MATÉMATICAS

Sandra Peña Alonso

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina

MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Matématicas
Sandra Peña Alonso
Bogotá D.C.

Fundación Universitaria del Área Andina. 2018

Catalogación en la fuente Fundación Universitaria del Área Andina (Bogotá).

Matématicas

© Fundación Universitaria del Área Andina. Bogotá, septiembre de 2018
© Sandra Peña Alonso

ISBN (impreso): **978-958-5462-75-5**

Fundación Universitaria del Área Andina
Calle 70 No. 12-55, Bogotá, Colombia
Tel: +57 (1) 7424218 Ext. 1231
Correo electrónico: publicaciones@areandina.edu.co

Director editorial: Eduardo Mora Bejarano
Coordinador editorial: Camilo Andrés Cuéllar Mejía
Corrección de estilo y diagramación: Dirección Nacional de Operaciones Virtuales
Conversión de módulos virtuales: Katherine Medina

Todos los derechos reservados. Queda prohibida la reproducción total o parcial de esta obra y su tratamiento o transmisión por cualquier medio o método sin autorización escrita de la Fundación Universitaria del Área Andina y sus autores.

BANDERA INSTITUCIONAL

Pablo Oliveros Marmolejo †
Gustavo Eastman Vélez
Miembros Fundadores

Diego Molano Vega
Presidente del Consejo Superior y Asamblea General

José Leonardo Valencia Molano
Rector Nacional
Representante Legal

Martha Patricia Castellanos Saavedra
Vicerrectora Nacional Académica

Jorge Andrés Rubio Peña
Vicerrector Nacional de Crecimiento y Desarrollo

Tatiana Guzmán Granados
Vicerrectora Nacional de Experiencia Areandina

Edgar Orlando Cote Rojas
Rector – Seccional Pereira

Gelca Patricia Gutiérrez Barranco
Rectora – Sede Valledupar

María Angélica Pacheco Chica
Secretaria General

Eduardo Mora Bejarano
Director Nacional de Investigación

Camilo Andrés Cuéllar Mejía
Subdirector Nacional de Publicaciones

MATÉMATICAS

Sandra Peña Alonso

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina

MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

ÍNDICE

EJE 1

Introducción 7
Desarrollo Temático 8
Bibliografía 37

EJE 2

Introducción 39
Desarrollo Temático 40
Bibliografía 60

EJE 3

Introducción 62
Desarrollo Temático 63
Bibliografía 80

EJE 4

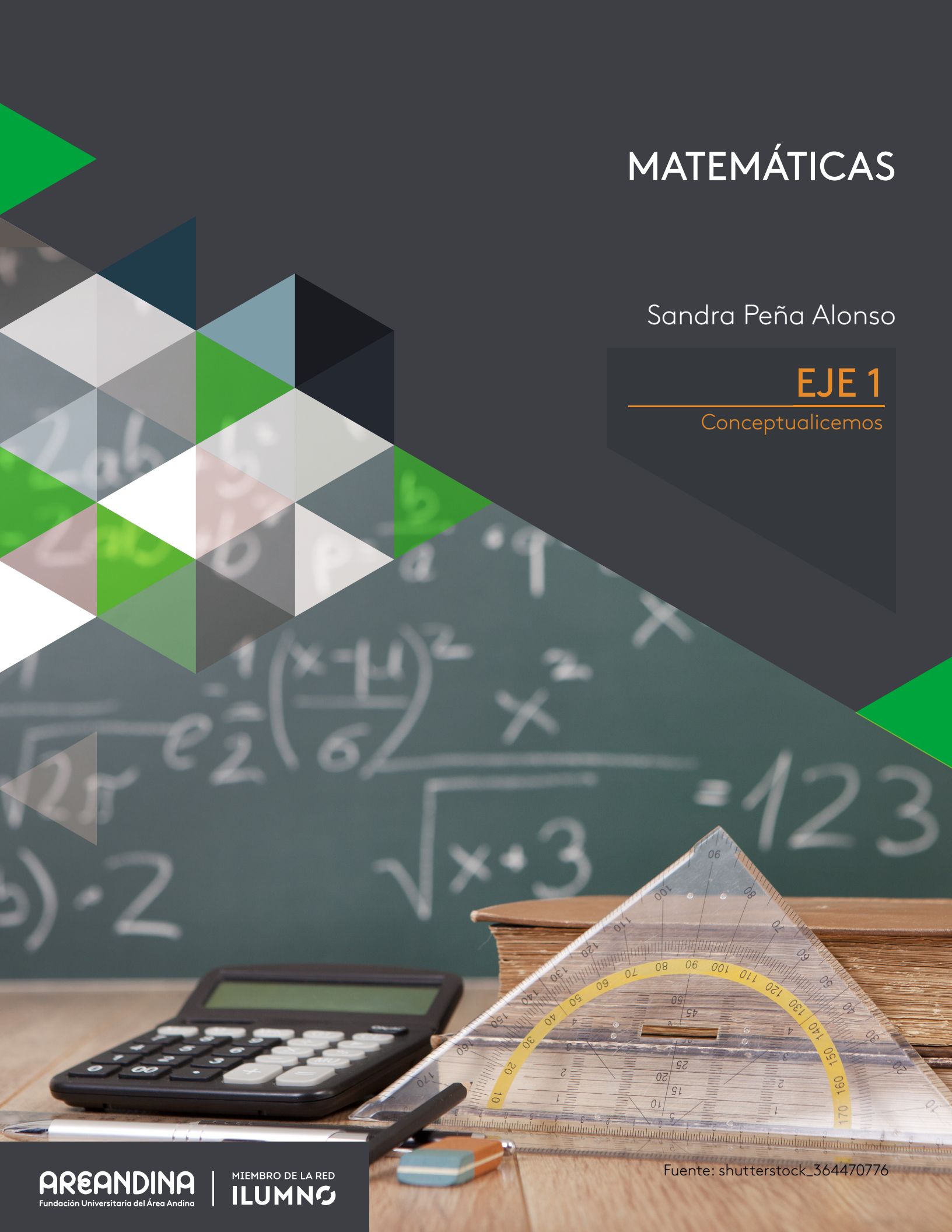
Introducción 82
Desarrollo Temático 83
Bibliografía 105

MATEMÁTICAS

Sandra Peña Alonso

EJE 1

Conceptualicemos



Fuente: shutterstock_364470776

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina
MIEMBRO DE LA RED ILUMNO

INTRODUCCIÓN

En este eje de pensamiento denominado los números y sus contextos, se pretende responder al interrogante ¿De qué manera se potencia el desarrollo de pensamiento numérico en la formación inicial de estudiantes de la Fundación Universitaria del Área Andina?

Para aproximarnos a diferentes formas de comprender los números, sus contextos, historias, usos y formas de operar se parte del hecho de que estos objetos matemáticos permiten acceder al conocimiento a partir de su estudio sistemático, lógico y progresivo. El pensamiento numérico se incentiva a través de estrategias de conteo, estimación, agrupación y cálculo mental.

En el documento de lineamientos curriculares para la educación matemática del Ministerio de Educación Nacional (1998), se establece que la aritmética es de uso cotidiano y profesional en la vida de las personas. En esa misma línea, declara que el estudio del pensamiento numérico es progresivo y se logra en la medida que usamos los números para resolver situaciones del contexto, algunas cotidianas y otras más elaboradas, en el sentido de que se requieren algunos saberes técnicos para operar y pensar con los números, por ejemplo, las matemáticas de los contadores, los ecónomos, los ingenieros y otros profesionales.

En este documento se presenta variedad de contextos tanto de uso, como de aplicación de los números y sus sistemas para la resolución de diferentes problemas en la vida cotidiana. Los sistemas de numeración son constructos sociales y culturales que reglamentan, nombran y dan sentido a los números en sus contextos para resolver diversas situaciones que han resultado ser problemáticas para el hombre, en diferentes periodos de la historia. Los números no están desprovistos de experiencia humana, por el contrario, estos encarnan no sólo el pensamiento de los colectivos sino de sus formas de vida y las formas de comunicación, que para este caso se han ido elaborando. Cada sistema numérico aparece en un marco histórico y ha sido adoptado en diversas culturas.

Nos proponemos entonces identificar diferentes códigos, al igual que su significado, para interpretar y resolver situaciones y problemas asociados al estudio del pensamiento numérico y su desarrollo.

Sistemas numéricos – Potenciación y Radicación

¿Cuáles son las relaciones numéricas existentes en la siguiente serie?

Figura 1
Fuente: propia

¿Qué número sigue? _____

La serie nos ilustra los números cuadrados, al igual que otros números que tienen particularidades importantes, a saber:

- Son números que forman cuadrados de base 1, 2, 3...
- Tienen una representación geométrica.
- Se denotan con la forma general . $n \times n = n^2$.
- Estos números son potencias de 2. Es decir que en la primera figura se ve un sólo cuadrado, representa las dimensiones del mismo cuando a uno de sus lados se le asigna el valor de 1 y se calcula su área $1 \times 1 = 1^2$.
- La forma de representación de este patrón numérico es bidimensional, sin embargo, es de anotar que existen representaciones piramidales cuadradas.

Así, los números cuadrados se logran al reiterar el mismo factor o al sumar los números impares que lo preceden. Un número cuadrado debe ser igual a la suma de la primera n números impares, siendo n el número base del número cuadrado.

Por ejemplo, el número cuadrado 16 equivale a la suma de 7+5+3+1, otro ejemplo, el número 36 se logra a partir de la suma de los números 1, 3, 5, 7, 9, 11 pero con otra restricción, no todos los números impares menores que 36, sólo aquellos que son representados en un arreglo geométrico.

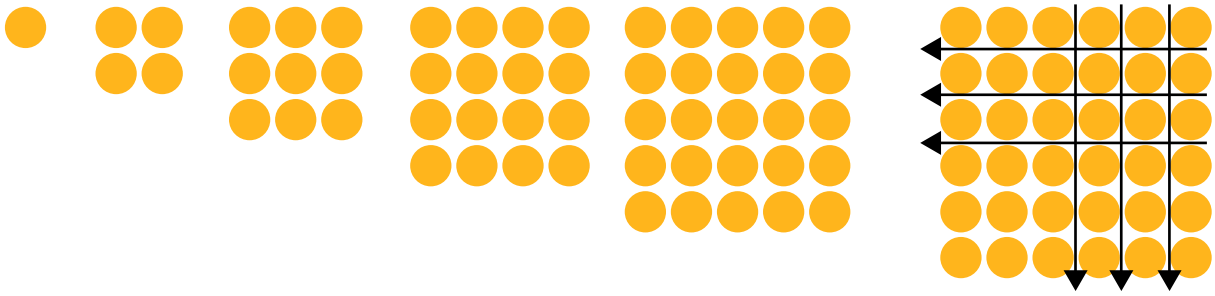


Figura: 2.
Fuente: propia

1 1+3=4 1+3+5=9.....

¿Qué es número? y ¿Qué es una cantidad?: conexiones con el comportamiento humano y de la naturaleza

Los números al igual que los seres humanos presentan comportamientos. En ocasiones algunos números se construyen a partir de la repetición de pautas fijas, rutinas o patrones, por ejemplo:

1= 1+0	1= 1+0
2= 1+1	2= 1+1+0
3= 1+2	3= 1+1+1+0
4= 1+3	4= 1+1+1+1+0

Otros números...

1, 3, 6, 10,15, 21... estos números se definen por su forma geométrica triangular, su patrón es triangular, y al representarlos cada conjunto de puntos se distribuyen en un triángulo de lados iguales o en triángulos equiláteros.

1 = 1+0
3= 1+2
6= 1 +2+3
10= 1+2+3+4
15= 1+2+3+4+5

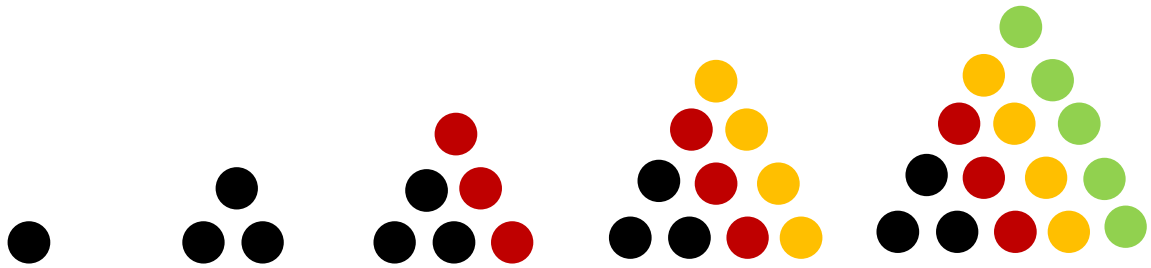


Figura: 3.
Fuente: propia

Otra relación numérica corresponde al significado que de los mismos se logró en la escuela Pitagórica. Claramente se establece una conexión entre elementos geométricos indefinidos como punto, recta o dimensiones, asociadas a los números uno, dos, tres y cuatro o números enteros. El uno por su parte asociado a la idea de punto o trazo que se consigue sobre una superficie, de modo tan sutil permite pensar en lo no dimensional, así el dos, asociado a la idea de segmento de recta o distancia entre dos puntos, con el número tres se establece la relación con el concepto de superficie o región de espacio delimitada por cierto número de segmentos de recta cerrados, ya el número cuatro se conecta con ideas asociadas al estudio del volumen o de cuerpos sólidos como el cubo.

De los cuatro primeros números enteros 1, 2, 3 y 4 en la época de Pitágoras se configura la filosofía de la Tetraktys. Así la suma de estos cuatro números 1+2+3+4=10 conforma la década o idea de totalidad y armonía entre el hombre y el universo. Los pensamientos principales de la Tetraktys de Pitágoras se presentan de manera global en la figura siguiente:

Figura. 4
Fuente: www.shutterstock.com/252135505

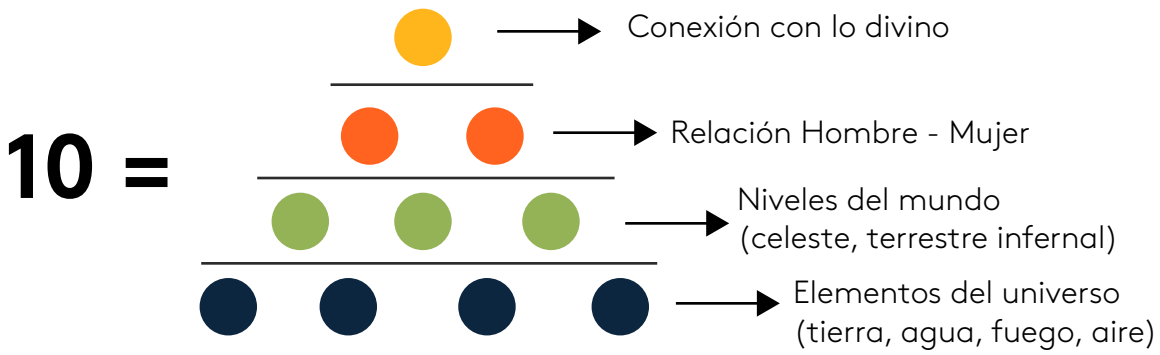


Figura: 5.
Fuente: propia

En la siguiente serie 1, 5, 12, 22, 35 se muestran los números poligonales. Estos números se representan a través de un conjunto de polígonos de cinco lados o pentágonos, y su patrón, se construye a partir de las relaciones que se muestran en el arreglo numérico y geométrico.

1 = 1+0
5 = 1+4
12= 1+4+7
22= 1+4+7+10

Figura: 6.
Fuente: propia

Los seres humanos accedemos a los números por recuento o por identificación de patrones o secuencias, comportamientos que se reiteran y que son fácilmente modelados a través de diferentes representaciones como son los símbolos, las formas geométricas, las palabras en sus dimensiones oral, escrita, icónica y gestual, al igual que las abstracciones que de los mismos se realiza.

Otros números que guardan relaciones interesantes por su configuración geométrica son los oblongos o con forma rectangular. Estos números se producen a partir del producto de dos números, se modelan con la forma , veamos:

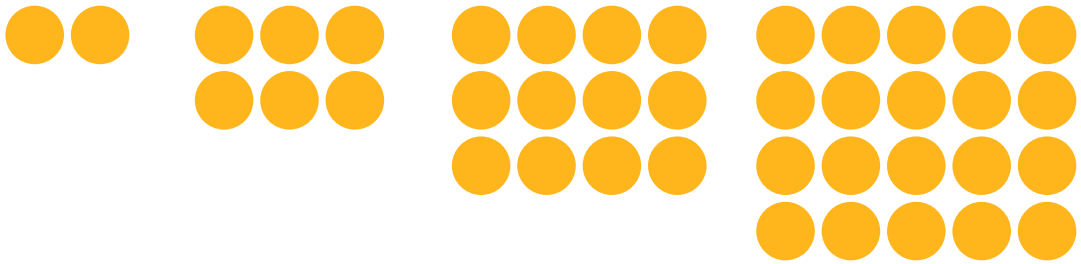


Figura: 7.
Fuente: propia

Para configurar la relación de los números que componen este arreglo geométrico, haremos uso de la idea de dimensión o de la relación base y altura. Así el primer arreglo se compone de sólo dos puntos organizados en una sola línea que da la idea de una dimensión o anchura. Para el segundo arreglo de puntos se encuentra la relación dos puntos ubicados en la dimensión de altura y tres puntos ubicados en la dimensión de anchura, de tal modo que 2 x 3 equivale a 6 puntos. El resto de la secuencia en el tercer arreglo, se infiere que, por cada arreglo se aumenta una línea de puntos tanto en forma vertical como horizontal, de manera tal, que se conserve una regularidad en el crecimiento o aumento del número de puntos de un arreglo al otro.

Ahora bien, el estudio de números perfectos como el 6 y el 28, requiere la construcción de otras pautas, lógicas y representaciones para su construcción. En ocasiones, estas conexiones se hacen más complejas, dadas las relaciones previas a su existencia, que hay que establecer. Así un número perfecto se compone de la sumatoria de los divisores, excepto él mismo. Para ejemplificar, el seis se distingue por ser un número perfecto o hexagonal, sus divisores se representan así de tal modo que se suman todos los números excepto el seis . Para los integrantes de la escuela pitagórica los números perfectos se asocian al equilibrio existente en el universo y que puede ser modelado a través de formas geométricas, que a su vez, se encuentran también en la naturaleza como las colmenas de abejas.

Escuela pitagórica

Escuela conformada por el matemático y filósofo Pitágoras y sus discípulos. Sus enseñanzas se orientan al estudio de los números como elementos fundamentales del mundo.

Subitización

Habilidad para determinar el cardinal de un conjunto, tan solo con observar el conjunto. Esta habilidad desarrollada en los primeros años de vida se logra sin pasar por un proceso de conteo.

También, se puede entender el número en configuraciones geométricas que presentan patrones y de los mismos se derivan reglas para operar y para contar. Sin embargo, entre el número y la cantidad, hay variaciones importantes, en la siguiente tabla, se vinculan algunas características de estos dos conceptos que, aunque interdependientes no son iguales.

Número	Cantidad
Se producen en algunas situaciones del recuento. En otras ocasiones con sólo mirar una colección de objetos se sabe cuántos elementos hay subitización. La capacidad de subitización se desarrolla en conexión con la realización de tareas de conteo que involucran cantidades discontinuas.	Para identificar una cantidad se requiere un tránsito por procesos de medición. Por ejemplo, para acceder a la idea de un litro de agua, una libra de arroz o dos kilómetros y medio se requiere contar con sistemas de referencia para estos cálculos, conocer instrumentos y sistemas de medición y saber que en el establecimiento de una cantidad se trabajará desde la aproximación.
Pueden ser exactos (en algunos conjuntos numéricos, por mencionar, el de los números naturales y enteros).	Es aproximada, nunca exacta, su elaboración se rige por principios de azar e incertidumbre.
Mantienen un patrón en el conteo.	Suele ser incierto determinar de forma exacta una cantidad (se rige por principios probabilísticos).

Tabla: 1. Algunas diferencias entre número y cantidad
Fuente: propia

La cantidad se puede definir como una forma abstracta de percibir la evolución de un fenómeno y sus características. La cantidad se distancia un poco del número dado que su comprensión está asociada al concepto de magnitud. Así, la magnitud se entiende como una cualidad o atributo de un objeto, un fenómeno, una persona. A su vez, la cantidad se entiende como una porción de la magnitud. En la figura que se muestra en seguida se resalta una clasificación de las cantidades. Cabe aclarar que la cantidad se convierte en un contexto de actuación para los números.

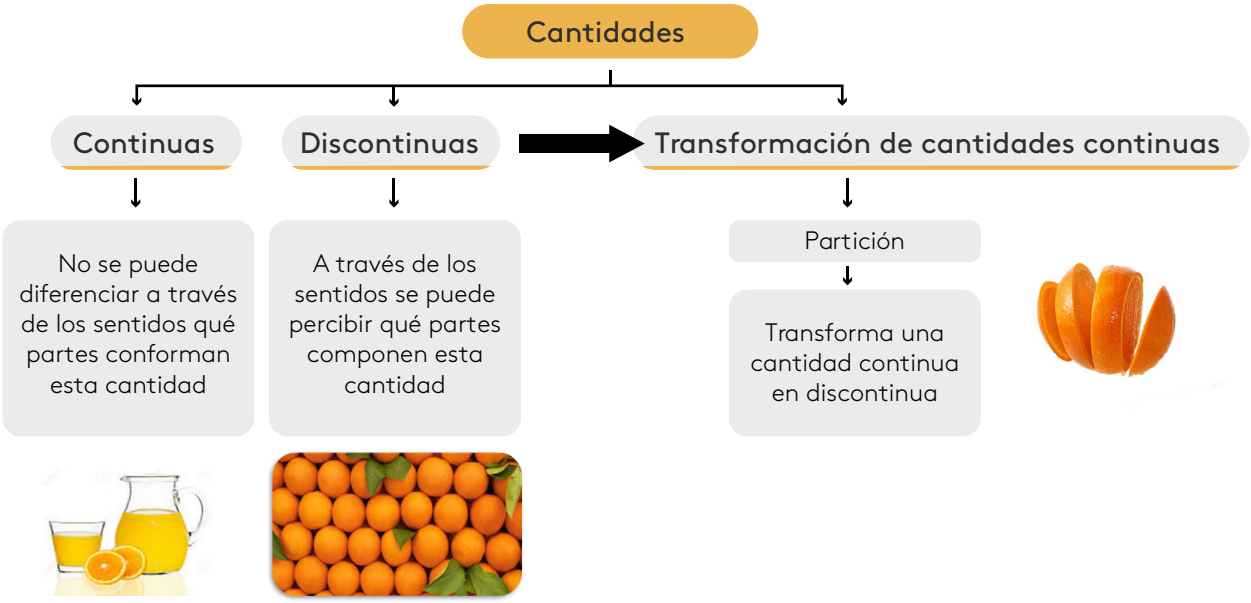


Figura: 8. Tipos de cantidades
Fuente: propia

¿Qué es un sistema de numeración entonces?

Habiendo bosquejado una posible diferenciación entre números y cantidades, es preciso mencionar que un sistema se entiende como un conjunto de interacciones entre diferentes elementos, que a su vez guardan interdependencia los unos y los otros, posibilitando diálogos y retroalimentaciones continuas.

¡Importante!

Cuando se habla de un sistema de numeración se alude a un conjunto de principios, reglas, símbolos ordenados que han sido generados por consenso y que tienen por finalidad la resolución de problemas asociados con el conteo, el intercambio mercantil y la conversión de un sistema a otro.

Un sistema de numeración se clasifica de acuerdo con el número de símbolos que lo conforman para posibilitar relaciones internas y formas de operar. Las reglas no son las mismas para todos los sistemas, se han estudiado desde formas simples para contar, hasta las más sofisticadas asociadas a las formas de vida de las personas en sus culturas de origen. En la figura siguiente se ilustran algunos sistemas de numeración, la intención no es profundizar en ninguno de ellos, a excepción del sistema base diez que es con el que nos identificamos y del cual hacemos uso en nuestra cotidianidad.

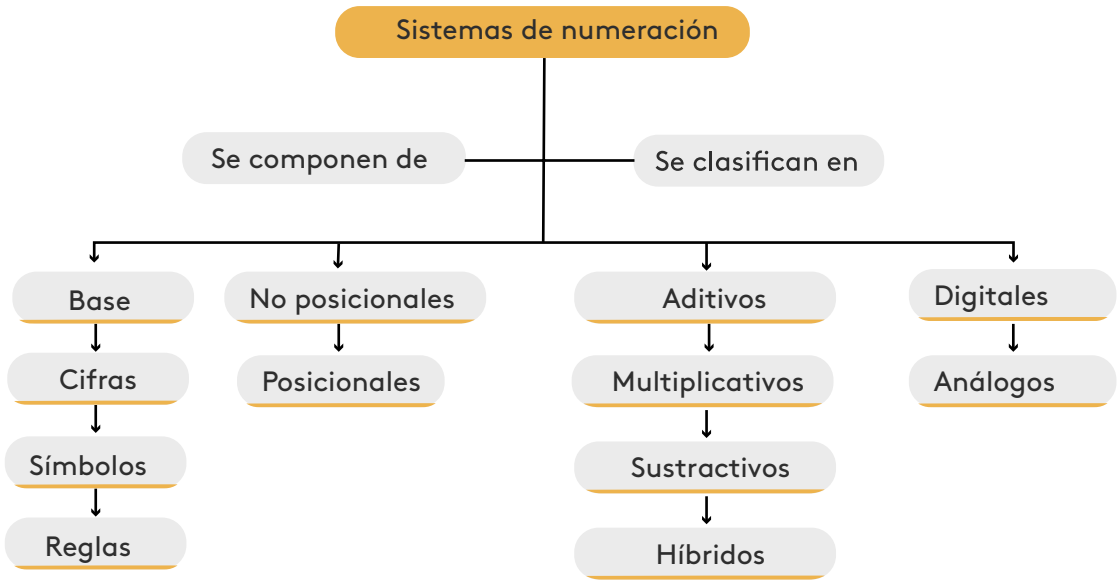


Figura: 9. Clases de sistemas de numeración
Fuente: propia

Un sistema de numeración cuenta con los siguientes elementos:

- *Base:* corresponde al número de símbolos que componen un sistema para operar y crear otras cantidades. En la tabla siguiente, se registran diferentes sistemas numéricos y sus símbolos correspondientes.

- *Símbolos:* conjunto de elementos que conforman un código para generar cantidades. Estos símbolos son representaciones que significan de acuerdo con el contexto y a un conjunto de reglas que se establecen previamente para su operación.

- *Cifra:* corresponde a la combinación de varios símbolos o dígitos. Esta combinación es la representación de un número.

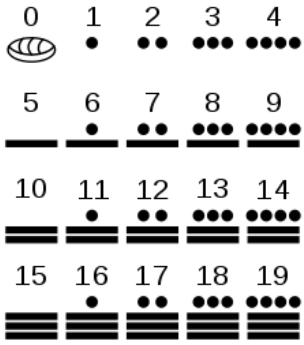
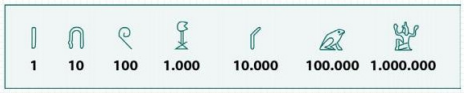
Sistema	Base	Símbolos
Decimal	10	0,1,2,3,4,5,6,7,8,9
Binario	2	0,1
Octal	8	0,1,2,3,4,5,6,7
Sexadecimal	16	0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F
Vigesimal (Maya)	20	
Egipcio	10 (No posicional)	
Romano	7	I,V,C,X,L,D,M
Chino	13	

Tabla 2 Sistemas de numeración
Fuente: propia

Sistemas posicionales: se compone de cierta cantidad de símbolos. La cantidad de símbolos disponibles en este sistema corresponden a su base, está a su vez, es un referente para las agrupaciones que se pueden realizar antes de generar una cantidad mayor. En los sistemas posicionales como el decimal, el binario y el quinario el orden de los símbolos importa, dado que cada cifra toma un valor y un significado de acuerdo a su posición cuando conforma una cantidad. Por mencionar un ejemplo, no es lo mismo tener 50 manzanas agrupadas en 5 grupos de 10 o decenas, que 05 unidades.

Sistemas no posicionales: se compone de un conjunto de símbolos con significado único, el valor de cada cifra no varía según el orden en el que se le ubique, por el contrario, cada símbolo cobra valor de acuerdo a las reglas del mismo sistema. Por mencionar algún ejemplo, el sistema de numeración romano es no posicional, pero según sus reglas si se ubica una letra de menor valor a una de valor mayor IV, ésta primera letra I, se resta de V para conformar el número 4.

Sistemas análogos: son sistemas más sofisticados en el sentido que no centran su funcionamiento en el uso de símbolos para conformar cantidades, sino que sirven para medir magnitudes. Algunos de estos sistemas son el termómetro que mide y cuantifica una temperatura, el velocímetro que identifica velocidades y otros para medir tiempos, longitudes, alturas.

¡Datos!

Estos sistemas han ido evolucionando a los sistemas digitales debido a que transforman grandes cantidades de información de manera más rápidas gracias al fenómeno de digitalización y uso de internet.

Sistemas digitales: estos sistemas se conforman de otros sistemas como el decimal, el binario o el octal. Este sistema en particular tiene aplicabilidades y usos considerables en el campo de la electrónica. El uso de diferentes sistemas integrados a los sistemas digitales es fundamental para la codificación de información diversa, al igual que para su intercambio y decodificación. En un proceso de comunicación donde se usa un código particular lo que hace interesante este acto, es el conjunto de reglas que deben conocer los interlocutores para cifrar y descifrar mensajes. En estos sistemas se estudia el tratamiento de información numérica y no numérica, al igual que la creación de otros códigos a partir de los sistemas existentes.

Sistemas aditivos y sustractivos: dadas las cantidades I, V, C y sabiendo que I=1, V=5 y C=100 en el sistema decimal para conocer la cantidad global que se presenta CVI o CIV se suman los valores de cada letra 100+5+1 o 100+5-1 para conformar los números 151 o 104.

¡Recordemos que!

En estos sistemas donde aplica el principio de adición o sustracción para presentar cantidades de forma global se les conoce con el nombre de sistemas aditivos o sustractivos.

Sistemas multiplicativos: estos sistemas operan a partir de la agrupación de cantidades que cumplen con ciertos criterios. Por ejemplo, en el sistema decimal al reunir 10 unidades, se denomina a este conjunto de elementos decenas, y se reúne 10 decenas, se denomina a esta colección una centena. De tal modo, que para conformar el número 587 se procede a revisar el valor posicional 5x100+8x10+7x1= 500 +80+7.

Sistemas híbridos: estos sistemas combinan el principio de los sistemas aditivos y los multiplicativos. Estos sistemas requieren conocer el símbolo base y la cantidad que denota la agrupación de tal modo que pueden omitir el valor posicional propio de otros sistemas. Por ejemplo, para representar la cantidad 5002, se procede a multiplicar y 5x1000 adicionar 2 de tal modo que 5x1000+2=5002.

El uso de las potencias y el sistema de numeración decimal

¿Cuáles son los aportes de Jean Piaget y Benson Schaeffer para comprender cómo construimos la noción de número y cantidad?

El sistema de numeración decimal nos permite diferentes contextos de actuación. En la cotidianidad operamos con los números que podemos generar, gracias al sistema de base 10 o decimal. Este sistema se conforma de diez dígitos (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9) los cuales se asocian en principio a los dedos de las manos para posibilitar el conteo, la estimación, la agrupación y la realización de diversos cálculos.

Figura: 10.
Fuente: shutterstock.com_469501838

La necesidad de contar se entiende como humana, desde tiempos remotos hasta nuestros días el conteo ha estado presente en actividades de pastoreo, siembra, colecta o intercambio comercial de diferentes productos. El conteo inicialmente se da en la relación uno a uno, un nombre (luego símbolo) para designar un objeto, otro nombre para designar dos objetos etc. Pero cuando los objetos superan las palabras, se acude a un símbolo que pueda mostrar o evidenciar una agrupación, así, organizados los objetos en grupos, basta con mencionarlos para hacerlos presentes y de igual manera, prescindir de su representación física para elaborar algunos cálculos.

El conteo según Castro, Rico y Castro (1995) "consiste en asignar cada uno de los nombres de los términos de la secuencia a un objeto de un conjunto" (p. 7). En este orden contar no puede ser solamente, atribuir un nombre a esa acción de contar, este es un proceso un tanto más complejo. Nótese que cuando se menciona por ejemplo dos naranjas, si bien la palabra dos refiere a una cantidad discreta no alcanza para definir los atributos mismos de la cantidad, es decir naranjas de qué color, tamaño, textura, peso, estado etc. Ahora vamos a contar, dadas las condiciones: Si equivale a 15 unidades, ¿Cuántos elementos hay en el conjunto que se muestra? ____

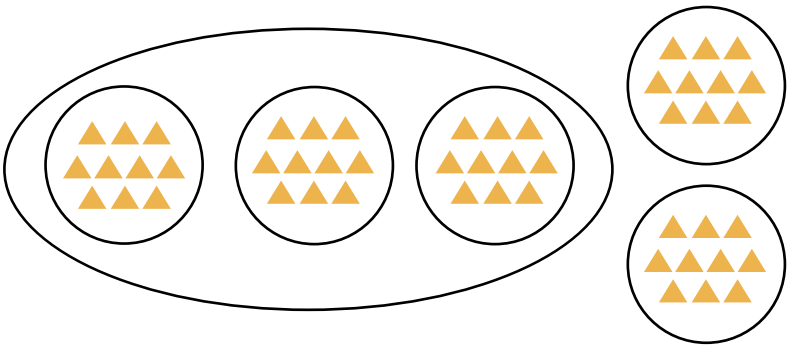


Figura: 11.
Fuente: propia

De acuerdo al sistema de numeración se pueden realizar conteos sencillos y complejos. Al revisar la siguiente figura que propone dos condiciones para establecer la cantidad total de elementos. ¿Qué conclusiones se pueden inferir?

a. Se tiene la siguiente colección.

b. Nos piden agrupar de a 3 elementos, realizar grupos de grupos.

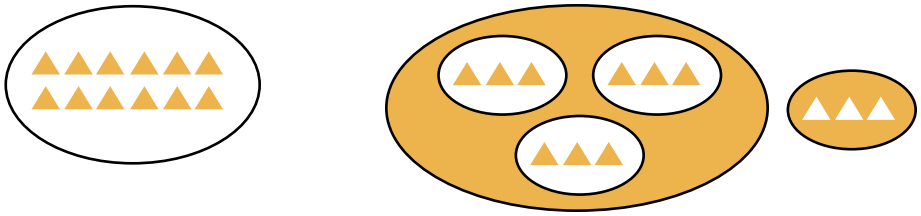


Figura: 12.
Fuente: propia

¿En qué sistema de numeración se está haciendo el conteo y sus agrupaciones?

¿Es verdad que hay 12 elementos de acuerdo con el sistema de numeración implícito?

¿Qué es una terna? ¿Qué es una triterna?

Otro problema asociado al conteo refiere a la estimación. La estimación como habilidad para aproximarse al valor numérico de una cantidad por intuición, por aproximación o por referencia. Lo anterior quiere decir, que no todas las cantidades son cuantificables y fácilmente expresables en números concretos, por ejemplo:

Ejemplo

El tiempo de desplazamiento de un punto a otro en una ciudad donde las condiciones de movilidad son complicadas y adicional inciertas. Si bien la estimación permite elaborar ideas de cantidad, también tiene restricciones en su representación numérica. Por ejemplo, cuando se habla de cuántas libras de carne se pueden requerir para hacer un asado para veinte personas. Allí se podría estimar que dé a media libra por adulto y un cuarto de libra por niño, pero si no se ha especificado del total de participantes cuántos son niños, cuántos adultos, cuántos consumen carne, cuántos participarán del evento, en conclusión, una serie de posibilidades que pueden modificar el estimado que sobre la situación se quiera cuantificar. Por ejemplo: ¿Para cuántos vasos de jugo de 7 onzas alcanza una jarra como la que se muestra en la figura?

Figura: 13.
Fuente: shutterstock_361769210

¡Datos!

1. La estimación se diferencia del conteo por ser un ejercicio práctico, en ocasiones desprovisto de registros e instrumentos para la elaboración de un cálculo numérico.

2. Esta actividad se usa en algunas actividades diarias como la cocina (una mamá no siempre cocina con recetario), el constructor (hace estimaciones del material que requiere para un arreglo), la modista estima el material que puede requerir para hacer un pantalón, el panadero estima el pan que se puede producir para un día etc.

La agrupación: si A = 20 mil pesos y B= 50 mil pesos. ¿Cuánto dinero hay en una billetera que cuenta con 5 A + 3B (2A)? La respuesta correcta es:

- 6×10^9
- $6 \times 10^5 + 15 \times 10^4$ (6×10^4)
- 10.000.000.000
- Diez billones

¿Podríamos explicar qué tipo de agrupaciones se hicieron en la situación anterior para establecer que en la billetera se cuenta con diez billones de pesos? En este orden, la agrupación resulta ser una estrategia de conteo que favorece el establecimiento de niveles de agrupamiento de los elementos asociados a una colección, por ejemplo:

a. Se cuenta con una colección de canicas (En esta instancia no hay agrupación aún, por ello se contempla como un nivel cero o con ausencia de esta acción).

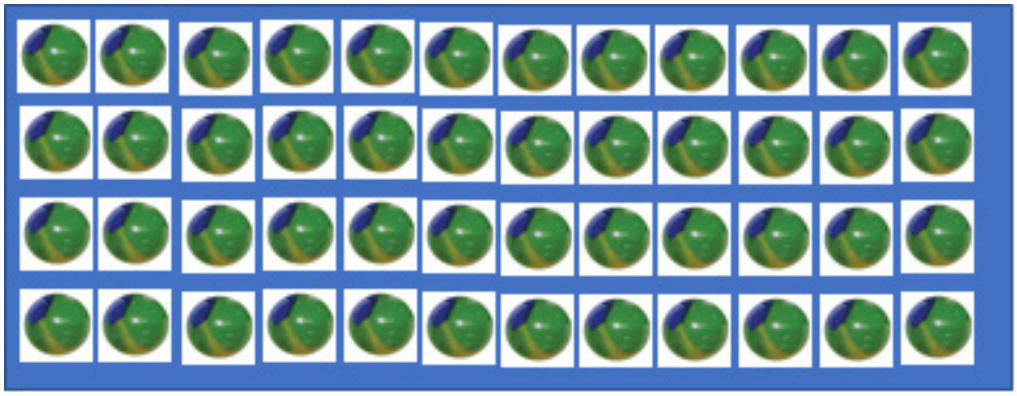


Figura: 14.
Fuente: Propia

b. Se agrupan las canicas en grupos de 6. Ya en este momento se han distribuido las canicas en subgrupos de 6. Esta agrupación se constituye de primer nivel pues se ha logrado una primera distribución de la cantidad discreta en otras. Dicho de otro modo:

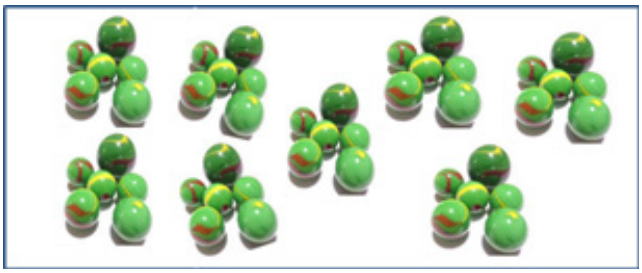


Figura: 15.
Fuente: Propia

c. Se agrupan los grupos en otros grupos. Se entiende que solo se logra hacer una colección de subgrupos de 6 canicas, esta agrupación es de segundo orden o nivel.

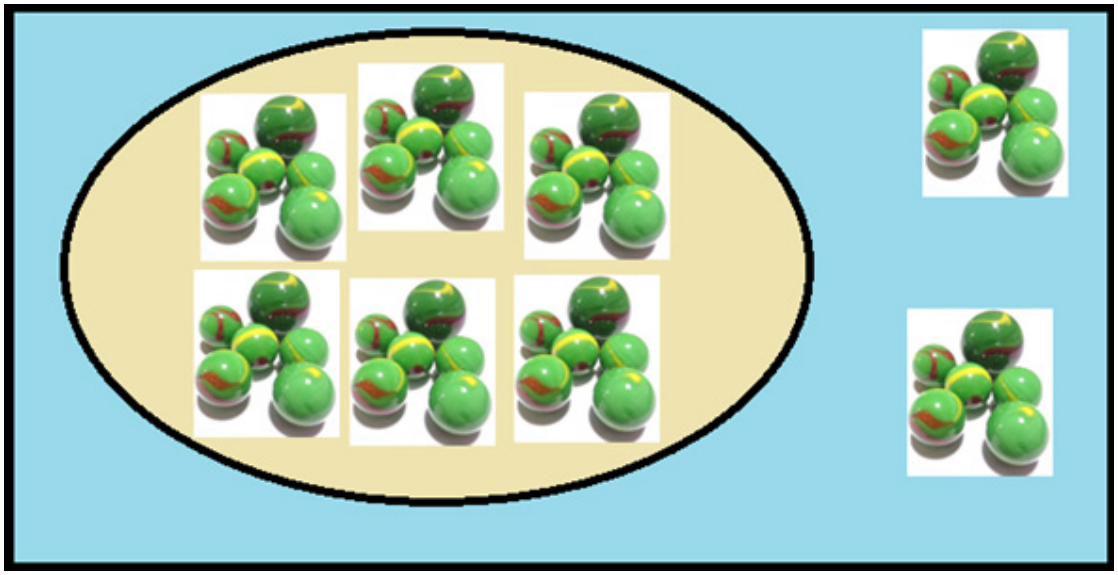


Figura: 15.
Fuente: Propia

El ejemplo anterior, para decir que los sistemas de numeración como el decimal, el vigesimal, el octal o el binario permite la agrupación de menor a mayor orden o gradual para facilitar el conteo de una colección. Para concluir este apartado es posible responder al siguiente cuestionamiento: ¿En qué se diferencia un número en base 10 a un número en base 20 o base 2?

El cálculo mental: si nos pidieran resolver mentalmente la siguiente operación .

$5^2 2^4 + \frac{1}{3}(-2.5) =$ _____. ¿Sería una actividad mental sencilla o compleja? La respuesta a la pregunta anterior depende de los referentes que, del uso de potencias, números fraccionarios, decimales se tenga inicialmente, luego sobre la forma como se operan estas cantidades, y de manera particular en lo relacionado al código que se está comunicando a través del algoritmo propuesto.

Figura. 17
Fuente: shutterstock_424912159

El cálculo mental en este aspecto, alude a un conjunto de estrategias que las personas van generando para lograr éxito a la hora de hacer diferentes cálculos con los números.

Conexión con la psicología: en el siguiente cuadro se evidencian un grupo de beneficios mentales y cognitivos que tiene para las personas el hecho de hacer cuentas, estimaciones, agrupaciones y cálculos numéricos.

Operación matemática/ pensamiento matemático	Beneficios
Conteo 	- Compresión de un sistema de numeración. - Uso de un código numérico. - Capacidad para componer, leer, escribir y comparar números. - Desarrollo de estrategias para favorecer conteos efectivos.
Estimación 	- Capacidad para predecir resultados posibles ante una situación establecida. - Desarrollo de hipótesis, conjeturas, supuestos, razones, argumentos. - Capacidad de decisión y aceptación del error en un cálculo numérico. - Toma de decisiones en situaciones de incertidumbre. - Tolerancia ante la frustración.
Agrupación 	- Potencia el conteo y las estructuras aditivas. - Permite un tránsito de los modelos aditivos a los modelos multiplicativos. - Se fortalece el conteo numérico en cantidades discretas. - Se fortalece el pensamiento abstracto cuando las cantidades se presentan continuas.
Cálculo mental 	- Memorización de patrones y algoritmos para encontrar resultados rápidos. - Agilidad y destreza mental para operar con los números. - Comprensión abstracta de los números. - Manipulación mental de algoritmos para operar con diferentes cantidades.

Tabla: 3. Procesos de pensamiento en matemáticas y en psicología
Fuente: propia

Conjuntos numéricos

En esta sección se mostrará el uso de los números de acuerdo con su clasificación por conjuntos. Como actividad para promover la comprensión antes de llegar a definiciones de variado orden, los invito a realizar el siguiente ejercicio.

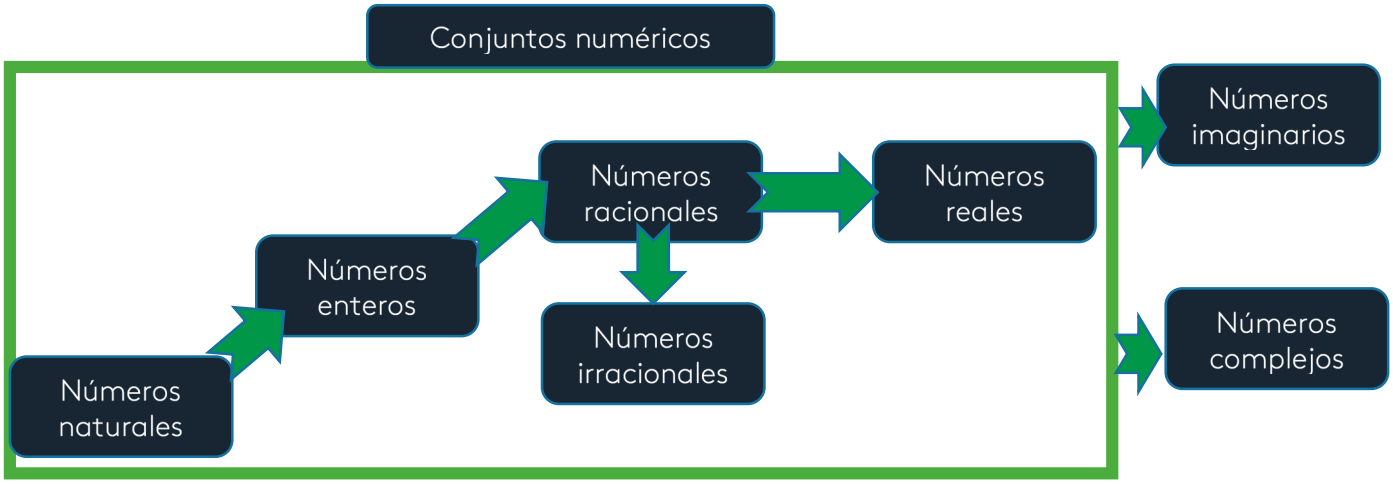


Figura 18. Clases de conjuntos numéricos
Fuente: propia

La situación: Juan y Alexandra han pactado una cita a través de Facebook. Juan quien invita a la salida, envía a través de Whatsapp las coordenadas a su invitada.

Traza la ruta que debe seguir Alexandra para llegar a donde la espera Juan.

Las coordenadas son A= (-2,0.5) B= (-1, -1) C= (1.77, 1/3) D= (0,4) E= (-7,5)

Se constituyen como *números naturales* aquellos que resultan del conteo de diferentes elementos del entorno o la naturaleza. Estos números inician en cero y se extienden hasta el infinito positivo, siendo este un conjunto con elementos ilimitados. De acuerdo a la situación propuesta en el plano estos números se ubican del punto central hacia la derecha o hacia arriba. Estos números se denotan como *N= {1,2,3,4,5,6.....}*

De este primer conjunto se derivan los *números enteros* los cuales comprenden aquellos que tienen valores positivos y negativos. De acuerdo a nuestro ejemplo y situados en el plano, son todos los números completos o discretos que se ubican de infinito negativo hasta infinito positivo (izquierda a derecha – abajo hasta arriba). Al estudio de los números enteros comprometen el uso del cero. Este conjunto numérico se denota como $Z=\{....-2,-1,0,1,2,3.....\}$

Números racionales: ¿Les es común el uso expresiones como media libra *de carne, un cuarto de hora, un año y medio u otras similares?* De ser así, seguramente hemos tenido un acercamiento a los números racionales, estos números son interesantes, pues nos permiten identificar cantidades que se acercan a la unidad, pero no son la unidad, no alcanzan su totalidad, es decir representan solo una porción de algo, de un objeto, de una cosa, de una cantidad.

Los números racionales o comúnmente llamados fraccionarios, permitieron resolver problemas de partición a nuestros antepasados. Sucedía que había casos donde la cantidad a repartir era inferior o menor a la cantidad de repartos, hecho que comprometió no solo el razonamiento conocido hasta entonces con otros números, sino que motivó la búsqueda de una solución, en ese contexto se configuraron símbolos como $\frac{1}{2}; -\frac{3}{5}; \frac{2}{7}....$

Invito a pensar en la siguiente situación, en el libro *"El hombre que calculaba"* de Malba Tahan (2012), se propone:

> Cerca de un viejo albergue de caravanas medio abandonado, vimos tres hombres que discutían acaloradamente junto a un hato de camellos.
>
> Entre gritos e improperios, en plena discusión, braceando como posesos, se oían exclamaciones:
>
> ¡Que no puede ser!
>
> ¡Es un robo!
>
> ¡Pues yo no estoy de acuerdo!
>
> El inteligente Beremiz procuró informarse de lo que discutían.
>
> Somos hermanos, explicó el más viejo y recibimos como herencia esos 35 camellos. Según la voluntad de mi padre de la empresa, me corresponde la mitad, a mi hermano Hamed Namir una tercera parte y Harim, el más joven, solo la novena parte. No sabemos, sin embargo, como efectuará la partición y cada reparto propuesto por uno de nosotros sigue la negativa de los otros dos. Ninguna de las particiones ensayadas hasta el momento, nos ha ofrecido un resultado aceptable. Si la mitad de 35 es 17 y medio, si la tercera parte y también la novena de dicha cantidad tampoco son exactas ¿Cómo proceder con la partición?

A partir de este extracto, ¿Cómo se puede resolver dicha situación?

En otros casos donde hacemos uso de los números racionales, ¿cómo procedemos para entablar posibles soluciones ante cada situación?

a. ¿Qué se podría hacer si se ha comprado $2000 de pan para unas onces, esperando repartir de a dos panes por invitado y llegan más personas? En este caso qué se entiende por unidad, qué es una fracción y qué tipo de fracción representa la situación.

b. Si se cuenta con un grupo de naranjas, 56 para ser exactos, para preparar jugo. Cada vaso contiene el jugo de cuatro naranjas, ¿Qué fracción representa el número de naranjas que se invierte para tantos vasos de jugo y qué fracción queda por gastar?

c. Si Juan gana un salario mínimo mensual y destina la cuarta parte para alimentación, la mitad para arriendo y transporte, ¿Cuánto dinero le queda a Juan para otros gastos?

En las situaciones anteriores, se plantean contextos diferentes de uso de los números racionales, son hechos cercanos porque los hemos vivido, posiblemente hayamos hecho muchas particiones y repartos, sin reflexionar que intrínsecamente estamos poniendo en juego formas distintas de operar con los números de la forma $\frac{a}{b}$, *siendo* $b \neq 0$

Los números racionales en la cotidianidad, también se nos pueden manifestar de otra manera, por ejemplo, cuando decimos que avanzamos en una competencia 15,7 km, o cuando expresamos nuestra estatura 1,82 m o en situaciones donde cantidades como $\frac{1}{2} = 0{,}25$ son equivalentes ya que se pueden expresar en notación decimal.

Este conjunto numérico se representa con la letra Q y se compone de números enteros y fraccionarios, vale la pena aclarar que no todas las fracciones se pueden considerar como números racionales.

Valdría la pena consultar, encontrar un ejemplo numérico o contextual para las proposiciones que en seguida se enuncian.

Instrucción

Para profundizar en los temas abordados lo invitamos a realizar la actividad de aprendizaje del eje, podrá encontrarla en la página principal del eje.

Números irracionales: ¿Cómo se representa numéricamente la hipotenusa de un triángulo rectángulo? Estos números tan particulares, los irracionales, se expresan de diferentes formas, tal vez los encontremos como .

En el siguiente video, titulado *"Grandes temas de la matemática"*, se propone un ejemplo del número E.

Video

Video cápsula: Grandes temas de la matemática: capítulo 5: Número E

TECtv la señal de la Ciencia

¿Entonces, qué entendemos por un número irracional?; ¿es posible escribir y leer un número de esta naturaleza?

El número de las aproximaciones es E, infinito y compuesto de tantas cifras decimales como se quiera. Es famoso por sus contribuciones para resolver diversos problemas **2,718281828459045235360287471352**7 y continúa, ¿hasta dónde? A la fecha no se sabe, otro ejemplo de estos números es Pi. Los números irracionales se simbolizar con la letra "I" mayúscula.

Instrucción

Para complementar puedes consultar, ¿Quién fue Leonard Euler?

De igual forma te invitamos a realizar la siguiente lectura complementaria sobre estrategias de cálculo mental.

Lectura recomendada

Estrategias de cálculo mental.

Jesús Javier Jiménez Ibáñez

Números reales: estos números representados con la letra R, acogen la tradición, historia y las contribuciones a la sociedad de los números naturales, enteros, racionales e irracionales. Este conjunto, es el padre de los otros. Es la línea de significado de los números que se relacionan con la vida de las personas, que representan situaciones concretas y que han posibilitado avances científicos en la física, la química, la informática y otras tantas.

¡Datos!

En el mundo de los números reales se destaca los aportes que se derivan del trabajo con potencias y raíces para estructurar otros números como son los algebraicos. La transición de la aritmética al álgebra involucra la capacidad para abstraer información del entorno y ubicarla en el mundo de las ideas formales mediadas por un código cuya intención es la comunicación universal.

Instrucción

Para una mejor comprensión de los sistemas numéricos lo invitamos a observar la siguiente galería. Se encuentra disponible en la página principal del eje 1.

Los invito a realizar los siguientes ejercicios y a pensar de forma crítica, qué procesos numéricos están involucrados en cada situación. Luego, socialicemos la experiencia con otros compañeros y propongamos otros contextos de uso de las potencias y las raíces.

1. ¿Cómo se operan las siguientes expresiones?

$$a)\ -5^{-2}\quad b)\ \left(\frac{2}{3}\right)^{3}\quad c)\ (0{,}5)^2\quad d)\ (\sqrt{6})^2\quad e)\ [2(-3^2)^2]^3$$

2. ¿Existen diferencias entre los resultados de las siguientes expresiones? Por favor justifique su respuesta.

$$a)\ -5^2 \qquad b)\ (-5)2 \qquad c)\ -(5)^2$$

3. ¿Cómo se resuelve la siguiente expresión $\frac{(-3)^0}{-3^2}$?

4. ¿Cuáles de las raíces siguientes representan números cuadrados?

$a)\ \sqrt{5}$

$b)\ (\sqrt{\frac{1}{2}})$

$c)\ (\sqrt[3]{9})$

$d)\ (\sqrt{36})^2$

$e)\ \sqrt{144}$

Instrucción

Para finalizar los invitamos a realizar la actividad evaluativa del eje 1.

BIBLIOGRAFÍA

Colombia, M. (1998). *Lineamientos curriculares de matemáticas*. Bogotá: Magisterio.

Castro, E., Rico, L y Castro, E. (1995). *Estructuras aritméticas elementales y su modelización*. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica.

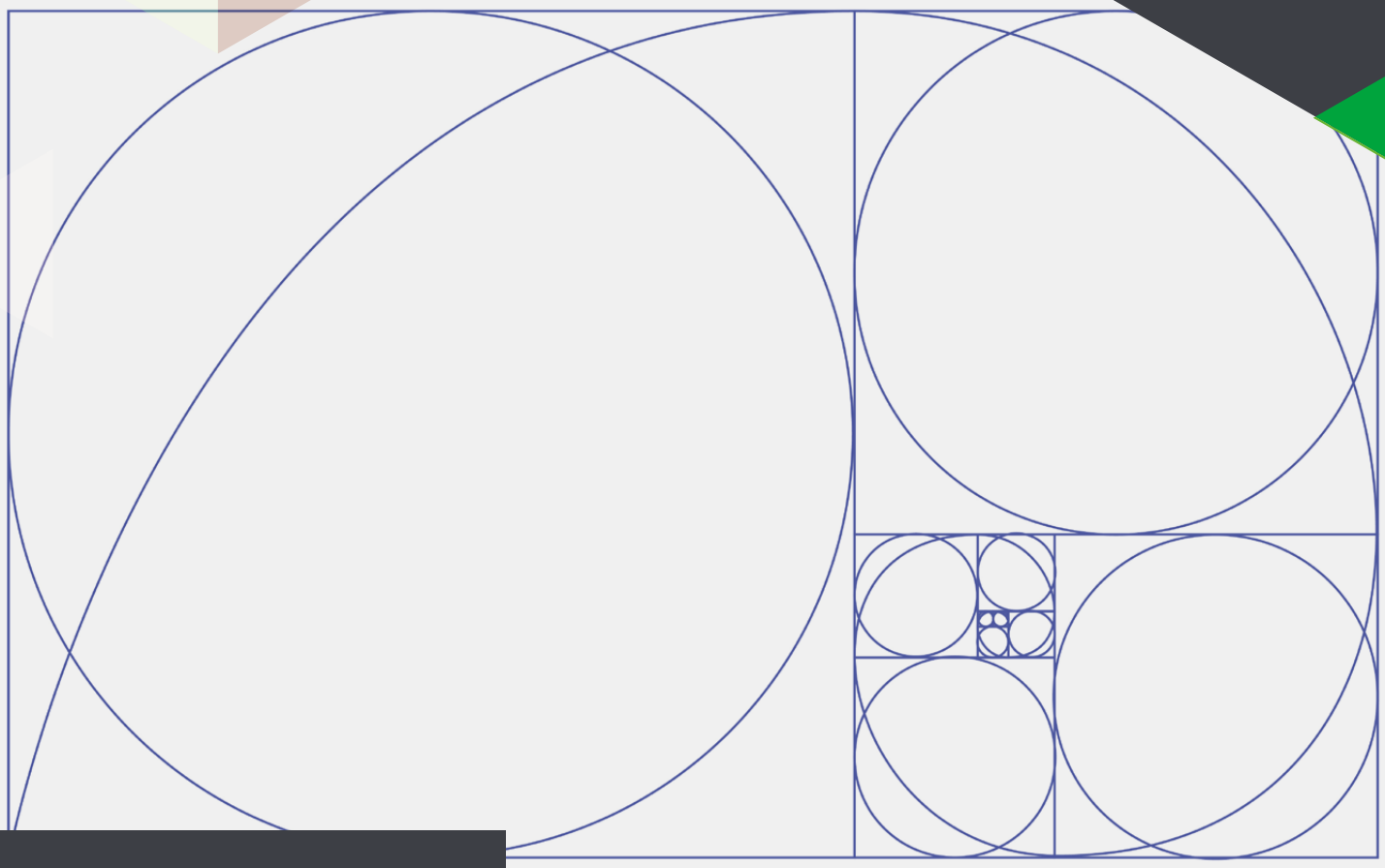
Taham, M. (2012). *El hombre que calculaba*. México: Grupo Noriega Editores.

MATEMÁTICAS

Sandra Peña Alonso

EJE 2

Analicemos la situación



Fuente: Shutterstock/318742838

INTRODUCCIÓN

En este eje se intentará bosquejar un sinnúmero de respuestas o inquietudes que dinamicen la pregunta: ¿Para qué favorecer el desarrollo de pensamiento proporcional en estudiantes la Fundación Universitaria del Área Andina? Es posible que algunos se encuentren familiarizados con los temas de las razones, las proporciones y los porcentajes, dada su utilidad y uso para la resolución de situaciones del cotidiano.

Si se revisa la historia de vida pedagógica y escolar de cada uno(a), es posible que las matemáticas de la escuela hayan tratado de manera procedimental las proporciones directas e inversas, los porcentajes y las razones. Sin embargo, valdría la pena preguntar, si se alcanzó el desarrollo de un pensamiento proporcional y de ser así, cómo estos saberes se contextualizan en las actividades diarias.

También es probable, que en otros contextos se haya realizado aplicaciones de las razones, las proporciones y los porcentajes, ignorando, qué es cada objeto y cómo estos se conectan con las matemáticas y otras disciplinas. En este ámbito, se pretende contextualizar a los participantes en el mundo de las proporciones, su desarrollo y algunos usos que históricamente han trazado y significado para la humanidad un progreso cognitivo, filosófico y artístico.

La intención en este eje, es realizar un acercamiento al desarrollo del pensamiento proporcional, desde el estudio de las razones, las proporciones y los porcentajes. Conceptos tales, están estrechamente relacionados con la acción de medir, hacer comparaciones y aproximaciones. En este documento se proponen varios contextos para entender los conceptos antes enunciados; la intención es ir un poco más allá del desarrollo tradicional de operaciones, diligenciamiento de tablas y esquematización de datos en planos cartesianos. De este modo, se plantean situaciones que quedan inconclusas y que es preciso ampliar, mediante la indagación, revisión en detalle, el diálogo con otros y con el mediador del curso.

De otra manera, este escrito se alimenta de la interacción que el lector pueda tener con el mismo, ser un interlocutor activo, crítico, inquieto y dinámico; es la acción pedagógica de cada uno de los participantes de este curso debe procurar en aras de lograr aprendizajes en contexto y con sentido.

Razones, proporciones y porcentajes: una extensión de las magnitudes

Instrucción

Para dar inicio a este eje los invitamos a realizar la actividad de aprendizaje en familia, que se encuentra disponible en la página principal del eje 2.

De la experiencia anterior, desarrollada a través de la actividad de aprendizaje, se destaca que es una forma de mapear el cuerpo para identificar medidas, correspondencia entre las mismas y posibilidades para realizar comparaciones. Un principio de las magnitudes, las medidas y las proporciones está asociado a las formas de medición y a las estrategias que el hombre ha construido durante largos periodos de tiempo.

Ahora, complementa la experiencia. Toma con un metro la medida que hay del cuello al ombligo; del cuello a la pelvis, del cuello a las rodillas, luego expresa estas medidas en palmas. ¿Se pueden comparar estas medidas con la longitud de la cabeza?

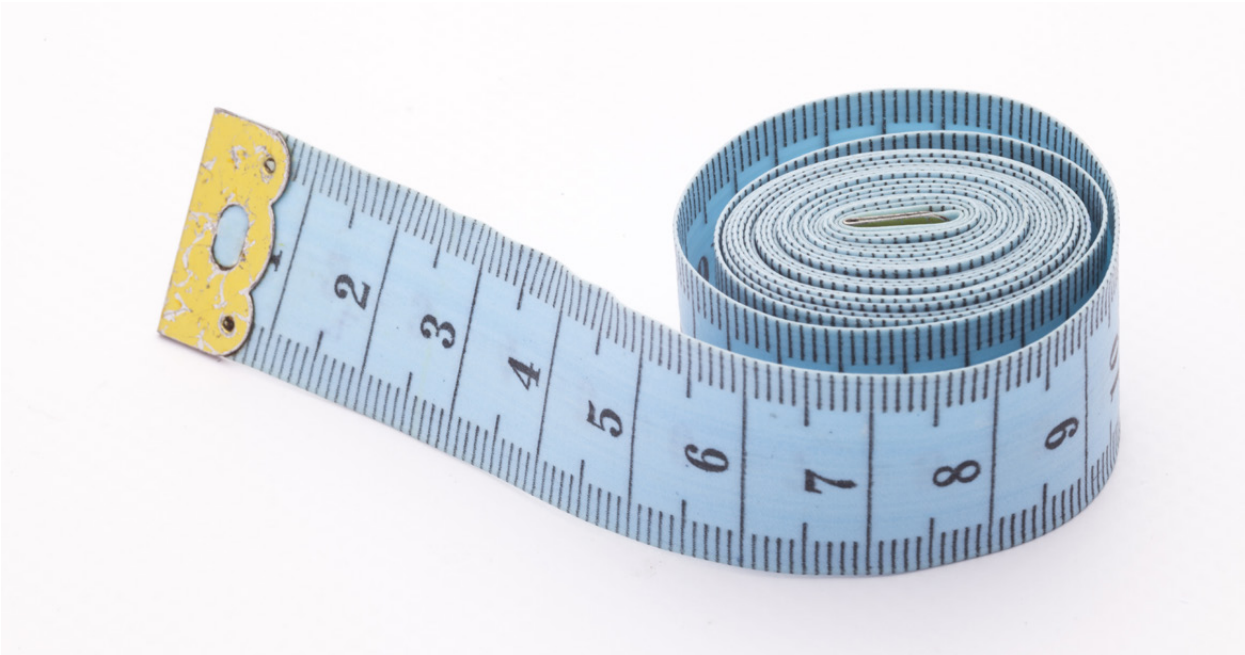


Figura. 1
Fuente: Shutterstock/318185069

Las experiencias anteriores, tiene la intención pedagógica de convocar una reflexión acerca de las relaciones numéricas que existen en las medidas y las magnitudes del cuerpo, sin decir con ello, que la medición es una asignación de expresiones numéricas al acto de comparar.

Hace muchos años, Leonardo Da Vinci, generó un modelo o canon de proporcionalidad del cuerpo, para determinar el ideal de belleza en el hombre, al que denominó el Hombre de Vitruvio. Este modelo, es un dibujo en tinta sobre papel, que ha suscitado reflexiones de orden filosófico, arquitectónico, artístico por mencionar algunos contextos de uso. Dicho ideal de hombre, lo había plasmado previamente en el lenguaje de las proporciones el arquitecto Marco Vitruvio, quien realizó un estudio detallado de todas las proporciones existentes en el cuerpo humano de su época.

El siguiente vídeo amplía la perspectiva sobre las proporciones modeladas a partir del dibujo del hombre de Vitruvio.

Video

Vídeo 1. Da Vinci´s Vitruvian Man of math – James Earle

TED-Ed

En este ámbito, surgen inquietudes de orden conceptual como: ¿Qué es la proporcionalidad? ¿qué es la desproporcionalidad? ¿cuándo un reparto es proporcional? ¿cuál es la diferencia entre razón y proporción? ¿qué tipo de proporciones existen? ¿cuáles son los contextos que favorecen el desarrollo del pensamiento proporcional?, entre otros. Para este caso, se iniciará por hacer una contextualización al pensamiento proporcional a partir de algunas expresiones artísticas como la pintura y la escultura. Con las figuras siguientes, se espera suscitar algunas ideas de proporcionalidad y otras de desproporcionalidad, observa atentamente.

Canon
Se define generalmente como un prototipo que reúne un conjunto de características asociadas a conceptos como belleza, perfección, ideal.

Proporcional
El pensamiento proporcional es una forma de razonamiento matemática que involucra y articular conceptos como medición, magnitudes, comparaciones y otros para definir no solo atributos sino propiedades de cantidades discretas y continuas.

Figura. 2 Pinturas y esculturas ejemplo de proporciones y desproporciones
Fuente: propia

Las pinturas que se proponen, Mona Lisa niña de Fernando Botero, La creación de Adán de Miguel Ángel, escultura blanca transformable de Arden Quin y Morypho-ros de Policleto, son algunos ejemplos de aplicación de diferentes formas de proporcionalidad y desproporcionalidad hechas obra de arte.

Asociado a diferentes ideas de proporcionalidad se encuentran los ideales de belleza y perfección. Para los egipcios el estudio de las proporciones en el cuerpo inicia con la creación de un módulo o cuadrícula con forma cuadrada para generar lo que ellos denominaban un cuerpo perfecto, la unidad de medida usada fue la mano.

Una pintura de Fernando Botero Vallejo es un buen ejemplo para asociar y definir lo que es la desproporcionalidad. En el museo Casa de la Moneda, en Bogotá o en la Plaza Central en Medellín un observador, turista o visitante puede acceder a expresiones artísticas, como lo son las obras del pintor colombiano, para representar ideas contrarias a los cánones actuales de belleza en el cuerpo. La obra del artista paisa, ilustra varias ideas distorsionadas de la realidad, no solo en lo que corresponde a la obra o a la idea de proporción, sino en el aspecto político, al expresar con estas formas voluminosas, resistencias a situaciones que parecen naturales o naturalizadas en la cultura colombiana, como la violencia, la corrupción, el desempleo y otras.

Figura. 3
Fuente: Shutterstock/370436231

Si se analiza en la pintura de *La Mona Lisa niña*, el tamaño del rostro con respecto el tamaño de las manos, se notará que es superior el primero con relación al segundo; si se revisa la imagen completa, en conexión con el entorno que le rodea, esta proyección ocupa espacios considerables y robustos, y los espacios ocupados en el paisaje son menores. En una obra de Botero se contrasta las ideas de desproporción en varios elementos que la componen, así, al agudizar la mirada, se hacen otros hallazgos.

De otro modo, en la escultura *Moryphoros* de Policleto, se contrastan las ideas de exactitud y proporción. En esta obra se compone geométricamente las ideas de simetrías, razones y proporciones matemáticas, que armonizadas por las mediciones y la exactitud de las medidas brindan al espectador y creador, la idea de perfección hallada en el cuerpo del hombre griego. En la época de los griegos, la idea de proporción se asociaba a la de belleza. Así, se generó como unidad de medida, donde la longitud de la cabeza y el nivel de perfección en el cuerpo humano estaban dados por aquellos que alcanzaban una altura de 7 cabezas aproximadamente.

Para los egipcios la representación de las proporciones en el cuerpo, se construían sobre una cuadrícula cuadrada, a partir de la cual, en cada cuadro el referente de longitud de un hombre de pie, era el equivalente al puño de la mano cerrada, incluido el dedo pulgar. Tanto para los egipcios como para los griegos, el canon de medida estuvo asociado a partes del cuerpo humano, situación que fue cambiando con el paso del tiempo, y en los días actuales, se encuentra multitud de referentes para establecer proporciones.

Figura. 4
Fuente: Shutterstock/520864489

Algunos estudios revelan, que para que algo se denomine bello es porque varias personas así lo aprueban, hecho que revela que todos (quienes observan lo bello), encuentran algunas características que les conduce a esta conclusión. Lo anterior, se sustenta en las investigaciones de un cirujano de la Universidad de California (Stephen Macquardt), quien inició la construcción de un canon de belleza facial, teniendo como base el concepto de proporción aurea. Este patrón se denomina la máscara de Macquardt y es el resultado de un conjunto de comparaciones, medidas, establecimiento de relaciones numéricas, del cual se deriva un modelo de lo que la sociedad actual y las personas establecen como belleza. Para definir si una persona es bella y se ajusta al canon, se sobrepone en el rostro la máscara, y en la medida que éste se ajuste en mayor porcentaje al prototipo, ingresa en el listado de los bellos.

Hasta aquí se ha venido mostrando un contexto de uso de algunas proporciones que conceptualmente se elaboran a partir del establecimiento de patrones, dimensiones y medidas del cuerpo.

Proporciones en matemáticas

Para contextualizar matemáticamente los conceptos de razón, proporción y porcentaje, se iniciará por suscitar un ejercicio significativo y además introductorio al trabajo con las magnitudes. Revisa cada figura y colócala en un contexto tridimensional. ¿Qué se puede medir en los objetos ilustrados?

Figura.5 Objetos y atributos medibles
Fuente: propia

Esto, que se ha dicho es susceptible de ser medido, como la altura, el ancho o el grosor de la mesa; o la capacidad de la jarra, el volumen del balón de fútbol o la distancia que puede recorrer un auto en una carretera, son atributos de los objetos o elementos del entorno que se pueden medir, es decir, se denominan magnitudes. Para medir es necesario identificar características de un objeto y compararlas en relación a un atributo que se denomina patrón de medida. Como se ha revisado de manera somera en el desarrollo histórico de las proporciones, identificando diferentes patrones de medida, casi que, de acuerdo a cada cultura, se establecen algunas como partes del cuerpo, objetos del entorno etc.

Medida
Un patrón de medida es la forma concreta de definir lo medible en un objeto, generándose así, una idea estándar o de referencia a la hora de comparar magnitudes.

Así, es importante identificar un patrón general o particular por cultura, y diferenciarlo de un patrón estandarizado, al cual se llega por consenso entre las culturas científicas del mundo. Un patrón estandarizado, es aquel que sirve de referente a la hora de medir una o varias magnitudes en cualquier contexto de medida. Este tipo de patrón cuenta con tres características fundamentales: Es *universal*, quiere decir, que se llegó a un consenso intercultural y su funcionamiento es el mismo en cualquier lugar del mundo. Luego, es *inalterable*, indica que quien toma la medida no puede cambiar este patrón y se éste, se mantiene en el tiempo, y finalmente, un patrón de medida debe ser *fácilmente reproducible* en diferentes instrumentos. Para contextualizar lo dicho revisa las situaciones que se indican en seguida.

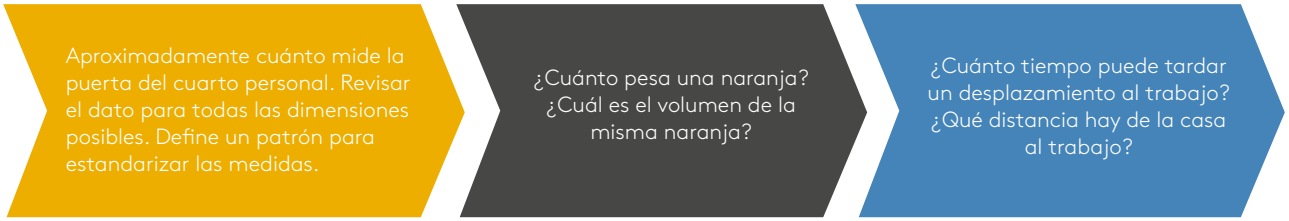


Figura. 6
Fuente: propia

De este modo, la comparación durante un proceso de medida, se da entre colecciones de elementos con características comunes; partiendo del hecho de que una magnitud es referente para comparar la otra; por ejemplo, en el caso de la mesa, se puede medir dimensiones como largo, ancho o altura, cada una entendida de manera independiente, definida como longitud. Así, utilizando como unidad de medida el cm, se puede establecer qué dimensión tiene mayor longitud, cuál menor longitud, cuál más larga que, cuál más corta que; en cuanto, es más larga o corta la una de la otra, por mencionar algunas formas de expresar esta medición. Para contextualizar lo anterior, se propone el siguiente ejercicio.

Traza tantos segmentos como se pueda en las rectas, en la primera los segmentos de 1 cm y en la segunda de 2 cm. ¿Qué relación hay entre el número de segmentos de la primera recta y el número de segmentos de la segunda? ¿Qué relación se evidencia entre la medida de los primeros segmentos con relación a los segundos?

A partir del ejercicio anterior, se establece que la acción de segmentar la recta dada, con ayuda de un instrumento de medición de longitudes, como lo es la regla, teniendo como patrón de medida el cm; establece que esta acción es de tipo directo, dado que permite establecer a través de un número, cuántas veces se repite el patrón en la longitud propuesta.

¡Recordemos que!

1. En caso de que se quisiera saber cuántos puntos componen la recta o longitud dada, habría una restricción, puesto que se espera una transformación de los instrumentos para realizar esta medida. Sin embargo, entre un punto y otro en la recta hay infinidad de puntos.

2. Este tipo de medidas que implican una transformación del objeto, forma y constitución para aproximarse mediante un patrón de medida a su cuantificación, se definen como magnitudes indirectas.

En la siguiente tabla se exponen algunas de las magnitudes más comunes con las que hay interacción en la vida cotidiana.

Magnitud	Escalas de medición
Presión	Se mide en milímetros de mercurio (mmHg)
Longitud	Sistema métrico decimal (cm, m, km)
Masa	Sistema métrico (gr, kg, libra, tonelada)
Volumen	Se expresa en cm^3
Fuerza	Se expresa en newtons (N)

Tabla 1 Ejemplos de algunas magnitudes
Fuente: propia

La acción de comparar magnitudes teniendo un punto de referencia o un patrón de medida común, sugiere la noción de razón matemática. Sin embargo, en el siguiente ejemplo, se introduce un contexto para entender las razones en diferentes escenarios de la vida cotidiana. Revisa los siguientes enunciados:

Ejemplo

- En un salón de estudiantes de psicología de primer semestre, por cada 4 mujeres hay 2 hombres.
- Una persona sedentaria por cada hora que pasa en reposo, retiene en su cuerpo 5 calorías.
- En un entrenamiento de fútbol, dos jugadores por cada 45 lanzamientos, el primero anota 18 veces y el segundo 32 veces.
- Para preparar un pan por cada 100 gr de harina se requieren 2 huevos.
- En un recipiente se cuenta con 3/5 de jugo. ¿Qué fracción del recipiente está desocupada?

Los ejemplos anteriores citan contextos en los que tienen lugar las razones matemáticas. Se define una razón como la comparación entre dos magnitudes. Por ejemplo, en la expresión: *En un salón de estudiantes de psicología de primer semestre, por cada 4 mujeres hay 2 hombres*.

Matemáticamente es sencillo expresar dicha situación, se puede enunciar como *4: 2 ó como 4/2*. Sin embargo, si no se entiende el contexto las relaciones numéricas puede que no digan nada.

Figura. 7
Fuente: www.shutterstock.com/318918836

Ahora bien, en la siguiente situación: *En un entrenamiento de fútbol, dos jugadores por cada 45 lanzamientos, el primero anota 18 veces y el segundo 32 veces.*

Se denota que Jugador 1. presenta 18 anotaciones de 45 lanzamientos o la relación 18/45:

a. Antecedente: denota la magnitud que se compara con relación a la otra, número de aciertos.

b. Consecuente: denota la magnitud comparada con relación a la magnitud dada, es decir el número de lanzamientos.

Se entiende entonces que, una razón matemática es la relación interdependiente entre dos magnitudes.

Otra forma de entender las razones es a partir de la relación parte - todo. Por ejemplo, *En un recipiente se cuenta con 3/5 de jugo. ¿Qué fracción del recipiente está desocupada?*

La solución a esta situación está dada por la expresión 2/5 pues se entiende que el recipiente y su capacidad representa una unidad, que se ha porcionado en 5 partes iguales, y de las cuales se cuenta con 3/5 de jugo en el mismo. La unidad se compone de las 3/5 partes de jugo que hay en el recipiente y de las 2/5 partes que ya se consumió o desalojó. De este modo 3/5 jugo + 2/5 desocupado = 5/5 totalidad de la capacidad = 1 recipiente y su contenido.

Ahora, revisa en detalle la siguiente representación gráfica. *¿Cuál es la diferencia entre los dos esquemas?* Describe qué sucede en cada caso, explica matemáticamente la situación.

Figura. 8
Fuente: Propia

De las figuras anteriores, también puede haber un contexto de medición que nos facilite a través de comparaciones numéricas, otras relaciones entre los elementos que componen cada esquema. Invito ahora, a tomar medidas de cada esquema y de cada una de sus partes; realiza luego un registro de los datos obtenidos y ahora indica las relaciones numéricas existentes en cada caso.

Habiendo realizado el ejercicio anterior, es necesario ahora ampliar la reflexión, intentando resolver cada interrogante que se enuncia en seguida.

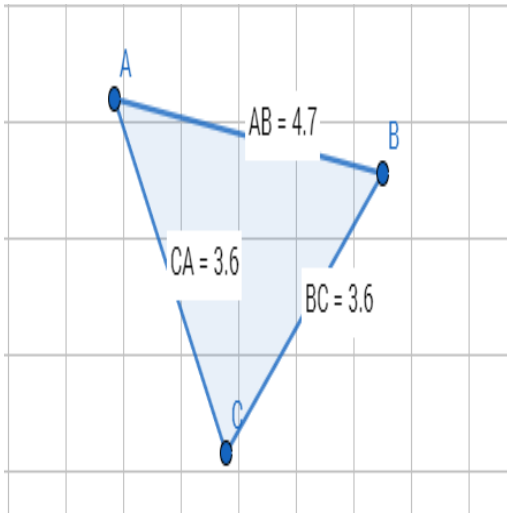
a. ¿Cuál es la diferencia entre una razón y una fracción?

b. Cuando se escribe una fracción como $\frac{2}{3}$; ¿Se está mencionando una razón?

c. Si se dice que *8* ; ¿Es lo mismo que $\frac{8}{11}$?

De las razones a las proporciones: algunos contextos de uso

Se define una proporción como la igualdad entre dos razones, situación que no siempre resulta ser cierta. En la siguiente figura se propone la construcción de un triángulo en el software geogebra en línea.



Se pueden entonces establecer algunas razones a partir de la información que provee esta construcción. Para ello se tomará como referente la medida de los segmentos que componen el triángulo.

a. $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{4.7}{3.6} = 1.30$

b. $\frac{\overline{BC}}{\overline{CA}} = \frac{3.6}{3.6} = 1$

c. $\frac{\overline{CA}}{\overline{AB}} = \frac{3.6}{4.7} = 0.76$

Figura. 9 Representación de figura geométrica
Fuente: propia

Al igualar las dos razones $\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{CA}$; se obtiene la siguiente relación numérica $\frac{1.30}{1} = 1.30$; luego al igualar $\frac{BC}{CA} = \frac{CA}{AB}$; *se obtiene* $\frac{1}{0.76} = 1.31$. ¿Qué relación hay entre los datos encontrados? ¿Se ha construido una proporción a partir de la relación de dos razones?

Ahora, detalla en la siguiente situación: el salario de Juan incrementa un 5% cada semestre, sobre el salario básico pactado al iniciar su contrato.

Tiempo dado en semestres	1	2	3	4	5
Salario	$450.000	$472.500	$495.000	$517.500	$540.000

Tabla 2 Datos de salario
Fuente. propia.

- ¿Se pueden derivar proporciones de la información relacionada en la tabla?
- ¿De un semestre a otro, en cuánto aumenta el salario de Juan?
- ¿Se puede predecir entonces, en cuántos semestres Juan alcanzará un salario de $900.000?

Este es un claro ejemplo de variación lineal entre dos magnitudes. Se muestra que mientras pasa el tiempo en semestres el salario de Juan aumenta por semestre $22.500. Se pueden establecer razones, pero no proporciones, la razón es simple, esta situación **NO** cumple con las propiedades de las proporciones.

Así, se establece que dada la relación $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se debe cumplir $\rightarrow \frac{(a+b)}{b} = \frac{(c+d)}{d}$

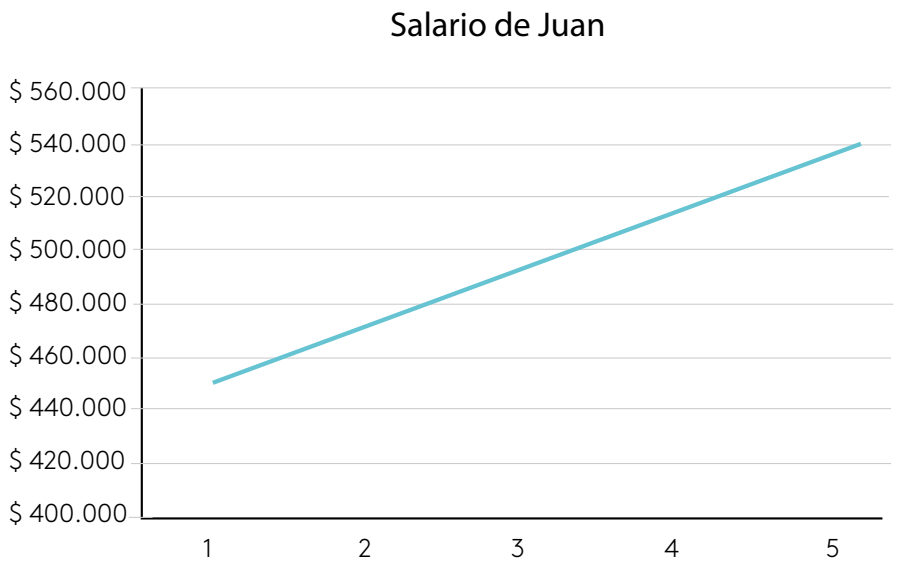
;entonces $\frac{1}{\$\,450.000} = \frac{2}{\$\,472.500} \rightarrow \frac{(1+450.000)}{450.000} = \frac{(2+472.500)}{472.500}$

De otro modo y dada la relación $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se debe cumplir $\rightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$

;entonces $\frac{1}{\$\,450.000} = \frac{2}{\$\,472.500} \rightarrow \frac{(1-450.000)}{450.000} = \frac{(2-472.500)}{472.500}$

"Como se evidencia en la resolución de las diferentes relaciones ninguna de las propiedades de las proporciones tampoco cumple la relación de proporcionalidad, que es básicamente dar cumplimiento a la igualdad, es decir a ambos lados de la igualdad los valores deben dar el mismo resultado lo que no está sucediendo."

¿Cuál de las dos figuras representa mejor la situación dada? Justifica.



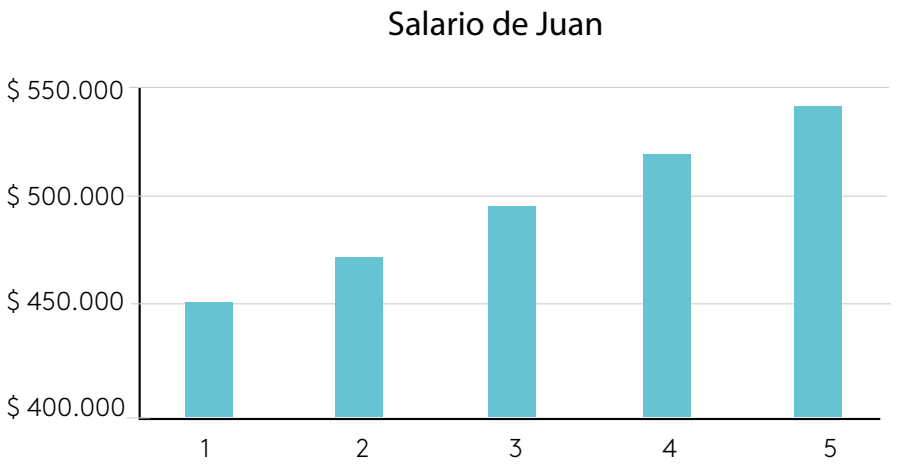


Figura. 10 Regresentación grafica del salario de Juan
Fuente. propia

Entonces, en la cotidianidad hay ideas que sugieren lo que es la proporcionalidad y de manera particular, la proporcionalidad directa, sin llegar necesariamente a expresarla matemáticamente. Considera los eventos enunciados:

- Cantidad de libros y el espacio que ocupan en la biblioteca.
- Inversión en pasajes en relación con los días laborales.
- Aumento del costo de vida y el paso del tiempo.

Las expresiones anteriores relacionan el aumento de dos magnitudes, una en dependencia de la otra. *¿Cuándo existe proporcionalidad directa entre dos magnitudes?*

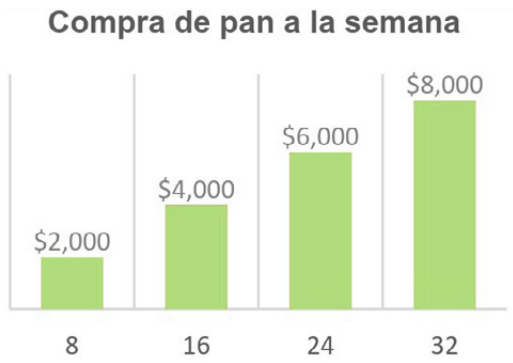
Ahora bien, como el concepto de proporcionalidad se construye a partir de las relaciones representadas a través de las fracciones y las razones, es importante considerar las siguientes situaciones antes de continuar el abordaje conceptual.

Fracción

Relación a través de un cociente de dos números enteros, se expresa como a/b con b diferente de cero.

Razón

Se define como el cociente de dos cantidades. Se expresa de la forma a/b; a es a b; y ab.



El gráfico representa la compra de pan diario de un ama de casa de la capital. ¿Qué razones se derivan de este esquema? ¿Es posible establecer algunas proporciones?

Figura.11 Representación gráfica de la compra de pan
Fuente: propia

Así se obtiene que cada 8 panes tienen un costo de $2000. La figura muestra el comportamiento de esta compra al cabo de cuatro días. Algunas razones $\frac{8}{\$2000}; \frac{16}{\$4000}; \frac{24}{\$6000}; \frac{32}{\$8000}$ ahora, algunas proporciones $\frac{8}{\$2000} = \frac{16}{\$4000}$. De este ejercicio se puede derivar que al invertir $20.000 se han de comprar 96 panes, y que se requiere de $40.000 para comprar 192 panes. Lo dicho, se explica mediante el siguiente modelo.

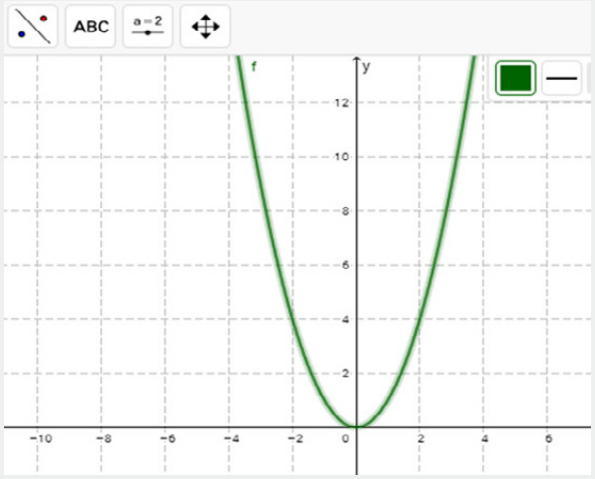
$$\frac{96}{\$20.000} = \frac{?}{\$40.000};? \quad \frac{96 * \$40.000}{\$20.000} = \frac{\$3'840.000}{\$40.000} = 192$$

El tipo de proporcionalidad que se aplica en la situación anterior se denomina directa. Esta proporcionalidad se caracteriza por mostrar un crecimiento proporcional en las dos magnitudes (cantidad de panes y precio). El crecimiento de estas magnitudes se define como proporcional, en la medida que conserva su constante de crecimiento, la cual se deriva de las razones $\frac{8}{\$2000} = 0.004; \frac{16}{\$4000} = 0.004; \frac{32}{\$8000} = 0.004; \frac{192}{\$40000} = 0.004$

En este caso se cumple que: Así, se establece que dada la relación

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se debe cumplir $\rightarrow \frac{(a+b)}{b} = \frac{(c+d)}{d}$; entonces $\frac{8}{\$2000} = \frac{16}{\$4000} \rightarrow \frac{8+2000}{2000} = \frac{16+4000}{4000} = 1{,}004$

En la siguiente situación revisa si, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$; ¿Se está modelando una situación de proporcionalidad directa?



Efectivamente el gráfico representa f(x) = x^2. De tal modo, que al ubicar la información en una tabla de datos se obtiene:

X	0	1	2
Y	0	1	4

¿Qué se puede concluir de este ejercicio?

Figura. 12
Fuente: propia

Ahora dada la función $f(x) = \frac{3}{x}$. De acuerdo con la información dada en la figura, completa la información faltante en la tabla:

x	1	3	5		
y	3	1	0.6		

- ¿Qué se puede inferir de los datos hasta ahora registrados?
- ¿Cómo se relacionan las variables representadas?
- ¿Hay algún tipo de proporcionalidad representada en el gráfico siguiente?

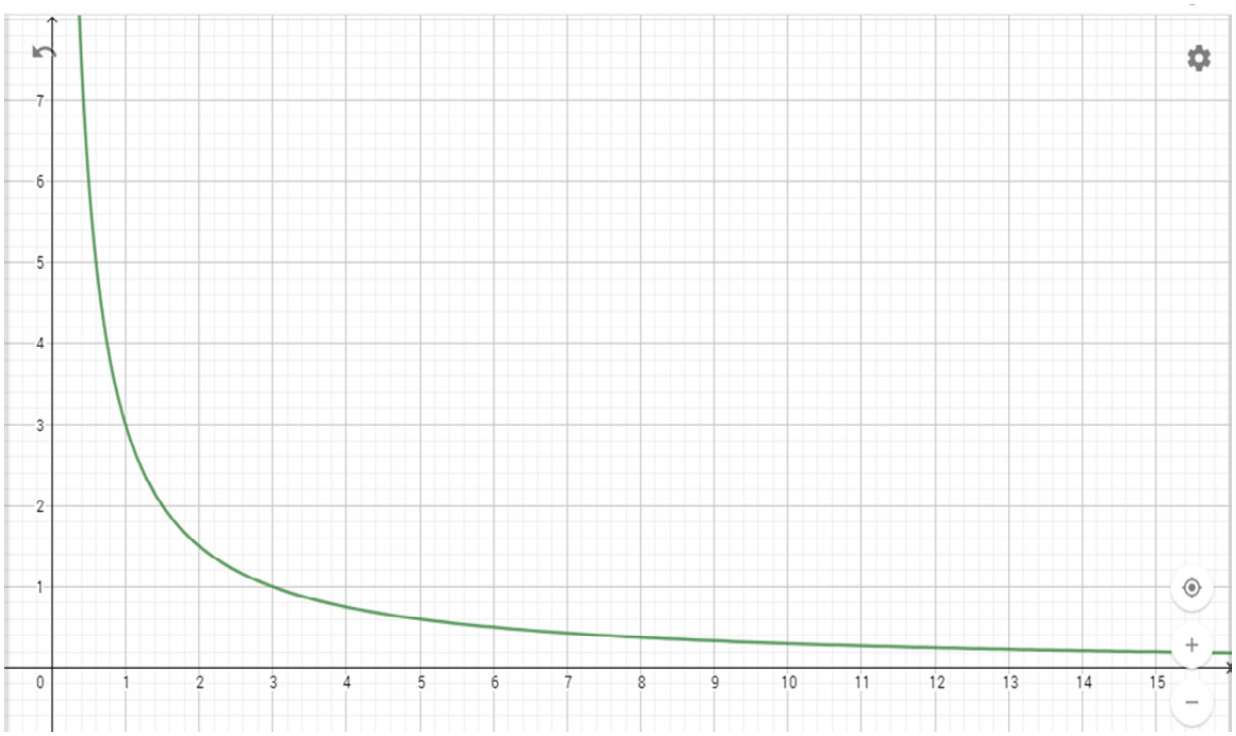


Figura.13 Representación gráfica de los datos
Fuente: propia

De otra manera y a diferencia de los casos presentados, es de anotar que la situación anterior modela dos magnitudes. La primera evidencia un crecimiento y la segunda un decrecimiento, faltaría revisar si estas formas contrarias de relación se pueden definir como inversamente proporcionales o si son correlacionadas.

Así se tiene una primera proporción $\frac{1}{3} = \frac{3}{1}$

Ejemplo

Otro contexto de uso de la razones es su conexión con los porcentajes. En un estudio que realizó el periódico El Tiempo, titulado "La infidelidad en Colombia", en cifras demostró la importancia de saber leer los porcentajes para conocer de fondo un fenómeno. Algunas de las preguntas realizadas fueron:

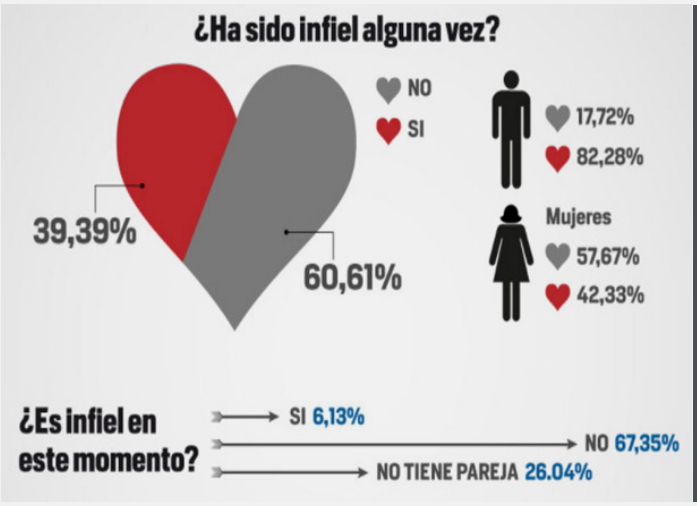


Figura. 14 Resultados de la encuesta – Pregunta 1
Fuente: El Tiempo

Si se hace revisión de la forma como se presentan los datos en la imagen se evidencia el uso de porcentajes para caracterizar el fenómeno de la infidelidad. Se iniciará por decir que un porcentaje es una porción o parte de la totalidad de elementos que se están considerando para el estudio. En este contexto el porcentaje representa una frecuencia relativa.

Porcentaje
Corresponde a una fracción cuyo denominador es 100.

Así, el porcentaje de un número o de una población se determina de la siguiente manera. Supóngase que el total de participantes del estudio en mención son 550 personas. De esta manera 550 personas corresponde a la unidad porcentual o 100%; si se sabe que el 60.61% no ha sido infiel, a través de una regla de tres se puede saber cuántas personas son $\frac{550}{x} = \frac{100}{60.61} = 334$; Entonces, se define que son 166 personas las que manifiestan haber sido infieles.

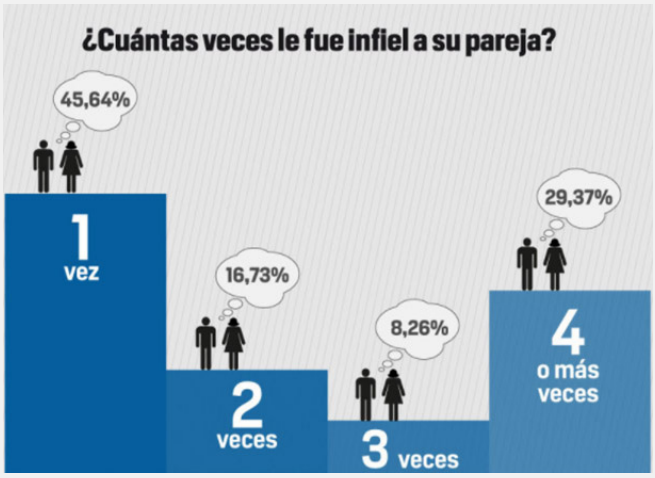


Figura. 15 Resultados de la encuesta – Pregunta 2
Fuente: El Tiempo

Ahora, la suma de frecuencias relativas debe aproximarse o ser igual a la unidad porcentual. Observa:

Ahora bien, de este ejercicio se deriva también una revisión de cómo se puede expresar un porcentaje en cantidad fraccionaria y en cantidad entera. Revisa la siguiente tabla.

Porcentaje dado	Paso 1: Se expresa el porcentaje en forma de fracción	Paso 2. Multiplica por 100 cada fracción (Todos los porcentajes tienen dos cifras decimales)	Paso 3. Simplifica cada resultado
45.64%	$\frac{45.64}{100}$	$\frac{45.64}{100} x100 =$	$\frac{4564}{10000} = \frac{2282}{5000} = \frac{1141}{2500}$
16.73%	$\frac{16.73}{100}$	$\frac{16.73}{100} x100 =$	$\frac{1673}{10000}$
8.26%	$\frac{8.26}{100}$	$\frac{8.26}{100} x100 =$	$\frac{826}{10000} = \frac{413}{5000}$
29.37%	$\frac{29.37}{100}$	$\frac{29.37}{100} x\ 100 =$	$\frac{2937}{10000}$

Tabla 3 Pasos para expresar el resultado
Fuente: Propia

Una conexión entre las matemáticas representadas en porcentajes y la psicología es la relación cercana que hay entre el número y la caracterización de un fenómeno social como el de la infidelidad. Los porcentajes también se pueden expresar como números decimales.

El proceso es sencillo, multiplica el porcentaje por 100.

Figura 16. Resultados de la encuesta – Pregunta 3
Fuente: El Tiempo

La ficha técnica del estudio presenta los siguientes datos:

Fecha de Realización	Junio de 2.012
Grupo objetivo	Hombres y mujeres mayores de edad
Muestra	1227 encuestas telefónicas) con cobertura de 13 ciudades colombianas.
Nivel de confianza	95%

Tabla 4 Ficha técnica del estudio
Fuente: El Tiempo

De esta tabla llama la atención el porcentaje que define el nivel de confianza representado en un 95% sobre los datos recopilados. En matemáticas, se habla del porcentaje de error, el cual se puede estimar en situaciones cuando no se conoce un dato con exactitud. Por ejemplo, supóngase que en un primer acercamiento a la población objetivo del estudio anterior el sondeo inicial estima la participación de 1300 personas y finalmente participan 1100,

Primero se determina el error absoluto Ea= 1300 – 1000= 200

Ahora el error porcentual Ep = (200/1300) X 100= 15.38%

Instrucción

A modo de síntesis de este eje, lo invitamos a revisar el siguiente recurso de aprendizaje "nube de palabras" dispuesto en la página principal del eje 2.

Para concluir vamos a realizar la actividad evaluativa de este eje.

BIBLIOGRAFÍA

Colombia, M. d. (1998). *Lineamientos curriculares de matemáticas*. Bogotá: Magisterio.

El tiempo (2016). Cifras de Infidelidad. Recuperado de http://www.eltiempo.com/Multimedia/infografia/cifrasinfidelidad/

MATEMÁTICAS

Sandra Peña Alonso

EJE 3

Pongamos en práctica

Fuente: Shutterstock/244680268

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina
MIEMBRO DE LA RED ILUMNO

INTRODUCCIÓN

Este eje está dedicado al estudio de los procesos de comunicación y de modelación en matemáticas. La pregunta orientadora de este referente de pensamiento es: *¿Cómo la modelación de fenómenos de variación y cambio, mediados por el lenguaje algebraico, contribuye a la formación de pensamiento variacional en la Fundación Universitaria del Área Andina?*

Las matemáticas al igual que otras ciencias tienen su propio código de comunicación. En ocasiones, el acceso a un conjunto de símbolos, representaciones y expresiones que parecen otra lengua, restringe el acceso al pensamiento matemático. El álgebra es una forma de comunicación formal de las matemáticas que se han estudiado hasta el momento, el estudio de las expresiones algebraicas, las operaciones y la modelación de fenómenos no son otra cosa, que la extensión de la aritmética, sólo que manifestada en el pensamiento abstracto.

El lenguaje matemático es universal, se caracteriza por su conexión con el estudio de fenómenos derivados de otros contextos como las ciencias: física, química, geometría, estadística, topografía y topología, por mencionar algunas. El código de las matemáticas tiene tantas variaciones como otros, de acuerdo al contexto comunica, sin embargo, se compone de un conjunto de símbolos, significados, reglas de uso y formas de decodificación que es preciso atender.

Este conjunto de símbolos, reglas y combinaciones constituyen una forma de codificar y decodificar lo que se quiere comunicar, se hace necesario entonces que todos los participantes tengan acceso a estas expresiones para saber qué es lo que se pretende a partir de este módulo.

Para el desarrollo del eje relacionado con el pensamiento variacional, se ha propuesto una ruta, donde el participante es un co-constructor del contenido presentado, por ello, se espera una participación detallada, dinámica, integradora y relacional de cada una de las actividades propuestas. Adicional, la lectura de cada una de las situaciones expuestas requiere de una segunda construcción para su comprensión y problematización.

Contextualización: el lenguaje matemático y el lenguaje de la vida diaria

Figura 1 Caricatura Matemáticas educadas
Fuente: http://www.triego.com/2013/09/11/mucho-gusto-un-amigo-mas/

Las personas hoy se comunican a través de diferentes expresiones, códigos, símbolos y lenguajes (música, grafiti, atuendos, gestualidad, danza etc.). El lenguaje es un dispositivo que brinda la posibilidad de manifestar sentimientos, expectativas, proyectos e ideas en general. De la misma manera que cada persona asume unas formas que le son propias en la comunicación verbal, gestual, corporal, escrita u oral, en las matemáticas, también se apropia un lenguaje conformado por signos, números, símbolos. Este lenguaje puede ser confuso y enredado, pues hay una creencia de que solo los profesores, científicos, ingenieros, ecónomos, contadores y otros profesionales pueden entenderlo en determinados espacios de divulgación del conocimiento.

Los participantes de este curso, tienen el reto de conocer y aproximarse a la primera barrera con la que se pueden encontrar al estudiar las matemáticas indefinidas: El lenguaje de las matemáticas, por esta razón aparentemente esencial, se propone un recorrido por las siguientes definiciones que con ayuda de los compañeros pueden decodificar y contextualizar mediante ejemplos cotidianos.

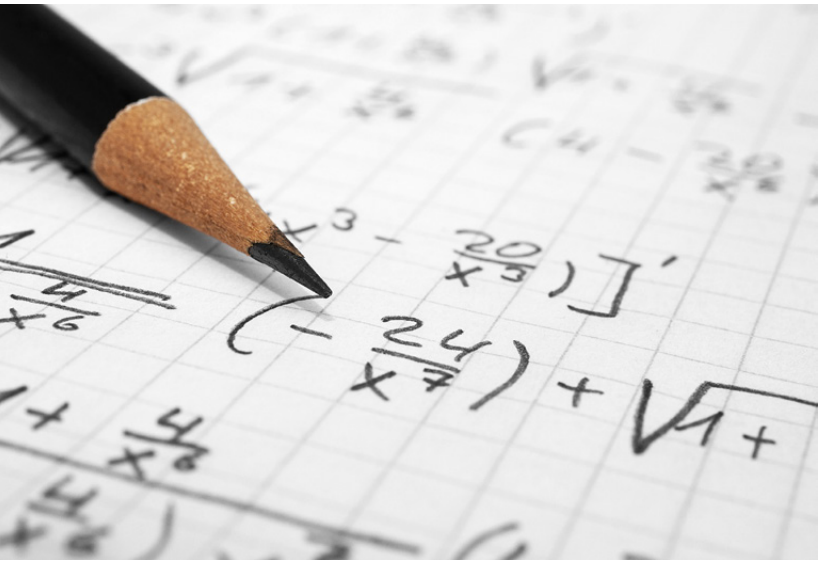


Figura.2
Fuente: www.shutterstock.com/358855256

La comunicación según la definen los lineamientos curriculares de matemáticas propuestos por el Ministerio de Educación Nacional (1998), se entienden como un proceso de pensamiento que favorece el desarrollo de otros procesos siempre y cuando se le integre de manera armónica mediante estrategias que vinculen transiciones del pensamiento concreto al pensamiento abstracto y viceversa.

De igual modo, la comunicación permite la expresión de las mismas mediante diferentes sistemas de representación. En la siguiente tabla se ilustran algunos elementos propios del código de comunicación en matemáticas

Tipo de signo	Descripción y uso
Signos de relación.	Estos signos son los que permiten establecer comparaciones entre dos magnitudes. Sirven para relacionar cantidades, Por ejemplo: ≤menor o igual que; ≥mayor o igual que; =gual que; ≠diferente a.
Signos de operación.	Son todos aquellos que denotan acciones como agregar, quitar, aumentar, reiterar, partir, repartir entre otras. Ejemplo: Producto axb; a*b; (a) (b); a.b Adición a+b; Sustracción:a -b;División: a÷b;a/b; a:b Potencia; a^x;a.a= a^2; Radicación √(a) ; $\sqrt[3]{a}$ por mencionar algunos ejemplos.
Signos de agrupación.	Estos signos están asociados a las operaciones matemáticas, sirven para cambiar, invertir, modificar, transformar el orden de una operación. Estos signos son paréntesis ( ), llaves corchetes [a+b], barras ‖a‖ .

Tabla 1 Tipos de signos que se usan en contextos numéricos, de medida, variación, probabilidad e incertidumbre en matemáticas
Fuente: propia

Instrucción

Para contextualizar el cuadro anterior, resuelve las situaciones:

a. Ubica en la recta numérica el número que cumpla con la condición dada:

- Un número comprendido entre -1 y 0 que sea decimal.
- Un número fraccionario mayor que uno y menor que 2.
- Un número racional.
- La raíz cúbica de un número.
- La potencia cúbica de -2.

b. Resuelve las operaciones indicadas.

- -2+(-4*2)=
- $\frac{2^3}{3} + \frac{1}{2} - (-0.25) =$
- $\sqrt{(\sqrt[3]{16})} =$
- [(-4+1.25)-(-3)+5^(-1)]=

El uso y apropiación de los números, las operaciones y los símbolos matemáticos permiten pensar diferentes situaciones de la vida diaria. A continuación, se propone un grupo de ejercicios para contextualizar la importancia del lenguaje matemático, al igual que sus formas de expresión.

a. Dibujar el rectángulo, cuyo perímetro está representado por la expresión . ¿Cuál es el área del rectángulo?

b. ¿Qué proporción del salario de un padre de familia corresponde a la educación de sus hijos?

c. Al cabo de un año escolar la inversión de una familia en diversión para sus hijos es de:

d. ¿Cómo se puede expresar la disminución del valor de una consola de Xbox, si su precio se reduce en un 10% al año?

e. ¿Cuál es el aumento en el valor de la matrícula por periodo académico, para el caso de un estudiante de primer semestre, inscrito en una carrera profesional si al iniciar paga $3´857.000? La inversión total en la formación de este profesional por costo de matrícula corresponde a: _____.

Las anteriores situaciones, son algunas de las que con frecuencia son resueltas sin prestar mayor atención a la potencia en el significado de sus signos, símbolos y formas de expresión verbal, oral y escrita. Incluso, en ocasiones es más sencillo comunicar ideas matemáticas desde el código lingüístico oral, pues se presentan conflictos cuando se debe escribir eso que se está pensando, y con mayor restricción al intentar que otra persona lo entienda.

Instrucción

El siguiente ejercicio se propone en pares, se deben asignar dos roles, el primero de lector y el segundo de escritor. El lector, en voz alta leerá cada situación a su compañero escritor, él segundo por su parte, intentará expresar con símbolos, números y signos cada enunciado. Luego se intercambian los roles y se comparan los resultados. ¿Qué reflexión suscita este ejercicio? ¿hubo coincidencias en las expresiones escritas? Los enunciados son:

a. El doble de un número más otro número.

b. La tercera parte de un número aumentado en el doble del mismo número.

c. El producto de dos números elevados al cuadrado aumentados en el primer número.

d. El cociente de dos números equivale a la cuarta parte del primer número.

e. La suma de a y b equivale a la mitad del segundo número aumentado en el doble del primero.

f. La suma del producto de tres pares números.

g. Un número excede a otro en cuatro.

h. La raíz cuarta de un número equivale al producto de la raíz cuadrada de un número por la raíz quinta del mismo.

Para conocer una historia divertida de un hombre que calculaba lo invitamos a observar el siguiente vídeo.

Video

El hombre que calculaba- Malba Tahan

Educación, nuestro empeño

Alfagrama

Se define como el orden alfabético de las letras que componen una palabra. Por ejemplo, AAAIMNR.

Figura 3.
Fuente: www.shutterstock.com/364470776

Expresiones algebraicas

Para contextualizar y hacer una apertura a la construcción de expresiones algebraicas diferenciadas estas, de las expresiones aritméticas por su significado se propone la siguiente actividad como introductoria. Juega con las letras. *¿Cuántas palabras más, se puede formar con las letras de la palabra MARIANA*?

Esta combinación se denomina anagrama. Es posible que posterior al ejercicio, se hayan configurado las siguientes palabras.

-AMAINAR	- ANIMARA
-AMARIAN	- IMANARA
-AMARINA	- MANARIA
-AMINARA	- MARIANA

En un anagrama se identifican las consonantes, las vocales y los alfagramas. Y lo anterior, *¿Cómo se relaciona con las expresiones algebraicas?* Los anagramas son una analogía para explicar que las expresiones algebraicas tienen un funcionamiento similar al de los anagramas. El ejercicio es muy sencillo, una expresión algebraica es una forma simbólica de representar un número, operación, o idea matemática que habita el pensamiento abstracto, representado en las personas, los libros, artículos científicos y otras formas de comunicación.

Del anagrama anterior se puede determinar su valor numérico. Por ejemplo si se establece que la letra A= -2, la letra I= ½, la letra M= 0.25, N= 0, R= √2. Completa la tabla siguiente de acuerdo al modelo presentado.

Palabra	Valor numérico	Resultado
AMAINAR	-2+0.25+(-2)+1/2+0+(-2)+ √2 =	-3.84
AMARIAN		
AMARINA		
AMINARA		
ANIMARA		
IMANARA		
MANARIA		
MARIANA		

Tabla 2
Fuente: propia

En el ejercicio anterior se visibiliza una de las dificultades que en ocasiones limitan a las personas, para comprender y construir el sentido numérico en una expresión algebraica. Las expresiones algebraicas también nos permiten construir caminos para representar ideas del mundo cotidiano en un conjunto de símbolos, signos y números formales.

Así, una expresión algebraica se compone de números, signos que pueden indicar operación, relación o jerarquía entre las operaciones; a la vez integra letras que pueden detonar cambios en un fenómeno o por el contrario pueden significar la ausencia de cambio y variación (constantes y variables). En seguida se presentan dos tipos de expresiones algebraicas, unas que se construyen desde frases matemáticas que se relacionan con la vida cotidiana y otras que se construyen desde un contexto predeterminado.

Caso 1. Expresiones algebraicas en la cotidianidad

a. El costo de un pasaje en el sistema de Transmilenio durante 5 días = 5 ($2.200) = $11.000.

b. Costo total del pan que compra una ama de casa durante 7 días a la semana=. Donde 7 es el número de días y x,y,m,a,b ó la letra que sea para representar el costo del pan del cual no se sabe su precio a diario.

c. Número de horas que dura tres desplazamientos en la ciudad aumentado en 30 minutos que corresponde a los trancones = 3x+30; de tal modo que cada desplazamiento puede durar un tiempo diferente o el mismo tiempo.

Caso 2. Un truco matemático

Algebra de azulejos.

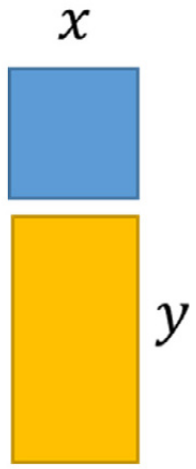
Piensa un número, súmale 3, multiplica el resultado por 2, resta de la cantidad anterior 8 y divide entre 2.

Piensa un número = x, y, m, n, o cualquier letra
Súmale 3 = x+3
Multiplica el resultado por 2 = 2 (x+3)
Resta de la cantidad anterior 8 = 2 (x+3) – 8
Divide entre 2 =

Figura. 4
Fuente: propia

La pregunta para este caso es, *¿Qué número se obtiene?* La respuesta se puede encontrar en dos contextos, el primero, si se otorga diferentes valores numéricos a la letra o cantidad desconocida, es posible establecer un conjunto de valores aritméticos. El segundo, si no se otorga ningún valor numérico a la cantidad desconocida, el número estaría dado por una expresión algebraica, de la cual no es posible derivar un número en el contexto aritmético sino en el contexto algebraico.

Se propone a continuación un ejercicio introductorio para revisar una configuración del código matemático en la generación de expresiones algebraicas. Observa:



En las figuras de la izquierda se presentan dos variedades de figuras geométricas con la asignación de un valor simbólico en uno de los lados de las mismas.

El cuadrado azul tiene como medida de uno de sus lados la letra "X". Esa letra puede significar cualquier valor numérico, sin embargo, para este ejercicio importa lo que representa en el contexto de medida que se quiere resaltar. En este orden la letra "X" denota la medida de uno de los lados del cuadrado y por ende la medida de todos los lados. Si nos piden calcular el perímetro del cuadrado, ¿Cuál será el número algebraico que lo representa?

Figura. 5
Fuente: propia

En este caso el valor algebraico del perímetro del cuadrado está representado por la expresión:

4x,donde 4 es el número de lados con la misma medida del cuadrado y x el valor algebraico asignado a esta longitud.

En este caso y representa la medida del lado con mayor longitud del rectángulo y se infiere que el lado menor mide x, si se le relaciona con el cuadrado anterior. Así, el perímetro de esta figura estará representado por la expresión.

Figura. 6
Fuente: propia

¿Cuál será entonces, la expresión algebraica que denote el perímetro del rectángulo?

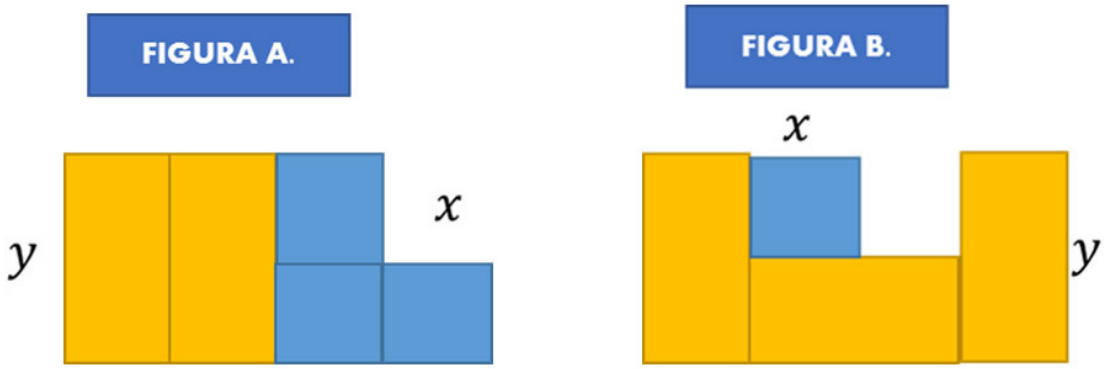


Figura. 7
Fuente: propia

Partiendo del ejercicio propuesto, ¿Cuál es el perímetro de cada figura? ¿Cuál es la figura con mayor perímetro?

Si se concluye que la figura A tiene como perímetro 10x+y y la figura B registra 3y+8x, se ha establecido desde el lenguaje la asignación de una expresión numérica a la longitud de las dos formas.

Para dar respuesta a la segunda pregunta se tienen algunas restricciones, y éstas, se asocian a los valores literales que se asignan a las longitudes de cada figura, pues se desconoce el valor real de cada letra, y de este modo, ¿Cuál es el criterio para determinar numéricamente qué figura tiene mayor o menor perímetro?

Si se asigna una medida a cada letra x=2cm ,y=4 cm. ¿Cuál de las dos figuras tiene mayor perímetro? De este modo para determinar el perímetro de la figura A se tiene, y+10 x expresión antes mencionada;luego se sustituyen los valores de las medidas de tal manera que 4 cm+10 (2 cm)=24 cm.

¿Cuál es la medida del perímetro de la figura B?

Ahora bien, si se entrega la expresión 2x^2+2xy. ¿Cuál de las figuras la representa mejor?

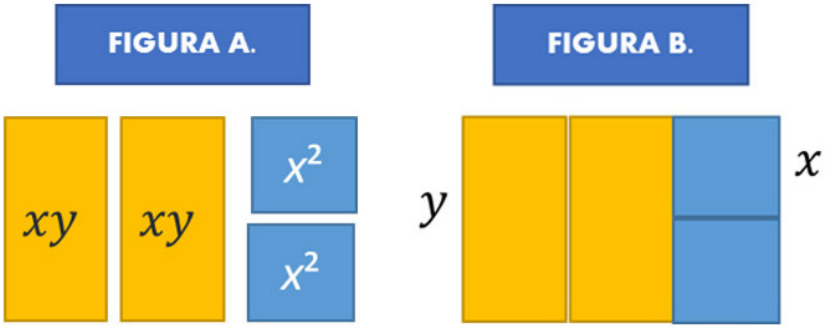


Figura. 8
Fuente: propia

Asociado al tema de las expresiones algebraicas viene la construcción de términos como los polinomios y las operaciones que con este tipo de cantidades se pueden elaborar. En la siguiente figura se ilustra, los elementos que componen una expresión algebraica, la constitución y clasificación de estas estructuras y algunos ejemplos donde es posible identificar elementos de cantidades algebraicas.

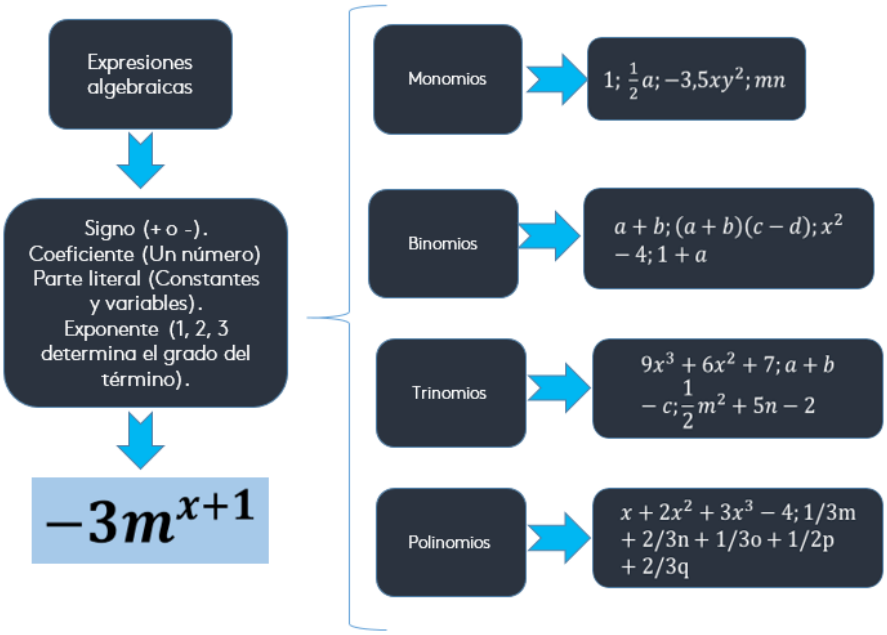


Figura. 9 Clasificación de las expresiones algebraicas
Fuente: propia

Una cantidad algebraica a diferencia de una cantidad aritmética, cumple con la función de representar una generalización de la misma. En aritmética una cantidad se representa con un solo número y nada más, en álgebra las cantidades se representan con letras y estás pueden estar asumiendo un sinfín de valores que se le pueda atribuir dependiendo del contexto. Así por ejemplo de la siguiente figura geométrica.

Se puede denotar su longitud con la letra De igual modo se puede decir que su área es a2. Esta última generalidad aplica para todos los cuadrados, sin importar su tamaño, disposición en el espacio o contexto.

Figura. 10
Fuente: propia

Con el fin de profundizar nuestros aprendizajes lo invitamos a realizar la siguiente lectura complementaria del profesor Carlos Vasco.

Lectura recomendada

El pensamiento variacional y la modelación matemática.

Carlos E. Vasco

Operaciones con expresiones algebraicas

El principio para operar (sumar, restar, multiplicar, dividir) este tipo de estructuras algebraicas, parte de la identificación de términos que se denominan semejantes. Se propone entonces el desarrollo de la siguiente unidad didáctica la cual tiene como finalidad favorecer la construcción del sentido numérico a través de la construcción de cantidades algebraicas y su correspondiente desarrollo operativo.

Semejantes
Dos o más términos son semejantes cuando tienen la misma parte literal.

Para el abordaje de cada una de las situaciones que se consideran a continuación, los participantes de este curso seguirán las orientaciones que se relacionan en la tabla contigua.

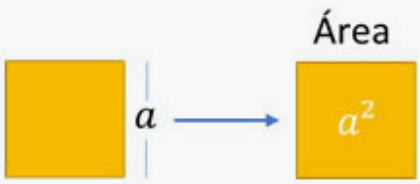
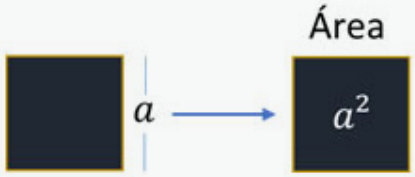
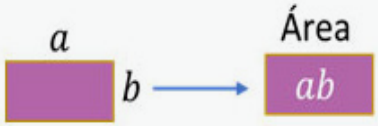
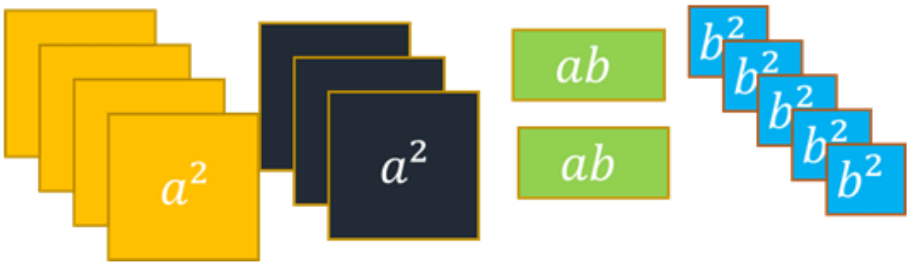
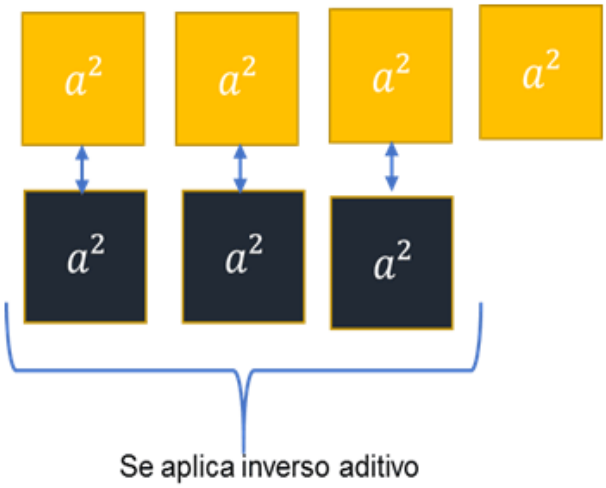
Figura	Clasificación
	Cantidad positiva.
	Cantidad negativa.
	Cantidad positiva.
	Cantidad negativa.
	Cantidad positiva.
	Cantidad negativa.

Tabla 4
Fuente: propia

Se inicia por la representación de algunas cantidades algebraicas con la intención de construir expresiones y posibilitar su caracterización:





La cantidad se expresa; luego se hace la reducción de términos semejantes, este proceso se hace por suma o por resta.

Los términos semejantes son que para este caso representan cuadrados positivos (amarillos) y cuadrados negativos (azul), al reducir se obtiene, la expresión resultante es.

Figura. 11
Fuente: propia

En el siguiente ejemplo se ilustra el proceso de suma y resta de expresiones algebraicas, dadas las cantidades.

Figura. 12
Fuente: propia

Se inicia por la construcción simbólica de cada expresión algebraica:

Cantidad 1. $4b^2+3a^2-4a^2-3ab$, luego se reducen términos semejantes, se obtiene:

Cantidad 2. $3ab+3b^2-3a^2$, no hay términos semejantes. Luego se aplica el principio de suma, bien sea usando el algoritmo o por relación de cantidades geométricas. En la siguiente figura se ilustra el proceso.

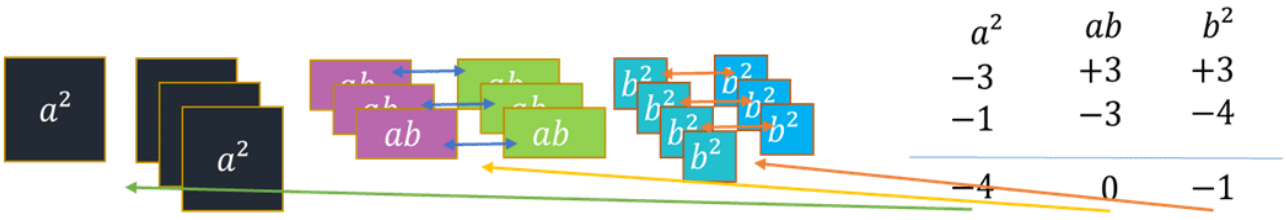


Figura. 13
Fuente: propia.

Se obtiene como resultado $-4a^2-b^2$

De otro modo, si se pide restar $5a^2-4ab$ de $-7ab-6a^2+3b^2$. ¿Qué cantidad se considera minuendo? Y ¿Qué cantidad es el sustraendo?

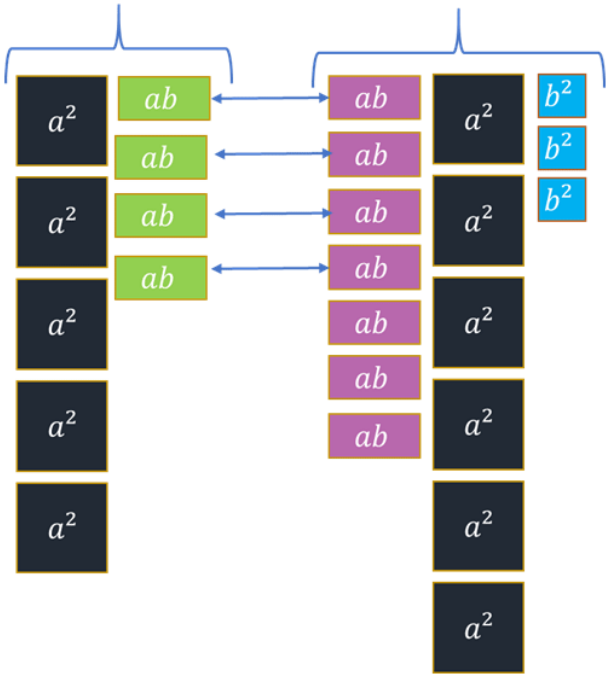


Figura. 14
Fuente: propia.

Se considera que el minuendo es y el sustraendo es Para restar es necesario representar simbólicamente la información Hasta acá se ha escrito la operación de acuerdo a la información suministrada. Si se nota, el sustraendo fue ubicado dentro de un paréntesis, lo que implica que el signo menos (-) que le antecede tiene la función de transformar la cantidad que está dentro del mismo.

El signo menos en estos casos indica que se debe transformar la cantidad que está dentro del paréntesis para determinar el opuesto al sustraendo, lo que quiere decir, que cambia los signos de los términos que están dentro de este signo. Así: luego se procede a realizar la reducción de términos semejantes.

Instrucción

Como una forma de fortalecer los aprendizaje y de practicar para la evaluación le invitamos a realizar la actividad de repaso.

Para la multiplicación de expresiones algebraicas se procede aplicando propiedades de los productos. Para su representación se iniciará por ilustrar en un esquema los factores a partir de las longitudes de las figuras, en el eje horizontal se ubica uno de los factores, solo se tomará como referente la longitud de un lado de cada figura. Para este caso es 2a,medida que designa la longitud de cada figura sumados, luego en el eje vertical, se ubica el segundo factor y su representación gráfica, se toman también las longitudes de los lados de cada figura, cantidad que se representa como , para este caso es el producto de un monomio por un binomio. Al aplicar la propiedad distributiva para la multiplicación se obtiene 2a (a+b)=2a^²+2ab..

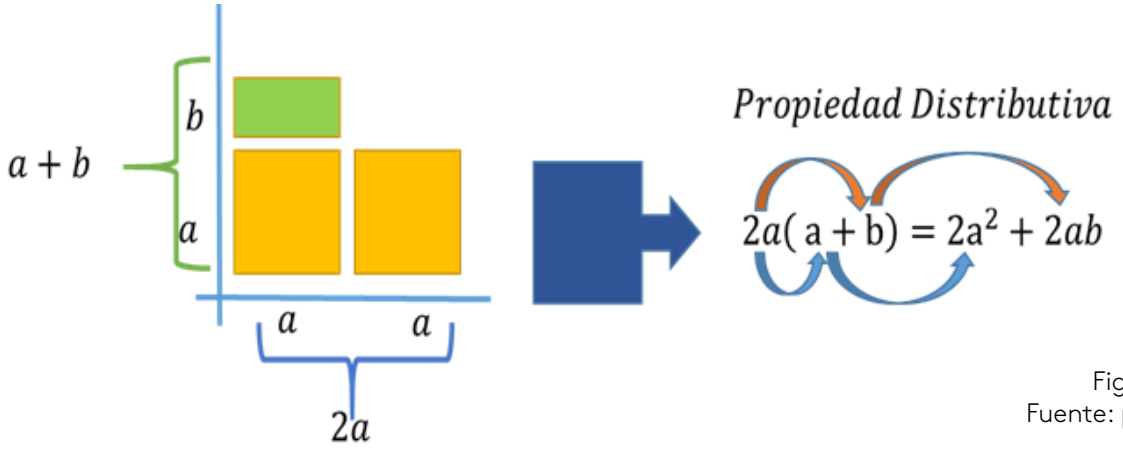


Figura. 15
Fuente: propia.

Al multiplicar dos binomios se obtiene:

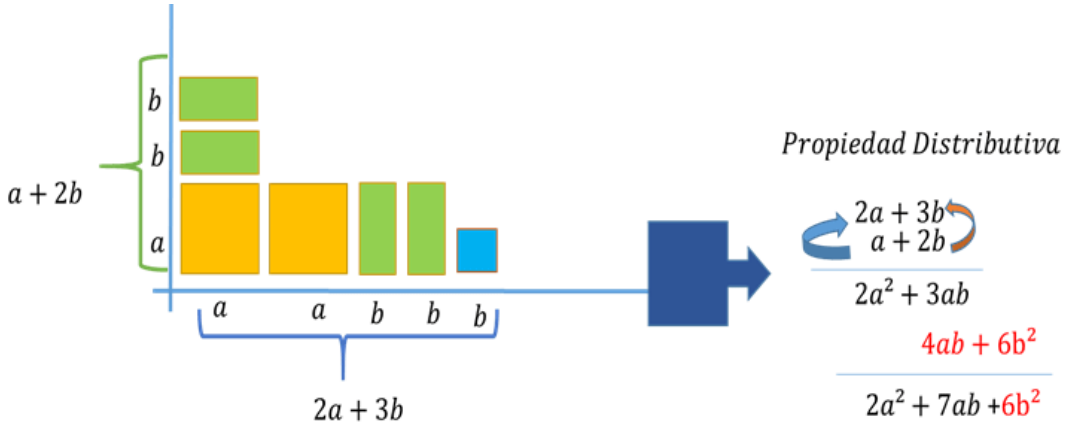


Figura. 16
Fuente: propia.

Algunos productos clásicos – Diferencia de cuadrados

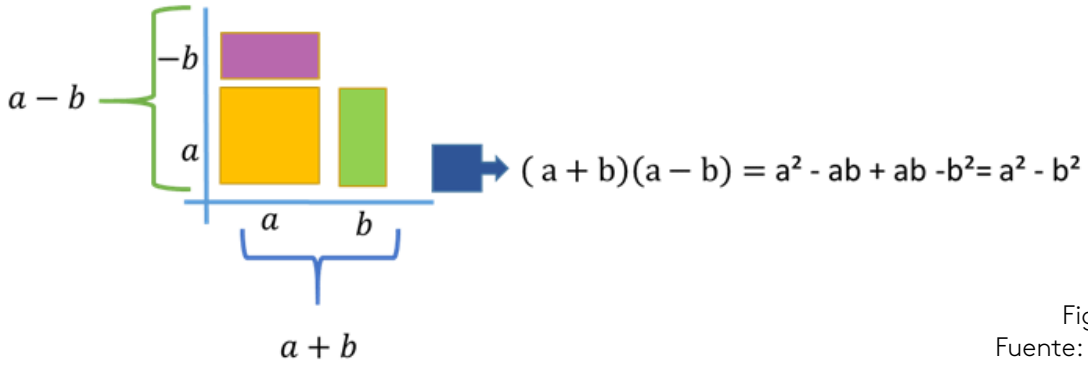


Figura. 17
Fuente: propia.

Suma de cuadrados

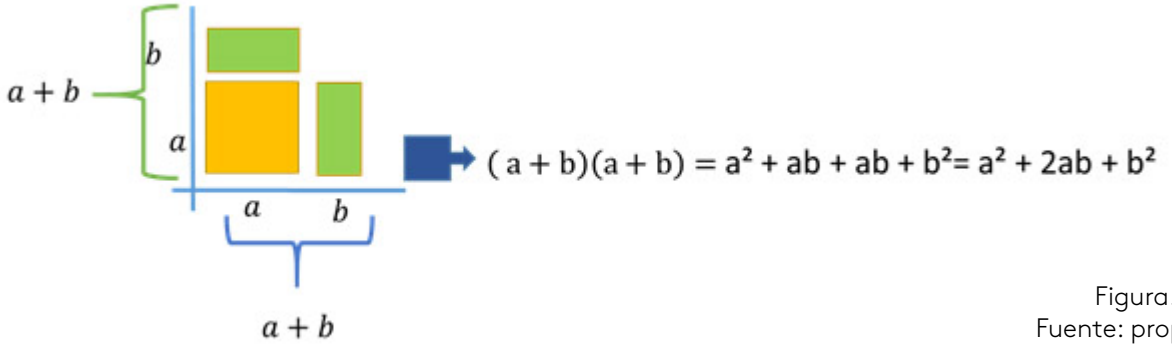


Figura. 18
Fuente: propia

Ahora el ejercicio contrario, dadas las figuras busca el valor de los lados. ¿Cuál es el producto en cada caso?

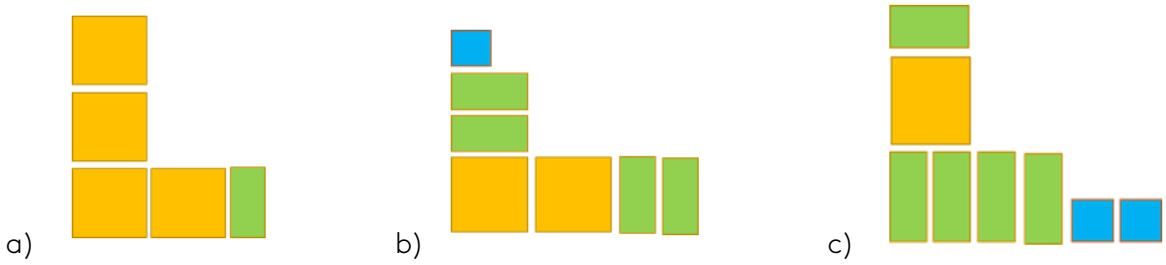


Figura. 19
Fuente: propia

La multiplicación y la factorización son operaciones cercanas. El principio de las dos es la relación que existe entre los factores de un producto y su resultado.

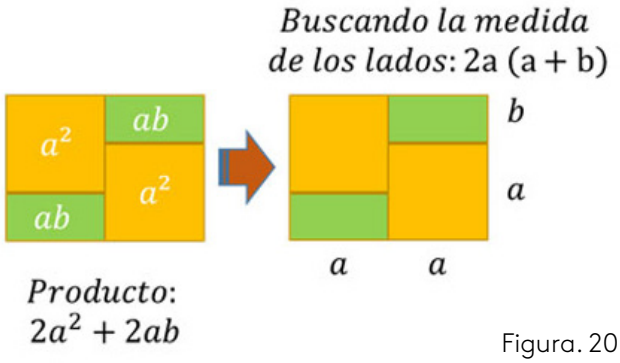


Figura. 20
Fuente: propia

De acuerdo a este ejemplo, ¿Qué es la factorización? La relación es muy sencilla, mientras que en un producto se busca establecer el área de una figura multiplicando la longitud de sus lados para llegar a un resultado final; la factorización parte de un área que se presenta elaborada y de la cual hay que derivar la medida de los lados.

Instrucción

Para finalizar lo invitamos a realizar la actividad evaluativa del eje 3.

BIBLIOGRAFÍA

Colombia, M. (1998). *Lineamientos curriculares de matemáticas*. Bogotá: Magisterio.

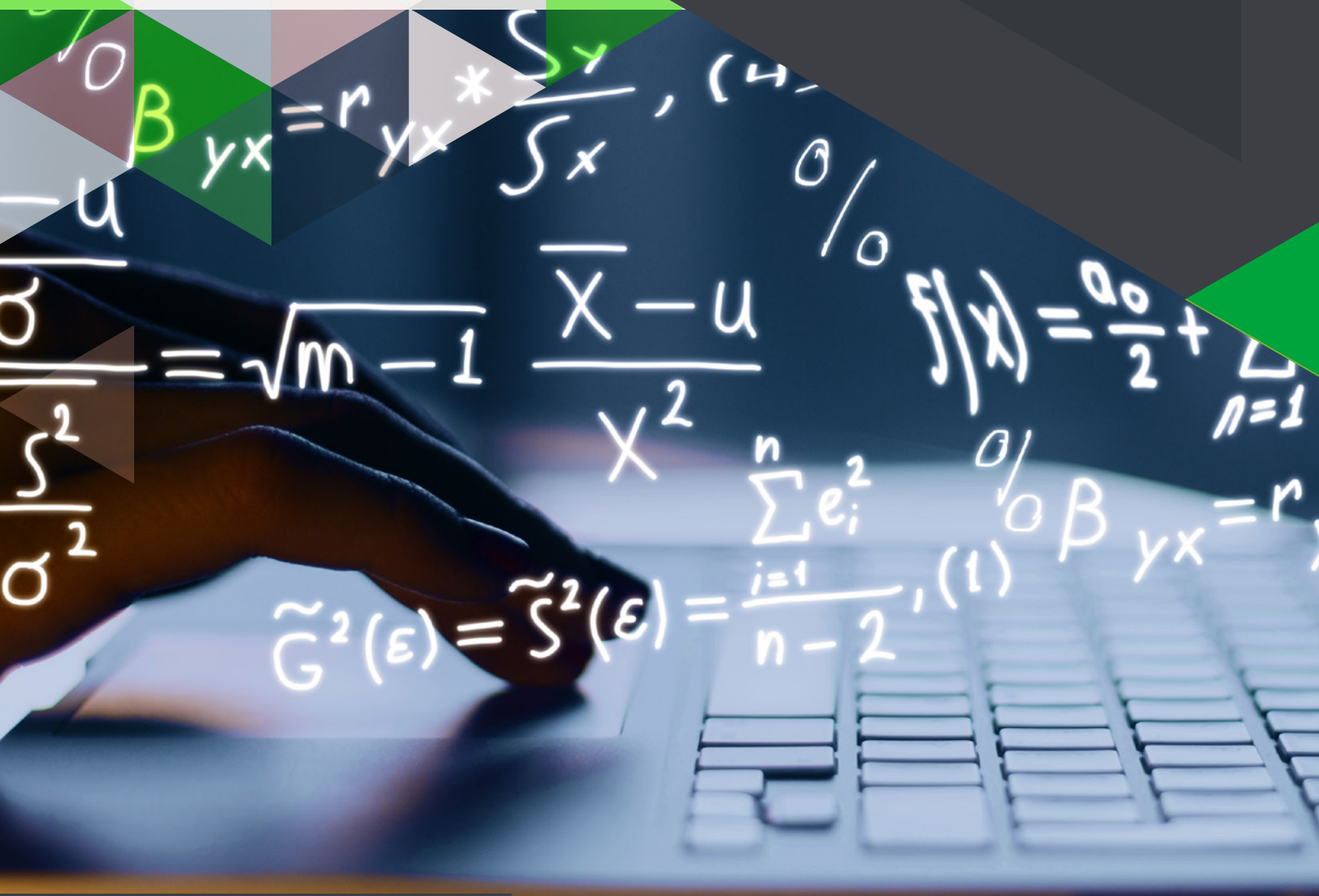
Vasco, C. (s.f). *El pensamiento variacional y la modelación matemática*. Colombia: Universidad del Valle, Universidad de Manizales.

MATEMÁTICAS

Sandra Peña Alonso

EJE 4

Propongamos



Fuente: shutterstock_512627680

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina
MIEMBRO DE LA RED ILUMNO

INTRODUCCIÓN

En este eje de pensamiento se pretende dar respuesta a la pregunta ¿Cuáles son los saberes que como profesional de la *Fundación Universitaria del Área Andina debo fortalecer para ser un ciudadano matemáticamente competente?* Las competencias son un enfoque de evaluación del aprendizaje, el desempeño laboral y del desarrollo de las capacidades, con gran auge y aceptación en los contextos educativos y laborales.

Las empresas aplican pruebas de competencias para determinar habilidades, capacidades e indicadores de desempeño de sus aspirantes y colaboradores. Estas pruebas, generalmente están valoradas por la intención de un psicólogo o una psicóloga, quien valora actitudes, conocimientos, habilidades y aptitudes frente a una situación determinada.

En este eje se pretende familiarizarlos con los saberes: saber ser, saber hacer, saber saber, saber convivir, en el contexto de situaciones matemáticas, que de una parte favorecen el desarrollo del pensamiento matemático y de otro lado, fortalecen habilidades previamente adquiridas. En este orden, se requiere de actitud frente a las tareas propuestas, dado que varias están orientadas al descubrimiento, al análisis y a la argumentación mediada por juegos, trucos, herramientas web y otros recursos que tendrán la finalidad de acercarlos al razonamiento matemático.

¿Qué es el razonamiento cuantitativo?

Figura 1.
Fuente: shutterstock/307963430

El razonamiento cuantitativo es una competencia transversal que se supone presente en los planes de profesionalización vigentes. Esta entrada, nos debe indicar que la relación psicología y matemáticas está presente a donde quiera que vayamos. Esta competencia es valorada en las pruebas profesionales y en los niveles educativos de media y básica. De acuerdo a los planteamientos del Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación (ICFES, 2016) el razonamiento cuantitativo se corresponde, con los saberes que un ciudadano, en su cotidianidad pone en juego ante la resolución de situaciones problema. Esta primera mirada de las matemáticas, alude a unos saberes que transversalizan y dinamizan la vida de las personas en su diario. Matemáticas que son útiles por su carácter práctico y en ocasiones por su uso no interiorizado o reconocido como un conocimiento formal y validado.

Todos sabemos matemáticas, en ocasiones las usamos para hacer cuentas, materializar proyectos, organizar los gastos de la casa o para emprender un proceso de ahorro. Otras matemáticas, hacen presencia en nuestra cocina, cuando vamos a preparar un arroz, debemos saber estimar la cantidad de agua que se requiere, la cantidad de arroz, sal, tiempos de cocción entre otros saberes. Aun así, es probable que el arroz no quede bien preparado, no por no saber hacer el arroz, sino por desconocer esos conocimientos matemáticos, tan necesarios y útiles en la vida diaria.

Figura 2.
Fuente: shutterstock/613330520

En el módulo del ICFES (2016), se define "razonamiento cuantitativo como un conjunto de elementos de las matemáticas, sean estos conocimientos o competencias, que permiten a un ciudadano tomar parte activa o informada en los contextos social, cultural, político, administrativo, económico, educativo y laboral". No escapamos a las matemáticas, estos conocimientos nos acompañan en nuestra vida diaria y nos conducen a tomar decisiones más fiables. Nos encontramos con las matemáticas en las noticias, en el periódico, en una programación cultural, en la vida laboral, en la organización y vida familiar, es decir que el vínculo con esta disciplina es más cercano de lo que comúnmente se cree.

¡Recordemos que!

Las matemáticas se configuran como una articulación de saberes, que favorecen el desarrollo científico, humano y tecnológico en una sociedad. Actualmente, mediante la aplicación experta de métodos, desarrollo de modelos, elaboración de software, captura y tratamiento de datos etc. se están generando soluciones prácticas a problemas que requieren del uso y apropiación de herramientas y técnicas matemáticas.

Dicho lo anterior, en esta idea de articulación se propone un enlace o entrelazamiento entre los saberes matemáticos que se enseñan en la escuela y los saberes de las matemáticas aplicados a la solución de problemas prácticos, algunos situados en el contexto de las ciencias, en el entorno mismo y en la aplicación de la tecnología.

¡Datos!

El razonamiento cuantitativo según lo propone el ICFES, se compone a su vez de tres subcompetencias que se valoran en las pruebas de estado. Estas tres competencias articuladas, permiten la generación de un saber matemático que contextualiza escenarios de las ciencias, de la cotidianidad y otras, propias de este conocimiento.

Para profundizar en el razonamiento cuantitativo lo invitamos a realizar la lectura complementaria.

¡Lectura complementaria!

Módulo de razonamiento cuantitativo.

Ministerio de Educación Nacional – Saber Pro 2016-2

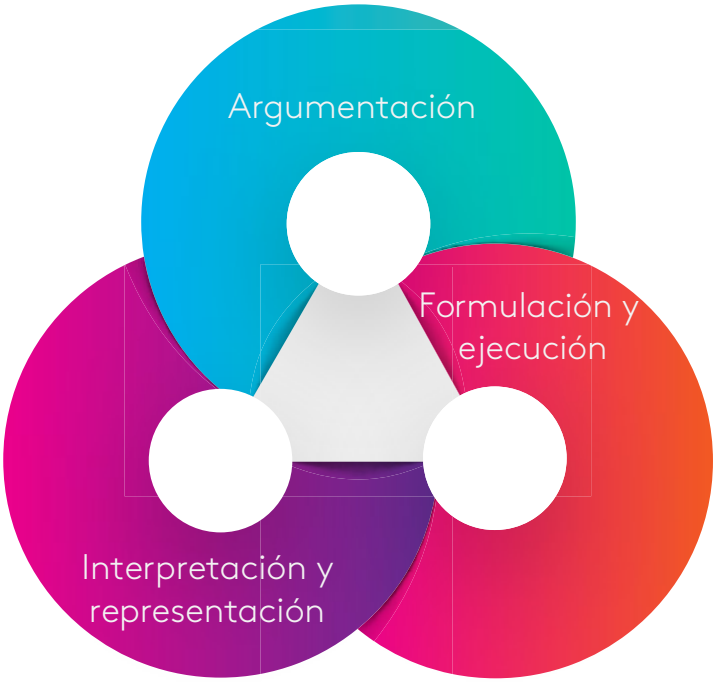


Figura 3 Competencias de razonamiento cuantitativo
Fuente: propia

Interpretación y representación

La interpretación que se espera podamos realizar, responde a diferentes formas de comunicar datos. Datos que están presentes en los problemas, tanto los que se expresan de forma explícita como los que hay que deducir a partir de la información abordada. Datos en enunciados, noticias, gráficos, informes estadísticos, infogramas, archivos de Excel, tablas, por mencionar algunos textos en donde se ubican los mismos.

Ejemplo

Para ilustrar un ejemplo, la figura siguiente corresponde a una pieza gráfica de un infograma presentado en el periódico El Tiempo.

Infografía disponible

http://www.eltiempo.com/datos/donde-estan-los-billetes-que-ya-no-usamos-69514

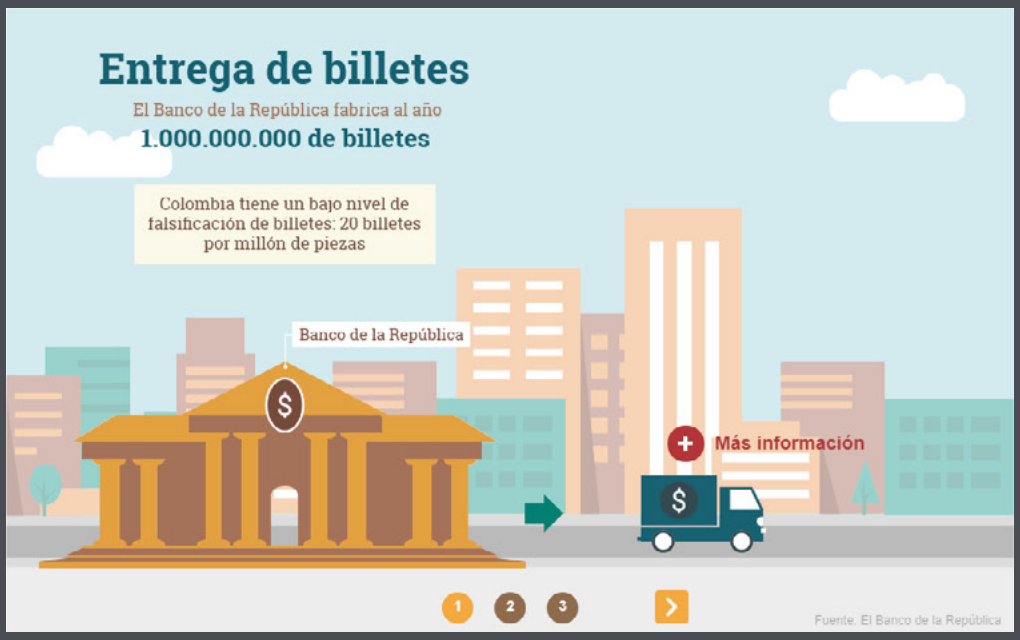


Figura 4. Informa ¿Dónde están los billetes que ya no usamos
Fuente: goo.gl/t2LbmM

Son muchos los datos y clases de los mismos que tenemos en un infograma. Allí encontraremos datos en gráficos, datos que representan frecuencias relativas y porcentuales, datos expresados en cantidades continuas y discretas, datos que caracterizan una o más variables y datos que nos informan e inducen a tomar decisiones o a asumir un punto de vista frente a la información que presenta.

Y habiendo reconocido los datos, *¿Qué se espera que se haga con ellos?* El tema en apariencia es sencillo, el asunto no es complicado cuando se sabe cuáles son los datos y para qué serán usados, lo interesante de esta competencia se encuentra en la transición del dato a su representación, es decir después de extraer, escudriñar, identificar, la información cualitativa o cuantitativa, ¿Qué proceso sigue?

¡Recordemos que!

Los datos como ya lo hemos mencionado, pueden ser expresados en diferentes contextos, por ejemplo, pueden ser presentados en situaciones de conteo; en otras ocasiones se busca que los datos nos sirvan para comparar dos magnitudes, para modelar el comportamiento de una variable o simplemente para caracterizar un fenómeno. Así los datos pueden presentarse en contextos de medida, conteo, estudios de probabilidades, procesos de modelación por mencionar algunos aspectos a considerar.

En este orden debe existir una relación entre los siguientes elementos a la hora de interpretar un grupo de datos o en su conjunto una situación que provee datos.

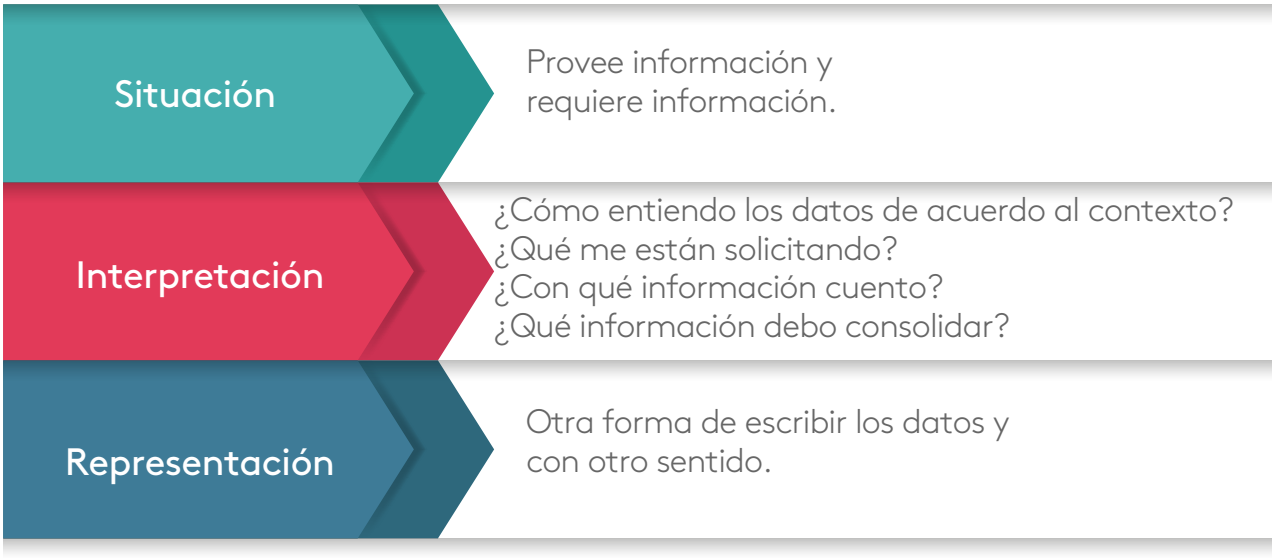


Figura 5. Interpretación y representación de información (datos)
Fuente: propia

De otro modo cuando nos piden interpretar y representar información, nos están solicitando en últimas que demos cuenta de las características básicas de la misma, independientemente del tipo de texto y contexto en el que se nos entregue. A la vez esta información se traduce en insumo para la siguiente competencia que se relaciona con el razonamiento cuantitativo.

Formulación y ejecución

Se espera que a partir de la información logremos generar no una sino varias soluciones de apropiación de la misma. El razonamiento cuantitativo se vinculó en ocasiones con más datos de orden cuantitativo, situación que no desconoce los atributos de algunos fenómenos en el campo de las matemáticas.

Ejemplo: en la siguiente situación se propone una serie numérica.

Juguemos con los números

Instrucción

Completa la serie y explica el patrón numérico

1x1=

11x11=

111x111=

1111x1111=

11111x11111=

¿Es posible expresar el patrón anterior como una potencia? ¿Qué sucede si se suprime la tercera línea de la serie? Justifica y explica matemáticamente.

Así, para solucionar situaciones como la anterior, y otras de mayor complejidad, se espera que tracemos varios caminos para llegar a una solución involucrando información cuantitativa y esquemática. A la vez, no es suficiente con el diseño de un plan de intervención frente a la situación, sino que debemos poner en práctica nuestro diseño para ser validado en la aplicación; de esta manera sabremos qué lógica tiene dicho procedimiento y si es consistente con la situación planteada. Finalmente, lo que se espera es que lleguemos a una solución viable y consistente.

La tercera competencia es la de argumentación, la intención con relación al razonamiento cuantitativo es que tengamos la capacidad de validar o refutar procedimientos, estrategias, soluciones planteadas ante una situación.

La situación se presenta en un texto informativo lineal. De esta, se pueden derivar varias situaciones matemáticas, por ejemplo:

Ejemplo

"En noviembre de 2012 se produjo la caída de la firma comisionista de bolsa más grande del país, como consecuencia del no pago de un crédito de 20 mil millones de pesos al Banco BBVA que obligó a la intervención y posterior liquidación de Interbolsa por parte de la Superintendencia Financiera.

El descalabro de la firma, con un portafolio de 174 millones de dólares, es quizás el más sonado de los últimos años, una historia de corrupción que defraudó a 1.260 inversionistas colombianos y en pérdidas que alcanzan el billón de pesos" Disponible en http://www.elcolombiano.com/negocios/economia/los-cinco-escandalos-financieros-mas-polemicos-de-colombia-BA2839542.

a. ¿Es correcto afirmar que 174 millones de dólares equivale exactamente en pesos a 509.927.593.644,49? SI_____ NO_____ ¿Por qué?

Evidentemente, para contestar a esta pregunta debemos estar de acuerdo o no con la afirmación que se está realizando. Por ende, se espera que procedamos a realizar una conversión de dólares a pesos para establecer si el valor entregado se ajusta a la situación o si por el contrario la presenta como errónea. En este caso, el procedimiento utilizado para resolver dicha situación tiene la intención de ser un camino para la elaboración de una explicación acorde al contexto, en caso de que el camino resulte efectivo contestaremos afirmativamente, validando así la solución que nos proponen, pero el ejercicio no finaliza allí, es necesario generar argumentos, razones o explicaciones que den cuenta del por qué esa es la solución y no otra.

En este sencillo modelo hemos tratado de presentar lo que en primera instancia se espera que hagamos frente a esta competencia. Otra forma de argumentación se elabora a partir de la siguiente situación:

Instrucción

Descifrar datos

Juan nació en MCMLXXXIII. A los V años ingresó a realizar su grado I, cuando cumplió XII años culminó su educación primaria. V años después recibió su titulación como bachiller, luego, un lustro y un año después estaba terminando su carrera. ¿En qué año finalizó su profesión Juan?

a. En el año MMVII

b. En el año MMVI

c. En el año MMIX

d. En el año MMX

¿Cuál de las opciones es válida para la situación? Explica con el paso a paso de la misma.

Ahora vamos a razonar mientras damos respuesta a algunos cuestionamientos.

a. ¿Qué hace que un triángulo equilátero sea equilátero y no isósceles? Busca al menos cinco argumentos para dar respuesta a nuestra pregunta.

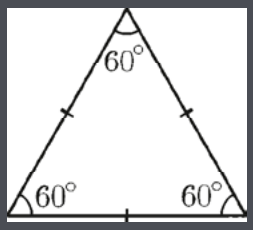


Figura.6
Fuente: propia

b. ¿Cómo determinar números primos menores que 100 sin utilizar la criba de Eratóstenes? Lista el paso a paso, luego aplica y revisa si el procedimiento es válido o se deben realizar ajustes.

c. Se proyecta que el valor del transporte público en Colombia tenga el siguiente comportamiento en ciudades capitales. Al año 2030, ¿Cuál será el comportamiento del precio del transporte en cada ciudad?

Año	Aumento	Bogotá $2200	Medellín $2000	Barranquilla $1900	Pasto $1850
2018	1.2%				
2020	0.7%				
2022	1.4%				
2024	0.5%				
2026	1.6%				

Tabla 1.
Fuente: propia

Instrucción

Elabora un argumento a favor del sistema de movilidad capital, que justifique el precio de transporte para todos los ciudadanos independientemente de los ingresos que tengan.

d. ¿Falso o verdadero? ¿Lo uno sí, lo otro no?

El éxito académico de los estudiantes de la Universidad depende del buen funcionamiento de la plataforma Canvas. Elabora un conjunto de argumentos sencillos para justificar la respuesta frente al supuesto anterior.

Formas de razonamiento en matemáticas

Razonamiento abstracto

Capacidad para resolver problemas de manera lógica. Un razonamiento implica el reconocimiento de un patrón de comportamiento en la situación planteada. Por ejemplo:

Ejemplo

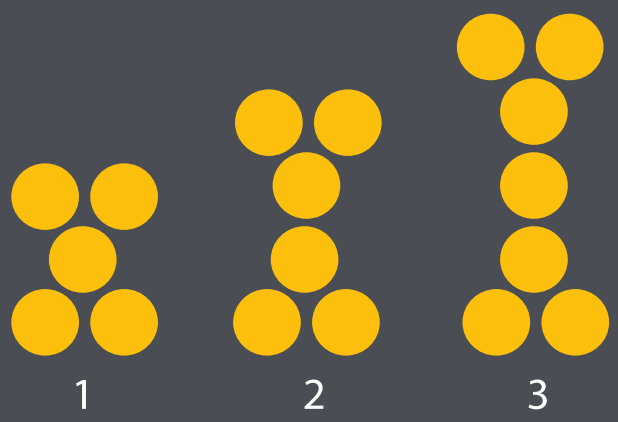


Figura 7
Fuente: propia

Ejemplo

Esta serie numérica y geométrica establece una relación numérica al involucrar operaciones y relaciones entre las cantidades 5, 6, 7...

2+1+2

2+1+1+2

2+1+1+1+2

A nivel geométrico también presenta unas variaciones en la distribución del espacio. Cuando se presenta un patrón con formas y colores se determinan claves para establecer otros razonamientos.

Otro ejemplo:

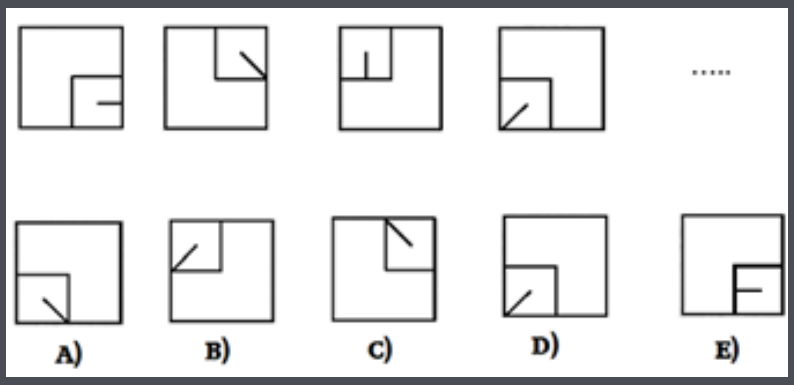


Figura 8
Fuente: Googleimages.com

Razonamiento deductivo

¿Hemos jugado alguna vez a desarrollar el rompecabezas denominado Sudoku? En este juego se aplican varias reglas del razonamiento lógico.

	2			9	3		1	8
	1			7		6		
7	4				6			2
								7
8		2			1	5	4	9
4		3	5	8				
6			9				2	
						8		
	3	7		2	8			5

Figura 8
Fuente: Googleimages.com

Observa que en el arreglo numérico encontramos relaciones numéricas y geométricas. El arreglo se compone de filas, columnas y diagonales. Cada caja está conformada por 3 filas y 3 columnas; en cada caso se muestran algunos números comprendidos entre 1 y 9, incluidos estos. El ejercicio consiste en llenar, organizar, escribir los números faltantes en cada cuadrado sin repetir número en filas y columnas. Un sudoku es un rompecabezas con una solución única.

El razonamiento deductivo se caracteriza porque permite elaborar una conclusión que se deriva de diferentes razonamientos. En este tipo de razonamiento se establece un conjunto de explicaciones, justificaciones, ensayos previos antes de derivar una conclusión que permita un argumento lógico sobre el patrón que explica el funcionamiento de este juego.

En matemáticas y de forma general no hay una única forma de hacer razonamientos, cada persona establece patrones de pensamiento totalmente diferentes. Sin embargo, el razonamiento que es un proceso mental, que guarda algunas reglas que le otorgan un sentido lógico a saber:

- ***Principio de identidad:*** algo es igual a sí mismo, todo objeto es igual a sí mismo se define como A es A.

- ***Principio de no contradicción:*** una afirmación no puede ser verdadera y falsa al mismo tiempo. Se puede decir cómo "Es imposible que A sea B y no sea B".

- ***Principio del tercero excluido:*** dada una situación una alternativa es falsa y la otra verdadera, no hay cabida para una tercera alternativa. Así, "Ser o no ser, esa es la cuestión" se define como "A es B" o "A no es B" "Hoy es viernes u hoy no es viernes".

Razonamiento inductivo

Este tipo de razonamiento es el que nos permite tomar decisiones de acuerdo a un conjunto de pistas que vamos recibiendo del entorno, parte de elementos particulares para establecer generalidades en un comportamiento. Por ejemplo, si amanece oscuro, con algunos indicios de lluvia, hace mucho frío no es difícil deducir que probablemente llueva, por tanto, el uso de paraguas es una buena alternativa para evitar situaciones que no queremos o que ponen en riesgo la salud. Este tipo de razonamiento es un compañero habitual, no somos conscientes del mismo por su naturalidad. Sin embargo, este tipo de razonamiento en matemáticas puede adquirir un carácter formal cuando se entiende que se compone de un conjunto de premisas verdaderas para establecer una conclusión falsa.

Figura. 10
Fuente: shutterstock_495494197

Razonamiento verbal

Se entiende como el conjunto de reglas que favorecen la actividad mental al procesar información verbal, simbólica, icónica para establecer procesos de clasificación, organización, relación y dotación de significados. Ejemplo, si pasamos del código verbal al escrito nos encontramos con juegos de palabras como el siguiente.

Psicología y matemática

Psicología y matemática

F	R	A	Z	O	N	A	M	I	E	N	T	O	E	U	F
R	F	R	E	U	D	W	C	N	J	K	B	S	O	N	O
A	V	P	J	R	G	E	L	R	B	E	I	E	R	S	D
C	K	S	C	A	N	T	I	D	A	D	D	C	A	L	E
C	Z	C	H	Í	M	Y	N	U	B	M	E	U	U	Z	N
I	A	O	D	Z	U	B	N	U	T	K	A	E	X	Z	M
Ó	E	L	I	A	N	Ú	M	E	R	O	X	N	K	Y	R
N	A	O	S	I	U	U	E	R	Q	J	D	C	Q	P	B
Y	V	G	E	H	G	X	U	O	A	B	G	I	X	A	A
R	H	Í	R	N	J	E	P	A	Y	R	R	A	A	T	V
X	I	A	I	S	L	V	Q	U	I	M	U	I	Y	R	D
P	O	T	E	N	C	I	A	L	Q	L	E	T	A	Ó	C
C	O	M	P	O	R	T	A	M	I	E	N	T	O	N	Y
P	E	N	S	A	M	I	E	N	T	O	I	S	B	M	U
M	E	M	O	R	I	A	O	W	G	N	R	E	F	M	Z
Y	E	W	C	E	R	E	B	R	O	Z	I	U	W	I	Q

Freud	Idea	Cerebro	Secuencia
Raíz	Serie	Fracción	
Pscología	Número	Potencia	
Pensamiento	Patrón	Razonamiento	
Memoria	Comportamiento	Cantidad	

Figura 11. Relación simbólica, psicología y matemáticas
Fuente: propia

Razonamiento numérico

Este tipo de razonamiento guarda una estrecha relación con el razonamiento verbal, dado que se compone de un conjunto procesos y relaciones entre datos, información, símbolos, gráficos y otros elementos lingüísticos que es preciso identificar, relacionar, interpretar para resolver cualquier situación. Pueda que seamos buenos en el manejo de los números y sus cálculos, pero si no manejamos la información en contextos de uso y aplicación este tipo de razonamiento no se considera lógico.

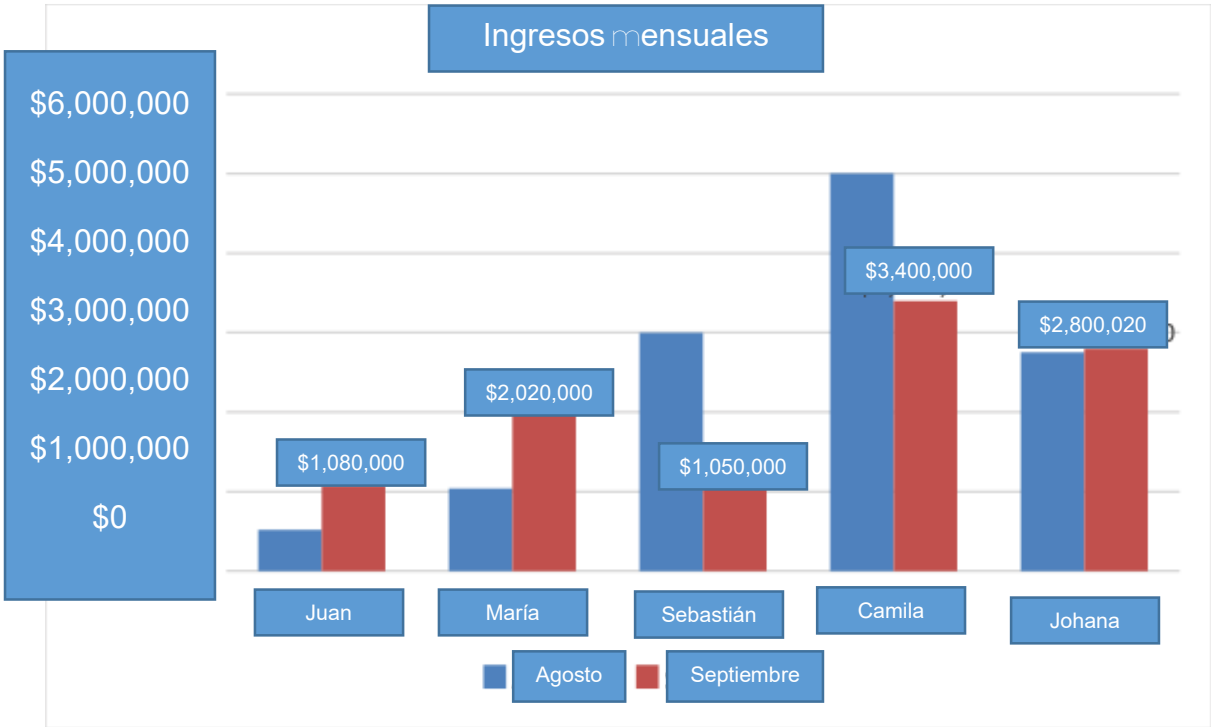


Figura 12. Un texto en matemáticas para el razonamiento
Fuente: propia

Del gráfico anterior podríamos formular algunos interrogantes, por mencionar:

- ¿En cuánto disminuyó el porcentaje de ingresos de Camilo en el mes de septiembre?
- ¿Cuánto más ganó Sebastián con relación a Juan?
- ¿Cuál es la diferencia en porcentaje de los ingresos de chicos con relación a las chicas?
- ¿Se puede determinar una regularidad en el comportamiento de los ingresos de las personas señaladas?

Figura. 13
Fuente: shutterstock_157594730

¿Qué es la argumentación matemática?

De acuerdo con Gamboa, Planas y Edo (2010) este tipo de argumentación refiere a la elaboración de un discurso orientado hacia un receptor con la finalidad de justificar hechos o datos. No puede haber argumentación sin la elaboración de justificaciones y explicaciones.

Así, las explicaciones se consideran unidades iniciales que dan origen a los argumentos. De estas se derivan características de las razones que darán paso a la argumentación. Una explicación deriva en razones y estas a su vez en argumentos. En este tránsito son las conclusiones las formas de validar o negar las razones previamente elaboradas.

Entonces en el camino hacia la argumentación en matemáticas hemos de recorrer varios caminos.

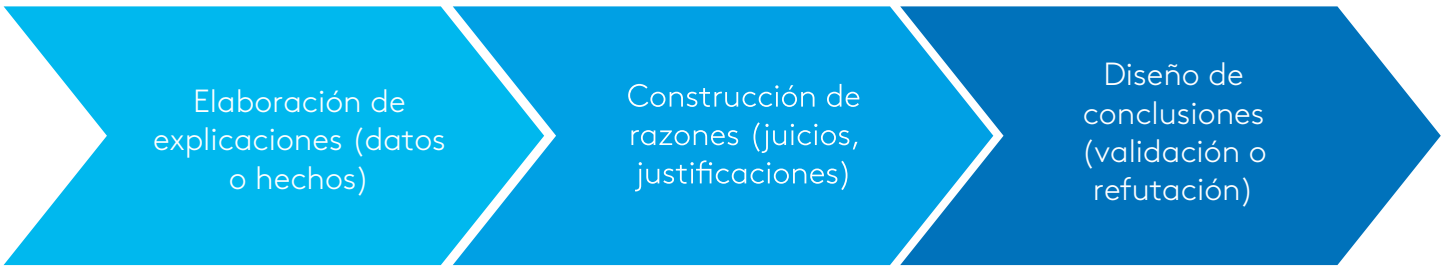


Figura 14. Proceso de argumentación
Fuente: propia

Instrucción

Para contextualizar lo anterior se propone un ejercicio de indagación de algunas teorías que han servido en algún momento histórico para explicar diferentes fenómenos. La invitación es a revisar en detalle cada apartado, los autores y buscar la información necesaria para completar la tabla siguiente.

Teoría	Principales hipótesis	Hechos	Justificación	Conclusión
Teoría fisicoquímica				
Teoría de los campos mórficos Rupert Shaldrake				
Teoría de la endosimbiosis Lynn Margullis				
Teoría cuántica de David Joseph Bohm				
Teoría Gaia de James Lovelock				
Teoría de las Ecovisiones de Fritjof Capra				

Figura 14. Proceso de argumentación
Fuente: propia

La argumentación en matemáticas nos convoca a la modelación

En el documento de Lineamientos Curriculares de Matemáticas del Ministerio de Educación Nacional (1998), se entiende la modelación como un proceso de pensamiento que se relaciona con otros procesos (resolución de problemas, comunicación, razonamiento etc.) los cuales no actúan de manera independiente en el planteamiento y resolución de problemas reales, sino que se relacionan para la elaboración de juicios, soluciones, ideas, representaciones y estrategias de diferente índole, siendo la elaboración de modelos una forma de hacer concreto lo abstracto de una realidad particular o global.

Como se expresó previamente la modelación es un proceso de pensamiento que se articula con la comunicación y la resolución de problemas. La actuación relacionada de estos tres procesos de pensamiento hará que el estudiante, beneficiario de esta propuesta participe desde una perspectiva que descentraliza los contenidos para ubicarlos en la periferia de intereses pedagógicos y pone en su lugar la relación entre comunicación, modelación y resolución de problemas (Ver relación en gráfico siguiente); siendo la modelación un eje transversal de todo el proceso de formación. Así, la comunicación viene a potenciar las habilidades básicas para expresar de forma oral y escrita las ideas matemáticas, comunicar lo aprendido, comprendido significado, y a la vez aportar al fortalecimiento del lenguaje propio de las ciencias mediante el uso y vinculación de términos técnicos.

Figura 15. Competencias matemáticas articuladas
Fuente: propia

Ahora, los invito a revisar el siguiente enunciado:

Piensa un número, multiplí-calo por 5, súmale uno, multiplica el resultado por 2, divide el resultado entre 10 y resta el número inicial

Figura 16.
Fuente: propia

De acuerdo a la situación una forma de representar correctamente el enunciado en lenguaje matemático es:

a. $\{\frac{[(5x \quad 1)+2]}{10-x} - x$
b. $\{\frac{[(5x \ +1]}{10}\} - x$
c. $\{\frac{[2(5x \quad 1)]}{10}\} - x$

Ahora responde, ¿Qué hace que ese truco funcione para varios números? Ela-bora al menos tres explicaciones.

¿Con qué números el truco no funciona?

Ahora revisemos el siguiente caso:

Si se realiza el ejercicio con los

Números 1, -1, 2, 2.5, -2

¿Qué variaciones se obtienen en el resultado?

Explica el funcionamiento de este truco.

Piensa un número, súmale 3, multiplica el resultado por 2, resta de la cantidad anterior 8 y divide entre 2.

Figura 17.
Fuente: propia

Otros razonamientos con objetos imposibles

Los objetos imposibles proponen desafíos al razonamiento. Se consideran imposibles en la medida que no pueden ser reproducidos más allá de los esquemas gráficos, escapan a las formas de racionalidad tradicionales. Estos objetos pueden tener varias perspectivas, pero ninguna de las dos es correcta.

Observa detenida y detalladamente cada imagen, luego responde:

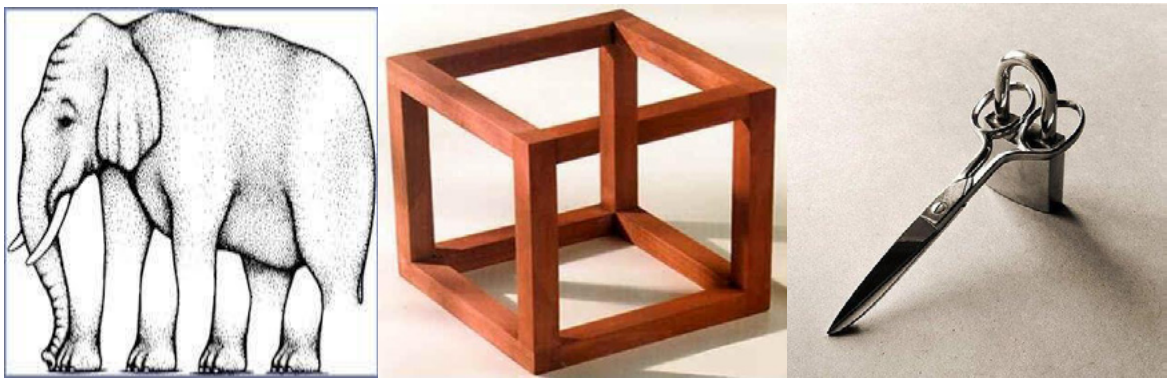


Figura 18. Figuras imposibles
Fuente: propia

- ¿Qué tienen en común las imágenes?
- ¿Qué representan o explican las imágenes?
- ¿Las imágenes que se presentan corresponden con elementos del entorno?
- ¿Pueden proponer una imagen similar?

Ahora bien, otros elementos que favorecen el razonamiento en matemáticas son las paradojas. Las paradojas se sustentan en las contradicciones, son otras formas de lo absurdo. Lee en detalle la siguiente figura, ¿Qué es una paradoja entonces? ¿Cómo se razona este tipo de imágenes?

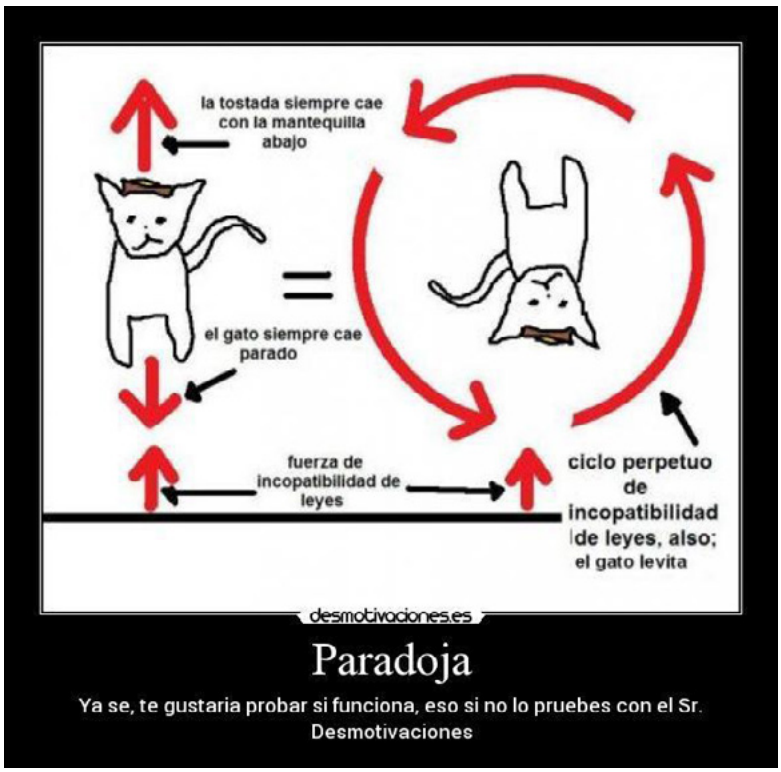
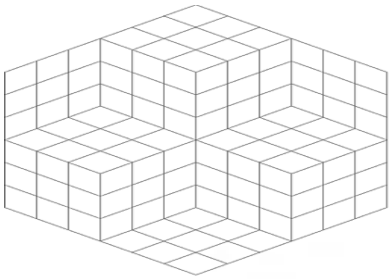


Figura 19. La paradoja del gato
Fuente: www.googleimages.com

Ahora probemos creando con color una paradoja visual con cada diseño dado.

Diseño A.



Diseño B.

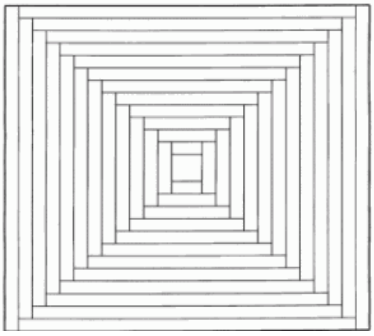


Figura 20.
Fuente: Propia

Para concluir este módulo, queda abierto no sólo a la imaginación sino a las otras formas de razonamiento que puede elaborar un estudiante durante su formación. Se reitera que la argumentación como proceso de pensamiento se consolida durante la vida, este es un espacio para hacer apertura a esta forma de pensar.

Antes de pasar a la evaluación queremos invitarlo a observar lo siguientes vídeos:

Video

- Las matemáticas son para siempre

  TEDx

- Me gustan los problemas

  TEDx

- Konigsberg Bridge Problem

  Emathame

- ¿Acabó Pericles con la peste de Atenas usando matemáticas?

  Castellano, G

Instrucción

Para finalizar los invitamos a realizar la actividad evaluativa de este eje.

BIBLIOGRAFÍA

ICFES. (2016). Aprende en línea UDEA. Recuperado de http://aprendeenlinea.udea.edu.co/lms/moodle/mod/resource/view.php?id=107694

De Gamboa, G., Edo, M. y Planas R. (2010). Argumentación matemática: Prácticas escritas e interpretaciones. *Suma. 64*, pp. 35-44.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). Colombia Aprende. Recuperado de: http://normaldemompox.tripod.com/documentos/lineamientos_matematicas.pdf

Esta obra se terminó de editar en el mes de Septiembre 2018
Tipografá BrownStd Light, 12 puntos
Bogotá D.C,-Colombia.

AREANDINA

Fundación Universitaria del Área Andina

MIEMBRO DE LA RED

ILUMNO