidad o no linealidad de las soluciones, primero revisemos si una solución es múltiplo de la otra.

Como $\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \frac{c_1 \sin x}{c_2 \cos x} = \frac{c_1}{c_2} \tan x$, haciendo $c_1 = c_2 \implies \frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \tan x$, entonces $y_1(x) = c_1 \sin x$ y $y_2(x) = c_1 \cos x$ son soluciones linealmente independientes de $y´´ + y = 0$ en cualquier intervalo $[a, b]$.

Revisemos ahora la linealidad o no linealidad volviendo al teorema 4. El Wronskiano $w\big(y_1(x), y_2(x)\big)$ es:

$$\begin{aligned} w\big(y_1(x), y_2(x)\big) &= \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = \sin x \cdot (-\sin x) - \cos x \cdot \cos x \\ &= -\sin^2 x - \cos^2 x = -(\sin^2 x + \cos^2 x) = -1. \end{aligned}$$

Como el Wronskiano $w\big(y_1(x), y_2(x)\big)$ es diferente de cero, en virtud del teorema 4, concluimos que $y_1(x) = c_1 \sin x$ y $y_2(x) = c_1 \cos x$ son soluciones linealmente independientes de $y´´ + y = 0$.

Ya que $P(x) = 0$ y $Q(x) = 1$ son funciones continuas en $[a, b]$ podemos concluir que $y = c_1 \sin x + c_2 \cos x$ es la solución general de la ecuación diferencial $y´´ + y = 0$ sobre $[a, b]$. Además, como el intervalo $[a, b]$ puede extenderse cuanto se quiera sin llegar a puntos de discontinuidad de $P(x)$ y $Q(x)$, entonces la solución general $y = c_1 \sin x + c_2 \cos x$ es válida para todo número real.

Finalmente queremos encontrar una solución particular con $y(0) = 2, y´(0) = 3$.

Como $y = c_1 \sin x + c_2 \cos x \implies 2 = c_1 \sin 0 + c_2 \cos 0 \implies 2 = c_2$.

Como $y´ = c_1 \cos x - c_2 \sin x \implies 3 = c_1 \cos 0 - c_2 \sin 0 \implies 3 = c_1$.

Entonces la solución particular es $y = 3 \sin x + 2 \cos x$.

Ejemplo 4. Independencia lineal de las soluciones.

Probar que las funciones $y_1(x) = e^x$ y $y_2(x) = e^{-x}$ son soluciones linealmente independientes de $y'' - y = 0$ sobre cualquier intervalo.

Inicialmente verifiquemos que efectivamente $y_1(x) = e^x$ y $y_2(x) = e^{-x}$ son soluciones de $y'' - y = 0$.

Si $y(x) = e^x \implies y'(x) = e^x$, y $y''(x) = e^x$. Como $y'' - y = 0 \implies$

$e^x - e^x = 0$, entonces $y_1(x) = e^x$ es solución.

Si $y(x) = e^{-x} \implies y'(x) = -e^{-x}$, y $y''(x) = e^{-x}$. Como $y'' - y = 0 \implies$

$e^{-x} - e^{-x} = 0$, entonces $y_2(x) = e^{-x}$ es solución.

Para verificar la independencia lineal, encontramos que el cociente entre las dos funciones que son solución es $\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \frac{e^x}{e^{-x}} = e^{x-(-x)} = e^{2x}$, que no es constante. Adicionalmente, calculemos el Wronskiano:

$$w\big(y_1(x), y_2(x)\big) = \begin{matrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{matrix} = \begin{matrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{matrix} = (e^x)\cdot(-e^{-x}) - (e^x)\cdot(e^{-x}) = -e^0 - e^0$$
$$= -2.$$

Como el Wronskiano es diferente de cero, se puede afirmar que las soluciones $y_1(x) = e^x$ y $y_2(x) = e^{-x}$ son linealmente independientes sobre cualquier intervalo; esta última afirmación se concluye ya que tanto $y_1(x) = e^x$ como $y_2(x) = e^{-x}$ son funciones continuas en todo el dominio de los números reales.

Ecuación de Cauchy-Euler

Una ecuación fundamental en el estudio de las ecuaciones diferenciales de segundo orden es la *ecuación diferencial lineal de segundo orden de Cauchy-Euler*, que en su forma general es:

$$ax^2y'' + bxy' + cy = g(x).$$

Los dos siguientes ejemplos ilustran su modo de solución.

Ejemplo 5. Ecuación de Cauchy-Euler.

Demostrar que $y = c_1x + c_2x^2$ es la solución general de la ecuación diferencial $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$, sobre todo intervalo que no contenga al cero y hallar la solución particular para la cual $y(1) = 3, y'(1) = 5$.

La ecuación $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$ es una *ecuación diferencial lineal de segundo orden de Cauchy-Euler*, con $a = 1, b = -2, c = 2$, y $g(x) = 0$.

Como hemos procedido en ejemplos anteriores, al observar los factores lineales, podemos pensar en una sustitución adecuada ya que éstos son polinomios. Supongamos entonces que una solución puede ser de la forma $y = x^m$. Al calcular las dos primeras derivadas nos queda:

$y = x^m \Longrightarrow y' = mx^{m-1}, y'' = m(m-1)x^{m-2}$. Reemplazando en la ED:

$$\begin{aligned} x^2y'' - 2xy' + 2y = 0 \Longrightarrow\ & x^2[m(m-1)x^{m-2}]' - 2x[mx^{m-1}] + 2x^m \\ &= m(m-1)x^{2+m-2} - 2mx^{1+m-1} + 2x^m = x^m[m(m-1) - 2m + 2] \\ &= x^m(m^2 - m - 2m + 2) = x^m(m^2 - 3m + 2) = 0 \Longrightarrow \end{aligned}$$

$(m^2 - 3m + 2) = 0$. Los valores que hacen cero[4] esta última expresión son:

$m_1 = 1, m_2 = 2$.

Luego las soluciones son $y_1(x) = x^{m_1}$, y $y_2(x) = x^{m_2}$, es decir,

$y_1(x) = x^1$, y $y_2(x) = x^2$, y la solución general nos queda

$$y = c_1x + c_2x^2.$$

Comprobación. Verifiquemos que efectivamente $y = c_1x + c_2x^2$ es la solución de la ED de *Cauchy-Euler:*

Como $y = c_1x + c_2x^2 \Longrightarrow y' = c_1 + 2c_2x, y'' = 2c_2$. Reemplazando en

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 0 \Longrightarrow x^2(2c_2) - 2x(c_1 + 2c_2x) + 2(c_1x + c_2x^2) =$$

$2c_2x^2 - 2c_1x - 4c_2x^2 + 2c_1x + 2c_2x^2 = 0$. Lo que demuestra que

---

[4] En la solución de varias ecuaciones diferenciales de segundo orden que aparecerán en lo que falta, se presenta con mucha frecuencia la necesidad de factorizar una ecuación de segundo grado de la forma $y = ax^2 + bx + c$, ya sea buscando los dos factores o usando la fórmula cuadrática

$$m = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

$y = c_1x + c_2x^2$ es solución general de la ecuación sobre cualquier conjunto de números reales en el que no participe el cero. Además, el cociente $\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$ no es constante y muestra que x debe ser diferente de cero para que no haya indeterminación.

Busquemos ahora la solución particular con las condiciones:

$$y(1) = 3, y´(1) = 5.$$

Como $y = c_1x + c_2x^2 \Longrightarrow 3 = c_1 + c_2$.

Como $y´ = c_1 + 2c_2x \Longrightarrow 5 = c_1 + 2c_2$.

La solución del sistema $\left\{\begin{matrix} 3 = c_1 + c_2 \\ 5 = c_1 + 2c_2 \end{matrix}\right\}$ es $c_1 = 1$, y $c_2 = 2$, entonces la solución particular requerida es:

$$y = x + 2x^2.$$

Ejemplo 6. Ecuación de Cauchy-Euler.

Por inspección o por ensayo hallar dos soluciones linealmente independientes de $x^2y´´ - 2y = 0$ sobre el intervalo $[1,2]$ y determine la solución particular que satisface las condiciones iniciales:

$$y(1) = 1, y´(1) = 8.$$

La ecuación $x^2y´´ - 2y = 0$ es una *ecuación diferencial lineal de segundo orden de Cauchy-Euler*, con $a = 1, b = 0, c = -2$, y $g(x) = 0$.

Nuevamente suponemos la solución $y = x^m$.

$y = x^m \Longrightarrow y´ = mx^{m-1}, y´´ = m(m-1)x^{m-2}$. Reemplazando en la ED:

$$\begin{aligned} x^2y´´ - 2y = 0 \Longrightarrow x^2[m(m-1)x^{m-2}] - 2x^m &= m(m-1)x^{2+m-2} - 2x^m \\ &= x^m[m(m-1) - 2] = 0 \Longrightarrow m(m-1) - 2 = m^2 - m - 2 = 0 \Longrightarrow \end{aligned}$$

$(m-2)(m+1) = 0$. Los valores que hacen cero en esta última expresión son:

$$m_1 = -1, m_2 = 2.$$

Luego las soluciones son $y_1(x) = x^{m_1}$, y $y_2(x) = x^{m_2}$, es decir,

$y_1(x) = x^{-1}$, y $y_2(x) = x^2$, y la solución general nos queda:

$$y = c_1\frac{1}{x} + c_2x^2.$$

El cociente $\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \frac{\frac{1}{x}}{x^2} = \frac{1}{x^3}$ no es constante y muestra que las soluciones son linealmente independientes.

Adicionalmente, calculemos el wronskiano:

$$w\big(y_1(x), y_2(x)\big) = \begin{vmatrix} \frac{1}{x} & x^2 \\ -\frac{1}{x^2} & 2x \end{vmatrix} = \frac{1}{x} \cdot (2x) - \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot x^2 = 2 + 1 = 3.$$

Como el wronskiano es diferente de cero, se puede afirmar que las soluciones $y_1(x) = x^{-1}$ y $y_2(x) = x^2$ son linealmente independientes sobre cualquier intervalo que no contenga al cero.

Finalmente encontremos la solución particular con $y(1) = 1, y'(1) = 8$.

Como $y = c_1 \frac{1}{x} + c_2 x^2 \Longrightarrow 1 = c_1 + c_2$.

Como $y' = -c_1 \frac{1}{x^2} + 2c_2 x \Longrightarrow 8 = -c_1 + 2c_2$.

La solución del sistema $\left\{\begin{matrix} 3 = c_1 + c_2 \\ 8 = -c_1 + 2c_2 \end{matrix}\right\}$ es $c_1 = -2$, y $c_2 = 3$, entonces la solución particular requerida es:

$$y = -2\frac{1}{x} + 3x^2.$$

Uso de una solución conocida para hallar otra

Como usted sospechará a estas alturas, no es sencillo encontrar una regla general que nos proporcione la posibilidad de encontrar las soluciones $y_1(x)$ y $y_2(x)$ de la ecuación diferencial:

$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0.$

Sin embargo, a sabiendas de la existencia de dos soluciones, $y_1(x)$ y $y_2(x)$, linealmente independientes para $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$, sí existe un procedimiento para encontrar $y_2(x)$ si se conoce $y_1(x)$.

Si Suponemos que $y_2(x) = uy_1(x)$ es una solución de $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$, podemos encontrar la función u mediante la integral:

$$u = \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P(x)dx}\, dx.$$

Como se puede verificar de manera muy sencilla, una solución evidente para la ecuación diferencial $xy'' + 3y' = 0$ es $y_1 = 1$. Al dividir la ecuación por x esta se transforma en $y'' + \frac{3}{x}y' = 0$, con lo que $P(x) = \frac{3}{x}$. Entonces:

$$u = \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P(x)dx}\, dx = \int \frac{1}{1^2} e^{-\int \frac{3}{x}dx}\, dx = \int e^{-3\int \frac{dx}{x}}\, dx = \int e^{-3\ln x} dx =$$

$\int e^{\ln x^{-3}} dx \Longrightarrow u = \int x^{-3} dx = \frac{x^{-2}}{-2} \Longrightarrow u = -\frac{1}{2x^2}$. Como $y_2(x) = uy_1(x) \Longrightarrow$

$y_2(x) = -\frac{1}{2x^2}(1) \Longrightarrow y_2(x) = -\frac{1}{2x^2}$, por lo tanto, la solución general es:

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \Longrightarrow y = c_1(1) + c_2\left(-\frac{1}{2x^2}\right) \Longrightarrow y = c_1 - \frac{c_2}{2x^2} \Longrightarrow y = c_1 - \frac{c_3}{x^2}.$$

En el siguiente ejemplo, vamos a resolver una ecuación diferencial de segundo orden en la que las funciones que aparecen dependientes de la variable x no se muestran como alguna combinación de otras funciones sino como una función general $f(x)$.

Ejemplo 7. Hallar la solución general de la ecuación diferencial.[5]

$$y'' - f(x)y' + [f(x) - 1]y = 0$$

Debido a la forma de esta ecuación, como es costumbre suponemos que una de sus soluciones dependan de la función exponencial; en efecto vamos a suponer que una solución es $y_1 = e^x$. Ahora verifiquemos que en efecto lo es:

Si $y(x) = e^x \Longrightarrow y'(x) = e^x$, y $y''(x) = e^x$. Como $y'' - f(x)y' + [f(x) - 1]y = 0$

$\Longrightarrow e^x - (e^x)(e^x) + [e^x - 1]e^x = e^x - e^{2x} + e^{2x} - e^x = 0$, entonces $y_1(x) = e^x$ es solución.

Si Suponemos que $y_2(x) = uy_1(x)$ es una solución de $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$, podemos encontrar la función u mediante la integral $u = \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P(x)dx}\, dx$, advirtiendo que $P(x) = -f(x)$.

$u = \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P(x)dx}\, dx = \int \frac{1}{(e^x)^2} e^{-\int -f(x)dx}\, dx = \int \frac{1}{e^{2x}} e^{\int f(x)dx}\, dx =$
$\int e^{-2x}\, e^{\int f(x)dx} dx \Longrightarrow u = \int e^{-2x + \int f(x)dx} dx$. Como $y_2(x) = y_1(x) \cdot u$, entonces:

$y_2(x) = e^x \int e^{-2x+\int f(x)dx} dx$. La solución general es $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \Longrightarrow$

[5] Ejercicio número 11 de la sección de ejercicios propuestos del capítulo 3 del libro Ecuaciones diferenciales de Simmons, p.97.

$$y = c_1 e^x + c_2 e^x \int e^{-2x+\int f(x)dx} dx.$$

Ejemplo 8. Si n es un entero positivo, hallar dos soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial.[6]

$$xy'' - (x+n)y' + ny = 0.$$

Al dividir la ecuación por x esta se transforma en

$$y'' - \left(\frac{x+n}{x}\right)y' + \frac{n}{x}y = 0 \Longrightarrow \; y'' - \left(1+\frac{n}{x}\right)y' + \frac{n}{x}y = 0$$

Nuevamente podemos suponer que una solución es $y_1 = e^x$. Ahora verifiquemos que en efecto lo es:

Si $y(x) = e^x \; \Longrightarrow y'(x) = e^x$, y $y''(x) = e^x$. Como $y'' - \left(1+\frac{n}{x}\right)y' + \frac{n}{x}y = 0$

$\Longrightarrow e^x - \left(1+\frac{n}{x}\right)(e^x) + \frac{n}{x}e^x = e^x - e^x - \frac{n}{x}e^x + \frac{n}{x}e^x = 0$, entonces $y_1(x) = e^x$ es solución. Busquemos la función u, sabiendo que $P(x) = -\left(1+\frac{n}{x}\right)$.

$$u = \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P(x)dx} dx = \int \frac{1}{(e^x)^2} e^{-\int -\left(1+\frac{n}{x}\right)dx} dx = \int \frac{1}{e^{2x}} e^{\int\left(1+\frac{n}{x}\right)dx} dx \Longrightarrow$$

$$u = \int \frac{1}{e^{2x}} e^{\int\left(1dx+n\frac{dx}{x}\right)} dx = \int e^{-2x} e^{\int\left(1dx+n\frac{dx}{x}\right)} dx = \int e^{-2x} e^{x+n\ln x} \Longrightarrow$$

$$u = \int e^{-2x+x} e^{\ln x^n} \Longrightarrow u = \int e^{-x} x^n \; \Longrightarrow u = \int x^n e^{-x}.$$

Como $y_2(x) = y_1(x) \cdot u$, entonces $y_2(x) = e^x \int x^n e^{-x}\, dx$. La solución general es $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \Longrightarrow$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^x \int x^n e^{-x} dx.$$

---

[6] Ejercicio número 10 de la sección de ejercicios propuestos del capítulo 3 del libro Ecuaciones diferenciales de Simmons, p.97.

3

Unidad 3

Ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden (parte II)

Ecuaciones Diferenciales

Autor: Luis Guillermo Caro Pineda

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina

MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Introducción

Continuamos con los métodos que nos permiten resolver ecuaciones diferenciales de segundo orden.

Iniciamos con el estudio de las ecuaciones diferenciales homogéneas con coeficientes constantes de la forma $y'' + py' + qy = 0$, que nos conduce a la ecuación característica $m^2 + pm + q = 0$; analizaremos sus tres posibles soluciones dependiendo de la naturaleza del discriminante $p^2 - 4q$. Luego avanzamos con el método de los coeficientes indeterminados, un procedimiento que permite resolver ecuaciones diferenciales no homogéneas de segundo orden, es decir, ecuaciones como:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x),$$

en las que $R(x) \neq 0$, y los coeficientes $P(x)$ y $Q(x)$ son valores constantes p y q, es decir, ecuaciones de la forma:

$$y'' + py' + qy = R(x).$$

Finalmente, estudiaremos un método mucho más potente para resolver:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x),$$

que no discrimina quienes sean $P(x)$ y $Q(x)$, es decir, pueden o no ser constantes sino funciones que dependan de x, pero dejando como única restricción que se conozca la solución complementaria y_c, de la ecuación homogénea $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$. Este procedimiento se conoce como el método de variación de parámetros.

Recomendaciones metodológicas

La presente cartilla, Ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden (parte II), presenta tres métodos muy eficaces para resolver ecuaciones diferenciales de segundo orden. Se desarrolla a través de explicaciones de los fundamentos teóricos y la solución de ejemplos que ilustran los procedimientos para resolver ecuaciones diferenciales de segundo orden.

Es importante que sea muy minucioso con el desarrollo teórico propuesto, ya que es un requisito fundamental en la exposición de los ejercicios resueltos; éstos presentan un nivel de exigencia superior al anterior para cada sección revisada y requiere de la revisión de las secciones estudiadas en las cartillas precedentes.

Para garantizar su éxito en la revisión y estudio de los temas seleccionados, usted debe realizar una revisión exhaustiva de la cartilla, las lecturas complementarias y los recursos audiovisuales, ya que además de ubicar las definiciones pertinentes, encontrará explicaciones desde varios autores y ejercicios resueltos que despejarán dudas. El desarrollo del módulo exige disciplina y trabajo permanente, usted debe acostumbrarse a la revisión frecuente de los recursos y a la realización de las actividades en los tiempos señalados. Se convierte en requisito indispensable el uso de un programa de Cálculo simbólico como Geogebra, Derive, Matlab, etc.

Además de revisar los textos propuestos en la bibliografía, usted debe estudiar de manera permanente los libros digitales *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado, novena edición,* de Dennis Zill y *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas* de George Simmons; que se encuentran en pdf en la sección de recursos para el aprendizaje.

Del libro de Simmons se resuelven algunos ejercicios propuestos de las secciones finales de los capítulos seleccionados.

En la sección de recursos aparecen aplicaciones de las ecuaciones diferenciales estudiadas. En especial debe revisar el video "Ecuaciones diferenciales: Oscilaciones amortiguadas" que se encuentra en https://www.youtube.com/watch?v=vgScZNcEIT8, y los archivos en pdf: *Lectura complementaria 1, EDO de segundo orden,* y *El péndulo simple*.

Desarrollo temático

Ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden (parte II)

Ecuaciones diferenciales homogéneas con coeficientes constantes

En la cartilla anterior revisamos con detalle la *ecuación diferencial homogénea de segundo orden:*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0,$$

que se presenta con mayor frecuencia de la forma:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0.$$

En esta sección es de nuestro interés el estudio de estas ecuaciones en las que los coeficientes de y' y y son términos de valor constante p y q, es decir, que no dependen de la variable independiente x. Ecuaciones de la forma:

$$y'' + py' + qy = 0 \ (1).$$

La ecuación (1) se llama ecuación diferencial homogénea con coeficientes constantes.

Para iniciar el proceso de solución de (1) es útil recordar que la función exponencial tiene la propiedad que establece que sus derivadas son múltiplos de ella misma, es decir, en los resultados de las derivadas de funciones exponenciales aparecen funciones exponenciales. Entonces es conveniente pensar que una solución para (1) puede ser precisamente una función exponencial de la forma $y = e^{mx}$, en la que debemos encontrar un valor adecuado para el valor m.

Siendo así, encontremos y' y y'' a partir de $y = e^{mx}$. Entonces:

$y = e^{mx} \Longrightarrow y' = me^{mx} \Longrightarrow y'' = m^2e^{mx}$. Reemplazando en (1) nos queda:

$m^2e^{mx} + pme^{mx} + qe^{mx} = e^{mx}(m^2 + pm + q) = 0$, como $e^{mx} \neq 0$, entonces:

$$m^2 + pm + q = 0 \ (2).$$

La ecuación (2) se llama la ecuación característica de (1). Esta es una ecuación de segundo grado[1]. Su solución es de la forma:

---

[1] se presenta con mucha frecuencia la necesidad de factorizar una ecuación de segundo grado de la forma $y = ax^2 + bx + c$, ya sea buscando los dos factores o usando la fórmula cuadrática

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

$$m = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \text{ (3).}$$

(3) tiene dos soluciones, $m_1 = \frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}$ y $m_2 = \frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}$.

Como recordará, al revisar el comportamiento del discriminante $p^2 - 4q$ en la ecuación (3), tenemos tres opciones:

Caso 1. Si $\boldsymbol{p^2 - 4q > 0}$, las dos soluciones, m_1 y m_2 son raíces reales y distintas, entonces tenemos las dos soluciones:

$y_1 = e^{m_1 x}$ y $y_2 = e^{m_2 x}$.

Como $\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{m_1 x}}{e^{m_2 x}} = e^{(m_1 - m_2)x}$, diferente de cero, estamos seguros que las soluciones son linealmente independientes, luego la solución general es:

$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}$.

Caso 2. Si $\boldsymbol{p^2 - 4q = 0}$, las dos soluciones, m_1 y m_2 son raíces reales iguales, entonces tenemos solo una solución, $y = e^{mx}$, donde $m = -\frac{p}{2}$.

Podemos obtener otra solución linealmente independiente ya que conocemos una solución. Si Suponemos que $y_2(x) = u y_1(x)$, en la cartilla anterior vimos que podemos encontrar u mediante:

$u = \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P(x)dx}\, dx$, con $p = -2m$.

Como $y_1(x) = e^{mx}$, entonces $u = \int \frac{1}{(e^{mx})^2} e^{-\int -2mdx}\, dx = \int \frac{1}{e^{2mx}} e^{\int 2mdx}\, dx \Longrightarrow$

$$u = \int \frac{1}{e^{2mx}} e^{2mx}\, dx \Longrightarrow u = \int 1dx \Longrightarrow u = x.$$

Como $y_2(x) = u y_1(x) \Longrightarrow y_2(x) = x e^{mx}$, es otra solución, luego la solución general nos queda:

$y = c_1 e^{mx} + c_2 x e^{mx}$.

Advierta que las dos soluciones son linealmente independientes:

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{mx}}{x e^{mx}} = \frac{1}{x}.$$

Caso 3. Si $\boldsymbol{p^2 - 4q < 0}$, las dos soluciones, m_1 y m_2 son raíces complejas y distintas, entonces tenemos las dos soluciones $y_1 = e^{m_1 x}$ y $y_2 = e^{m_2 x}$.

En este caso, las dos soluciones de (3) son dos raíces complejas conjugadas, con $m_1 = \alpha + \beta i$ y $m_2 = \alpha - \beta i$, con lo que tenemos:

$y_1 = e^{(\alpha+\beta i\,)x}$ y $y_2 = e^{(\alpha+\beta i\,)x}$. Empleando la fórmula de Euler[2] estas soluciones se transforman en:

$$y_1 = e^{(\alpha+\beta i\,)x} = e^{\alpha x}e^{i(\beta x)} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x).$$

$$y_2 = e^{(\alpha-\beta i\,)x} = e^{\alpha x}e^{-i(\beta x)} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x).$$

Como $\frac{y_1+y_2}{2} = \frac{e^{\alpha x}}{2}[\cos\beta x + i\sin\beta x - \cos\beta x - i\sin\beta x] = e^{\alpha x}(\cos\beta x)$, y

$\frac{y_1-y_2}{2i} = \frac{e^{\alpha x}}{2i}[\cos\beta x + i\sin\beta x - \cos\beta x - i\sin\beta x] = e^{\alpha x}(\sin\beta x)$, entonces las dos soluciones son linealmente independientes, luego la solución general es:

$$y = e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x + c_2\sin\beta x).$$

En los ejemplos que vienen solucionaremos tres ecuaciones diferenciales homogéneas con coeficientes constantes, cada una ilustrando el proceso para cada uno de los tres casos.

Ejemplo 1. Solución de una ecuación diferencial homogénea con coeficientes constantes caso 1.

Resolver[3] $y'' - 5y' + 6y = 0, y(1) = e^2\,, y'(1) = 3e^2$.

Como $p^2 - 4q > 0$, es decir, $(-5)^2 - 4\cdot 6 = 25 - 24 = 1 > 0$, las dos soluciones, m_1 y m_2 son raíces reales y distintas.

La ecuación característica de $y'' - 5y' + 6y = 0$ es $m^2 - 5m + 6 = 0$ que se puede factorizar $(m-3)(m-2) = 0 \implies m_1 = 3$ y $m_2 = 2$. Las soluciones son:

$y_1 = e^{3x}$ y $y_2 = e^{2x}$.

y la solución general nos queda:

$y = c_1e^{3x} + c_2e^{2x}$.

Falta resolver la solución particular con , $y(1) = e^2\,, y'(1) = 3e^2$.

---

[2] La fórmula de Euler es $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

[3] Ejercicio número 2a de la sección de ejercicios propuestos del capítulo 3 del libro Ecuaciones diferenciales de Simmons, p.101.

Como $y = c_1e^{3x} + c_2e^{2x} \Longrightarrow y' = 3c_1e^{3x} + 2c_2e^{2x} \Longrightarrow$

$$e^2 = c_1e^3 + c_2e^2 = e^2(c_2 + c_1e) \Longrightarrow 1 = c_2 + c_1e$$

$$3e^2 = 3c_1e^3 + 2c_2e^2 = e^2(2c_2 + 3c_1e) \Longrightarrow 3 = 2c_2 + 3c_1e.$$

Nos quedó un sistema de ecuaciones lineales 2x2:

$\begin{Bmatrix} 1 = c_2 + c_1e \\ 3 = 2c_2 + 3c_1e \end{Bmatrix} \Longrightarrow \begin{Bmatrix} -3 = -3c_2 - 3c_1e \\ 3 = 2c_2 + 3c_1e \end{Bmatrix} \Longrightarrow 0 = -c_2 \Longrightarrow c_2 = 0$ y $c_1 = \frac{1}{e}$.

Por lo tanto la solución particular nos queda:

$$y = \frac{1}{e}e^{3x} + 0e^{2x} \Longrightarrow y = e^{3x} - 1.$$

Ejemplo 2. Solución de una ecuación diferencial homogénea con coeficientes constantes caso 2.

Resolver[4] $y'' - 6y' + 9y = 0, y(0) = 0 , y'(0) = 5.$

Como $p^2 - 4q = 0$, es decir, $(-6)^2 - 4 \cdot 9 = 36 - 36 = 0$, las dos soluciones, m_1 y m_2 son raíces reales iguales, entonces tenemos solo una solución, $y = e^{mx}$, donde $m = -\frac{p}{2}$, es decir $m = -\frac{-6}{2} \Longrightarrow m = 3$, con lo que la solución es $y = e^{3x}$. Sabemos que otra solución es de la forma $y_2(x) = xe^{mx}$, es decir, $y_2(x) = xe^{3x}$, por lo que su solución general es:

$y = c_1e^{3x} + c_2xe^{3x}.$

Falta resolver la solución particular con , $y(0) = 0 , y'(0) = 5.$

Como $y = c_1e^{3x} + c_2xe^{3x} \Longrightarrow y' = 3c_1e^{3x} + c_2[x(3e^{3x}) + e^{3x}] \Longrightarrow$

$$y' = e^{3x}(3c_1 + 3c_2x + c_2).$$

De $y = c_1e^{3x} + c_2xe^{3x}$ nos queda $0 = c_1e^0 + c_2 0e^0 \Longrightarrow c_1 = 0.$

De $y' = e^{3x}(3c_1 + 3c_2x + c_2)$ nos queda $5 = e^{3(0)}(3c_1 + 3c_2 0 + c_2) \Longrightarrow$

$$5 = 3c_1 + c_2 \Longrightarrow 5 = 3(0) + c_2 \Longrightarrow c_2 = 5.$$

La solución particular con $y(0) = 0 , y'(0) = 5$ es $y = 5xe^{3x}$.

---

[4] Ejercicio número 2c de la sección de ejercicios propuestos del capítulo 3 del libro Ecuaciones diferenciales de Simmons, p.101.

Ejemplo 3. Solución de una ecuación diferencial homogénea con coeficientes constantes caso 3.

Resolver[5] $y'' + 4y' + 5y = 0, y(0) = 1\,, y'(0) = 0.$

Como $p^2 - 4q < 0$, es decir, $(4)^2 - 4 \cdot 5 = 16 - 20 = -4$, las dos soluciones son dos raíces complejas conjugadas, con $m_1 = \alpha + \beta i$ y $m_2 = \alpha - \beta i$.

La ecuación característica de $y'' + 4y' + 5y = 0$ es $m^2 + 4m + 5 = 0$.

Encontremos[6] m_1 y m_2.

$$m^2 + 4m + 5 = 0 \Longrightarrow m^2 + 4m + 4 + 1 = 0 \Longrightarrow (m+2)^2 + 1 = 0 \Longrightarrow$$

$$(m+2)^2 = -1 \Longrightarrow (m+2) = \pm\sqrt{-1} \Longrightarrow m = -2 \pm \sqrt{-1} \Longrightarrow m = -2 \pm i \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{Bmatrix} m_1 = -2 + i \\ m_2 = -2 - i \end{Bmatrix} \Longrightarrow \begin{Bmatrix} \alpha + \beta i = -2 + i \\ \alpha - \beta i = -2 - i \end{Bmatrix} \Longrightarrow 2\alpha = -4 \Longrightarrow \alpha = -2, \beta = 1.$$

Entonces la solución general es $y = e^{-2x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$.

Busquemos la solución particular con $y(0) = 1\,, y'(0) = 0$.

De $y = e^{-2x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$ nos queda $1 = e^{-2(0)}(c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0) \Longrightarrow$

$$1 = 1(c_1(1) + c_2(0)) \Longrightarrow c_1 = 1.$$

Como $y' = -2e^{-2x}[c_1 \cos x + c_2 \sin x] + [e^{-2x}(-c_1 \sin x + c_2 \cos x)]$, entonces

$$0 = -2e^{-2(0)}[c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0] + \left[e^{-2(0)}(-c_1 \sin 0 + c_2 \cos 0)\right] \Longrightarrow$$

$$0 = -2[c_1(1) + c_2(0)] + \left[1\left(-c_1(0) + c_2(1)\right)\right] \Longrightarrow 0 = -2c_1 + c_2 \Longrightarrow c_2 = 2c_1 \Longrightarrow c_2 = 2.$$

Por lo tanto la solución particular es:

$$y = e^{-2x}(\cos x + 2 \sin x).$$

---

[5] Ejercicio número 2d de la sección de ejercicios propuestos del capítulo 3 del libro Ecuaciones diferenciales de Simmons, p.101.

[6] No sobra recordar de su curso de álgebra una forma alternativa de encontrar las raíces de la ecuación sin acudir a la fórmula cuadrática.

Método de los coeficientes indeterminados

En secciones anteriores hemos visto métodos que permiten resolver ecuaciones de la forma:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x) \ (4),$$

en las que los coeficientes $P(x)$ y $Q(x)$ hacen que la solución buscada esté dada por expresiones muy sencillas, diferentes de la solución trivial $y = 0$ o sean ellas mismas valores constantes. De igual forma hemos resuelto ecuaciones como (1) en las que $R(x) = 0$.

El método de los coeficientes indeterminados es un procedimiento que permite resolver ecuaciones diferenciales no homogéneas de segundo orden, es decir, ecuaciones como (4) en las que $R(x) \neq 0$, y los coeficientes $P(x)$ y $Q(x)$ son valores constantes p y q, es decir, ecuaciones de la forma:

$$y'' + py' + qy = R(x) \ (5).$$

En general, para (5), el método de los coeficientes indeterminados es útil cuando $R(x)$ es una función exponencial, un polinomio de algún grado n, una función $\sin u$, una función $\cos u$, o una combinación de tales funciones como $x^n, x^n e^{ax}, x^n e^{ax}\cos\beta x, x^n e^{ax}\sin\beta x$, con n un número entero no negativo y α y β números reales.

No es aplicable cuando $R(x)$ es una función o combinación de funciones como $\ln x$, $\frac{1}{x}, \tan x, \sin^{-1} x, \cos^{-1} x$, etc.

Por ejemplo pensemos en una solución para la ecuación no homogénea de la forma:

$$y'' + py' + qy = e^{ax} \ (6).$$

Como los procesos de integración y derivación de funciones que contienen exponenciales como e^{ax} conservan y reproducen exponenciales con algún cambio en el coeficiente numérico, es natural pensar que $y_p = Ae^{ax}$ puede ser una posible solución.

Al coeficiente A se le llama el coeficiente indeterminado que debemos encontrar de tal manera que $y_p = Ae^{ax}$ satisfaga (6).

Si suponemos $y_p = Ae^{ax}$ como posible solución de (6), calculemos y', y'' :

$$y = Ae^{ax} \Longrightarrow y' = Aae^{ax} \Longrightarrow y'' = Aa^2 e^{ax}$$

Sustituyendo y, y', y'' en $y'' + py' + qy = e^{ax}$ nos queda:

$$Aa^2 e^{ax} + pAae^{ax} + qAe^{ax} = e^{ax} \Longrightarrow A(a^2 + pa + q)e^{ax} = e^{ax} \Longrightarrow$$

$$A = \frac{1}{a^2 + pa + q} \ (7).$$

(7) funcionará mientras $a^2 + pa + q \neq 0$, ya que si $a^2 + pa + q = 0$, el valor a es una raíz de la ecuación[7] auxiliar $m^2 + pm + q = 0$.

Como vimos en secciones anteriores, cuando la ecuación característica tiene una raíz doble (m_1 y m_2), una segunda solución de la ecuación homogénea se obtiene multiplicando la primera solución por x; como la primera solución propuesta es $y = Ae^{ax}$, la segunda debe ser $y_p = Axe^{ax}$.

Si suponemos $y_p = Axe^{ax}$ como posible solución de (6), calculemos $y´, y´´$:

$$y = Axe^{ax} \Longrightarrow y´ = A[(1)e^{ax} + x(ae^{ax})] = Ae^{ax}(1 + ax) \Longrightarrow$$

$$y´´ = Ae^{ax}(a) + (1 + ax)aAe^{ax} = Ae^{ax}(a + a + a^2x) = Ae^{ax}(2a + a^2x).$$

Sustituyendo $y, y´, y´´$ en $y´´ + py´ + qy = e^{ax}$ nos queda

$$A(2a + a^2x)e^{ax} + p[A(1 + ax)]e^{ax} + q(Ax)e^{ax} = e^{ax} \Longrightarrow$$

$$2aAe^{ax} + a^2Axe^{ax} + pAe^{ax} + paAxe^{ax} + q(Ax)e^{ax} = e^{ax} \Longrightarrow$$

$$A(a^2 + pa + q)xe^{ax} + A(2a + p)e^{ax} = e^{ax}.$$

En esta última expresión, comparamos los coeficientes de los términos a cada lado de la igualdad y vemos que $a^2 + pa + q = 0$, ya que el término xe^{ax} no aparece en la miembro derecho y partimos que a es raíz de $m^2 + pm + q = 0$). Además, $A(2a + p) = 1$ por los coeficientes correspondientes de e^{ax}.

Entonces $A = \frac{1}{(2a+p)}$ es un coeficiente válido para $y = Axe^{ax}$, excepto cuando $a = -\frac{p}{2}$, es decir, cuando a es raíz doble de $m^2 + pm + q = 0$.

Nuevamente, cuando la ecuación característica tiene una raíz doble (m_1 y m_2), una segunda solución de la ecuación homogénea se obtiene multiplicando esta solución por x; $y_p = Ax^2e^{ax}$.

Si suponemos $y_p = Ax^2e^{ax}$ como posible solución de (6), calculemos $y´, y´´$:

$$y = Ax^2e^{ax} \Longrightarrow y´ = A[(2x)e^{ax} + ax^2(e^{ax})] \Longrightarrow$$

$$y´´ = A[2e^{ax} + 2axe^{ax} + 2axe^{ax} + a^2x^2e^{ax}].$$

---

[7] Recuerde que la ecuación característica de la ecuación homogénea $y´´ + py´ + qy = 0$, es $m^2 + pm + q = 0$.

Al reemplazar en $y'' + py' + qy = e^{ax}$ y agrupar[8] términos queda:

$$A(a^2 + pa + q)x^2e^{ax} + 2A(2a + p)xe^{ax} + 2Ae^{ax} = e^{ax}.$$

Como hemos supuesto que a es raíz doble de $m^2 + pm + q = 0$, ambas expresiones $a^2 + pa + q$, y $2a + p$, son nulas, y por tanto $2Ae^{ax} = e^{ax}$, con lo que $A = \frac{1}{2}$.

Al resumir los resultados encontrados, tenemos:

Si a no es raíz de $m^2 + pm + q = 0$, entonces $y_p = Ae^{ax}$.

Si a es raíz simple de $m^2 + pm + q = 0$, entonces $y_p = Axe^{ax}$.

Si a es raíz doble de $m^2 + pm + q = 0$, entonces $y_p = Ax^2e^{ax}$.

Para utilizar este método debemos recordar que para resolver una ecuación diferencial no homogénea primero se determina la solución complementaria y_c de la ecuación homogénea asociada, y luego se establece alguna solución particular de la ecuación diferencial no homogénea.

La solución general de $y'' + py' + qy = R(x)$ en algún intervalo $[a, b]$ de números reales es $y = y_c + y_p$.

Ejemplo 4. Solución de una ecuación diferencial no homogénea con $R(x)$ una función exponencial.

Encontrar la solución general[9] de $y'' + 10y' + 25y = 14e^{-5x}$ (8).

Solucionemos la ecuación homogénea asociada $y'' + 10y' + 25y = 0$. Su ecuación característica es $m^2 + 10m + 25 = 0 \Longrightarrow (m + 5)^2 = 0 \Longrightarrow m = -5$, lo que nos lleva a la solución $y_1 = e^{-5x}$. Como vimos en la cartilla anterior, la ecuación auxiliar admite dos soluciones reales repetidas, y sólo podemos hallar una solución por medio de ella, es decir, $y_2(x) = uy_1(x)$, que para este caso es $y_2(x) = x \cdot y_1(x) \Longrightarrow y_2(x) = xe^{-5x}$.

Por lo tanto la solución complementaria de la ecuación diferencial $y'' + 10y' + 25y = 14e^{-5x}$ es $y_c = c_1e^{-5x} + c_2xe^{-5x}$.

Ahora debemos hallar la solución particular y_p. Un análisis inicial nos aproxima a suponer que $y_p = Ae^{-5x}$, sin embargo, es una elección incorrecta porque e^{-5x} ya hace parte de la solución complementaria y_c.

---

[8] Es necesario que usted como estudiante siempre reproduzca y verifique los resultados que se obtienen. Generalmente se cometen algunos errores que pasan desapercibidos o que nadie corrige.

[9] Ejercicio número 1c de la sección de ejercicios propuestos del capítulo 3 del libro Ecuaciones diferenciales de Simmons, p.107.

El paso siguiente es multiplicar Ae^{-5x} por x y suponer que $y_p = Axe^{-5x}$ es solución, pero xe^{-5x} también hace parte de la solución complementaria y_c. Nuevamente multiplicar Axe^{-5x} por x y suponer que $y_p = Ax^2e^{-5x}$ es solución. Esta elección es acertada ya que x^2e^{-5x} no hace parte de la solución complementaria y_c.

Entonces, con $y_p = Ax^2e^{-5x}$, $y_p^{\prime} = 2Axe^{-5x} - 5Ax^2e^{-5x}$, y

$y_p^{\prime\prime} = 2Ae^{-5x} - 10Axe^{-5x} - 10Axe^{-5x} + 25Ax^2e^{-5x}$. Reemplazando en (8) y agrupando términos nos queda:

$(2Ae^{-5x} - 20Axe^{-5x} + 25Ax^2e^{-5x}) + 10(2Axe^{-5x} - 5Ax^2e^{-5x}) + 25(Ax^2e^{-5x}) = 14e^{-5x} \Longrightarrow$

$2Ae^{-5x} - 20Axe^{-5x} + 25Ax^2e^{-5x} + 20\,Axe^{-5x} - 50Ax^2e^{-5x} + 25Ax^2e^{-5x} = 14e^{-5x} \Longrightarrow$

$$2Ae^{-5x} = 14e^{-5x} \Longrightarrow A = 7.$$

Por lo tanto la solución particular es $y_p = 7x^2e^{-5x}$, y la solución general de (8) es de la forma $y = y_c + y_p$, es decir,

$$y = c_1e^{-5x} + c_2xe^{-5x} + 7x^2e^{-5x} \Longrightarrow$$

$$y = e^{-5x}[c_1 + c_2x + 7x^2]$$

Ejemplo 5. Solución de una ecuación diferencial no homogénea con $R(x)$ un polinomio.

Encontrar la solución general[10] de $y^{\prime\prime} - 2y^{\prime} + 5y = 25x^2 + 12$ (9).

Encontremos la solución de la ecuación reducida (homogénea):

$y^{\prime\prime} - 2y^{\prime} + 5y = 0$. Su ecuación característica es $m^2 - 2m + 5 = 0$, que se resuelve como sigue: $m^2 - 2m + 5 = 0 \Longrightarrow m^2 - 2m + 1 + 4 = 0 \Longrightarrow$

$(m-1)^2 + 4 = 0 \Longrightarrow (m-1)^2 = -4 \Longrightarrow m - 1 = \sqrt{-4} \Longrightarrow m = 1 \pm 2i \Longrightarrow$

$$\begin{Bmatrix} m_1 = 1 + 2i \\ m_2 = 1 - 2i \end{Bmatrix} \Longrightarrow \begin{Bmatrix} \alpha = 1 \\ \beta = 2 \end{Bmatrix}.$$

En la sección anterior vimos que la solución general es:

$$y = e^{\alpha x}(c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x).$$

[10] Ejercicio número 1d de la sección de ejercicios propuestos del capítulo 3 del libro Ecuaciones diferenciales de Simmons, p.107.

Para nuestros valores de $\alpha\ = 1, \beta = 2$, la función complementaria y_c, es

$$y_c = e^x(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x).$$

Ahora buscaremos la solución particular, y_p, de la ecuación completa (no homogénea). Como $R(x) = 25x^2 + 12$, un polinomio de segundo grado, debemos suponer que y_p es de esta forma, es decir, $y_p = Ax^2 + Bx + C$. Entonces $y_p^{'} = 2Ax + B,\ y_p^{''} = 2A$. Reemplazando en (9) nos queda

$$2A - 2(2Ax + B) + 5(Ax^2 + Bx + C) = 25x^2 + 12 \Longrightarrow$$

$$2A - 4Ax - 2B + 5Ax^2 + 5Bx + 5C = 25x^2 + 12 \Longrightarrow$$

$$5Ax^2 + (5B - 4A)x + (2A - 2B + 5C) = 25x^2 + 12$$

Al igualar los coeficientes correspondientes, tenemos:

$$\begin{Bmatrix} 5A = 25 \\ A = 5. \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 5B - 4A = 0 \\ 5B = 4A \\ B = \dfrac{4A}{5} \\ B = 4. \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 2A - 2B + 5C = 12 \\ 2(5) - 2(4) + 5C = 12 \\ 5C = \dfrac{10}{5} \\ C = 2. \end{Bmatrix}$$

Por lo tanto, la solución particular, y_p, es $y_p = 5x^2 + 4x + 2$, y la solución general $y = y_c + y_p$, es $y = e^x(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x) + 5x^2 + 4x + 2$.

Ejemplo 6. Solución de una ecuación diferencial no homogénea con $R(x)$ la función $\sin u$.

Si k y b son constantes positivas, hallar la solución general[11] de:

$$y'' + k^2 y = \sin bx \ \ (10).$$

La ecuación homogénea asociada es $y'' + k^2 y = 0$, que tiene como ecuación característica $m^2 + k^2 = 0 \Longrightarrow (m - ki)(m + ki) = 0 \Longrightarrow$

$$\begin{Bmatrix} m_1 = ki \\ m_2 = -ki \end{Bmatrix} \Longrightarrow \begin{Bmatrix} m_1 = 0 + ki \\ m_2 = 0 - ki \end{Bmatrix} \Longrightarrow \begin{Bmatrix} \alpha\ = 0 \\ \beta = k \end{Bmatrix}.$$

Como la solución general es de la forma $y = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$, para nuestros valores de $\alpha\ = 0, \beta = k$, la función complementaria y_c, es:

$$y_c = e^{0x}(c_1 \cos kx + c_2 \sin kx) \Longrightarrow y_c = c_1 \cos kx + c_2 \sin kx.$$

[11] Ejercicio número 2 de la sección de ejercicios propuestos del capítulo 3 del libro Ecuaciones diferenciales de Simmons, p.107.

Busquemos ahora la solución particular y_p. Como $R(x) = \sin bx$ podemos suponer que

$y_p = A\cos bx + B\sin bx \Longrightarrow \boldsymbol{y_p'} = -Ab\sin bx + Bb\cos bx$,

$\boldsymbol{y_p''} = -Ab^2\cos bx \ - Bb^2\sin bx$. Reemplazando en (10) tenemos:

$$= (-Ab^2\cos bx \ - Bb^2\sin bx) + k^2(A\cos bx + B\sin bx) = \sin bx \Longrightarrow$$

$$= -Ab^2\cos bx \ - Bb^2\sin bx + k^2A\cos bx + k^2B\sin bx = \sin bx \Longrightarrow$$

$= A(k^2 - b^2)\cos bx \ + B(k^2 - b^2)\sin bx = \sin bx$. Igualando coeficientes:

$\begin{Bmatrix} A(k^2 - b^2) = 0 \\ A = 0 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} B(k^2 - b^2) = 1 \\ B = \frac{1}{k^2 - b^2} \end{Bmatrix}$, por lo tanto $y_p = A\cos bx + B\sin bx$ nos queda

$y_p = 0\cos bx + \frac{1}{k^2-b^2}\sin bx \Longrightarrow y_p = \frac{\sin bx}{k^2-b^2}$, siempre y cuando $k \neq b$.

La solución general, $y = y_c + y_p$, es:

$y = c_1\cos kx + c_2\sin kx + \frac{\sin bx}{k^2-b^2}$, sólo si $k \neq b$.

Si $k = b$, ahora (10) se transforma en $y'' + k^2y = \sin bx$.

Encontramos que $y_c = c_1\cos kx + c_2\sin kx$, pero como ahora $R(x) = \sin kx$, no podemos suponer que $y_p = A\cos kx + B\sin kx$, porque ésta ya hace parte de la solución complementaria y_c, entonces debemos suponer que:

$$y_p = x(A\cos kx + B\sin kx) \Longrightarrow$$

$$\boldsymbol{y_p'} = A\cos kx + B\sin kx + x(-kA\sin kx + kB\cos kx) \Longrightarrow$$

$$\boldsymbol{y_p'} = A\cos kx + B\sin kx + -kAx\sin kx + kBx\cos kx,$$

$\boldsymbol{y_p''} = -kA\sin kx + kB\cos kx - \ kA\sin kx - k^2Ax\cos kx + kB\cos kx - k^2Bx\sin kx$

$\boldsymbol{y_p''} = -2kA\sin kx + 2kB\cos kx - \ k^2Ax\cos kx - k^2Bx\sin kx$. Volviendo a (10)

$$\begin{aligned} &= (-2kA\sin kx + 2kB\cos kx - \ k^2Ax\cos kx - k^2Bx\sin kx) \\ &\quad + k^2[x(A\cos kx + B\sin kx)] = \sin kx \\ &\quad \Longrightarrow -2kA\sin kx + 2kB\cos kx - k^2Ax\cos kx - k^2Bx\sin kx \\ &\quad + k^2Ax\cos kx + k^2Bx\sin kx = \sin kx \Longrightarrow \end{aligned}$$

$2kB\cos kx - 2kA\sin kx = \sin kx$. Igualando coeficientes:

$\begin{Bmatrix} 2kB = 0 \\ B = 0 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} -2kA = 1 \\ A = \frac{1}{-2k} \end{Bmatrix}$, por lo tanto $y_p = x(A\cos kx + B\sin kx)$ nos queda

$$y_p = -\frac{x\cos kx}{2k}.$$

Entonces la solución general $y = y_c + y_p$, cuando $k = b$, es:

$$y = c_1\cos kx + c_2\sin kx - \frac{x\cos kx}{2k}.$$

Método del anulador

Una ecuación diferencial lineal de orden n se puede escribir como:

$a_nD^ny + a_{n-1}D^{n-1}y + \cdots + a_1D^1y + a_0y = g(x)$, en donde $D^ky = \frac{d^ky}{dx^k}, k = 0,1,\cdots,n$.

También se puede escribir como $L(x) = g(x)$ donde $L(x)$ representa el operador diferencial lineal de orden n:

$$L(x) = a_nD^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1D + a_0.$$

La aplicación de operadores diferenciales permite llegar a la solución particular de ciertos tipos de ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas.

Por ejemplo la ecuación $y'' + 4y' + 4y = 0$, se puede escribir de la forma:

$$(D^2 + 4D + 4)y = 0 \Longrightarrow (D+2)^2y = 0.$$

Operador anulador

Si L es un operador diferencial con coeficientes constantes y f es una función suficientemente diferenciable tal que $L[f(x)] = 0$, se dice que L es un anulador de la función.

Ejemplo 7. Determinar un operador diferencial que anule a

$$5e^{-x}\cos 2x - 9e^{-x}\sin 2x$$

Al examinar las funciones $e^{-x}\cos 2x$ y $e^{-x}\sin 2x$ podemos ver que $\alpha = -1$, y $\beta = 2$, por lo tanto tenemos que el operador anulador buscado debe tener la forma $(D^2 - 2\alpha D + (\alpha^2 + \beta^2))^n$, es decir,

$(D^2-2(-1)D+((-1)^2+(2)^2))^1 \Longrightarrow D^2+2D+5$. Este operador lineal anulará cualquier combinación lineal de las funciones dadas como por ejemplo:

$$5e^{-x}\cos 2x-9e^{-x}\sin 2x$$

Método de variación de parámetros

En la sección anterior se resolvieron ecuaciones no homogéneas, donde $P(x)$ y $Q(x)$ eran valores constantes, es decir, no dependían de x, de la forma:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x).$$

En esta sección estudiaremos un método mucho más potente que no discrimina quienes sean $P(x)$ y $Q(x)$, es decir, pueden o no ser constantes sino funciones que dependan de x, pero dejando como única restricción que se conozca la solución complementaria y_c, de la ecuación homogénea $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$.

Entonces supongamos que por alguno de los métodos vistos hemos logrado la solución complementaria $y_c = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$. El método de variación de parámetros nos permitirá reemplazar las constantes c_1 y c_2 por las funciones $u_1(x)$ y $u_2(x)$ que buscamos de tal manera que:

$y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$ sea la solución para $y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$.

Dejando la búsqueda de la demostración para el estudiante, estas funciones se consiguen así:

$$u_1(x) = \int \frac{-y_2 R(x)}{w(y_1, y_2)}\,dx,$$

$$u_2(x) = \int \frac{y_1 R(x)}{w(y_1, y_2)}\,dx.$$

Recuerde que $w(y_1, y_2)$ representa el wronskiano de y_1 y y_2.

Entonces la solución $y_p = y_1 \int \frac{-y_2 R(x)}{w(y_1,y_2)}dx + y_2 \int \frac{y_1 R(x)}{w(y_1,y_2)}dx$.

Apliquemos este método a la solución de la ecuación diferencial no homogénea $y'' + y = \csc x$.

La ecuación homogénea asociada es $y'' + y = 0$. Esta se resolvió en secciones anteriores, y su solución es $y_c = c_1 \sin x + c_2 \cos x$. Luego $y_1 = \sin x$ y $y_2 = \cos x$, con $y_1' = \cos x$, y $y_2' = -\sin x$.

El wronskiano de y_1 y y_2 es:

$$w(y_1(x), y_2(x)) = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = \sin x \cdot (-\sin x) - \cos x \cdot \cos x$$
$$= -\sin^2 x - \cos^2 x = -(\sin^2 x + \cos^2 x) = -1.$$

Entonces,

$$u_1(x) = \int \frac{-y_2 R(x)}{w(y_1,y_2)} dx \Rightarrow u_1(x) = \int \frac{-\cos x \csc x}{-1} dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \cot x \, dx = \ln \sin x,$$

$$u_2(x) = \int \frac{y_1 R(x)}{w(y_1,y_2)} dx \Rightarrow u_2(x) = \int \frac{\sin x \csc x}{-1} dx = \int \frac{\sin x}{\sin x} dx = -\int dx = -x.$$

Las funciones $u_1(x)$ y $u_2(x)$ encontradas son:

$u_1(x) = \ln \sin x$ y $u_2(x) = -x$.

Por lo tanto la solución buscada es:

$$y_p = \sin x \, [\ln(\sin x)] + \cos x \, (-x) \Rightarrow$$

$$y_p = \sin x \ln(\sin x) - x \cos x.$$

Ejemplo 8. Hallar una solución particular[12] de $y'' - y' - 6y = e^{-x}$.

La ecuación homogénea asociada es $y'' - y' - 6y = 0$, y su ecuación característica es $m^2 - m - 6 = 0 \Rightarrow (m-3)(m+2) = 0 \Rightarrow \begin{matrix} m_1 = 3 \\ m_2 = -2 \end{matrix}$, entonces

$y_c = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} \Rightarrow y_c = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x}$, con $y_1 = e^{3x}$ y $y_2 = e^{-2x}$.

Ahora debemos encontrar la solución particular de $y'' - y' - 6y = e^{-x}0$, haciendo uso del método de variación de parámetros. Antes calculemos el Wronskiano con $y_1 = e^{3x}$, $\boldsymbol{y_1'} = 3e^{3x}$ y $y_2 = e^{-2x}$, $\boldsymbol{y_2'} = -2e^{-2x}$.

$$w(y_1(x), y_2(x)) = \begin{vmatrix} e^{3x} & e^{-2x} \\ 3e^{3x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = e^{3x} \cdot (-2e^{-2x}) - 3e^{3x} \cdot e^{-2x} = -2e^{x} - 3e^{x}$$
$$= -5e^{x}.$$

Con el Wronskiano, $w(y_1(x), y_2(x)) = -5e^{x}$, $y_1 = e^{3x}$, $y_2 = e^{-2x}$, y $R(x) = e^{-x}$.

---

[12] Ejercicio número 2 de la sección de ejercicios propuestos del capítulo 3 del libro Ecuaciones diferenciales de Simmons, p.111.

$$u_1(x) = \int \frac{-y_2 R(x)}{w(y_1, y_2)} dx \Rightarrow u_1(x) = \int \frac{-e^{-2x} e^{-x}}{-5e^x} dx = \int \frac{-e^{-3x}}{-5e^x} dx$$
$$= \frac{1}{5} \int e^{-4x} = -\frac{1}{20} e^{-4x}.$$

$$u_2(x) = \int \frac{y_1 R(x)}{w(y_1, y_2)} dx \Rightarrow u_2(x) = \int \frac{e^{3x} e^{-x}}{-5e^x} dx = \int \frac{e^{2x}}{-5e^x} dx$$
$$= -\frac{1}{5} \int e^x dx = -\frac{1}{5} e^x.$$

Con $u_1(x) = -\frac{1}{20} e^{-4x}, u_2(x) = -\frac{1}{5} e^x$, la solución particular es:

$$y_p = u_1(x) y_1(x) + u_2(x) y_2(x) \Rightarrow$$

$$y_p = (-\frac{1}{20} e^{-4x}) e^{3x} + (-\frac{1}{5} e^x) e^{-2x} \Rightarrow y_p = -\frac{1}{20} e^{-x} + -\frac{1}{5} e^{-x} \Rightarrow y_p = -\frac{1}{4} e^{-x}.$$

Ejemplo 9. Hallar la solución general de $(x^2 - 1)y'' - 2xy' + 2y = (x^2 - 1)^2$.

Dividiendo la ecuación por $(x^2 - 1)$ nos queda

$y'' - \frac{2x}{(x^2-1)} y' + \frac{2}{(x^2-1)} y = (x^2 - 1)$, y su ecuación homogénea asociada es $y'' - \frac{2x}{(x^2-1)} y' + \frac{2}{(x^2-1)} y = 0$. Por simple inspección, podemos ver que $y_1 = x$, es una solución de la ecuación reducida (homogénea), ya que:

$$y_1 = x \Rightarrow \boldsymbol{y_1'} = 1, \boldsymbol{y_1''} = 0 \Rightarrow 0 - \frac{2x}{(x^2-1)}(1) + \frac{2}{(x^2-1)} x = 0 \Rightarrow -\frac{2x}{(x^2-1)} + \frac{2x}{(x^2-1)} = 0.$$

Podemos hallar una segunda solución y_2 a partir de y_1, así:

Si Suponemos que $y_2 = uy_1$ es una solución de $y'' - \frac{2x}{(x^2-1)} y' + \frac{2}{(x^2-1)} y = 0$, podemos encontrar la función u mediante la integral:[13]

$u = \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P(x)dx} dx$. Con $y_1 = x, P(x) = -\frac{2x}{(x^2-1)}$.

$$u = \int \frac{1}{x^2} e^{-\int -\frac{2x}{(x^2-1)} dx} dx = \int \frac{1}{x^2} e^{\int \frac{2x}{(x^2-1)} dx} dx = \int \frac{1}{x^2} e^{\ln(x^2-1)} dx = \int \frac{1}{x^2} (x^2 - 1) dx$$
$$\Rightarrow$$

[13] $\int \frac{2x}{(x^2-1)} dx = \int \frac{2x}{z} \frac{dz}{2x} = \int \frac{dz}{z} = \ln z = \ln(x^2 - 1)$.
Sea $z = x^2 - 1 \Rightarrow dz = 2xdx \Rightarrow \frac{dz}{2x} = dx$.

$u = \int \frac{x^2}{x^2} dx - \int \frac{1}{x^2} dx = \int 1\, dx - \int x^{-1}\, dx = x + \frac{1}{x} \Longrightarrow u = x + \frac{1}{x}$, y $y_2 = uy_1 \Longrightarrow$

$y_2 = \left(x + \frac{1}{x}\right) x = x^2 + 1$. Entonces la solución complementaria es:

$y_c = c_1 x + c_2(x^2 + 1)$.

Ahora debemos determinar $y_p, y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$, donde:

$$u_1(x) = \int \frac{-y_2 R(x)}{w(y_1, y_2)} dx, u_2(x) = \int \frac{y_1 R(x)}{w(y_1, y_2)} dx, R(x) = x^2 - 1.$$

Como $y_1 = x,\ \boldsymbol{y_1'} = \mathbf{1}, y_2 = x^2 + 1,\ \boldsymbol{y_2'} = \boldsymbol{2x}$, el Wronskiano es:

$w\big(y_1(x), y_2(x)\big) = \begin{vmatrix} x & x^2 + 1 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = x \cdot (2x) - 1 \cdot (x^2 + 1) = 2x^2 - x^2 - 1 = x^2 - 1.$
Entonces:

$$u_1(x) = \int \frac{-(x^2 + 1)(x^2 - 1)}{(x^2 - 1)} dx = -\int (x^2 + 1)\, dx = -\left(\frac{x^3}{3} + x\right).$$

$u_2(x) = \int \frac{2x(x^2-1)}{(x^2-1)} dx = \int x\, dx = \frac{x^2}{2}$. Por lo tanto:

$y_p = -\left(\frac{x^3}{3} + x\right) x + \frac{x^2}{2}(x^2 + 1) = \frac{x^4}{6} - \frac{x^2}{2}$, y la solución general es $y = y_c + y_p$:

$$y = c_1 x + c_2(x^2 + 1) + \frac{x^4}{6} - \frac{x^2}{2}.$$

Ejemplo 10. Probar que el método de variación de parámetros aplicado a la ecuación $y'' + y = f(x)$ conduce a la solución particular:[14]

$$y_p(x) = \int_0^x f(t) \sin(x - t) dt.$$

Resolvamos primero la ecuación reducida (homogénea) $y'' + y = 0$. Su ecuación característica es $m^2 + 1 = 0 \Longrightarrow m^2 = -1 \Longrightarrow m = \pm\sqrt{-1} \Longrightarrow$

$\begin{matrix} m_1 = i \\ m_2 = -i \end{matrix} \Longrightarrow \begin{matrix} \alpha = 0 \\ \beta = 1 \end{matrix}$, entonces la solución complementaria, y_c, es:

$$y_c = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x) \Longrightarrow y_c = e^{0x}(c_1 \cos 1(x) + c_2 \sin 1(x)) \Longrightarrow$$

[14] Ejercicio número 5 de la sección de ejercicios propuestos del capítulo 3 del libro Ecuaciones diferenciales de Simmons, p.111.

$$y_c = c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

Encontremos y_p. $y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$, donde $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$.

Como $y_1 = \cos x$, $\boldsymbol{y_1'} = -\sin x$, $y_2 = \sin x$, $\boldsymbol{y_2'} = \cos x$, el Wronskiano es:

$w(y_1(x), y_2(x)) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos x \cdot (\cos x) - (-\sin x) \cdot \sin x = = \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \Longrightarrow w(y_1(x), y_2(x)) = 1$. Entonces:

$$u_1(x) = \int \frac{-\sin x\, f(x)}{1} dx = \int f(x) \sin x\, dx.$$

$$u_2(x) = \int \frac{\cos x\, f(x)}{1} dx = \int f(x) \cos x\, dx.$$

Entonces $y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$ nos queda

$$y_p = -\cos x \int f(x) \sin x\, dx + \sin x \int f(x) \cos x\, dx$$

$$= \sin x \int f(x) \cos x\, dx - \cos x \int f(x) \sin x\, dx \Longrightarrow$$

$$\int_0^x \sin x\, f(t) \cos t\, dt - \int_0^x \cos x\, f(t) \sin t\, dt \Longrightarrow$$

$$\int_0^x [\sin x \cos t f(t) - \cos x \sin t f(t)] dt \Longrightarrow \int_0^x f(t) \sin(x - t)\, dt \Longrightarrow$$

$y_p(x) = \int_0^x f(t) \sin(x - t) dt$, como se quería demostrar.

4

Unidad 4

Transformadas de Laplace

Ecuaciones Diferenciales

Autor: Luis Guillermo Caro Pineda

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina
MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Introducción

Estudiaremos las transformadas de Laplace.

En secciones anteriores revisamos soluciones diversas y métodos variados para resolver ecuaciones diferenciales de la forma:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)y=R(x)$$

en las que la función $R(x)$ es continua.

En muchos escenarios de las aplicaciones de las ecuaciones diferenciales, la función $R(x)$ es una función continua por tramos, por ejemplo el voltaje aplicado a un circuito eléctrico; es dispendioso y difícil tratar de resolver situaciones como esta. Sin embargo, el estudio de la transformada de Laplace es una herramienta muy útil para resolverlas.

Examinaremos la definición de la transformada de Laplace y las condiciones de existencia suficientes para el operador de la Laplace, $\boldsymbol{\mathcal{L}}$**.** Así mismo, exploramos la propiedad de linealidad que permite resolver muchas transformadas de Laplace sin recurrir al cálculo de los límites al infinito.

Finaliza la cartilla con la definición de la transformada inversa de Laplace. En este recorrido, aparecen una buena cantidad de ejemplos con ejercicios resueltos de transformadas de Laplace y transformadas inversas de Laplace que permiten revisar estrategias propias de este tipo de procedimientos con límites al infinito y la aplicación de algunas de sus propiedades como la linealidad.

Recomendaciones metodológicas

La presente cartilla, Transformadas de Laplace, inicia con la definición de la Transformada de Laplace. Se desarrolla a través de explicaciones de los fundamentos teóricos y la solución de ejemplos que ilustran los procedimientos para resolver Transformadas de Laplace.

Es importante que tenga en cuenta las propiedades que se presentan, ya que son fundamentales en la exposición de los ejercicios resueltos; éstos presentan un nivel de exigencia superior al anterior para cada sección revisada.

Para garantizar su éxito en la revisión y estudio de los temas seleccionados, usted debe realizar una revisión exhaustiva de la cartilla, las lecturas complementarias y los recursos audiovisuales, ya que además de ubicar las definiciones pertinentes, encontrará explicaciones desde varios autores y ejercicios resueltos que despejarán dudas. El desarrollo del módulo exige disciplina y trabajo permanente, usted debe acostumbrarse a la revisión frecuente de los recursos y a la realización de las actividades en los tiempos señalados. Se convierte en requisito indispensable el uso de un programa de Cálculo simbólico como Geogebra, Derive, Matlab, etc.

Además de revisar los textos propuestos en la bibliografía, usted debe estudiar de manera permanente el libro digital *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado* de Dennis Zill, capítulo 7 que se encuentra en pdf en la sección de recursos para el aprendizaje.

Del libro de Simmons se resuelven algunos ejercicios propuestos de las secciones finales de los capítulos seleccionados.

Desarrollo temático

Transformadas de Laplace

Definición de la Transformada de Laplace

Sea $f(t)$ una función de t definida para $t \geq 0$. La transformada de Laplace de $f(t)$ denotada por $\mathcal{L}[f(t)]$ se define como:

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt.$$

En la definición de la transformada de Laplace, inicialmente supondremos que el parámetro s es real, aunque resulta más útil considerar a s como un parámetro complejo.

Se dice que la transformada de Laplace de $F(t)$ existe, cuando la integral:

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

converge para algún valor de s, de otra manera se dice que no converge.

En otras palabras, si podemos encontrar un valor para el límite:

$$\lim_{b\to\infty} \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

entonces decimos que la transformada de Laplace existe si y solo si, existe el límite anterior.

La nueva definición para la transformada de Laplace nos queda:[1]

$$\mathcal{L}[F(t)] = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

Usted ya debió advertir dos dificultades a las que posiblemente se enfrentará al resolver transformadas de Laplace. De un lado, la presencia de límites en el infinito requiere de un manejo adecuado de las propiedades de las operaciones con límites en el infinito y las diversas formas en que éstos se presentarán en el transcurso de la presente cartilla. De otro lado, nuevamente se enfrenta a la solución de integrales por lo que debe repasar los métodos de integración vistos en cursos anteriores.

---

[1] Recordemos que si $f(t)$ está definida cuando $t \geq 0$, la integral impropia

$$\int_0^\infty W(s,t)\, f(t)dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^\infty W(s,t)\, f(t)dt.$$

En los ejemplos que vienen, vamos a determinar la transformada de Laplace para dos funciones elementales con el propósito de lograr un manejo adecuado e introducirnos en algunas propiedades importantes de la transformada de Laplace que facilitarán su cálculo para funciones un poco más complicadas. Estas funciones son la función de valor constante, $f(t) = c$, y la función idéntica, $f(t) = t$.

Ejemplo 1. Determine la transformada de Laplace para la función

$f(t) = c$, donde c es una constante.

$$\mathcal{L}[c] = \int_0^{\infty} e^{-st}\, c\, dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^{\infty} e^{-st}\, c\, dt = c \lim_{b\to\infty} \int_0^{\infty} e^{-st}\, c\, dt \Longrightarrow$$

$$\mathcal{L}[c] = c \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{e^{-st}}{s}\right]_0^b = -\frac{c}{s} \lim_{b\to\infty} \left[\frac{1}{e^{st}}\right]_0^b = -\frac{c}{s} \lim_{b\to\infty} \left[\frac{1}{e^{s(b)}} - \frac{1}{e^{s(0)}}\right] \Longrightarrow$$

$$\mathcal{L}[c] = -\frac{c}{s} \lim_{b\to\infty} [0-1] = -\frac{c}{s} \lim_{b\to\infty} [-1] = -\frac{c}{s}(-1) = \frac{c}{s} \Longrightarrow$$

$$\mathcal{L}[c] = \frac{c}{s}\ s > 0.$$

En términos generales, cuando $s > 0$, el exponente $-sb$ es negativo y e^{-sb} tiende a cero cuando b tiende a infinito. Advierta que si $s < 0$, la integral $\lim_{b\to\infty} \int_0^{\infty} e^{-st}\, c\, dt$ es divergente.

El operador $\mathcal{L}$ es una transformación lineal

Sean $\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt$ y $\mathcal{L}[g(t)] = G(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} g(t)dt$.

Para una suma de funciones podemos escribir:

$\int_0^{\infty} e^{-st} [\alpha f(t) + \beta g(t)dt]dt = \alpha \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt + \beta \int_0^{\infty} e^{-st} g(t)dt$, siempre y cuando las dos integrales converjan; entonces:

$$\mathcal{L}[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha\mathcal{L}[f(t)] + \beta\mathcal{L}[g(t)] = \alpha F(s) + \beta G(s).$$

Se afirma que el operador $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ es una transformación lineal gracias a la propiedad anterior.

Ejemplo 2. Determine la transformada de Laplace para la función.

$f(t) = t$.

$$\mathcal{L}[t] = \int_0^{\infty} e^{-st}\, t\, dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^{\infty} e^{-st}\, t\, dt \Longrightarrow$$

Esta última integral se resuelve por el método de partes.

Sea $u = t \implies du = dt, dv = e^{-st} \implies v = -\frac{e^{-st}}{s}$, entonces:

$$\int e^{-st} t dt = t\left[-\frac{e^{-st}}{s}\right] - \int -\frac{e^{-st}}{s} dt = -t\frac{e^{-st}}{s} + \frac{1}{s}\int e^{-st} dt \implies$$

$$\int e^{-st} t dt = -t\frac{e^{-st}}{s} + \frac{1}{s}\left[-\frac{e^{-st}}{s}\right] = -\frac{te^{-st}}{s} - \frac{e^{-st}}{s^2} \implies$$

$$\int e^{-st} t dt = -\frac{te^{-st}}{s} - \frac{e^{-st}}{s^2}.$$

Volviendo a la transformada de Laplace para $f(t) = t$ nos queda:

$$\mathcal{L}[t] = \lim_{b\to\infty}\int_0^\infty e^{-st}\, t\, dt = -\lim_{b\to\infty}\left[\frac{te^{-st}}{s} + \frac{e^{-st}}{s^2}\right]_0^b = -\lim_{b\to\infty}\left[\frac{ste^{-st} + e^{-st}}{s^2}\right]_0^b \implies$$

$$\mathcal{L}[t] = -\frac{1}{s^2}\lim_{b\to\infty}\left[e^{-st}(st+1)\right]_0^b = -\frac{1}{s^2}\lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{e^{st}}(st+1)\right]_0^b \implies$$

$$\mathcal{L}[t] = -\frac{1}{s^2}\lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{e^{sb}}(sb+1) - \frac{1}{e^{s(0)}}(s(0)+1)\right] = \frac{1}{s^2}\lim_{b\to\infty}\left[1 - \frac{sb+1}{e^{sb}}\right] \implies$$

$$\mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^2}\left[\lim_{b\to\infty}\left[1 - \frac{sb+1}{e^{sb}}\right]\right] = \frac{1}{s^2}\left[\lim_{b\to\infty} 1 - \lim_{b\to\infty}\left[\frac{sb+1}{e^{sb}}\right]\right] \implies$$

$\mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^2}\left[1 - \lim_{b\to\infty}\left[\frac{sb+1}{e^{sb}}\right]\right].$

El último límite, $\lim_{b\to\infty}\left[\frac{sb+1}{e^{sb}}\right]$, se puede resolver aplicando la regla de L'Hôpital, así:

$\lim_{b\to\infty}\left[\frac{sb+1}{e^{sb}}\right] = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{s}{se^{sb}}\right] = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{e^{sb}}\right] = 0.$ Entonces,

$\mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^2}[1-0] = \frac{1}{s^2} \implies$

$$\mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^2}.$$

Muchos ejercicios de transformadas de Laplace pueden requerir el uso de la regla de L'Hôpital, recordemos su definición:

REGLA DE L'HÔPITAL

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones continuas en $[a,b]$, derivables en (a,b) y tales que sus derivadas no se anulan simultáneamente en ningún punto del intervalo (a,b).

Sea $x_0 \in (a,b)$.

Si $f(x_0) = g(x_0) = 0$ y existe el $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces también existe el $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ y son iguales.

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

Este resultado se aplica directamente a los casos $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$.

Teorema de existencia para el operador $\mathcal{L}$

Si $f(t)$ es continua por tramos en el intervalo de números reales $[0,\infty)$ y de orden exponencial $\boldsymbol{c}$ para cualquier $t > T$, entonces $\mathcal{L}[f(t)]$ existe para $s > c$.

Este teorema afirma que se requieren dos condiciones de suficiencia que garanticen la existencia de $\mathcal{L}[f(t)]$:

La función $f(t)$, debe ser continua por tramos en el intervalo de números reales $[0,\infty)$.

La función $f(t)$ debe ser de orden exponencial.

La condición uno exige la continuidad de $f(t)$. Una función es continua por tramos en $[0,\infty)$, si en cualquier intervalo $0 \leq a \leq t \leq b$, existen, a lo sumo, una cantidad finita de puntos, $t_k, k = 1, 2, \cdots, n$ con $t_{k-1} < t_k$ en los cuales $f(t)$ tiene discontinuidades finitas y es continua en todo intervalo abierto $t_{k-1} < t < t_k$.

Orden exponencial. Se dice que una función f es de orden exponencial $\boldsymbol{c}$ si existen constantes $M > 0$ y $T > 0$ tales que:

$|f(t)| \leq Me^{ct}$ para todo $t > T$.

Si f es una función creciente, la condición $|f(t)| \leq Me^{ct}$ para todo $t > T$ significa que la gráfica de f en el intervalo $[0,\infty)$ no crece con más rapidez que la gráfica de la función exponencial Me^{ct} donde la constante $\boldsymbol{c}$ es un valor positivo. Por ejemplo las funciones

$$f(t) = 2t, g(t) = e^{-t}, h(t) = 4 \sin t$$

son de orden exponencial con $\boldsymbol{c = 1}$, ya que:

$$|t| \leq e^{-t}, |e^{-t}| \leq e^{t}, |4 \sin t| \leq 4e^{t}.$$

La función e^t no es de orden exponencial porque su gráfica crece más rápido que cualquier potencia lineal positiva de la función exponencial, e, en $0 < c < t$. Una potencia t^n, con $n \in \mathbb{Z}$, siempre es de orden exponencial con $c > 0$, porque

$|t^n| \leq Me^{ct} \Longrightarrow \left|\frac{t^n}{e^{ct}}\right| \leq M$ cuando $t > T$.

Es interesante que usted demuestre que aplicando de manera reiterada la regla de L'Hôpital, el límite

$\lim_{t \to \infty} \left|\frac{t^n}{e^{ct}}\right|$ es una cantidad finita para valores de $n = 1,2,3, \cdots$.

En el siguiente ejemplo deduciremos una regla general que nos permitirá determinar transformadas de Laplace para funciones polinómicas de la forma t^n. Esta deducción es importante porque le permite analizar una forma útil para generalizar el tratamiento con límites de la forma $\lim_{b \to \infty} \frac{1}{e^{st}}\left(\frac{t^k}{s^{n-(k-1)}}\right)$,

Ejemplo 3. Determine $\mathcal{L}[t^n]$.

$$\mathcal{L}[t^n] = \int_0^\infty e^{-st}\, t^n\, dt = \lim_{b \to \infty} \int_0^b e^{-st}\, t^n\, dt \Longrightarrow$$

Aplicando de manera reiterada la integración por partes, tenemos:

$$\lim_{b \to \infty} \int_0^b e^{-st}\, t^n\, dt$$

$$= \lim_{b \to \infty} \left[t^n \left(\frac{e^{-st}}{-s}\right) - nt^{n-1}\left(\frac{e^{-st}}{s^2}\right) + (n)(n-1)t^{n-2}\left(\frac{e^{-st}}{-s^3}\right) \right.$$
$$- (n)(n-1)(n-2)t^{n-3}\left(\frac{e^{-st}}{s^4}\right) + \cdots - (n)(n-1)\cdots(4)t^3\left(\frac{e^{-st}}{s^{n-2}}\right)$$
$$\left. - (n-1)(n-2)\cdots(3)t^2\left(\frac{e^{-st}}{s^{n-1}}\right) - n!\, t^1\left(\frac{e^{-st}}{s^n}\right) - n!\, t^0 (\frac{e^{-st}}{s^{n+1}}) \right]_0^b \Longrightarrow$$

$$\mathcal{L}[t^n] = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-st}\, t^n\, dt$$

$$= \lim_{b\to\infty} (\frac{1}{e^{st}}) \left[\left(\frac{t^n}{s}\right) + \left(\frac{nt^{n-1}}{s^2}\right) + \left(\frac{(n)(n-1)t^{n-2}}{-s^3}\right) + \left(\frac{(n)(n-1)(n-2)t^{n-3}}{s^4}\right) + \cdots \left(\frac{(n)(n-1)\cdots(4)t^3}{s^{n-2}}\right) + \left(\frac{(n-1)(n-2)\cdots(3)t^2}{s^{n-1}}\right) + \left(\frac{n!\,t^1}{s^n}\right) + (\frac{n!}{s^{n+1}})\right]_0^b$$

Advierta que los límites de la forma $\lim_{b\to\infty} \frac{1}{e^{st}}\left(\frac{t^k}{s^{n-(k-1)}}\right)$, con $k \neq 0$, son todos iguales a cero, por lo tanto, el único límite válido, es decir, diferente de cero, es:

$$\lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{e^{st}}\right)\left[\frac{n!}{s^{n+1}}\right] \Rightarrow$$

$$-\frac{n!}{s^{n+1}} \left|\lim_{b\to\infty} \frac{1}{e^{st}}\right|_0^b \Rightarrow -\frac{n!}{s^{n+1}} \left[\lim_{b\to\infty} (\frac{1}{e^{s(b)}} - \frac{1}{e^{s(0)}})\right] \Rightarrow$$

$$-\frac{n!}{s^{n+1}}[0-1] = \frac{n!}{s^{n+1}} \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

Ejemplo 4. Determine $\mathcal{L}[e^{at}]$.

$$\mathcal{L}[e^{at}] = \int_0^\infty e^{-st}\, e^{at}\, dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-st}\, e^{at}\, dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{at-st}\, dt \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}[e^{at}] = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{(a-s)t}\, dt.$$

Para resolver esta última integral, sea:

$$u = (a-s)t \Rightarrow du = (a-s)dt \Rightarrow dt = \frac{du}{(a-s)} \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}[e^{at}] = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{(a-s)t}\, dt = \int \left[e^u \frac{du}{(a-s)}\right] = \frac{1}{a-s} e^u = \frac{1}{a-s} e^{(a-s)t} \Rightarrow$$

Reemplazando nos queda:

$$\mathcal{L}[e^{at}] = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{(a-s)t}\,dt = \lim_{b\to\infty}\left[\left|\frac{1}{a-s}e^{(a-s)t}\right|_0^b\right] = \frac{1}{a-s}\lim_{b\to\infty}\left[\left|e^{-(s-a)t}\right|_0^b\right] \Longrightarrow$$

$$\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{a-s}\lim_{b\to\infty}\left[\left|\frac{1}{e^{(s-a)t}}\right|_0^b\right] = \frac{1}{a-s}\left[\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{e^{(s-a)b}} - \frac{1}{e^{(s-a)0}}\right)\right] \Longrightarrow$$

$$\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{a-s}\left[\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{e^{(s-a)b}} - 1\right)\right] = \frac{1}{a-s}[(0-1)] = -\frac{1}{a-s} = \frac{1}{s-a} \Longrightarrow$$

$$\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a}.$$

Ejemplo 5. Determine $\mathcal{L}[\cos at]$.

$$\mathcal{L}[\cos at] = \int_0^\infty e^{-st}\cos at\ dt.$$

Considerando la fórmula de Euler,

$$e^{J\theta} = \cos\theta + J\sin -\theta,$$

Como $e^{-J\theta} = e^{J(-\theta)} = \cos(-\theta) + J\sin(-\theta)$, y considerando que la función seno es una función impar y la función coseno es una función par, aplicando estas propiedades nos queda que $e^{-J\theta} = e^{J(-\theta)} = \cos(\theta) + J\sin(\theta)$, por consiguiente,

$$e^{J\theta} + e^{-J\theta} = \cos(\theta) + J\sin(\theta) + \cos(\theta) - J\sin(\theta) \Longrightarrow$$

$e^{J\theta} + e^{-J\theta} = 2\cos(\theta) \Longrightarrow \cos(\theta) = \frac{e^{J\theta}+e^{-J\theta}}{2}$, y trasladando a las variables de la integral, $\cos(at) = \left(\frac{e^{Jat}+e^{-Jat}}{2}\right)$.

De manera similar,

$$e^{J\theta} - e^{-J\theta} = \cos(\theta) + J\sin(\theta) - \cos(\theta) + J\sin(\theta) \Longrightarrow$$

$e^{J\theta} + e^{-J\theta} = 2J\sin(\theta) \Longrightarrow \sin(\theta) = \frac{e^{J\theta}-e^{-J\theta}}{2J}$, y trasladando a las variables de la integral, $\sin(at) = \left(\frac{e^{Jat}-e^{-Jat}}{2}\right)$.

Por lo tanto, aplicando las igualdades obtenidas, $\int_0^{\infty} e^{-st} \cos at \; dt$ nos queda:

$$\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-st}\cos at \; dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-st}\,(\frac{e^{Jat}+e^{-Jat}}{2})\,dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b (\frac{e^{Jat-st}+e^{-Jat-st}}{2})\,dt \Longrightarrow$$

$$\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-st}\cos at \; dt = \lim_{b\to\infty}\frac{1}{2}\left[\lim_{b\to\infty}\int_0^b (e^{Jat-st})\,dt + \lim_{b\to\infty}\int_0^b (e^{-Jat-st})\,dt\right] \Longrightarrow$$

$$\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-st}\cos at \; dt = \lim_{b\to\infty}\frac{1}{2}\left[\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{(Ja-s)t}\,dt + \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-(Ja-s)t}\,dt\right] \Longrightarrow$$

$$\mathcal{L}[\cos at] = \frac{1}{2}\left[\lim_{b\to\infty}\left|\frac{e^{(Ja-s)t}}{-(s+Ja)}\right|_0^b + \lim_{b\to\infty}\left|\frac{e^{-(Ja-s)t}}{-(s-Ja)}\right|_0^b\right] \Longrightarrow$$

$$\mathcal{L}[\cos at] = -\frac{1}{2}\left[\lim_{b\to\infty}\left|\frac{e^{(Ja-s)t}}{(s+Ja)} + \frac{e^{-(Ja-s)t}}{(s-Ja)}\right|_0^b\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\lim_{b\to\infty}\left|\frac{(s-Ja)e^{(Ja-s)t} + (s+Ja)e^{-(Ja-s)t}}{(s^2+a^2)} + \right|_0^b\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(s^2+a^2)}\right]\left[\lim_{b\to\infty}\left|\frac{(s+Ja)}{e^{(s-Ja)t}} + \frac{(s-Ja)}{e^{(s+Ja)t}}\right|_0^b\right] \Longrightarrow$$

$$\mathcal{L}[\cos at] = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(s^2+a^2)}\right]\lim_{b\to\infty}\left[\left(\frac{(s+Ja)}{e^{(s-Ja)b}} + \frac{(s-Ja)}{e^{(s+Ja)b}}\right) - \left(\frac{(s+Ja)}{e^{(s-Ja)0}} + \frac{(s-Ja)}{e^{(s+Ja)0}}\right)\right] \Longrightarrow$$

$$\mathcal{L}[\cos at] = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(s^2+a^2)}\right][0-(s+Ja+s-Ja)] = -\frac{1}{2}\left[\frac{-2s}{(s^2+a^2)}\right] \Longrightarrow$$

$$\mathcal{L}[\cos at] = \frac{s}{(s^2+a^2)}.$$

El siguiente ejemplo ilustra la forma de encontrar la transformada de Laplace para la función sin at. Algunas etapas del procedimiento requieren repasar los pasos del ejemplo anterior.

Ejemplo 6. Determine $\mathcal{L}[\sin at]$:

$$\mathcal{L}[\sin at] = \int_0^{\infty} e^{-st}\sin at \; dt.$$

Con información deducida en el ejemplo 4, escribimos la función seno en términos de las exponenciales e^{Jat} y e^{-Jat}:

$\sin(at) = \left(\frac{e^{Jat} - e^{-Jat}}{2}\right)$, entonces,

$$\mathcal{L}[\sin at] = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-st}\sin at\ dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-st}\left(\frac{e^{Jat} - e^{-Jat}}{2J}\right)dt$$

$$= \lim_{b\to\infty}\int_0^b \left(\frac{e^{Jat-st} - e^{-Jat-st}}{2J}\right)dt$$

$$= \frac{1}{2J}\left[\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{(Ja-s)t}dt - \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-(Ja+s)t}dt\right] =$$

$$\frac{1}{2J}\left[\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-(s-Ja)t}dt - \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-(Ja+s)t}dt\right] =$$

$$\frac{1}{2J}\left[\lim_{b\to\infty}\left|\frac{e^{-(s-Ja)t}}{-(s-Ja)}\right|_0^b - \lim_{b\to\infty}\left|\frac{e^{-(s+Ja)t}}{-(s+Ja)}\right|_0^b\right] = \frac{1}{2J}\left[\lim_{b\to\infty}\left|\frac{e^{-(s+Ja)t}}{(s+Ja)} - \frac{e^{-(s-Ja)t}}{(s-Ja)}\right|_0^b\right] =$$

$$= \frac{1}{2J}\left[\lim_{b\to\infty}\left|\frac{(s-Ja)e^{-(s+Ja)t} - (s+Ja)e^{-(s-Ja)t}}{(s^2+a^2)}\right|_0^b\right] =$$

$$\frac{1}{2J}\left[\frac{1}{(s^2+a^2)}\right]\left[\lim_{b\to\infty}\left|\frac{(s-Ja)}{e^{(s+Ja)t}} - \frac{(s+Ja)}{e^{(s-Ja)t}}\right|_0^b\right],$$

Reemplazando nos queda:

$$\mathcal{L}[\sin at] = \frac{1}{2J}\left[\frac{1}{(s^2+a^2)}\right]\left[\left(\frac{(s-Ja)}{e^{(s+Ja)b}} - \frac{(s+Ja)}{e^{(s-Ja)b}}\right) - \left(\frac{(s-Ja)}{e^{(s+Ja)0}} - \frac{(s+Ja)}{e^{(s-Ja)0}}\right)\right] \Longrightarrow$$

$$\mathcal{L}[\sin at] = \frac{1}{2J}\left[\frac{1}{(s^2+a^2)}\right]\left[\left(\frac{(s-Ja)}{e^{(s+Ja)b}} - \frac{(s+Ja)}{e^{(s-Ja)b}}\right) - (s - Ja - (s+Ja))\right] \Longrightarrow$$

$$\mathcal{L}[\sin at] = \frac{1}{2J}\left[\frac{1}{(s^2+a^2)}\right][(0) - (s - Ja - s - Ja))] \Longrightarrow$$

$$\mathcal{L}[\sin at] = \frac{1}{2J}\left[\frac{1}{(s^2+a^2)}\right](2Ja) = \frac{a}{(s^2+a^2)} \Longrightarrow$$

$$\mathcal{L}[\sin at] = \frac{a}{(s^2+a^2)}.$$

Ejemplo 7. Determine las transformadas de Laplace para las funciones seno y coseno hiperbólicos.

Primero vamos a calcular la transformada de Laplace para $f(t) = \cosh(at)$.

$$\mathcal{L}[\cosh(at)] = \int_0^{\infty} e^{-st} \cosh(at)\ dt.$$

Por definición de las funciones seno y coseno hiperbólicos sabemos que:

$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, y $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Al reemplazar en la transformada nos queda:

$$\mathcal{L}[\cosh(at)] = \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{e^{at} + e^{-at}}{2}\ dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} \frac{e^{at-st} + e^{-at-st}}{2}\ dt \Longrightarrow$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\cosh(at)] &= \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} \frac{e^{(a-s)t} + e^{-(a+s)t}}{2}\ dt \\ &= \frac{1}{2}\left[\lim_{b\to\infty} \int_0^{b} e^{(a-s)t}\, dt + \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} e^{-(a+s)t}\, dt\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\lim_{b\to\infty} \int_0^{b} e^{-(s-a)t}\, dt + \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} e^{-(s+a)t}\, dt\right] \Longrightarrow\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}[\cosh(at)] = \frac{1}{2}\left[\lim_{b\to\infty} \int_0^{b} e^{(a-s)t}\, dt + \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} e^{-(a+s)t}\, dt\right] =$$

$$\frac{1}{2}\left[\lim_{b\to\infty} \left|\frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)}\right|_0^b + \lim_{b\to\infty} \left|\frac{e^{-(s+a)t}}{-(s+a)}\right|_0^b\right] = -\frac{1}{2}\left[\lim_{b\to\infty} \left|\frac{e^{-(s-a)t}}{(s-a)} + \frac{e^{-(s+a)t}}{(s+a)}\right|_0^b\right] =$$

$$-\frac{1}{2}\left[\lim_{b\to\infty} \left|\frac{(s+a)e^{-(s-a)t} + (s-a)e^{-(s+a)t}}{(s^2-a^2)}\right|_0^b\right] \Longrightarrow$$

$$\mathcal{L}[\cosh(at)] = -\frac{1}{2(s^2-a^2)}\left[\lim_{b\to\infty} \left|\frac{s+a}{e^{(s-a)t}} + \frac{s-a}{e^{(s+a)t}}\right|_0^b\right].$$

Reemplazando los límites de integración nos queda:

$$\mathcal{L}[\cosh(at)] = -\frac{1}{2(s^2-a^2)}\lim_{b\to\infty}\left[\left(\frac{s+a}{e^{(s-a)b}}+\frac{s-a}{e^{(s+a)b}}\right)-\left(\frac{s+a}{e^{(s-a)0}}+\frac{s-a}{e^{(s+a)0}}\right)\right] \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}[\cosh(at)] = -\frac{1}{2(s^2-a^2)}\lim_{b\to\infty}\left[\left(\frac{s+a}{e^{(s-a)b}}+\frac{s-a}{e^{(s+a)b}}\right)-(s+a+(s-a))\right] \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}[\cosh(at)] == -\frac{1}{2(s^2-a^2)}\lim_{b\to\infty}[(0)-(s+a+s-a))] \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}[\cosh(at)] = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(s^2-a^2)}\right](-2s) = \frac{s}{(s^2-a^2)} \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}[\cosh(at)] = \frac{s}{(s^2-a^2)}.$$

Con un procedimiento similar al anterior calculemos la transformada de Laplace para la función seno hiperbólico, con lo que daremos por sentado algunos pasos del proceso anterior.

$$\mathcal{L}[\sin(at)] = \int_0^\infty e^{-st}\sin(at)\ dt.$$

Sabemos que $\sinh(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$. Entonces,

$$\mathcal{L}[\sin(at)] = \int_0^\infty e^{-st}\,\frac{e^{at}-e^{-at}}{2}\,dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{e^{at-st}-e^{-at-st}}{2}\,dt \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\sin(at)] &= \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{e^{(a-s)t}-e^{-(a+s)t}}{2}\,dt\\ &= \frac{1}{2}\left[\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{(a-s)t}\,dt-\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-(a+s)t}\,dt\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-(s-a)t}\,dt-\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-(s+a)t}\,dt\right] \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}[\sin(at)] = \frac{1}{2}\left[\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{(a-s)t}\,dt-\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-(a+s)t}\,dt\right] =$$

$$\frac{1}{2}\left[\lim_{b\to\infty}\left|\frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)}\right|_0^b-\lim_{b\to\infty}\left|\frac{e^{-(s+a)t}}{-(s+a)}\right|_0^b\right] = -\frac{1}{2}\left[\lim_{b\to\infty}\left|\frac{e^{-(s-a)t}}{(s-a)}-\frac{e^{-(s+a)t}}{(s+a)}\right|_0^b\right] =$$

$$-\frac{1}{2}\left[\lim_{b\to\infty}\left|\frac{(s+a)e^{-(s-a)t}-(s-a)e^{-(s+a)t}}{(s^2-a^2)}\right|_0^b\right]\Rightarrow$$

$$\mathcal{L}[\sin(at)] = -\frac{1}{2(s^2-a^2)}\left[\lim_{b\to\infty}\left|\frac{s+a}{e^{(s-a)t}}-\frac{s-a}{e^{(s+a)t}}\right|_0^b\right].$$

Reemplazando los límites de integración nos queda:

$$\mathcal{L}[\sin(at)] = -\frac{1}{2(s^2-a^2)}\lim_{b\to\infty}\left[\left(\frac{s+a}{e^{(s-a)b}}-\frac{s-a}{e^{(s+a)b}}\right)-\left(\frac{s+a}{e^{(s-a)0}}-\frac{s-a}{e^{(s+a)0}}\right)\right]\Rightarrow$$

$$\mathcal{L}[\sin(at)] = -\frac{1}{2(s^2-a^2)}\lim_{b\to\infty}\left[\left(\frac{s+a}{e^{(s-a)b}}-\frac{s-a}{e^{(s+a)b}}\right)-(s+a-(s-a))\right]\Rightarrow$$

$$\mathcal{L}[\sin(at)] == -\frac{1}{2(s^2-a^2)}\lim_{b\to\infty}[(0)-(s+a-s+a))]\Rightarrow$$

$$\mathcal{L}[\sin(at)] = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(s^2-a^2)}\right](-2a) = \frac{a}{(s^2-a^2)}\Rightarrow$$

$$\mathcal{L}[\sin(at)] = \frac{a}{(s^2-a^2)}.$$

Ejemplo 8. Determine $\mathcal{L}[te^{at}]$.

$\mathcal{L}[te^{at}] = \int_0^\infty e^{-st}\, te^{at}\, dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b te^{at-st}\, dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b te^{(a-s)t}\, dt$. Para resolver esta última integral usaremos el método de integración por partes.

Sea $u = t \;\Rightarrow du = dt, dv = e^{(a-s)t}dt \;\Rightarrow v = \frac{e^{(a-s)t}}{a-s}$, entonces

$$\int te^{(a-s)t}\, dt = t\frac{e^{(a-s)t}}{a-s} - \int \frac{e^{(a-s)t}}{a-s}dt = t\frac{e^{(a-s)t}}{a-s} - \frac{1}{a-s}\int e^{(a-s)t}dt \Rightarrow$$

$$\int te^{(a-s)t}\, dt = t\frac{e^{(a-s)t}}{a-s} - \frac{e^{(a-s)t}}{(a-s)^2}.$$

Reemplazando tenemos,

$$\mathcal{L}[te^{at}] = \lim_{b\to\infty}\int_0^b te^{(a-s)t}\,dt = \lim_{b\to\infty}\left[\left| t\frac{e^{(a-s)t}}{a-s} - \frac{e^{(a-s)t}}{(a-s)^2}\right|_0^b\right]$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[\left|\frac{(a-s)te^{(a-s)t} - e^{(a-s)t}}{(a-s)^2}\right|_0^b\right]$$

$$= \frac{1}{(a-s)^2}\lim_{b\to\infty}\left[\left|(a-s)te^{-(s-a)t} - e^{-(s-a)t}\right|_0^b\right] \Longrightarrow$$

$$\mathcal{L}[te^{at}] = \frac{1}{(a-s)^2}\lim_{b\to\infty}\left[\left|\frac{(a-s)t}{e^{(s-a)t}} - \frac{1}{e^{(a-s)t}}\right|_0^b\right]$$

$$= \frac{1}{(a-s)^2}\lim_{b\to\infty}\left[\left(\frac{(a-s)b}{e^{(s-a)b}} - \frac{1}{e^{(a-s)b}}\right) - \left(\frac{(a-s)0}{e^{(s-a)0}} - \frac{1}{e^{(a-s)0}}\right)\right] \Longrightarrow$$

$$\mathcal{L}[te^{at}] = \frac{1}{(a-s)^2}[(0-0)-(-1)] = \frac{1}{(a-s)^2} \Longrightarrow$$

$$\mathcal{L}[te^{at}] = \frac{1}{(a-s)^2}\ s > a.$$

Ejemplo 9. Determine $\mathcal{L}[t^2e^{at}]$.

$\mathcal{L}[t^2e^{at}] = \int_0^\infty e^{-st}\,t^2e^{at}\,dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b t^2e^{at-st}\,dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b t^2e^{at-st}\,dt$. Para resolver esta última integral usaremos el método de integración por partes aplicado dos veces sucesivas.

Sea $u = t^2 \Longrightarrow du = 2tdt, dv = e^{(a-s)t}dt \Longrightarrow v = \frac{e^{(a-s)t}}{a-s}$, entonces:

$\int te^{(a-s)t}\,dt = t^2\frac{e^{(a-s)t}}{a-s} - \int\frac{e^{(a-s)t}}{a-s}2tdt = t^2\frac{e^{(a-s)t}}{a-s} - \frac{2}{a-s}\int te^{(a-s)t}dt$. Esta última integral la resolvimos en el ejemplo anterior y nos quedó:

$\int te^{(a-s)t}\,dt = \frac{te^{(a-s)t}}{(a-s)} - \frac{e^{(a-s)t}}{(a-s)^2}$. Volviendo a la integral inicial nos queda:

$$\int t^2e^{at-st}\,dt = t^2\frac{e^{(a-s)t}}{a-s} - \frac{2}{a-s}\int te^{(a-s)t}dt \Longrightarrow$$

$$\int t^2e^{at-st}\,dt = t^2\frac{e^{(a-s)t}}{a-s} - \frac{2}{a-s}\left[\frac{te^{(a-s)t}}{(a-s)} - \frac{e^{(a-s)t}}{(a-s)^2}\right] =$$

$$\int t^2 e^{at-st}\,dt = t^2\frac{e^{(a-s)t}}{a-s} - \frac{2te^{(a-s)t}}{(a-s)^2} + \frac{2e^{(a-s)t}}{(a-s)^3} \Longrightarrow$$

$$\mathcal{L}[t^2e^{at}] = \lim_{b\to\infty}\int_0^b t^2e^{at-st}\,dt = \lim_{b\to\infty}\left[\left| t^2\frac{e^{(a-s)t}}{a-s} - \frac{2te^{(a-s)t}}{(a-s)^2} + \frac{2e^{(a-s)t}}{(a-s)^3}\right|_0^b\right] \Longrightarrow$$

$$\mathcal{L}[t^2e^{at}] = \lim_{b\to\infty}\left[\left|\frac{(a-s)^2t^2e^{(a-s)t} - 2(a-s)te^{(a-s)t} + 2e^{(a-s)t}}{(a-s)^3} + \right|_0^b\right] =$$

$$\frac{1}{(a-s)^3}\lim_{b\to\infty}\left[\left|(a-s)^2t^2e^{-(s-a)t} - 2(a-s)te^{-(s-a)t} + 2e^{-(s-a)t}\right|_0^b\right] =$$

$$\frac{1}{(a-s)^3}\lim_{b\to\infty}\left[\left|\frac{(a-s)^2t^2}{e^{(s-a)t}} - \frac{2(a-s)t}{e^{(s-a)t}} + \frac{2}{e^{(s-a)t}}\right|_0^b\right] =$$

$$\frac{1}{(a-s)^3}\lim_{b\to\infty}\left[\left(\frac{(a-s)^2b^2}{e^{(s-a)b}} - \frac{2(a-s)b}{e^{(s-a)b}} + \frac{2}{e^{(s-a)b}}\right) - \left(\frac{(a-s)^20^2}{e^{(s-a)0}} - \frac{2(a-s)0}{e^{(s-a)0}} + \frac{2}{e^{(s-a)0}}\right)\right] \Longrightarrow$$

$$\frac{1}{(a-s)^3}[(0-0+0)-(0-0+2)] = -\frac{2}{(a-s)^3} = \frac{2}{(s-a)^3} \Longrightarrow$$

$$\mathcal{L}[t^2e^{at}] = \frac{2}{(s-a)^3} \quad s > a.$$

Unas funciones muy especiales en matemáticas se relacionan con fenómenos que suceden teniendo en cuenta diferentes intervalos del dominio de definición, estas funciones se llaman funciones a trozos (o funciones por tramos). Para resolver transformadas de este tipo de funciones generalmente por cada función se resuelve una integral cuidando los límites de integración.

Ejemplo 10. Transformada de una función por tramos.

Determine $\mathcal{L}[f(t)]$, si:

$$f(t) = \begin{Bmatrix} 0 \; si \; 0 \leq t < 3 \\ 2 \; si \; t \geq 3 \end{Bmatrix}$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = \lim_{b \to \infty} \int_0^b e^{st} f(t)\, dt$$

Como $f(t)$ está definida por dos tramos, debemos expresar $\mathcal{L}[f(t)]$ como la suma de dos integrales:

$$\mathcal{L}[f(t)] = \lim_{b \to \infty} \int_0^b e^{st} f(t)\, dt = \lim_{b \to \infty} \left[\int_0^3 e^{st}(0)\, dt + \int_3^\infty e^{st}(2)\, dt \right] \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \lim_{b \to \infty} \left[0 + 2\int_3^\infty e^{st} dt \right] = 2\lim_{b \to \infty} \left[\left| \frac{e^{-st}}{-s} \right|_3^\infty \right] = -\frac{2}{s} \lim_{b \to \infty} [|e^{-st}|_3^\infty] \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = -\frac{2}{s} \lim_{b \to \infty} \left[\left| \frac{1}{e^{st}} \right|_3^\infty \right] = -\frac{2}{s} \lim_{b \to \infty} \left[\left(\frac{1}{e^{s\infty}} \right) - \left(\frac{1}{e^{s3}} \right) \right] = -\frac{2}{s} \left[(0) - \left(\frac{1}{e^{3s}} \right) \right] \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{2}{se^{3s}} \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}\left[f(t) = \begin{Bmatrix} 0 \; si \; 0 \leq t < 3 \\ 2 \; si \; t \geq 3 \end{Bmatrix} \right] = \frac{2}{se^{3s}}.$$

En el siguiente ejercicio resolvemos la transformada de Laplace para la función $f(t) = \sin^2 t$. En la solución, ya no usaremos el cálculo de los límites, más bien usamos resultados anteriores. Muchos ejercicios se resuelven de esta manera.

Ejemplo 11. Propiedad de linealidad del operador $\mathcal{L}$.

Determine $\mathcal{L}[\sin^2 t]$.

Como $f(t) = \sin^2 t \Rightarrow \sin^2 t = 1 - \cos^2 t = (\sin^2 t + \cos^2 t) - \cos^2 t \Rightarrow$

$$\sin^2 t = -(\cos^2 t - \sin^2 t) + \cos^2 t = -\cos 2t + 1 - \sin^2 t \Rightarrow$$

$$2\sin^2 t = 1 - \cos 2t \Rightarrow \sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2} \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}[\sin^2 t] = \int_0^\infty e^{-st} \sin^2 t \; dt = \lim_{b \to \infty} \int_0^b e^{-st} \sin^2 t \; dt \; = \lim_{b \to \infty} \int_0^b e^{-st} \left[\frac{1 - \cos 2t}{2} \right] dt$$

$$\mathcal{L}[\sin^2 t] = \mathcal{L}\left[\frac{1}{2} - \frac{\cos 2t}{2}\right] = \frac{1}{2}\mathcal{L}[1 - \cos 2t].$$

De los ejemplos 1 y 5 sabemos que:

$\mathcal{L}[c] = \frac{c}{s}$ y $\mathcal{L}[\cos at] = \frac{s}{(s^2+a^2)}$. Entonces,

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}[1 - \cos 2t] = \frac{1}{2}[\mathcal{L}(1) - \mathcal{L}(\cos 2t)] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s} - \frac{s}{(s^2 + 2^2)}\right] \Longrightarrow$$

$$\mathcal{L}[\sin^2 t] = \frac{1}{2}\left[\frac{s^2 + 4 - s^2}{s(s^2 + 2^2)}\right] = \frac{2}{s(s^2 + 2^2)} \Longrightarrow$$

$$\mathcal{L}[\sin^2 t] = \frac{2}{s(s^2 + 2^2)}.$$

Es útil resumir en la tabla 1 algunos resultados importantes de las transformadas de Laplace en secciones anteriores, algunas deducidas y otras para que el estudiante las compruebe.

$f(t)$	$F(s)$
$f(t) = c$	$\mathcal{L}[t] = F(s) = \frac{c}{s}\ s > 0$
$f(t) = t$	$\mathcal{L}[t] = F(s) = \frac{1}{s^2}$
$f(t) = t^n$	$\mathcal{L}[t^n] = F(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$
$f(t) = e^{at}$	$\mathcal{L}[e^{at}] = F(s) = \frac{1}{s-a}$
$f(t) = \cos at$	$\mathcal{L}[\cos at] = F(s) = \frac{s}{(s^2 + a^2)}$
$f(t) = \sin at$	$\mathcal{L}[\sin at] = F(s) = \frac{a}{(s^2 + a^2)}$
$f(t) = te^{at}$	$\mathcal{L}[te^{at}] = F(s) = \frac{1}{(a-s)^2}\ s > a.$
$f(t) = t^2e^{at}$	$\mathcal{L}[t^2e^{at}] = \frac{2}{(s-a)^3}\ s > a.$
$f(t) = \sinh at$	$\mathcal{L}[\sinh at] = F(s) = \frac{a}{(s^2 - a^2)}$
$f(t) = \cosh at$	$\mathcal{L}[\cosh at] = F(s) = \frac{s}{(s^2 - a^2)}$

Tabla 1. Transformadas de Laplace de algunas funciones básicas

Fuente: Propia.

Transformada inversa de Laplace

En todos los ejemplos que revisamos en las secciones anteriores, nuestro propósito fue transformar una función $f(t)$ en otra función $F(s)$ utilizando la integral:

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt.$$

Lo expresamos diciendo que:

$\mathcal{L}[f(t)] = F(s).$

Vamos ahora a devolvernos en el proceso, es decir, si se conoce la función $F(s)$, se trata de encontrar la función $f(t)$. Se trata de invertir el problema, es decir, dada $F(s)$, determinar $f(t)$ que corresponde a la transformación.

La nueva notación para la transformada inversa de Laplace es:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)],$$

que indica que $f(t)$ es la transformada inversa de $F(s)$.

A partir de la tabla 1, podemos escribir las transformadas inversas de las funciones que aparecen allí. En la tabla 2 aparecen algunas transformadas inversas de Laplace.

$\boldsymbol{f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]}$
$\boldsymbol{c = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{c}{s}\right] \quad s > 0}$
$\boldsymbol{t = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right]}$
$\boldsymbol{t^n = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{n!}{s^{n+1}}\right]}$
$\boldsymbol{e^{at} = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right]}$
$\boldsymbol{\cos at = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+a^2)}\right]}$
$\boldsymbol{\sin at = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a}{(s^2+a^2)}\right]}$
$\boldsymbol{te^{at} = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(a-s)^2}\right] \quad s > a.}$
$\boldsymbol{t^2e^{at} = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{(s-a)^3}\right] \quad s > a.}$

$\sinh at = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a}{(s^2 - a^2)}\right]$	
$\cosh at = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2 - a^2)}\right]$	

Tabla 2. Transformadas inversas de Laplace de algunas funciones básicas.

Fuente: Propia.

El operador $\mathcal{L}^{-1}$ es una transformación lineal

Ya que el operador $\mathcal{L}$ es una transformación lineal, podemos suponer, que su operador inverso, $\mathcal{L}^{-1}$, también debe ser una transformación lineal.

Si α y β son valores constantes,

$$\mathcal{L}^{-1}[\alpha F(s) + \beta G(s)] = \alpha\mathcal{L}^{-1}[F(s)] + \beta\mathcal{L}^{-1}[G(s)]$$

Donde F y G son las transformadas de las funciones f y g respectivamente.

Ejemplo 12. Evalúe $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^4}\right]$.

Al revisar la tabla 2, la expresión $t^n = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{n!}{s^{n+1}}\right]$, es la adecuada para evaluar esta transformada inversa.

Debemos ajustar la expresión $\frac{1}{s^4}$ a esta otra, $\left[\frac{n!}{s^{n+1}}\right]$, para $n = 3$, así:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^4}\right] = \frac{1}{3!} \cdot \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3!}{s^4}\right] = \frac{1}{6}t^3.$$

Ejemplo 13. Evalúe $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+16}\right]$.

Al revisar la tabla 2, la expresión $\sin at = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a}{(s^2+a^2)}\right]$, es la adecuada para evaluar esta transformada inversa.

Debemos ajustar la expresión $\frac{1}{s^2+16}$ a esta otra, $\frac{a}{(s^2+a^2)}$, para $a = 4$, así:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2 + 16}\right] = \frac{1}{4} \cdot \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4}{s^2 + 16}\right] = \frac{1}{4}\sin 4t.$$

Ejemplo 14. Evalúe $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{5s+4}{s^2+9}\right]$.

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{5s+4}{s^2+9}\right] \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{5s}{s^2+9}+\frac{4}{s^2+9}\right].$$

Debemos aplicar la propiedad de linealidad para la transformada inversa de Laplace y las expresiones de la tabla 2:

$$\sin at = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a}{(s^2+a^2)}\right], \cos at = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+a^2)}\right]$$

Al hacerlo, nos queda:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{5s+4}{s^2+9}\right] = 5\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+9}\right]+\frac{4}{3}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{s^2+9}\right] = 5\cos 3t + \frac{4}{3}\cos 3t.$$

Fracciones parciales para el operador $\boldsymbol{\mathcal{L}^{-1}}$

En sus cursos de Cálculo usted ha estudiado el método de descomposición en fracciones parciales para expresiones que contienen por ejemplo factores lineales distintos, factores lineales repetidos y expresiones cuadráticas con o sin factores reales, por ejemplo:

$$\frac{1}{(s-3)(s+2)(s-1)}, \frac{s-1}{s^2(s-2)^3}, \frac{5s-1}{s^3(s+4)^2}.$$

En el ejemplo que sigue repasaremos uno de estos casos para resaltar su importancia al evaluar transformadas inversas de Laplace.

Ejemplo 15. Evalúe $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+3)(s-5)(s-2)}\right]$.

La descomposición en fracciones parciales para la expresión $\frac{1}{(s-3)(s+2)(s-1)}$, incluye las tres constantes A, B y C, tales que:

$$\frac{1}{(s+3)(s-5)(s-2)} = \frac{A}{(s+3)}+\frac{B}{(s-5)}+\frac{C}{(s-2)}.$$

Al comparar los coeficientes de las potencias en ambos lados de la igualdad y efectuar operaciones algebraicas nos resulta un sistema de tres ecuaciones con tres variables A, B y C.

$$\frac{1}{(s+3)(s-5)(s-2)} = \frac{A(s-5)(s-2)}{(s+3)} + \frac{B(s+3)(s-2)}{(s-5)} + \frac{C(s+3)(s-5)}{(s-2)} =$$

$$As^2 - 7sA + 10A + Bs^2 + sB - 6B + Cs^2 - 2sC - 15c =$$

$$(A+B+C)s^2 + (-7A+B-2C)s + (10A-6B-15C).$$

Los coeficientes correspondientes para s^2, s y el término independientes son respectivamente $0, 0$ y 1. Entonces nos queda el sistema 3x3:

$$\left\{\begin{matrix} A+B+C=0 \\ -7A+B-2C=0 \\ 10A-6B-15C=1 \end{matrix}\right\}.$$

Al resolverlo obtenemos $A = \frac{1}{40}, B = \frac{1}{24}, C = -\frac{1}{15}$. Entonces las fracciones parciales quedan de la siguiente manera:

$$\frac{1}{(s+3)(s-5)(s-2)} = \frac{\frac{1}{40}}{(s+3)} + \frac{\frac{1}{24}}{(s-5)} - \frac{\frac{1}{15}}{(s-2)} \Longrightarrow$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+3)(s-5)(s-2)}\right] = \frac{1}{40}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+3)}\right] + \frac{1}{24}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-5)}\right] - \frac{1}{15}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-2)}\right]$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+3)(s-5)(s-2)}\right] = \frac{1}{40}e^{-3t} + \frac{1}{24}e^{5t} - \frac{1}{15}e^{2t}.$$

4

Unidad 4

Soluciones en series de potencias de ecuaciones diferenciales

Ecuaciones Diferenciales

Autor: Luis Guillermo Caro Pineda

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina

MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Introducción

Estudiaremos las series de potencias y su utilidad en la solución de ecuaciones diferenciales de primer y segundo orden.

Inicialmente nos concentramos en un estudio detallado de las series de potencias y la definición de radio de convergencia muy útil para determinar si una serie converge o no converge (diverge). Para establecer la convergencia de una serie introducimos los conceptos de prueba de la razón y prueba de la raíz.

En secciones anteriores hemos resuelto, principalmente, ecuaciones diferenciales lineales de primer y segundo orden y de orden superior, cuando en general, las ecuaciones tenían coeficientes constantes. Pero en las aplicaciones en ciencias e ingeniería se evidencia que las ecuaciones lineales de orden superior con coeficientes variables tienen, en muchas ocasiones, mayor importancia. Nos centramos en la solución en series de potencias de ecuaciones diferenciales de primer orden como $y' - x^2y = 0$, y ecuaciones diferenciales lineales sencillas de segundo orden con coeficientes variables como $y' - x^2y = 0$, que no tiene soluciones elementales.

Recomendaciones metodológicas

La presente cartilla, estudia detalladamente las series de potencias y su utilidad en la solución de ecuaciones diferenciales de primer y segundo orden. Se desarrolla a través de explicaciones de los fundamentos teóricos y la solución de ejemplos que ilustran los procedimientos para decidir la convergencia de una serie de potencias y su aplicación en la solución de ecuaciones diferenciales.

Es importante que tenga en cuenta las propiedades y los teoremas que se presentan, ya que son fundamentales en la exposición de los ejercicios resueltos; éstos presentan un nivel de exigencia superior al anterior para cada sección revisada.

Para garantizar su éxito en la revisión y estudio de los temas seleccionados, usted debe realizar una revisión exhaustiva de la cartilla, las lecturas complementarias y los recursos audiovisuales, ya que además de ubicar las definiciones pertinentes, encontrará explicaciones desde varios autores y ejercicios resueltos que despejarán dudas. El desarrollo del módulo exige disciplina y trabajo permanente, usted debe acostumbrarse a la revisión frecuente de los recursos y a la realización de las actividades en los tiempos señalados. Se convierte en requisito indispensable el uso de un programa de Cálculo simbólico como Geogebra, Derive, Matlab, etc.

Además de revisar los textos propuestos en la bibliografía, usted debe estudiar de manera permanente el libro digital *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado* de Dennis Zill, capítulo 6 que se encuentra en pdf en la sección de recursos para el aprendizaje.

Desarrollo temático

Soluciones en series de potencias de ecuaciones diferenciales

Series de potencias

Una serie de potencias en $x - a$ es una serie de la forma

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + \cdots \ (1).$$

La serie (1) se denomina serie de Taylor o desarrollo de potencias en un entorno de $x = a$. Aunque en algunos casos x sea igual a a, es decir, $x = a$, por conveniencia tomamos siempre que $(x-a)^0 = 1$.

Si en la serie de Taylor, $a = 0$, la nueva serie:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots \ (2).$$

se denomina serie de Maclaurin o desarrollo en series de potencias alrededor del origen.

Radio de convergencia

Para cada serie de potencias:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k,$$

hay un número $R \geq 0$, que puede ser infinito, tal que:

1. Si $|x-a| < R$, entonces la serie converge.
2. Si $|x-a| > R$, entonces la serie diverge (no converge).

Este número R se llama *radio de convergencia* de la serie de potencias.

Para determinar el radio de convergencia de la serie de potencias:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k$$

podemos emplear dos formas de hacerlo: la prueba de la razón y la prueba de la raíz.

Prueba de la razón

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k+1}{a_k}\right| = L$$

Prueba de la raíz

$$\lim_{k\to\infty}|a_k|^{\frac{1}{k}} = L$$

Luego determinamos R del modo siguiente:

1. Si $L=\infty$, entonces $R=0$. La serie converge únicamente para $x=a$.
2. Si $L=0$, entonces $R=\infty$. La serie converge para todo x.
3. Si se obtiene otro resultado entonces $R=\frac{1}{L}$.

Ejemplo 1. Hallar el radio de la convergencia de la serie de potencias.

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2k}{3^k}\right)x^k.$$

Aplicamos la prueba de la razón de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k+1}{a_k}\right| &= \lim_{k\to\infty}\left|\left(\frac{\frac{2(k+1)}{3^{k+1}}}{\frac{2k}{3^k}}\right)\right| = \lim_{k\to\infty}\left[\frac{2(k+1)}{2k}\left(\frac{3^k}{3^{(k+1)}}\right)\right]\\ &= \lim_{k\to\infty}\left[\frac{2(k+1)}{2k}\left(3^{k-(k+1)}\right)\right] = \lim_{k\to\infty}\left[\frac{2(k+1)}{3(2k)}\right] = \frac{1}{3}\lim_{k\to\infty}\left[\frac{2k+2)}{(2k)}\right]\\ &= \frac{1}{3}\lim_{k\to\infty}\left[\frac{2k}{2k}+\frac{2}{2k}\right] = \frac{1}{3}\lim_{k\to\infty}[1]+\frac{1}{3}\lim_{k\to\infty}\left[\frac{1}{k}\right] = \frac{1}{3} \Longrightarrow\end{aligned}$$

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k+1}{a_k}\right| = \frac{1}{3}.$$

Como $L=\frac{1}{3}$, entonces $R=\frac{1}{L}\Longrightarrow R=\frac{1}{\frac{1}{3}}\Longrightarrow R=3$.

Intervalo de convergencia de la serie de potencias

El conjunto de todos los valores de x para los cuales una serie de potencias dada es convergente se llama *intervalo de convergencia* de la serie de potencias.

Ejemplo 2. Obtener el intervalo de convergencia de la serie de potencias.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{x^k}{k2^k}\right).$$

Primero determinamos el grado de convergencia aplicando la prueba de la razón de la siguiente manera:

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k+1}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\left(\frac{\frac{1}{(k+1)2^{k+1}}}{\frac{1}{k2^k}}\right)\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\left(\frac{k2^k}{(k+1)2^{k+1}}\right)\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{k}{(k+1)}\left(\frac{2^k}{2^{(k+1)}}\right)\right|$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left[\frac{k}{(k+1)}\left(2^{k-(k+1)}\right)\right] =$$

$$\frac{1}{2}\lim_{k\to\infty}\left[\frac{k}{(k+1)}\right] = \frac{1}{2}\lim_{k\to\infty}\left[\frac{\frac{k}{k}}{\frac{(k+1)}{k}}\right] = \frac{1}{2}\lim_{k\to\infty}\left[\frac{1}{1+\frac{1}{k}}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\lim_{k\to\infty}1}{\lim_{k\to\infty}1+\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+0}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \Longrightarrow$$

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k+1}{a_k}\right| = \frac{1}{2}.$$

Como $L = \frac{1}{2}$, entonces $R = \frac{1}{L} \Longrightarrow R = \frac{1}{\frac{1}{2}} \Longrightarrow R = 2$.

Por lo tanto la serie converge para $|x| < 2$ y diverge para $|x| > 2$. Analicemos lo que ocurre cuando $|x| = 2$:

Para $|x| = 2$ tenemos

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{x^k}{k2^k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k}{k2^k} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k},$$

Esta serie se llama la *serie armónica* y por lo tanto diverge.

Para $|x| = -2$ tenemos:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{x^k}{k2^k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-2)^k}{k2^k} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)\frac{1}{k},$$

Esta serie se llama la *serie alternada* cuyos términos tienden a cero de modo que la serie converge por lo tanto el intervalo de convergencia de la serie es $[-2,2)$.

Ejemplo 3. Obtener el intervalo de convergencia de la serie de potencias:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{(\ln k)^k}.$$

Para hallar el radio de convergencia empleamos la prueba de la raíz:

$$\lim_{k\to\infty} |a_k|^{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{1}{(\ln k)^k}\right|^{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1^{\frac{1}{k}}}{[(\ln k)^k]^{\frac{1}{k}}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\ln k} = 0.$$

Como $L = 0$ entonces $R = \infty$ por lo tanto el intervalo de convergencia para esta serie es $(-\infty, \infty)$.

Ejemplo 4. Obtener el intervalo de convergencia de la serie de potencias.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-3)^k}{k^2}.$$

Hallamos el radio de convergencia mediante la prueba de la razón así:

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k+1}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\left(\frac{\frac{1}{(k+1)^2}}{\frac{1}{k^2}}\right)\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\left(\frac{k^2}{(k+1)^2}\right)\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\left(\frac{k}{k+1}\right)^2\right|$$

$$= \left[\lim_{k\to\infty} \left[\frac{k}{(k+1)}\right]\right]^2 = 1^2 = 1 \Longrightarrow$$

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k+1}{a_k}\right| = 1.$$

Como $L = 1$, entonces $R = \frac{1}{L} \Longrightarrow R = 1$.

Por lo tanto la serie converge para $|x-3| < 1$, es decir, si:

$$-1 < x - 3 < 1 \Longrightarrow 2 < x < 4.$$

Y diverge para $|x-3| > 1$.

Analicemos lo que ocurre cuando $|x| = 2$:

Para $x = 2$ tenemos:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2-3)^k}{k^2}=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k^2}=.$$

Esta serie es alterna y absolutamente convergente.

Para $x=4$ tenemos:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(4-3)^k}{k^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}.$$

Esta serie es convergente, por lo tanto 2 y 4 son parte del intervalo de convergencia, entonces el intervalo de convergencia es $[2,4]$.

En general la prueba de la razón es muy útil cuando hay factoriales mientras que la prueba de la raíz es más útil cuando hay potencias.

Teorema de convergencia. Si la serie de potencias:

$$\sum_{n=1}^{\infty}C_n x^n$$

es una serie de potencias con un radio de convergencia $R>0$, entonces la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty}nC_n x^{n-1}$$

también tiene a R como su radio de convergencia.

Teorema de diferenciación de series de potencias. Sea la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty}C_n x^n$$

una serie de potencias cuyo radio de convergencia es $R>0$ entonces si f es la función definida por:

$$f=\sum_{n=0}^{\infty}C_n x^n$$

Se garantiza la existencia de la derivada de la función f, denotada por f', para cualquier valor de x en el intervalo abierto $(-R,R)$. Esta derivada está dada por:

$$f' = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n-1}.$$

Teorema integración de series de potencias. Sea la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$$

una serie de potencias cuyo radio de convergencia es $R > 0$ entonces si f es la función definida por:

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$$

f es integrable en cualquier subintervalo cerrado de $(-R, R)$ y

$$\int_0^x f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{n+1} x^{n+1}.$$

Además, R es radio de convergencia de la serie resultante.

Solución de ED de primer orden usando series de potencias

En las unidades anteriores hemos estudiado diversos métodos para resolver ecuaciones diferenciales de primer y segundo orden. Por ejemplo, al evaluar la ecuación diferencial de primer orden:

$$y' - x^2 y = 0 \ (1),$$

recordemos que se puede resolver por el método de variables separables estudiado en la unidad II.

La pregunta que surge en este momento es ¿es posible utilizar una serie de potencias para resolver (1)? ¿Cómo hacerlo?

Efectivamente, podemos encontrar para (1), una solución de la forma:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n \ (2).$$

En otras palabras, la tarea consiste en determinar los coeficientes C_n de esta serie que resuelvan (1).

Empecemos por encontrar la derivada de (2) para luego sustituirla en (1). Sabemos que los primeros términos de la serie (2) son:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \cdots$$

Si queremos derivar esta serie, es decir, calcular y', entonces derivamos cada uno de los términos de (2) de la siguiente manera:

$$y' = 0 + C_1 + 2C_2 x + 3C_3 x^2 + \cdots$$

Esta derivada se puede escribir como una serie de potencias, empezando en $n = 1$.

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} nC_n x^{n-1} = C_1 + 2C_2 x + 3C_3 x^2 + \cdots$$

Advierta que al derivar la serie $\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$, aplicamos la regla de derivación de la potencia de manera directa a la serie, pero cuidando que en la derivada partimos desde $n = 1$ y no desde $n = 0$.

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} nC_n x^{n-1} \ (3).$$

Así mismo, si quisiéramos determinar la segunda derivada, y'', aplicamos nuevamente la regla de derivación de la potencia de manera directa a la serie (3) pero cuidando que en la derivada partimos desde $n = 2$ y no desde $n = 1$.

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2},$$

Y de manera reiterada para las derivadas sucesivas.

Volvamos a (1). Ahora debemos sustituir los términos de y y y' en (1).

$$y' - x^2 y = 0 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} nC_n x^{n-1} - x^2 \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 0 \Longrightarrow$$

$$y' - x^2 y = \sum_{n=1}^{\infty} nC_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+2} = 0.$$

El propósito ahora es poder expresar esas dos sumatorias en términos de una sola sumatoria. Para hacerlo, utilizamos un procedimiento que se llama "enfasar", que consiste en que todas las x comiencen en la misma potencia y que las sumatorias inicien en los mismos índices.

Advierta que en la sumatoria:

$$\sum_{n=1}^{\infty} nC_n x^{n-1},$$

al sustituir n por el valor inicial $n = 1$, la potencia de x^{n-1} inicia en $x^{n-1} = x^{1-1} = x^0$, mientras que en la sumatoria:

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+2} \; (4),$$

al sustituir n por el valor inicial $n = 0$, la potencia de x^{n+2} inicia en $x^{n+2} = x^{0+2} = x^2$, es decir, las x inician en diferentes potencias. Adicionalmente la sumatoria en (3) inicia desde $n = 1$, mientras que la sumatoria en (4) inicia desde $n = 0$. El propósito es que las dos sumatorias inicien desde el mismo valor.

El primer paso consiste en equilibrar las potencias de x. La idea es comenzar con la sumatoria que contenga la menor potencia de x, en este caso la sumatoria (3). Calculemos los tres primeros términos de esta serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} nC_n x^{n-1} = (1)\, C_1 x^{1-1} + (2) C_2 x^{2-1} + \sum_{n=3}^{\infty} nC_n x^{n-1} \Longrightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} nC_n x^{n-1} = C_1 + 2C_2 x + \sum_{n=3}^{\infty} nC_n x^{n-1}.$$

Volviendo a la ecuación diferencial inicial obtenemos:

$$y' - x^2 y = \sum_{n=1}^{\infty} nC_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+2} = C_1 + 2C_2 x + \sum_{n=3}^{\infty} nC_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+2}\,.$$

Ya superamos el problema inicial, es decir, ya logramos que las dos series comiencen con la misma potencia de x, es decir, x^2.

Ahora debemos nivelar los coeficientes. Para hacerlo, voy a incluir un nuevo coeficiente k, que me va a sustituir las potencias de x en cada una de las dos sumatorias.

Para la primera sumatoria:

$$\sum_{n=3}^{\infty} nC_n x^{n-1},$$

$k = n - 1$, que es la potencia de x.

Para la segunda sumatoria:

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+2}$$

$k = n + 2$, que es la potencia de x.

Ya sospechará usted, que el propósito es escribir los nuevos coeficientes en términos de k, para lo cual, debemos despejar k para cada caso:

$n = k + 1$ y $n = k - 2$. Cuando $n = 3 \Longrightarrow k = 2$, lo que indica que ya superamos el segundo inconveniente, es decir, las dos sumatorias comienzan desde $k = 2$, con lo que la expresión:

$$C_1 + 2C_2 x + \sum_{n=3}^{\infty} nC_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+2},$$

Se transforma en:

$$C_1 + 2C_2 x + \sum_{k=2}^{\infty} (k+1)C_{k+1} x^k - \sum_{k=2}^{\infty} C_{k-2} x^k.$$

De esta manera, (5) está completamente enfasada, ya que las x comienzan desde la misma potencia, x^2, y ambas inician desde el mismo número, $k = 2$. Y ya podemos integrar las dos sumatorias en una sola; entonces (5) se transforma en:

$$C_1 + 2C_2 x + \sum_{k=2}^{\infty} (k+1)C_{k+1} x^k - C_{k-2} x^k,$$

factorizando x^k nos queda:

$$C_1 + 2C_2 x + \sum_{k=2}^{\infty} [(k+1)C_{k+1} - C_{k-2}] x^k \ (6).$$

Hemos llegado a una ecuación que depende de los coeficientes C_1, C_2, C_{k+1}, C_{k-2}, que son precisamente los coeficientes que se deben determinar. Es decir, cuando queremos resolver una ecuación diferencial mediante series de potencias, las operaciones algebraicas se realizan con el objetivo de determinar esos coeficientes.

Para la ecuación diferencial que nos convoca, $y' - x^2y = 0$, todos los términos de la serie van a tener que depender de un solo coeficiente porque la ecuación diferencial es de primer orden[1]. Para este caso, y para todos los problemas con series, debemos generar una fórmula de recurrencia para poder encontrar todos los $C_{k,}$ que a su vez son los C_n que habíamos asumido en la serie inicial (2).

Como la expresión (6) debe ser igual a cero, por la condición de $y' - x^2y = 0$, entonces:

$$C_1 + 2C_2x + \sum_{k=2}^{\infty}[(k+1)C_{k+1} - C_{k-2}]x^k = 0,$$

obliga a que los coeficientes sean todos iguales a cero, es decir:

$C_1 = C_2 = 0, (k+1)C_{k+1} - C_{k-2} = 0$, con lo que:

$$C_{k+1} = \frac{C_{k-2}}{(k+1)},$$

expresión que permitirá encontrar todos los coeficientes C_n a partir de uno solo. Sabemos que k comienza desde $k = 2$, entonces busquemos algunos de ellos.

Para $k = 2 \Longrightarrow C_{k+1} = \frac{C_{k-2}}{(k+1)} \Longrightarrow C_{2+1} = \frac{C_{2-2}}{(2+1)} \Longrightarrow C_3 = \frac{C_0}{3}$.

Para $k = 3 \Longrightarrow C_{k+1} = \frac{C_{k-2}}{(k+1)} \Longrightarrow C_{3+1} = \frac{C_{3-2}}{(3+1)} \Longrightarrow C_4 = \frac{C_1}{4}$, como $C_1 = 0 \Longrightarrow C_4 = 0$.

Para $k = 4 \Longrightarrow C_{k+1} = \frac{C_{k-2}}{(k+1)} \Longrightarrow C_5 = \frac{C_2}{5}$, como $C_2 = 0 \Longrightarrow C_5 = 0$.

Para $k = 5 \Longrightarrow C_{k+1} = \frac{C_{k-2}}{(k+1)} \Longrightarrow C_6 = \frac{C_3}{6}$, como $C_3 = \frac{C_0}{3} \Longrightarrow C_6 = \frac{C_0}{3*6} = \frac{C_0}{2*3^2}$.

Para $k = 6 \Longrightarrow C_{k+1} = \frac{C_{k-2}}{(k+1)} \Longrightarrow C_7 = \frac{C_4}{7} \Longrightarrow$, como $C_4 = 0 \Longrightarrow C_7 = 0$.

Para $k = 7 \Longrightarrow C_{k+1} = \frac{C_{k-2}}{(k+1)} \Longrightarrow C_8 = \frac{C_5}{8} \Longrightarrow$, como $C_5 = 0 \Longrightarrow C_8 = 0$.

Para $k = 8 \Longrightarrow C_{k+1} = \frac{C_{k-2}}{(k+1)} \Longrightarrow C_9 = \frac{C_6}{9}$, como $C_6 = \frac{C_0}{18} \Longrightarrow C_9 = \frac{C_0}{2*3*3^3}$.

[1] Recuerden que una ecuación diferencial de primer orden tiene una solución de la forma $y = ky_1$.

Si analizamos la secuencia de los coeficientes, vemos que:

$$C_4 = C_5 = C_7 = C_8 = 0.$$

Esta cadena de resultados nos indica varias cosas. Cada dos coeficientes seguidos son cero, con lo que:

$$C_{10} = C_{11} = C_{13} = C_{14} = \cdots 0.$$

Además, los coeficientes $C_6, C_9, C_{12}, C_{15}, \cdots$, que son múltiplos de 3, pueden encontrase a partir de:

$$C_3 = \frac{C_0}{3}.$$

$$C_6 = \frac{C_0}{2 * 3^2}.$$

$$C_9 = \frac{C_0}{2 * 3 * 3^3}.$$

$$C_{12} = \frac{C_0}{2 * 3 * 4 * 3^4}.$$

Estas expresiones nos están dando cierta ley para los coeficientes múltiplos de 3 solamente, ya que los demás son cero, y sugiere el uso del factorial:

$$C_n = \frac{C_0}{n!\,3^n}\ n = 3, 6, 9, 12, \cdots$$

La pregunta siguiente es cómo escribir este hecho mediante una sumatoria. Habíamos dicho que la solución que buscamos es una serie de la forma:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + C_4 x^4 + C_5 x^5 + C_6 x^6 + C_7 x^7 + C_8 x^8 + C_9 x^9 + C_{10} x^{10} + C_{11} x^{11} + C_{12} x^{12} + \cdots \ (7).$$

Pero los términos:

$$C_1 x = C_2 x^2 = C_4 x^4 = C_5 x^5 = C_7 x^7 = C_8 x^8 = C_{10} x^{10} + C_{11} x^{11} = 0.$$

Entonces la expresión (7) se transforma en:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = C_0 + C_3 x^3 + C_6 x^6 + C_9 x^9 + C_{12} x^{12} + \cdots \Longrightarrow$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = C_0 + \frac{C_0}{3}x^3 + \frac{C_0}{2 * 3^2}x^6 + \frac{C_0}{2 * 3 * 3^3}x^9 + \frac{C_0}{2 * 3 * 4 * 3^4}x^{12} + \cdots \Rightarrow$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = C_0 + \frac{C_0}{3}x^3 + \frac{C_0}{2! * 3^2}x^6 + \frac{C_0}{3! * 3^3}x^9 + \frac{C_0}{4! * 3^4}x^{12} + \cdots \Rightarrow$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_0}{n! * 3^n} x^{3n} \ (8).$$

Hemos encontrado la solución de la ecuación diferencial $y' - x^2 y = 0$ usando series de potencias y el resultado es (8). Sin embargo, al resolver esta ecuación por un método convencional como la separación de variables encontramos un resultado aparentemente diferente. Resolvamos $y' - x^2 y = 0$ por separación de variables.

$$y' - x^2 y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} - x^2 y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x^2 y \Rightarrow \frac{dy}{y} = x^2 dx \Rightarrow \ln y = \frac{x^3}{3} + c \Rightarrow$$

$$e^{\ln y} = e^{\frac{x^3}{3} + c} \Rightarrow$$

$$y = c_0 e^{\frac{x^3}{3}} \ (9).$$

Este resultado, en apariencia diferente al encontrado en (8), realmente es igual. Para verificarlo, debemos recordar que la función exponencial es una función que se puede representar como una serie de potencias de la siguiente manera:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \Rightarrow e^{\frac{x^3}{3}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x^3}{3}\right)^n}{n!}.$$

Solución de ED de segundo orden usando series de potencias.

Nos enfocamos ahora en la solución de una ED de segundo orden usando series de potencias, por ejemplo, vamos a resolver la ecuación diferencial de segundo orden:

$$y'' + xy = 0 \ (10),$$

y comenzamos como en la sección anterior a partir de la serie (2)

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n \Rightarrow y' = \sum_{n=1}^{\infty} n C_n x^{n-1} \Rightarrow y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) C_n x^{n-2}.$$

Al sustituir y'' y y en 10 obtenemos:

$$y'' + xy = 0 \Longrightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2} + x\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+1},$$

Como la primera sumatoria empieza en cero porque x^{n-2} se hace cero cuando $n = 2$, y la segunda en 1 porque x^{n+1} se hace uno cuando $n = 0$, entonces debemos equilibrar las series para dejar solamente una, recordando que para hacerlo, utilizamos el procedimiento que se llama "enfasar", que consiste en que todas las x comiencen en la misma potencia y que las sumatorias inicien en los mismos índices.

Como la diferencia entre las potencias de x en ambas sumatorias es de uno, solamente debemos sacar el primer término de la primera sumatoria, así:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+1} = 2C_2 + \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+1} = 0.$$

Ya superamos el problema inicial, es decir, ya logramos que las dos series comiencen con la misma potencia de x, es decir, x^1.

Ahora debemos nivelar los coeficientes. Para hacerlo, incluimos un nuevo coeficiente k, que me va a sustituir las potencias de x en cada una de las dos sumatorias.

Para la primera sumatoria:

$$\sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2}$$

$k = n - 2$, que es la potencia de x, y $n = k + 2$.

Para la segunda sumatoria:

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+1}$$

$k = n + 1$, que es la potencia de x, y $n = k - 1$.

Haciendo las sustituciones encontradas, obtenemos:

$$2C_2 + \sum_{k=1}^{\infty} (k+2)(k+1)C_{k+2} x^k + \sum_{k=1}^{\infty} C_{k-1} x^k = 0\ (11).$$

De esta manera, (11) está completamente enfasada, ya que las x comienzan desde la misma potencia, x^1, y ambas inician desde el mismo número, $k = 1$. Y ya podemos integrar las dos sumatorias en una sola; entonces (11) se transforma en:

$$2C_2 + \sum_{k=1}^{\infty}(k+2)(k+1)C_{k+2}x^k + C_{k-1}x^k = 2C_2 + \sum_{k=1}^{\infty}[(k+2)(k+1)C_{k+2} + C_{k-1}]\,x^k = 0.$$

Hemos llegado a una ecuación que depende de los coeficientes C_2, C_{k+2}, C_{k-1}, que son precisamente los coeficientes que se deben determinar.

Para la ecuación diferencial que nos convoca, $y'' + xy = 0$, todos los términos de la serie van a tener que depender de dos coeficientes porque la ecuación diferencial es de segundo orden[2]. Generemos la fórmula de recurrencia para poder encontrar todos los C_k, que a su vez son los C_n que habíamos asumido en la serie inicial.

Como la última expresión debe ser igual a cero, por la condición de $y'' + xy = 0$, entonces:

$$2C_2 = 0 \Longrightarrow C_2 = 0,$$

$$(k+2)(k+1)C_{k+2} + C_{k-1} = 0 \Longrightarrow C_{k+2} = -\frac{C_{k-1}}{(k+2)(k+1)}.$$

Como la sumatoria empieza en $k = 1$, ahí comenzamos:

Para $k = 1 \Longrightarrow C_{k+2} = -\frac{C_{k-1}}{(k+2)(k+1)} \Longrightarrow C_{2+1} = -\frac{C_{1-1}}{(1+2)(1+1)} \Longrightarrow C_3 = -\frac{C_0}{2*3}$.

Para $k = 2 \Longrightarrow C_{k+2} = -\frac{C_{k-1}}{(k+2)(k+1)} \Longrightarrow C_{2+2} = -\frac{C_{2-1}}{(2+2)(2+1)} \Longrightarrow C_4 = -\frac{C_1}{3*4}$.

Para $k = 3 \Longrightarrow C_{3+2} = -\frac{C_{3-1}}{(3+2)(3+1)} \Longrightarrow C_5 = -\frac{C_2}{4*5}$, como $C_2 = 0 \Longrightarrow C_5 = 0$.

Para $k = 4 \Longrightarrow C_{4+2} = -\frac{C_{4-1}}{(4+2)(4+1)} \Longrightarrow C_6 = -\frac{C_3}{5*6}$, como $C_3 = -\frac{C_0}{2*3} \Longrightarrow C_6 = \frac{C_0}{2*3*5*6}$.

Para $k = 5 \Longrightarrow C_{5+2} = -\frac{C_{5-1}}{(5+2)(5+1)} \Longrightarrow C_7 = -\frac{C_4}{6*7}$, como $C_4 = -\frac{C_1}{3*4} \Longrightarrow C_7 = \frac{C_1}{3*4*6*7}$.

Para $k = 6 \Longrightarrow C_{6+2} = -\frac{C_{6-1}}{(6+2)(6+1)} \Longrightarrow C_8 = -\frac{C_5}{7*8}$, como $C_5 = 0 \Longrightarrow C_8 = 0$.

Para $k = 7 \Longrightarrow C_9 = -\frac{C_6}{8*9}$, como $C_6 = -\frac{C_0}{2*3*5*6} \Longrightarrow C_9 = -\frac{C_0}{2*3*5*6*8*9}$.

[2] Recuerden que una ecuación diferencial de segundo orden tiene una solución de la forma $y = c_1y_1 + c_2y_2$.

Ya sospechamos la ley que queremos encontrar. Los coeficientes múltiplos de 3 van depender de C_0 con signos positivos y negativos alternados. Los coeficientes C_4, C_7, C_{10}, C_{13}, van a depender de C_1 con signos positivos y negativos alternados. Y de manera similar, analizar como aparecen dispuestos los números en los denominadores.

Resumiendo los resultados obtenidos hasta C_9,

$$C_2 = 0, C_3 = -\frac{C_0}{2*3}, C_4 = -\frac{C_1}{3*4}, C_5 = 0, C_6 = \frac{C_0}{2*3*5*6}, C_7 = \frac{C_1}{3*4*6*7}, C_8 = 0, C_9 = -\frac{C_0}{2*3*5*6*8*9}.$$

Habíamos dicho que la solución que buscamos es una serie de la forma:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + C_4 x^4 + C_5 x^5 + C_6 x^6 + C_7 x^7 + C_8 x^8 + C_9 x^9 + C_{10} x^{10} + C_{11} x^{11} + C_{12} x^{12} + \cdots \ (7).$$

Pero los términos $C_2 x^2 = C_5 x^5 = C_8 x^8 = C_{11} x^{11} = \cdots 0$. Y sustituyendo los coeficientes que dependen de C_0 y C_1.

Entonces la expresión (7) se transforma en:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = C_0 + C_1 x + (-\frac{C_0}{2*3})x^3 + (-\frac{C_1}{3*4})x^4 + (\frac{C_0}{2*3*5*6})x^6 + (\frac{C_1}{3*4*6*7})x^7 + (-\frac{C_0}{2*3*5*6*8*9})x^9 + (-\frac{C_0}{3*4*6*7*9*10})x^{10} \cdots$$

Entonces las dos soluciones que requiere la ecuación diferencial de segundo orden $y' - x^2 y = 0$, que deben ser de la forma $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$, nos indica que una de ellas estará conformada por los coeficientes que contengan C_1 y la otra por los coeficientes que contengan C_2. Entonces agrupemos estas dos posibles soluciones:

$$y = C_0\left[1 - \frac{x^3}{2*3} + \frac{x^6}{2*3*5*6} - \frac{x^9}{2*3*5*6*8*9} + \cdots\right] + C_1\left[x - \frac{x^4}{3*4} + \frac{x^7}{3*4*6*7} - \frac{x^{10}}{3*4*6*7*9*10} + \cdots\right].$$

Esta última expresión ya es la solución requerida de $y' - x^2 y = 0$. Sin embargo, podemos tratar de escribirla de otra manera, es decir, tratar de generalizar el resultado.

Al generalizar el primer término de la última expresión nos queda:

$$C_0\left[1-\frac{x^3}{2*3}+\frac{x^6}{2*3*5*6}-\frac{x^9}{2*3*5*6*8*9}+\cdots\right]$$
$$=C_0\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{3k-2}{(3k)!}\ x^{3k}\right].$$

Haciendo lo propio para el segundo término de la última expresión nos queda:

$$C_1\left[x-\frac{x^3}{2*3}+\frac{x^6}{2*3*5*6}-\frac{x^9}{2*3*5*6*8*9}+\cdots\right]$$
$$=C_1\left[x+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{3k-1}{(3k+1)!}\ x^{3k-1}\right].$$

Entonces la solución requerida nos queda:

$$y=C_0\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{3k-2}{(3k)!}\ x^{3k}\right]+C_1\left[x+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{3k-1}{(3k+1)!}\ x^{3k-1}\right].$$

Bibliografia

- Alonso de Mena, A., Álvarez, J., & Calzada, J. (2008). Ecuaciones diferenciales ordinarias: ejercicios y problemas resueltos. España: Delta Publicaciones.
- Bell, E. (1949). Historia de las Matemáticas. México: Fondo de Cultura Económica.
- Blanes, S., Ginestar, D., & Roselló, M. (2013). Introducción a los métodos numéricos para ecuaciones diferenciales. España: Editorial de la Universidad Politécnica de Valencia.
- Bourbaki, N. (1972). Elementos de historia de las matemáticas. España: Alianza.
- Boyer, C. (1994). Historia de la Matemática. España: Alianza.
- Bronson, R. & Costa, G. (2008). Ecuaciones diferenciales. 3° edición. México. Mc Graw Hill, serie Schaum.
- Calderón, G., Arango, J., & Gómez, A. (2014). Ecuaciones diferenciales para estudiantes de Ciencias e Ingenierías. Colombia: Programa editorial Universidad del Valle. ISBN: 978-958-765-111-9.
- Carmona, I., & Filio, E. (2011). Ecuaciones diferenciales. México: Pearson. ISBN: 978-607-32-0206-0.
- Collette, J. (s.f.). Historia de las Matemáticas. Argentina: Siglo XXI editores.
- Dolores, C. (2013). La variación y la derivada. España: Ediciones Díaz de Santos.
- Espinosa, et al (2010). Ecuaciones diferenciales ordinarias: Introducción. México: Reverté UAM.
- García, A. (2014). Ecuaciones diferenciales. México: Larousse - Grupo Editorial Patria.
- García, O., Villegas, J., Castaño, J., & Sánchez, J. (2010). Ecuaciones diferenciales. Colombia: Fondo Editorial Universidad EAFIT.
- Gil, M. (2006). Introducción rápida a Matlab y Simulink para ciencia e ingeniería. España: Ediciones Díaz de Santos.
- Hofmann, J. (2002). Historia de la Matemática: Desde el comienzo hasta la Revolución Francesa. México: Limusa, Grupo Noriega Editores.
- Izquierdo, G. (2013). Ejercicios de cálculo. Vol. IV. España: ECU.
- López, M., & Acero, I. (2007). Ecuaciones diferenciales: teoría y problemas (2a. ed.). España: Editorial Tébar.
- Mesa, F. (2012). Ecuaciones diferenciales ordinarias: una introducción. Colombia: Ecoe Ediciones.
- Rivera, F. (2014). Cálculo y sus fundamentos para ingeniería y ciencias. México: Larousse - Grupo Editorial Patria.
- Rodríguez, N. (2009). Ecuaciones de la física - matemática. Argentina: El Cid Editor apuntes.
- Simmons, G. (1993). Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas. España: McGraw-Hill/Interamericana de España.
- Zill, D. (2009). Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado. 9° edición. México: Cengage Learning.

Esta obra se terminó de editar en el mes de noviembre
Tipografá Myriad Pro 12 puntos
Bogotá D.C,-Colombia.