Álgebra Lineal

Autor: Alexander Moreno Quiroga

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina

MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Álgebra Lineal / Alexander Moreno Quiroga, / Bogotá D.C.,
Fundación Universitaria del Área Andina. 2017

978-958-5460-43-0

Catalogación en la fuente Fundación Universitaria del Área Andina (Bogotá).

Edición:
Fondo editorial Areandino
Fundación Universitaria del Área Andina
Calle 71 11-14, Bogotá D.C., Colombia
Tel.: (57-1) 7 42 19 64 ext. 1228
E-mail: publicaciones@areandina.edu.co
http://www.areandina.edu.co

Primera edición: noviembre de 2017

Corrección de estilo, diagramación y edición: Dirección Nacional de Operaciones virtuales
Diseño y compilación electrónica: Dirección Nacional de Investigación

Hecho en Colombia
Made in Colombia

Álgebra Lineal

Autor: Alexander Moreno Quiroga

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina
MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Índice

Índice

1

Unidad 1

Sistemas de ecuaciones lineales

Álgebra lineal

Autor: Alexander Moreno Quiroga

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina
MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Introducción

El problema central del álgebra lineal es básicamente "los sistemas de ecuaciones lineales" ya que las definiciones formales de dicha área de los núcleos temáticos denominados independencia y dependencia lineal, necesitan fundamentalmente de la formulación y resolución de sistemas de ecuaciones lineales, además su aplicación en las distintas carreras tales como las ingenierías, las ciencias básicas, la arquitectura, etc.

De esta manera, el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales es supremamente importante en la en el proceso de formación de los y las estudiantes. Inclusive, desde la educación media académica, los sistemas de ecuaciones lineales forman parte del plan de estudios.

Recomendaciones metodológicas

La cartilla inicia con un reconocimiento de los sistemas de ecuaciones lineales teniendo en cuenta su definición y su notación, es importante reconocer estos dos aspectos ya que son la base para el correcto manejo de los temas del curso, así que se recomienda realizar una correcta lectura de la teoría y de los ejemplos , posteriormente se muestra la clasificación de los sistemas de ecuaciones lineales se sugiere que el estudiante ahonde en esta temática y consulte ejemplos en la bibliografía sugerida, al final se presentan ejemplos del método de Gauss cada uno de los cuales arroja diferentes clases y formas de manejo.

Desarrollo temático

Sistemas de ecuaciones lineales

Se llamará **sistema de ecuaciones lineales** de m ecuaciones con n incógnitas a un conjunto de m ecuaciones de la forma:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + a_{1,4}x_4 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + a_{2,4}x_4 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + a_{m,3}x_3 + a_{m,4}x_4 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}$$

Siendo $a_{i,j}$ y b_i Números Reales y $x_1, x_2, x_3 \ldots . x_n$ las incógnitas a calcular.
Dos ejemplos de estos sistemas pueden ser:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 7 \\ 5x_1 + 8x_2 + 7x_3 = -3 \\ -4x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 4y - 5z = -4 \\ -3x - 5y + 7z = 4 \\ 8x + 7y + 3z = 8 \end{cases}$$

La notación en ambos casos es válida, y se puede realizar la sustitución de las variables del primer caso al segundo para mayor comodidad.

Es posible que en cualquier sistema de ecuaciones lineales ocurra que:

i. $m > n$ mayor número de ecuaciones que incógnitas.
ii. $m = n$ igual número de ecuaciones que incógnitas.
iii. $m < n$ menor número de ecuaciones que incógnitas.

Solución de un sistema de ecuaciones

Se llamará solución del sistema a toda n- tupla $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots . \alpha_n$ tal que al sustituir $x_1$por α_1, $x_2$por α_2, …, $x_n$por α_n, en todas las ecuaciones del sistema se obtienen identidades.

Ejemplos

$$\begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ 3x + y = 7 \end{cases}$$

Admite como solución los valores $x = 2$, $y = 1$ porque al sustituir estos valores en las ecuaciones.

$$\begin{cases} 2(2) - 3(1) = 3 \\ 3(2) + 1 = 7 \end{cases}$$

Lo cual claramente muestra que las igualdades se cumplen.

Ejemplo

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 2x - 3y + 5z = 2 \end{cases}$$

Admite como soluciones cualquier terna que cumpla $x = 1 - 3z$, $y = -\frac{z}{3}$ y z

Clasificación de los sistemas de ecuaciones lineales

i) Según los términos independientes.

$$Sistemas \begin{cases} Homogéneos\ (Todos\ los\ términos\ independientes\ son\ nulos) \\ Heterogéneos\ (Algún\ término\ independiente\ es\ no\ nulo) \end{cases}$$

ii) Según sus soluciones.

$$Sistemas \begin{cases} Compatibles \begin{cases} Determinados\ (Unica\ solución) \\ Indeterminados\ (Infinitas\ soluciones) \end{cases} \\ Incompatibles\ (\ No\ tiene\ solución\ alguna) \end{cases}$$

Sistemas de ecuaciones lineales equivalentes

Dos o más sistemas de ecuaciones lineales son equivalentes siempre que tengan el mismo conjunto solución.

Ejemplo

Los sistemas:

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ 3x+2y+2z=7 \\ 2x-y+z=2 \end{cases} \text{ y } \begin{cases} x+y+z=3 \\ 4x+2y-z=5 \\ 2x-y+z=2 \end{cases}$$

Son equivalentes ya que la terna $(1,1,1)$satisface ambas soluciones.

Transformaciones de equivalencia

Las siguientes transformaciones realizadas en cualquier sistema lo convierten en otro equivalente:

a) Cambiar el orden de las ecuaciones.
b) Multiplicar cualquier ecuación por un número real no nulo.
c) Sustituir una ecuación por una combinación lineal de ella misma con las demás siempre que el coeficiente por el que multipliquemos la ecuación sustituida sea no nulo.
d) Eliminar una ecuación que sea combinación lineal de las demás.

Método de Gauss

Las transformaciones de equivalencia, nos permitirán deducir cuándo un sistema es compatible, y si lo es, determinar sus soluciones con el uso de las transformaciones anteriores se obtendrá un sistema equivalente al inicial que cumpla:

a) En la primera ecuación aparece al menos la primera incógnita.
b) En la segunda ecuación no se encuentra la primera incógnita.
c) En la tercera ecuación no se encuentra ni la primera, ni la segunda incógnita.
d) En la cuarta ecuación no aparece la primera incógnita, ni la segunda, ni tampoco la tercera.

A este proceso se le denomina triangularizar el sistema, lo cual permite obtener:

I) Un sistema con el mismo número de ecuaciones que incógnitas llamado “sistema compatible determinado”.
II) En alguna ecuación algún absurdo denominado “sistema incompatible”.
III) Un sistema con menor número de ecuaciones que incógnitas denominado “sistema compatible indeterminado”.

Este procedimiento recibe el nombre de método de reducción o de Gauss

Ejemplo
El sistema final tiene el mismo número de ecuaciones que incógnitas.

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1\ (i) \\ 2x + 3y - z = 2\ (ii) \\ 3x + y - 4z = 5\ (iii) \end{cases}$$

Se realizarán las siguientes transformaciones.

$$Segunda\ ecuacion\ nueva = ii - 2.i$$
$$Tercera\ ecuacion\ nueva = iii - 3i$$

Obteniendo el siguiente sistema.

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 7y - 7z = 0 \\ 7y - 13z = 2 \end{cases}$$

Restando a la tercera ecuación la segunda se encuentra.

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 7y - 7z = 0 \\ -6z = 2 \end{cases}$$

Es decir que $z = -\frac{1}{3}$ valor que se sustituye en la segunda ecuación y se obtiene $y = -\frac{1}{3}$ y despejando x en la primera ecuación se obtiene $x = \frac{4}{3}$ así la solución a este sistema es la terna $\left(\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

Ejemplo

El sistema final arroja un absurdo.

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1\ (i) \\ 2x + 3y - z = 2\ (ii) \\ 3x + y + 2z = 5\ (iii) \end{cases}$$

Se realizarán las siguientes transformaciones.

$$Segunda\ ecuacion\ nueva = ii - 2.i$$
$$Tercera\ ecuacion\ nueva = iii - 3i$$

Obteniendo el siguiente sistema.

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 7y - 7z = 0 \\ 7y - 7z = 2 \end{cases}$$

Restamos ii de iii se obtiene.

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 7y - 7z = 0 \\ 0 = 2 \end{cases}$$

En este momento el sistema se encuentra triangularizado y se ha llegado a un absurdo en la tercera ecuación por tal motivo se dice que el sistema es incompatible.

Ejemplo

El sistema final tiene menor número de ecuaciones que incógnitas.

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1\ (i) \\ 2x + 3y - z = 2\ (ii) \\ 3x + y + 2z = 3\ (iii) \end{cases}$$

Se realizarán las siguientes transformaciones.

$$Segunda\ ecuacion\ nueva = ii - 2.i$$
$$Tercera\ ecuacion\ nueva = iii - 3i$$

Obteniendo el siguiente sistema.

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 7y - 7z = 0 \\ 7y - 7z = 0 \end{cases}$$

Restamos ii de iii se obtiene.

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 7y - 7z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 7y - 7z = 0 \end{cases}$$

Luego de haber triangularizado el sistema se obtienen menos ecuaciones que incógnitas por tanto se dice que es incompatible determinado, para obtener una solución se divide la última ecuación por 7.

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

Posteriormente de la última ecuación se despeja y, y se obtiene $y = z$, valor que se reemplaza en la primera ecuación y asi se encuentra que el conjunto solución del sistema son todas las ternas que cumplan $(1 - z, z, z)$ con $z \epsilon \mathbb{R}$.

Ejemplo

Resolver el sistema:

$$\begin{cases} 4x - 2y + 3z + 2t = 1 \\ 2x + 3y - z - 3t = 2 \\ 3x + y - 4z + t = 1 \\ 3x + y - z = 2 \end{cases}$$

Podemos notar que ningún coeficiente de la primera incógnita es 1, por tal motivo se debe reorganizar las ecuaciones teniendo en cuenta tomar como pivote el coeficiente de la letra “y” de la tercera ecuación y ubicarla en la primera posición.

Así el sistema de ecuaciones reorganizado sería.

$$\begin{cases} y - 4z + t + 3x = 1 \ (i) \\ y - z + 3x = 2 \ (ii) \\ -2y - 3z + 2t + 4x = 1 \ (iii) \\ 3y - z - 3t + 2x = 2 \ (iv) \end{cases}$$

Este sistema genera la matriz.

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 3 & 2 \\ -2 & -3 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Inicialmente se realizarán las siguientes transformaciones.

$$Segunda\ ecuación\ nueva = ii - i$$
$$Tercera\ ecuación\ nueva = iii - 2.i$$
$$Cuarta\ ecuación\ nueva = iv - 3.i$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -11 & 4 & 10 & 3 \\ 0 & 11 & -6 & -7 & -1 \end{pmatrix}$$

Realizando el intercambio $ii \Leftrightarrow iii$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 11 & -6 & -7 & -1 \\ 0 & -11 & 4 & 10 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora se realizarán las siguientes transformaciones.

$$Tercera\ ecuación\ nueva = iii + ii$$
$$Cuarta\ ecuación\ nueva = 11.iv - 3.ii$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 11 & -6 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & 21 & 14 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 11 & -6 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Cuarta\ ecuación\ nueva = iv + 2.iii$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 11 & -6 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

$$dividiendo\ la\ ecuacion\ iv\ por\ 3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 11 & -6 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Así el sistema inicial arrojaría uno equivalente.

$$\begin{cases} y - 4z + t + 3x = 1\ (i) \\ 11z - 6t - 7x\ = 1\ (ii) \\ t + 3x = 2\ (iii) \\ 3x = 2\ (iv) \end{cases}$$

Por tanto el sistema es compatible determinado siendo su solución la terna. $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$

Ejemplo

$$\begin{cases} 3x - 2y = 0\ (i) \\ 2x + 2y = 1\ (ii) \\ 5x - 8y = -2\ (iii) \end{cases}$$

Tomamos la primera ecuación y le restamos la segunda.

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 5 & -8 & -2 \end{pmatrix}$$

$$Segunda\ ecuación\ nueva = ii - 2.i$$
$$tercera\ ecuación\ nueva = iii - 5.i$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 10 & 3 \\ 0 & 20 & 3 \end{pmatrix}$$

$$tercera\ ecuación\ nueva = iii - 2.ii$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 10 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

El sistema es incompatible.

Ejemplo

Determinar los valores de “a” en el sistema.

$$\begin{cases} x-2y-3z=0\ (i) \\ 2x+3y+(a+1)z=0\ (ii) \\ 3x+y+a.z=0\ (iii) \end{cases}$$

Se debe considerar la matriz.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & a+1 & 0 \\ 3 & 1 & a & 0 \end{pmatrix}$$

$$Segunda\ ecuación\ nueva = ii-2.i$$
$$tercera\ ecuación\ nueva = iii-3.i$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 7 & a+7 & 0 \\ 0 & 7 & a+9 & 0 \end{pmatrix}$$

$$tercera\ ecuación\ nueva = iii-ii$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 7 & a+7 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

El sistema inicial es compatible al sistema.

$$\begin{cases} x-2y-3z=0\ (i) \\ 7y+(a+7)z=0\ (ii) \\ 2z=0\ (iii) \end{cases}$$

Por tanto el sistema es compatible determinado y su solución es la terna trivial $(0,0,0)$.

Unidad 1

Matrices

Álgebra lineal

Autor: Alexander Moreno Quiroga

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina
MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Introducción

Mediante el estudio de esta unidad se pretende brindar al estudiante un espacio de reflexión y práctica en relación a los principios asociados a matrices de números reales. Está temática es de gran importancia en el estudio de diversos tópicos del álgebra lineal, rama de la matemática de amplia aplicación en diferentes campos del ámbito profesional. Abordamos el concepto y notación de matrices, las diferentes operaciones entre matrices, las propiedades de tales operaciones entre otros temas.

Recomendaciones metodológicas

Se hace un recorrido por el tema de las matrices, es recomendable que realice las lecturas con cuidado y que a su vez de forma autónoma trate de resolver los ejemplos propuestos teniendo en cuenta las definiciones, es importante que usted tenga claras las operaciones entre matrices y sus propiedades, analice los ejemplos y trate de plantearse algunos ejercicios en particular. Al final se presentan dos operaciones de suma importancia para el desarrollo del siguiente capítulo por tal motivo es necesario que se apropie de los conceptos.

Desarrollo temático

Matrices

Concepto y notación de matrices

En el campo de los números reales, una matriz es una distribución de números en filas y columnas. En general si el número de filas es m y el de columnas es n, se define una matriz de orden *m x n* como el siguiente arreglo rectangular:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Filas

Columnas

Imagen 1
Fuente: Propia.

En la terminología de matrices, para referirnos al elemento que se encuentra en la i-esima fila y la j-esima columna de una matriz *A*, se escribe a_{ij} y a la matriz misma como $[A]_{ij}$.

Siempre que se hace referencia al orden de la matriz, en la forma *m x n*, el primero de los números corresponde al número de filas y el segundo al número de columnas. Por ejemplo, una matriz de 3 filas y 4 columnas es de orden 3 x 4, mientras que una matriz de 2 filas y 5 columnas es de orden 2 x 5. Además de lo anterior, cuando se hace referencia a la notación a_{ij} o $[A]_{ij}$ el número i se refiere a la fila y j, a la columna.

Si una matriz tiene el mismo número *n* de filas y de columnas, se dice que la matriz es una matriz cuadrada de orden n x n, o simplemente de orden n.

Matriz fila y matriz columna: atendiendo al número de filas y columnas que puede tener una matriz, tenemos los siguientes casos especiales.

Matriz fila: es una matriz con una sola fila, se conoce también como vector fila, si la matriz tiene n elementos se dice que es una matriz de orden 1 x n, por ejemplo, la siguiente matriz:

$$A = [4\ 3\ \ -1\ 0\ 7\ ]$$

Es una matriz de orden 1 x 5.

Matriz columna: es una matriz con una columna, se conoce también como vector columna, si tal columna tiene m elementos se dice que es una matriz de orden *m x 1*, por ejemplo, la siguiente matriz es de orden 6 x 1.

$$A = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 5 \\ -\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Operaciones entre matrices o algebra de matrices

En el contexto del álgebra lineal, y particularmente el relacionado con el estudio de matrices y sus aplicaciones, son de gran importancia las operaciones que se pueden desarrollar con matrices, así como el conjunto de propiedades que cumplen tales operaciones. A continuación presentamos las operaciones que se pueden desarrollar con matrices de números reales.

Suma de matrices: dadas dos matrices $A = [A]_{ij}$ y $B = [B]_{ij}$, ambas de orden *m x n*, la suma $A + B$ corresponde a otra matriz, también de orden *m x n* definida de la siguiente forma:

$$A + B = [A + B]_{ij} = [A]_{ij} + [B]_{ij}$$

Es decir, el elemento que ocupa la posición $[i\,,j]$ en la matriz suma se obtiene sumando los respectivos elementos de las posiciones $[i\,,j]$ de las dos matrices.

Ejemplo

A continuación se presentan dos matrices de orden *3 x 3* y la respectiva suma:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 2 & 6 & 9 \\ 2 & -3 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \\ 5 & 8 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 6 & 9 & 7 \\ 7 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

Imagen 2
Fuente: Propia.

Producto de una matriz por un escalar: dada una matriz $A = [A]_{ij}$ y un número realα, el producto del escalar α por la matriz A, es la matriz definida de la siguiente forma:

$$\alpha A = [\alpha A]_{ij}$$

Es decir, los elementos del producto se obtienen multiplicando cada elemento de la matriz A por el escalarα.

Si $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ para $\alpha = 3$, $\alpha A = 3A = \begin{bmatrix} 15 & -3 \\ 6 & 12 \\ 12 & 9 \end{bmatrix}$

Ejemplo

Propiedades de la suma de matrices: es importante tener claridad sobre las propiedades que se pueden aplicar cuando desarrollamos operaciones relacionadas con la suma de matrices, el siguiente conjunto de propiedades se puede verificar con relativa facilidad y se presenta sin demostraciones.

Dadas las matrices $A, B, C,$ todas del mismo orden, se cumple lo siguiente:

a) $A + B = B + A$

b) $(A + B) + C = A + (B + C)$

c) $A + 0 = A$

d) $A + (-A) = 0$

e) $\propto (A + B) = \propto A + \propto B$

f) $(\propto + \beta)A = \alpha A + \beta A$

g) $(\propto \beta)A = \alpha(\beta A)$

Producto de un vector fila por un vector columna: realmente corresponde al producto de matrices *1 x n* y *n x 1*, es decir vectores fila y columna con el mismo número de elementos, como el ejemplo (a) de la siguiente figura. Se requiere la coincidencia entre el número de elementos porque el resultado se fundamenta en el cálculo del producto del i-^{esimo} elemento del vector fila por el i-^{esimo} elemento del vector columna. La figura (b) ilustra los elementos que se multiplican.

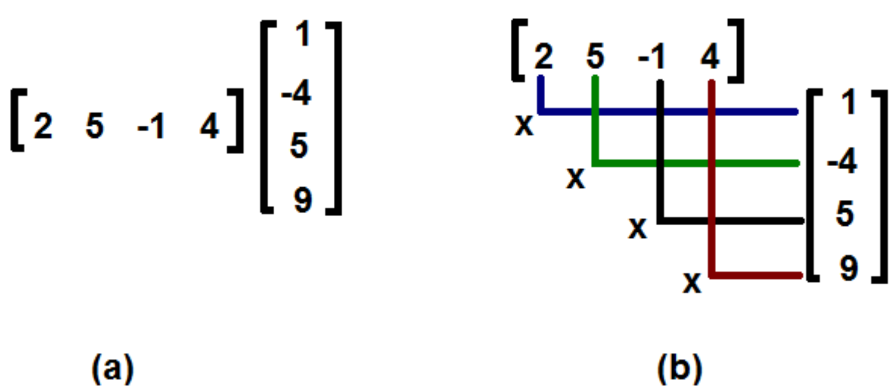


Imagen 3
Fuente: Propia.

El resultado de multiplicar los dos vectores corresponde a la suma de los productos señalados, es decir, si:

$$A = [a_1\ a_2 \ldots \ldots a_{i\ldots} \ldots\ a_n] \text{ y } B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_i \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{bmatrix}$$

El producto $A.B$ está dado por:

$$A.B = \sum_{i=1}^{m} a_i b_i$$

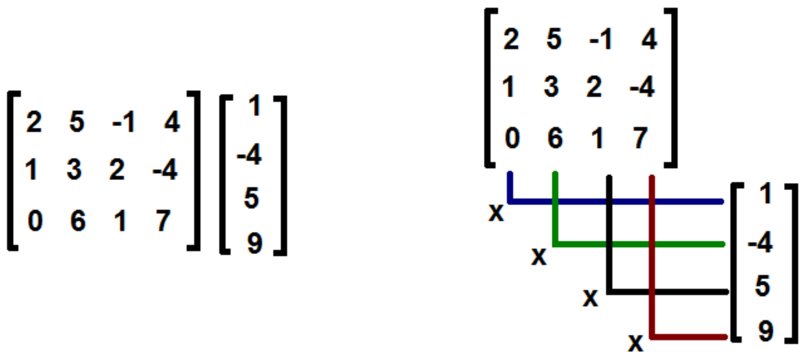
Resaltamos el hecho que este producto, en el contexto del producto de matrices, corresponde a un solo número.

Ejemplo

Para el caso de los vectores anteriores, el producto correspondiente es:

(2)(1) + (5)(-4) + (-1)(5) + (4)(9) = 2 – 20 – 5 + 36 = 13

Producto de matrices m x n y n x 1: el producto de una matriz por un vector columna, en este orden, requiere que el número de columnas de la matriz coincida con el número de filas o número de elementos del vector, condición que se cumple en el producto indicado en el siguiente ejemplo:



(a) (b)

Imagen 4
Fuente: Propia.

El resultado de este producto es un vector columna con una cantidad de elementos igual al número de filas de la matriz, además, el i-^{esimo} elemento del resultado corresponde al producto de la i-^{esima} fila de la matriz por el vector columna, es decir, el primer elemento se obtiene multiplicando la primera fila de la matriz por el vector columna, el segundo elemento se obtiene multiplicando la segunda fila por el vector columna y así sucesivamente. El producto de cada fila por el vector columna se realiza tal como se indicó en el apartado anterior. Formalmente se tiene que el producto de una matriz A por un vector columna B, está dado por:

$$A.B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \boxed{a_{i1}} & \boxed{a_{i2}} & \boxed{\cdots} & \boxed{a_{ij}} & \boxed{\cdots} & \boxed{a_{in}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_j \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_1 \\ \vdots \\ \boxed{r_i} \\ \vdots \\ r_m \end{bmatrix}$$

Imagen 5
Fuente: Propia.

Donde cada r_i se obtiene mediante:

$$r_i = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} b_j$$

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & -4 \\ 0 & 6 & 1 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} (2)(1) + (5)(-4) + (-1)(5) + (4)(9) & (1)(1) + (3)(-4) + (2)(5) + (-4)(9) & (0)(1) + (6)(-4) + (1)(5) + (7)(9) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 - 20 - 5 + 36 & 1 - 12 + 10 - 36 & 0 - 24 + 5 + 63 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & -35 & 44 \end{bmatrix}$$

Imagen 6
Fuente: Propia.

Producto de matrices m x n y n x r: hemos estudiado en el apartado anterior el producto de una matriz por un vector columna, procedemos ahora a estudiar el producto de dos matrices, en lo que se requiere que el número de columnas de la primera matriz coincida con el número de filas de la segunda, condición que se cumple en el producto indicado en el siguiente ejemplo:

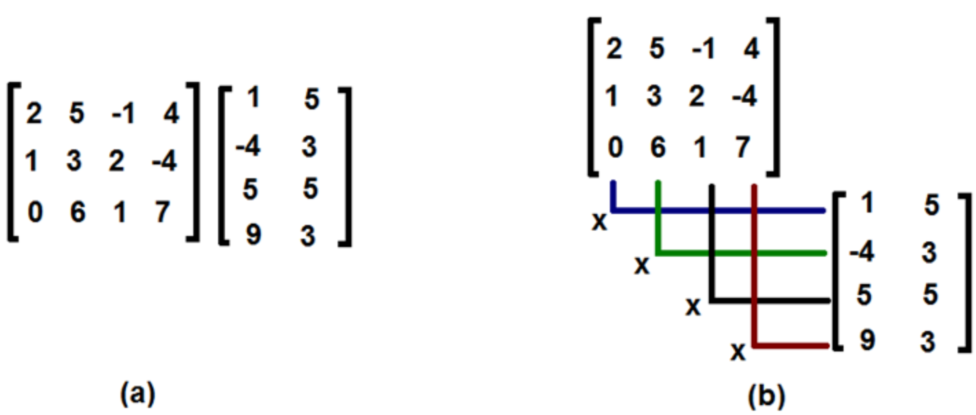


Imagen 7
Fuente: Propia.

El resultado de multiplicar una matriz de orden *m x n* por una de orden *n x r*, es una matriz de orden m x r, es decir, una cuyo número de filas es igual al número de filas de la primera matriz y el número de columnas coincide con el de la segunda. En el resultado, el elemento r_{ij}, o sea el ubicado en la i-^{esima} fila y la j-^{esima} columna, se halla multiplicando la i-^{esima} fila de la primera matriz por la j-^{esima} columna de la segunda. Formalmente se tiene que el producto de una matriz A de orden *m x n* y una B, de orden *n x r* está dado por:

$$A.B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \boxed{a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1r} \\ b_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2r} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{nr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1j} & \cdots & r_{1r} \\ r_{21} & \cdots & r_{2j} & \cdots & r_{2r} \\ r_{i1} & \cdots & \boxed{r_{ij}} & \cdots & r_{ir} \\ r_{m1} & \cdots & r_{mj} & \cdots & r_{mr} \end{bmatrix}$$

Imagen 8
Fuente: Propia.

Donde el elemento r_{ij} corresponde a:

$$r_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}$$

Ejemplo

El siguiente producto ilustra el procedimiento de cálculo.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2)(3) + (3)(1) + (-1)(2) & (2)(4) + (3)(1) + (-1)(3) \\ (1)(3) + (4)(1) + (2)(2) & (1)(4) + (4)(1) + (2)(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 + 3 - 2 & 8 + 3 - 3 \\ 3 + 4 + 2 & 4 + 4 + 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 14 \end{bmatrix}$$

Imagen 9
Fuente: Propia.

Propiedades del producto de matrices: las propiedades que citamos a continuación sobre el producto de matrices se refieren a productos que tengan sentido, es decir, que haya compatibilidad en el número de filas y columnas de tal manera que se pueda realizar la operación, estas propiedades se presentan sin demostración.

Dadas las matrices $A, B, C,$ tales que los productos indicados tienen sentido, se cumple las siguientes propiedades:

a) $(AB)C = A(BC)$
b) $A(B + C) = AB + AC$
c) $(B + C)A = BA + CA$
d) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$ para todo $\propto \in R$

Matriz identidad de orden n $[\boldsymbol{I_n}]$:

La matriz identidad de orden n es una matriz cuadrada de n filas y n columnas en la cual se cumple lo siguiente:

$$[I_n]_{ij} = \begin{cases} 1 \; si \; i = j \\ \\ 0 \; si \; i \neq j \end{cases}$$

Es decir, los elementos de la diagonal principal, la que va del extremo superior izquierdo al inferior derecho, está formada por solos 1s (unos) y los elementos restantes son 0s (ceros). Tal como se muestra a continuación:

$$\boldsymbol{I_n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Imagen 10
Fuente: Propia.

Un teorema muy importante en relación a matrices identidad es el siguiente:

Teorema: Dada una matriz A de orden *m x n* se tiene que:

$$I_m A = A$$

$$AI_n = A$$

Al invertir el orden de la operación se debe usar una matriz identidad de orden diferente.

Matriz invertible

Una matriz A de orden n es invertible, o tiene inversa, si existe una matriz B de orden n tal que:

$$AB = BA = I_n$$

No toda matriz es invertible, pero si lo es, su inversa es única. La inversa de una matriz A se denota por A^{-1}. En la unidad tres realizaremos cálculos de inversa de una matriz.

Propiedades de matrices invertibles: si A, B son matrices invertibles de orden n, se cumple lo siguiente:

a) $(A^{-1})^{-1} = A$

b) $AB\ es\ invertible\ y\ (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Traspuesta de una matriz

Dada una matriz A de orden *m x n*, la traspuesta de A, denotada por A^T, es una matriz de orden *n x m* obtenida al convertir las filas en columnas, es decir la primera fila de A pasa a ser la primera columna de la traspuesta A^T. es decir:

$$\text{Si } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{entonces } A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{i1} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{i2} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{1j} & a_{2j} & & a_{ij} & \cdots & a_{mj} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{in} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Imagen 11
Fuente: Propia.

Propiedades de la traspuesta de matrices: la trasposición de matrices cumple las siguientes propiedades:

a) $(A^T)^T = A$

b) $(A + B)^T = A^T + B^T$

c) $(\propto A)^T = \propto A^T$

d) $(AB)^T = B^T A^T$

e) Si $A\ es\ invertible, A^T\ es\ invertible\ y\ (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Ejemplo

$$\text{Si } A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}, entonces\ A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Imagen 12
Fuente: Propia.

2

Unidad 2

Sistemas de ecuaciones lineales con matrices

Álgebra lineal

Autor: Alexander Moreno Quiroga

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina

MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Introducción

En cursos de educación media estudiamos diversos métodos para resolver un conjunto de ecuaciones simultaneas, todas ellas lineales, tema conocido más brevemente como sistemas de ecuaciones lineales, en esta unidad pretendemos aplicar principios de matrices, particularmente partimos de un sistema de ecuaciones y lo transformamos en una ecuación matricial, a partir de la cual hallamos la solución del sistema empleando diferentes técnicas.

Recomendaciones metodológicas

Para enfrentarse al desarrollo de esta unidad se le recomienda al estudiante tener presente las temáticas de las semanas anteriores, particularmente las relacionadas con producto de una matriz por un vector columna. Igualmente se recomienda la detallada revisión de los ejemplos desarrollados y apoyarse en los diferentes recursos adicionales dispuestos para favorecer su aprendizaje, tales como, video capsulas, videoconferencias, lecturas complementarias, entre otros.

Desarrollo temático

Sistemas de ecuaciones lineales con matrices

Sistemas de ecuaciones lineales

Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$, es un conjunto de ecuaciones como el siguiente:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}
$$

Imagen 1
Fuente: Propia.

En el cual el número a_{ij} es el coeficiente de la $j^{\text{-esima}}$ variable (x_j) en la i-esima fila y los b_j son los términos independientes.

Solución de un sistema de ecuaciones lineales

La solución o conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales es el conjunto de valores de las variables que satisfacen cada una de las ecuaciones.

Verificación de la solución: para verificar si un conjunto de valores de las variables son solución de un sistema de ecuaciones, se sustituye los valores en cada una de las ecuaciones del sistema, si la solución es válida debe satisfacer cada una de las ecuaciones.

Ejemplo: dado el sistema:

$$\mathbf{2x_1 + 3x_2 = 7}$$
$$\mathbf{5x_1 - 2x_2 = 8}$$

La solución es: $\boldsymbol{x_1} = \mathbf{2}$; $\boldsymbol{x_2} = \mathbf{1}$, lo cual se puede verificar sustituyendo estos valores en las dos ecuaciones. En apartados siguientes veremos cómo obtener la solución de sistemas de ecuaciones.

Representación matricial de sistemas de ecuaciones lineales

A partir de los sistemas de ecuaciones lineales podemos definir las siguientes matrices.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}; \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Imagen 2
Fuente: Propia.

Las cuales, según se puede verificar, con base en las operaciones de multiplicación estudiadas en la unidad anterior, satisfacen la siguiente ecuación matricial:

$$AX = B \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Imagen 3
Fuente: Propia.

En la anterior ecuación, la matriz A es la matriz de coeficientes o matriz del sistema. Como es de suponer, parte de nuestro interés es resolver sistemas de ecuaciones lineales, en este caso empleando métodos matriciales, para lo cual se hace necesario el uso de lo que, en este contexto, se conoce como operaciones elementales por filas. Antes de entrar en ello, conviene representar la ecuación matricial de forma más simplificada, tal como se muestra a continuación, en donde a la matriz de coeficientes se le agrega la columna de términos independientes, obteniéndose así la matriz ampliada del sistema, que no hace uso de las variables; la línea discontinua representa el signo de igualdad.

$$M = \left[\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_{11} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_{21} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_{m1} \end{array}\right]$$

Imagen 4
Fuente: Propia.

Operaciones elementales por filas

Sobre una matriz M podemos aplicar las siguientes operaciones:

a) Intercambiar la fila p por la fila q, lo cual se denota mediante $f_p \leftrightarrow f_q$.
b) Multiplicar por $\lambda \neq 0$ la fila p, lo cual se denota mediante λf_p.
c) Sumar a la fila p la fila q multiplicada por $\lambda \neq 0$, lo cual se denota mediante $f_p + \lambda f_q$.

El resultado de este tipo de operaciones da lugar a una matriz asociada a un sistema equivalente, es decir, uno que tiene el mismo conjunto solución. Una explicación que ilustra lo anterior se presenta en el siguiente ejemplo:

Ejemplo: considerando el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \mathbf{2x_1 + 3x_2 = 7} \\ \mathbf{5x_1 - 2x_2 = 8} \end{aligned}$$

La solución del mismo, como lo señalamos antes es: $\mathbf{x_1 = 2}$; $\mathbf{x_2 = 1}$**,** expresando el sistema en forma matricial, tenemos:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 7 \\ 5x_1 - 2x_2 &= 8 \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix} \Rightarrow M = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 7 \\ 5 & -2 & 8 \end{array}\right]$$

Imagen 5
Fuente: Propia.

Veremos a continuación que si realizamos operaciones por filas sobre la matriz M, se obtiene una matriz equivalente asociada a un sistema con idéntica solución:

a) Intercambio de filas de la matriz M:

$$M = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 7 \\ 5 & -2 & 8 \end{array}\right] \quad f_p \leftrightarrow f_q \longrightarrow \quad M` = \left[\begin{array}{cc|c} 5 & -2 & 8 \\ 2 & 3 & 7 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{aligned} 5x_1 - 2x_2 &= 8 \\ 2x_1 + 3x_2 &= 7 \end{aligned}$$

Imagen 6
Fuente: Propia.

Se puede verificar que la solución sigue siendo: $x_1 = 2$; $x_2 = 1$, lo cual es de esperarse ya que la operación realizada es equivalente al solo cambio del orden de las ecuaciones.

b) Multiplicar por $\lambda = 3$ la segunda fila, aunque podemos tomar cualquier $\lambda \neq 0$ y multiplicar cualquiera de las filas.

$$M = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 7 \\ 5 & 2 & 8 \end{array}\right] \longrightarrow 3f_2 \longrightarrow \quad M` = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 7 \\ 15 & 6 & 24 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 7 \\ 15x_1 - 6x_2 &= 24 \end{aligned}$$

Imagen 7
Fuente: Propia.

La solución del nuevo sistema es también $\boldsymbol{x_1 = 2}$; $\boldsymbol{x_2 = 1}$.

c) Sumar a la fila 1 la fila 2 multiplicada por $\lambda = 3$. $f_1 + 3f_2$.

De la operación anterior al multiplicar por 3 la fila 2, ésta cambia a "$\mathbf{15 \quad -6 \quad 24}$", si sumamos esto a la fila 1 de la matriz M tenemos:

$$M = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 7 \\ 5 & -2 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow{f_1 + 3f_2} M` = \left[\begin{array}{cc|c} 17 & -3 & 31 \\ 5 & -2 & 8 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{array}{l} 17x_1 - 3x_2 = 31 \\ 5x_1 - 2x_2 = 8 \end{array}$$

Imagen 8
Fuente: Propia.

El resultado del proceso anterior es un sistema de ecuaciones que tiene la misma solución que el sistema original. En los casos b y c, La operación a realizar se indica o señala a la altura de la fila que ha de transformarse.

Matriz escalonada reducida o triangular superior

En la literatura en relación al estudio de matrices encontramos definiciones formales, en nuestro estudio definimos la matriz diagonal superior o escalonada reducida como una matriz cuadrada en la cual todos los términos que se encuentran por debajo de la diagonal principal son 0 (cero), es decir una matriz de la forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Imagen 9
Fuente: Propia.

Eliminación de Gauss-Jordan

En lo que resta de esta unidad apuntaremos a la solución de sistemas de ecuaciones lineales en los cuales el número de ecuaciones es igual a número de incógnitas, a partir de esto tendremos una matriz cuadrada de coeficientes y una columna adicional en la matriz extendida, esta matriz extendida será objeto de operaciones elementales por filas a fin de obtener una matriz triangular reducida en la parte de los coeficientes. El conjunto de operaciones por filas que dan lugar a la matriz triangular superior se conoce como eliminación de Gauss-Jordan y resulta muy útil para resolver sistemas de ecuaciones lineales, mostraremos en el siguiente ejemplo el uso del método de eliminación de Gauss-Jordan.

Ejemplo: vemos a continuación un sistema de cuatro ecuaciones lineales con cuatro incógnitas y la matriz ampliada correspondiente.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 15 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &= 3 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4 &= 5 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 &= 14 \end{aligned} \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 2 & -3 & 15 \\ 3 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & -3 & 5 \\ 4 & 3 & -1 & -1 & 14 \end{array}\right]$$

Imagen 10
Fuente: Propia.

Apliquemos operaciones por filas para obtener una matriz triangular superior en la parte de coeficientes de la matriz ampliada.

a) Es conveniente tener un "1" en la primera fila primera columna, por tanto intercambiamos las filas 1 y 3.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 2 & -3 & 15 \\ 3 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & -3 & 5 \\ 4 & 3 & -1 & -1 & 14 \end{array}\right] \xrightarrow{f_1 \leftrightarrow f_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & -3 & 5 \\ 3 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & -3 & 15 \\ 4 & 3 & -1 & -1 & 14 \end{array}\right]$$

Imagen 11
Fuente: Propia.

b) En la última matriz, con tal de obtener los ceros requeridos en la columna 1, a la fila 2 le sumamos la fila 1 multiplicada por -3; a la fila 3 le sumamos la fila 1 multiplicada por -2 y a la fila 4 le sumamos la fila 1 multiplicada por – 4, tal como se indica a continuación:

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & -2 & -3 & 5 \\ 3 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & -3 & 15 \\ 4 & 3 & -1 & -1 & 14 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \longrightarrow f_2 - 3f_1 \longrightarrow \\ \longrightarrow f_3 - 2f_1 \longrightarrow \\ \longrightarrow f_4 - 4f_1 \longrightarrow \end{array} \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & -2 & -3 & 5 \\ 0 & -4 & 7 & 11 & -12 \\ 0 & 1 & 6 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 7 & 11 & -6 \end{array}\right]$$

Imagen 12
Fuente: Propia.

b) Para obtener los ceros de la segunda columna, inicialmente a la fila 3 le sumamos la fila 4, como se indica en la siguiente imagen:

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & -2 & -3 & 5 \\ 0 & -4 & 7 & 11 & -12 \\ 0 & 1 & 6 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 7 & 11 & -6 \end{array}\right] \longrightarrow f_3 + f_4 \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & -2 & -3 & 5 \\ 0 & -4 & 7 & 11 & -12 \\ 0 & 0 & 13 & 14 & -1 \\ 0 & -1 & 7 & 11 & -6 \end{array}\right]$$

Imagen 13
Fuente: Propia.

Ahora multiplicamos por 4 la fila 4 y le restamos la fila 2, con se muestra seguidamente:

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & -2 & -3 & 5 \\ 0 & -4 & 7 & 11 & -12 \\ 0 & 0 & 13 & 14 & -1 \\ 0 & -1 & 7 & 11 & -6 \end{array}\right] \longrightarrow 4f_4 - f_2 \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & -2 & -3 & 5 \\ 0 & -4 & 7 & 11 & -12 \\ 0 & 0 & 13 & 14 & -1 \\ 0 & 0 & 21 & 33 & -12 \end{array}\right]$$

Imagen 14
Fuente: Propia.

En la última matriz dividimos por 3 la fila 4.

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & -2 & -3 & 5 \\ 0 & -4 & 7 & 11 & -12 \\ 0 & 0 & 13 & 14 & -1 \\ 0 & 0 & 21 & 33 & -12 \end{array}\right] \longrightarrow \frac{f_4}{3} \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & -2 & -3 & 5 \\ 0 & -4 & 7 & 11 & -12 \\ 0 & 0 & 13 & 14 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & 11 & -4 \end{array}\right]$$

Imagen 15
Fuente: Propia.

Para obtener el 0 (cero) requerido en la tercera columna, multiplicamos la fila 4 por 13 y le restamos la fila 3 multiplicada por 7.

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & -2 & -3 & 5 \\ 0 & -4 & 7 & 11 & -12 \\ 0 & 0 & 13 & 14 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & 11 & -4 \end{array}\right] \longrightarrow 13f_4 - 7\,f_4 \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & -2 & -3 & 5 \\ 0 & -4 & 7 & 11 & -12 \\ 0 & 0 & 13 & 14 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 45 & -45 \end{array}\right]$$

Imagen 16
Fuente: Propia.

Finalmente dividimos por 45 la fila 4.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & -3 & 5 \\ 0 & -4 & 7 & 11 & -12 \\ 0 & 0 & 13 & 14 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 45 & -45 \end{array}\right] \longrightarrow \frac{f_4}{45} \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & -3 & 5 \\ 0 & -4 & 7 & 11 & -12 \\ 0 & 0 & 13 & 14 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Imagen 17
Fuente: Propia.

El sistema equivalente asociado a la última matriz es el siguiente (1).

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4} &= \boldsymbol{5} && (1) \\ \boldsymbol{-4x_2 + 7x_3 + 11x_4} &= \boldsymbol{-12} && (2) \\ \boldsymbol{13x_3 + 14x_4} &= \boldsymbol{-1} && (3) \\ \boldsymbol{x_4} &= \boldsymbol{-1} && (4) \end{aligned}$$

En este sistema, se puede hallar la solución fácilmente comenzando por la última ecuación, luego sustituyendo el valor hallado en la penúltima, con lo cual se halla otro valor, los valores hallados se sustituyen en la anterior y así sucesivamente, hasta encontrar la solución completa, veamos lo fundamental de los procedimientos.

De la ecuación (4) encontramos que $\boldsymbol{x_4 = -1}$ sustituyendo en la ecuación (3) se tiene:

$$\boldsymbol{13x_3 - 14 = -1}$$

De donde se halla $\boldsymbol{x_3 = 1.}$

Sustituyendo $\boldsymbol{x_3\ y\ x_4}$ en la ecuación (2), obtenemos el valor de $\boldsymbol{x_2}$ mediante:

$$\begin{gathered} \boldsymbol{-4x_2 + 7 - 11 = -12} \\ \boldsymbol{-4x_2 = -12 + 11 - 7} \\ \boldsymbol{-4x_2 = -8} \\ \boldsymbol{x_2 = 2} \end{gathered}$$

Sustituyendo en la ecuación (1) los tres valores hallados se puede hallar $\boldsymbol{x_1}$ a través de:

$$\boldsymbol{x_1 + 2 - 2 + 3 = 5}$$
$$\boldsymbol{x_1 = 2}$$

Finalmente la solución del sistema es:

$$\boldsymbol{x_1 = 2};$$

$$\boldsymbol{x_2 = 2};$$

$$\boldsymbol{x_3 = 1};$$

$$\boldsymbol{x_4 = -1},$$

La cual según se puede verificar, satisface el sistema de ecuaciones propuesto originalmente, evidenciando la utilidad del procedimiento de eliminación de Gauss-Jordan.

El planteamiento de las ecuaciones que nos conducen a hallar cada valor se puede realizar a partir de la lectura de la última matriz sin necesidad de plantear el sistema de ecuaciones final.

Ejercicios:

1 En cada uno de los siguientes casos representar el sistema de ecuaciones en forma de ecuación matricial y escribir la matriz ampliada del sistema.

a)

$$3x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 5x_5 + x_6 = 1$$
$$2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + 4x_5 + x_6 = 5$$
$$5x_1 - 5x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 + 3x_6 = 1$$
$$-x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 + 9x_6 = 3$$
$$2x_1 - 3x_2 + 7x_3 + x_4 + x_5 + 5x_6 = -1$$
$$-3x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 + x_5 + 2x_6 = 2$$

b) $3x_1 - \ 2x_3 + 3x_4 + 5x_5 + x_6 = 1$

$2x_1 + \ 2x_2 - x_4 + 4x_5 + x_6 = 5$

$5x_1 - \ 5x_2 + 3x_3 + x_5 + 3x_6 = 1$

$-x_1 + \ x_2 - x_3 + x_4 + 9x_6 = 3$

$2x_1 - \ 3x_2 + 7x_3 + x_4 + x_5 = -1$

$+ x_2 - x_3 + 4x_4 + x_5 + 2x_6 = 2$

2) Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales mediante el procedimiento de eliminación de Gauss-Jordan.

a) $\mathbf{3x_1 - 2x_2 + x_3 = 6}$

$\mathbf{2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 22}$

$\mathbf{5x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 6}$

b) $\mathbf{3x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4}$

$\mathbf{2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 3}$

$\mathbf{5x_1 - 5x_2 + 3x_3 + x_4 = 10}$

$\mathbf{-x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -4}$

2

Unidad 2

Determinantes

Álgebra lineal

Autor: Alexander Moreno Quiroga

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina

MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Introducción

Se estudiaran a continuación los determinantes, con el firme propósito de familiarizar al estudiante con este concepto para que inicialmente lo asocie como un número real que se asigna a cada matriz y posteriormente reconocer el adjunto de un elemento lo cual permite llegar al determinante de una matriz cuadrada, se analizan la matriz inversa y la de cofactores y a su vez su relación con los determinantes.

Recomendaciones metodológicas

Apoyados en el cálculo de determinantes se podrá hallar la inversa de una matriz y la solución de sistemas de ecuaciones lineales tratados y comentados en las unidades anteriores, el material de estudio de dichas unidades se encuentra disponible por si considera necesario recurrir a él. En aras de facilitar el manejo de los determinantes trataremos el tema de lo particular a lo general, iniciando con determinantes de matrices de *2 x 2* y siguiendo con matrices de orden superior, esta secuencia didáctica le permitirá visualizar de una manera lógica estos procedimientos y familiarizarse más con los tema, por este motivo es imprescindible que realice las lecturas de forma ordenada y procure ir solucionando los ejemplos propuestos.

Desarrollo temático

Determinantes

Determinantes de 2 x 2 o de segundo orden

Definimos inicialmente el determinante de segundo orden como se indica a continuación:

Dada la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Imagen 1
Fuente: Propia.

El determinante de A, que corresponde a un número real, se simboliza y define de la siguiente forma:

$$\det(A) = \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Imagen 2
Fuente: Propia.

Nótese la diferencia de representación entre una matriz y su determinante, la matriz se representa con corchetes y el determinante sólo con barras. El siguiente ejemplo ilustra el cálculo de determinantes:

Ejemplo 1

Calcular el determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}$$

Imagen 3
Fuente: Propia.

Solución:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = (3).(-3) - (4).(5) = -9 - 20 = -29$$

Imagen 4
Fuente: Propia.

Vemos que el cálculo de determinantes de *2 x 2* es realmente sencillo, pero es un valioso apoyo para el cálculo de determinantes de orden de *3 x 3* y de orden superior, este tipo de cálculos hace uso de otros conceptos que comenzamos a estudiar seguidamente:

Menor complementario de un elemento

Dada una matriz de orden *n x n*, el menor complementario del elemento a_{ij}, representado mediante M_{ij}, se define como el determinante de la matriz obtenida al suprimir la fila i y la columna j. La figura siguiente muestra la idea.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{j1} & \cdots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{nj} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{nj} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Menor complementario del elemento a_{ij}

Imagen 5
Fuente: Propia.

En el caso de matrices de *2 x 2*, el menor complementario de un elemento es el número que queda al suprimir la fila y la columna en la que se encuentra el elemento.

Ejemplo
Sea la matriz:

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 7 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Imagen 6
Fuente: Propia.

El menor complementario del elemento ubicado en la fila 2 columna 3 es:

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 & \boxed{-2} \\ \boxed{2 \quad 3} & & \boxed{1} \\ 7 & 1 & \boxed{2} \end{bmatrix} \Rightarrow M_{23} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = (4).(1) - (7).(5) = 4 - 35 = -31$$

Imagen 7
Fuente: Propia.

Adjunto de un elemento de una matriz

Dada una matriz cuadrada de orden *n x n*, el adjunto del elemento a_{ij}, representado mediante A_{ij}, corresponde a:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}.M_{ij}$$

Es decir, el adjunto de un elemento, es el mismo menor complementario o el menor multiplicado por menos uno (-1), según la fila y la columna en que se encuentre. Más específicamente si la suma número de fila más número de columna es par, el resultado es el mismo menor complementario, en caso contrario es el menor multiplicado por -1.

Ejemplo

Para el menor complementario calculado en el ejemplo anterior, el adjunto es:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}.M_{ij} = A_{ij} = (-1)^{2+3}.M_{23} = (-1)(-31) = 31$$

Para la matriz completa hallamos a continuación los menores complementarios y adjuntos.

$a_{11} = 4;$ $M_{11} = (3).(2) - (1).(1) = 6 - 1 = 5;$ $A_{11} = (-1)^2 M_{11} = M_{11} = 5$

$a_{12} = 5;$ $M_{12} = (2).(2) - (7).(1) = 4 - 7 = -3;$ $A_{12} = (-1)^3 M_{12} = -M_{12} = 3$

$a_{13} = -2;$ $M_{13} = (2).(1) - (7).(3) = 2 - 21 = -19;$ $A_{13} = (-1)^4 M_{13} = M_{13} = -19$

$a_{21} = 2;$ $M_{21} = (5).(2) - (1).(-2) = 10 + 2 = 12;$ $A_{21} = (-1)^3 M_{21} = -M_{21} = -12$

$a_{22} = 3;$ $M_{22} = (4).(2) - (7).(-2) = 8 + 14 = 22;$ $A_{22} = (-1)^4 M_{22} = M_{22} = 22$

$a_{23} = 1;$ $M_{23} = (4).(1) - (7).(5) = 4 - 35 = -31;$ $A_{23} = (-1)^5 M_{23} = -M_{23} = 31$

$a_{31} = 7;$ $M_{31} = (5).(1) - (3).(-2) = 5 + 6 = 11;$ $A_{31} = (-1)^4 M_{31} = M_{31} = 11$

$a_{32} = 1;$ $M_{32} = (4).(1) - (2).(-2) = 4 + 4 = 8;$ $A_{32} = (-1)^5 M_{32} = -M_{32} = -8$

$a_{33} = 2;$ $M_{33} = (4).(3) - (2).(5) = 12 - 10 = 2;$ $A_{33} = (-1)^{\boldsymbol{6}} \boldsymbol{M_{33}} = \boldsymbol{M_{33} = 2}$

Cálculo de determinantes de orden superior

Dada una matriz cuadrada $\boldsymbol{A}$ de orden n > 2, su determinante corresponde a la suma de de los productos de los elementos de una fila o columna cualquiera por sus respectivos adjuntos. Es de anotar que el resultado no depende de la fila o columna que se elija, por tanto, si deseamos, podemos tomar la que consideremos más conveniente.

Ejemplo
Hallar el determinante de la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 7 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Imagen 8
Fuente: Propia.

Solución: en el apartado anterior hallamos los adjuntos de esta matriz, para calcular el determinante tomamos la columna 3, con lo que tenemos que su determinante es:

$$\boldsymbol{det}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{a_{13}A_{13}} + \boldsymbol{a_{23}A_{23}} + \boldsymbol{a_{33}A_{33}}$$

$$\boldsymbol{det}(\boldsymbol{A}) = (\boldsymbol{-2})(\boldsymbol{-19}) + (\boldsymbol{1})(\boldsymbol{31}) + (\boldsymbol{2})(\boldsymbol{2}) = \boldsymbol{38} + \boldsymbol{31} + \boldsymbol{4} = \boldsymbol{73}$$

Si tomamos la fila 1 el cálculo daría:

$$\boldsymbol{det}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{a_{11}A_{11}} + \boldsymbol{a_{12}A_{12}} + \boldsymbol{a_{13}A_{13}}$$

$$\boldsymbol{det}(\boldsymbol{A}) = (\boldsymbol{4})(\boldsymbol{5}) + (\boldsymbol{5})(\boldsymbol{3}) + (\boldsymbol{-2})(\boldsymbol{-19}) = \boldsymbol{20} + \boldsymbol{15} + \boldsymbol{38} = \boldsymbol{73}$$

Como era de esperarse el resultado coincide con el primer cálculo.

Un método alternativo para calcular determinantes de tercer orden es la regla de Sarrus, la cual se deja como ejercicio de consulta para el estudiante.

Antes de tratar el cálculo de determinantes de orden mayor que tres estudiamos las siguientes propiedades.

Propiedades de los determinantes

Enunciamos a continuación algunas de las propiedades más importantes de los determinantes:

1. Si una matriz tiene una fila o columna cuyos elementos son todos ceros, el determinante es igual a cero.

2. Si una matriz tiene dos filas iguales o proporcionales, su determinante es igual a cero.

3. Si intercambiamos dos filas o dos columnas de una matriz cuadrada, su determinante cambia de signo.

4. Al multiplicar todos los elementos de una fila o columna de una matriz por un número real, el determinante queda multiplicado por el mismo número.

5. Si a una fila o columna de una matriz se le suma otra fila o columna multiplicada por un número, el determinante no cambia de valor. Esta propiedad permite hallar de forma sencilla determinantes de orden superior a 3.

6. El determinante de una matriz es igual al de su traspuesta.

7. Si A tiene matriz inversa, $\boldsymbol{A^{-1}}$, se tiene que: $\boldsymbol{det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}}$.

El cálculo de determinantes de orden mayor o igual que tres puede hacerse algo complejo, podemos facilitarlo transformando la matriz para obtener varios ceros en una fila o columna aplicando la propiedad 5, y realizar el cálculo por esa fila o columna, esto teniendo en cuenta que el valor del determinante no cambia con esas transformaciones.

Ejemplo

Calculemos el determinante de la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 2 & -5 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & -8 & 1 \end{bmatrix}$$

Imagen 9
Fuente: Propia.

Solución: Como ya tenemos un cero, amparados en la propiedad 5, podemos buscar más ceros en la fila o columna en la que se encuentra, busquemos en la primera columna, para ello desarrollamos las operaciones que señalamos a continuación:

Sumamos la fila 2 multiplicada por -2 a la fila 3 y la fila 2 multiplicada por -3 a la fila 4, tal como se indica en el siguiente esquema:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 2 & -5 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & -8 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \xrightarrow{\quad f_3 - 2f_2 \quad} \\ \xrightarrow{\quad f_4 - 3f_2 \quad} \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & -1 & 11 \\ 0 & -11 & -14 & 16 \end{bmatrix}$$

Imagen 10
Fuente: Propia.

Desarrollando el cálculo por la columna uno se tiene:

$$\boldsymbol{det(A) = -1.\,det} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & -1 & 11 \\ -11 & -14 & 16 \end{bmatrix}$$

Imagen 11
Fuente: Propia.

En la última matriz realizamos las operaciones señaladas en el siguiente esquema.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & -1 & 11 \\ -11 & -14 & 16 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \xrightarrow{f_2 + 2f_1} \\ \xrightarrow{f_3 + 11f_1} \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 8 & -17 \end{bmatrix}$$

Imagen 12
Fuente: Propia.

Por lo tanto:

$$det(A) = -1.\,det \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & -1 & 11 \\ -11 & -14 & 16 \end{bmatrix} = -1.\,det \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 8 & -17 \end{bmatrix}$$

Imagen 13
Fuente: Propia.

$$det(A) = -1.\,det \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & -1 & 11 \\ -11 & -14 & 16 \end{bmatrix} = -1.\,[(3).(-17) - (8).(5)] = 91$$

Imagen 14
Fuente: Propia.

Adjunta de una matriz

Dada una matriz $\boldsymbol{A}$, la adjunta de $\boldsymbol{A}$, denotada mediante $\boldsymbol{Adj}(\boldsymbol{A})$, es la matriz obtenida al sustituir cada elemento de la matriz por su adjunto, es decir, si:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Imagen 15
Fuente: Propia.

Su matriz adjunta está dada por:

$$Adj(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Imagen 15
Fuente: Propia.

Ejemplo

Para la matriz los menores y adjuntos de sus elementos y la matriz adjunta son:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Imagen 16
Fuente: Propia.

$$M_{11} = 2\,;\ \ M_{12} = 2\,;\ \ M_{21} = 3\,;\ \ M_{22} = 5.$$

$$A_{11} = 2\,;\ \ A_{12} = -2\,;\ \ A_{21} = -3\,;\ \ A_{22} = 5.$$

$$Adj(A) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

Imagen 17
Fuente: Propia.

Ejemplo

Hallar la adjunta de la siguiente matriz.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 7 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Imagen 18
Fuente: Propia.

Solución: en un ejemplo anterior hallamos los adjuntos de los elementos de esta matriz, por tanto la adjunta de la matriz es:

$$\boldsymbol{Adj}(\boldsymbol{A}) = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -19 \\ -12 & 22 & 31 \\ 11 & -8 & 2 \end{bmatrix}$$

Imagen 19
Fuente: Propia.

Cálculo de la inversa de una matriz cuadrada

Existe una estrecha relación entre la inversa, la adjunta y el valor del determinante de una matriz cuadrada. Un primer detalle importante es que una matriz tiene inversa si y sólo si su determinante es diferente de cero, en cuyo caso tenemos la siguiente expresión que permite hallar la inversa de una matriz cuadrada de orden n:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (Adj(A))^{T}$$

Es decir, la inversa de una matriz cuadrada A es igual a la traspuesta de la matriz adjunta de A dividida por el determinante de A.

Ejemplo
Hallar la inversa de las siguientes matrices:

a) $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{2} \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 7 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Imagen 20
Fuente: Propia.

Solución a): el determinante de la matriz es: $det\,(A) = 4,$ la traspuesta de la adjunta es:

$$\boldsymbol{Adj(A)^T} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{5} \end{bmatrix}$$

Imagen 21
Fuente: Propia.

Entonces la inversa es:

$$\boldsymbol{A^{-1}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{det}(\boldsymbol{A})}\,\boldsymbol{Adj(A)^T} = \frac{1}{4}\,\boldsymbol{Adj(A)^T} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{5} \end{bmatrix}$$

Imagen 22
Fuente: Propia.

Solución b): en ejemplos anteriores encontramos que el determinante y la adjunta de esta matriz son:

$$det(A) = 73$$

$$\boldsymbol{Adj(A)} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -19 \\ -12 & 22 & 31 \\ 11 & -8 & 2 \end{bmatrix}$$

Imagen 23
Fuente: Propia.

Necesitamos hallar la traspuesta de la adjunta de la matriz, esta es:

$$(\boldsymbol{Adj(A)})^{\boldsymbol{T}} = \begin{bmatrix} 5 & -12 & 11 \\ 3 & 22 & -8 \\ -19 & 31 & 2 \end{bmatrix}$$

Imagen 24
Fuente: Propia.

Por tanto la inversa de la matriz A, viene dada por:

$$\boldsymbol{A^{-1}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{det}(\boldsymbol{A})}(\boldsymbol{Adj(A)})^{\boldsymbol{T}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{73}}\begin{bmatrix} 5 & -12 & 11 \\ 3 & 22 & -8 \\ -19 & 31 & 2 \end{bmatrix}$$

Imagen 25
Fuente: Propia.

Podemos verificar que la matriz hallada corresponde a la inversa de A, esto lo haremos a continuación calculando el producto $A.A^{-1}$, el resultado debe ser la matriz identidad de orden 3.

$$\boldsymbol{A.A^{-1}} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 7 & 1 & 2 \end{bmatrix}\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{73}}\begin{bmatrix} 5 & -12 & 11 \\ 3 & 22 & -8 \\ -19 & 31 & 2 \end{bmatrix} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{73}}\begin{bmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 7 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -12 & 11 \\ 3 & 22 & -8 \\ -19 & 31 & 2 \end{bmatrix}$$

Imagen 26
Fuente: Propia.

$$\boldsymbol{A.A^{-1}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{73}}\begin{bmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 7 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -12 & 11 \\ 3 & 22 & -8 \\ -19 & 31 & 2 \end{bmatrix}$$

Imagen 27
Fuente: Propia.

$$A.A^{-1} = \frac{1}{73}\begin{bmatrix} (4)(5)+(5)(3)+(-2)(-19) & (4)(-12)+(5)(22)+(-2)(31) & (4)(11)+(5)(-8)+(-2)(2) \\ (2)(5)+(3)(3)+\ (1)(-19) & (2)(-12)+(3)(22)+\ (1)(31) & (2)(11)+(3)(-8)+\ (1)(2) \\ (7)(5)+(1)(3)+\ (2)(-19) & (7)(-12)+(1)(22)+\ (2)(31) & (7)(11)+(1)(-8)+\ (2)(2) \end{bmatrix}$$

Imagen 28
Fuente: Propia.

$$A.A^{-1} = \frac{1}{73}\begin{bmatrix} 20+15+38 & -48+110-62 & 44-40-4 \\ 10+9-19) & -24+66+31 & 22-24+2 \\ 35+3-38 & -84+22+62 & 77-8+4 \end{bmatrix} = \frac{1}{73}\begin{bmatrix} 73 & 0 & 0 \\ 0 & 73 & 0 \\ 0 & 0 & 73 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Imagen 29
Fuente: Propia.

Solución de sistemas de ecuaciones lineales por determinantes (Regla de Cramer)

El cálculo de determinantes proporciona una importante vía de solución de sistemas de n ecuaciones lineales con n incógnitas, el método que se basa en el uso de determinantes se conoce como regla de Cramer y establece lo siguiente:

Dado un sistema de ecuaciones lineales representado mediante la siguiente ecuación matricial:

$$AX = B \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Imagen 30
Fuente: Propia.

El valor de cada una de las variables x_j viene dado por:

$$x_j = \frac{det(A_{x_j})}{det\ (A)}$$

Donde A es la matriz de coeficientes de las incógnitas y A_{x_j}, la matriz obtenida al remplazar la columna de coeficientes de x_j por el vector de términos independientes, es decir, cambiar los a_{1j} , $a_{2j}, \dots, a_{nj}$ por el vector de términos b_1 , $b_2, \dots, b_n$.

Ejemplo
Hallar la solución del siguiente sistema:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 &= 2 \\ 1x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 3 \\ 3x_1 + 1x_2 - 2x_3 &= 7 \end{aligned}$$

Solución: la ecuación matricial correspondiente a este sistema es:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Imagen 31
Fuente: Propia.

Con:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \text{ y } \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Imagen 32
Fuente: Propia.

Tenemos:

$$A_{x_1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 3 & -2 & 2 \\ 7 & 1 & -2 \end{bmatrix}; \; A_{x_2} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & -2 \end{bmatrix}; \; A_{x_3} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

Imagen 33
Fuente: Propia.

Utilizando los principios de cálculo de determinantes estudiados en esta unidad, el estudiante puede verificar que:

$det\,(A)\,) = -7;$

$det\,(\,A_{x_1}) = -21;$

$det\,(\,A_{x_2}) = -14;$

$det\,(\,A_{x_3}) = -14;$

Con lo cual los valores de las incógnitas son:

$x_1 = 3; \quad x_2 = 2; \quad x_3 = 2$

Se puede verificar que la solución obtenida satisface al conjunto de ecuaciones planteado.

Unidad 3

Vectores

Álgebra lineal

Autor: Alexander Moreno Quiroga

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina
MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Introducción

Estudiaremos en este capítulo un concepto de gran aplicabilidad en el mundo físico real, el vector. Cobra gran importancia su estudio, al analizar diversos términos, conceptos, gráficos y operaciones ya que cuando se habla de fuerzas, velocidades, aceleraciones, etc. nos encontramos ante modelos reales representables por vectores, en la física en especial, se hace mucho uso de este concepto.

Todo esto buscando en los estudiantes la aplicación de los contenidos y diferentes estrategias desarrolladas, con el propósito de dar una respuesta concisa a diferentes ejercicios que le sirvan como herramienta para la solución de situaciones cotidianas.

Recomendaciones metodológicas

Esta cartilla está elaborada con el fin de guiar el aprendizaje significativo del tema de Vectores, a través de la resolución de diversos ejemplos, en los que se presentan procedimientos claros que resumen lo procesos.

El módulo inicia con la explicación geométrica del concepto de **Vector**, porque es la base para el reconocimiento de sus propiedades geométricas tales como el cálculo del módulo, la distancia entre dos puntos, vectores paralelos y punto medio de un segmento, de igual manera se presentan las operaciones relacionadas con vectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, para lo cual es necesario que el estudiante realice ejercicios complementarios a la par de la visualización de los ejemplos planteados también es recomendable revisar las lecturas sugeridas para llevar a cabo dicha tarea.

Desarrollo temático

Vectores

Definición

Un vector es un ente abstracto representable mediante un segmento dirigido, medido con una unidad previamente elegida es la *magnitud del vector* y el ángulo que forma el segmento dirigido con una línea horizontal es la dirección del vector. En la siguiente figura se muestra un vector $\vec{A}$ como también su dirección θ.

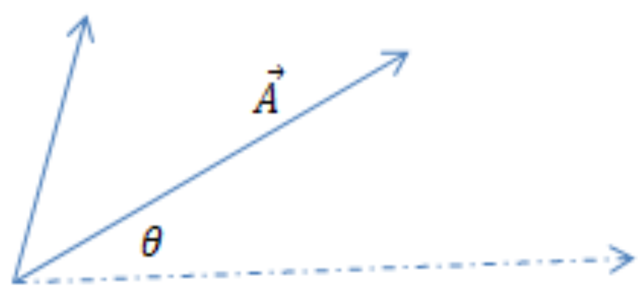


Imagen 1
Fuente: Propia.

Consideremos todos los vectores libres del plano pero localizados en un sistema de coordenadas XY.

Si se toma un vector libre $\vec{A}$, cualquiera, mediante la definición de vectores libres, $\vec{A}$ se puede desplazar paralelamente a si mismo hasta colocarlo de tal manera que el origen de la flecha coincida con el origen de coordenadas O.

Llamaremos $\mathbb{R}^2$ al conjunto de todos los vectores situados en el plano de coordenadas XY y que tienen su origen coincidente con el origen de coordenadas. Cada vector de $\mathbb{R}^2$ termina en un punto (a, b) del plano de coordenadas y recíprocamente cada punto del plano determina uno y solo un vector de $\mathbb{R}^2$ cuya punta de flecha termina en él.

Entonces, *Hay una correspondencia biunívoca entre los puntos del plano XY y los vectores en* $\mathbb{R}^2$*,* esto significa que a cada punto del plano le corresponde una flecha que va del origen al punto y recíprocamente. Si identificamos cada vector de $\mathbb{R}^2$ como la pareja ordenada (a, b), donde termina, entonces $\mathbb{R}^2$ es el conjunto de todas estas parejas; así se define:

$$\mathbb{R}^2 = \{(a, b): a\epsilon\mathbb{R}\ y\ b\epsilon\mathbb{R}\ \}$$

De igual manera es posible definir $\mathbb{R}^3$ como todos los puntos que corresponden a las ternas (a, b, c) donde termina cualquier vector, de la siguiente manera.

$$\mathbb{R}^3 = \{(a, b, c): a\epsilon\mathbb{R}\ , b\epsilon\mathbb{R}\ \text{y}\ c\epsilon\mathbb{R}\}$$

Módulo de un vector

El módulo de un vector se obtiene aplicando el Teorema de Pitágoras así: $|\vec{u}| = \sqrt{d^2 + u_3^2}$ y como $d^2 = u_1^2 + u_2^2$ se cumple que $|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$

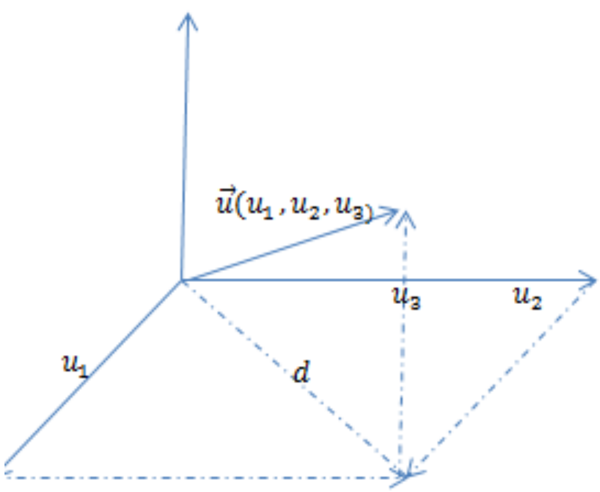


Imagen 2
Fuente: Propia.

Ejemplo
Sea $\vec{u} = (3,2,8)$ hallar $|\vec{u}|$

$$|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 8^2}$$
$$|\vec{u}| = \sqrt{73}$$

Distancia entre dos puntos

La distancia entre $A(a_1, a_2, a_3)\ y\ B(b_1, b_2, b_3)$ es el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$$
$$d(A,B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

Ejemplo

$$\vec{u} = (3,2,8)\ y\ \vec{v} = (-4,1,-3)$$

Hallar $d(A,B)$

$$d(A,B) = \sqrt{(-4-3)^2 + (1-2)^2 + (-3-8)^2}$$
$$d(A,B) = \sqrt{(-7)^2 + (-1)^2 + (-11)^2}$$
$$d(A,B) = \sqrt{49 + 1 + 121}$$
$$d(A,B) = \sqrt{171}$$

Vectores paralelos

Dos vectores paralelos se caracterizan por tener proporcionales sus componentes, es decir:

$$\vec{u} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow\ t\vec{u} = \vec{v}\ para\ algun\ t\ no\ nulo$$

Punto medio de un segmento

El punto medio M, de un segmento AB tiene por coordenadas las componentes de $\overrightarrow{OM}$

$$Punto\ medio\ de\ AB{:}\ M\left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}, \frac{a_3 + b_3}{2}\right)$$

Ejemplo

$$\vec{A} = (3,2,8)\ y\ \vec{B} = (-4,1,-3)$$
$$Punto\ medio\ de\ AB{:}\ M\left(\frac{3-4}{2}, \frac{2+1}{2}, \frac{8-3}{2}\right) = \left(\frac{-1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

Igualdad en $\mathbb{R}^3$

Si $\vec{A} = (a, b, c) y\ \vec{B} = (d, f, g), entonces$:

$$\vec{A} = \vec{B} \Leftrightarrow a = d, b = f\ y\ c = g$$

Al igual que para el caso de los vectores libres definimos las operaciones de suma y producto por un escalar en$\mathbb{R}$.

Definición suma en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

Si $\vec{A} = (a_1, a_2) y\ \vec{B} = (b_1, b_2), entonces\ la\ suma\ de\ los\ vectores \overrightarrow{A}\ y \overrightarrow{B}\ se\ define$:

$$\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} = (a_1 + b_1\ , a_2 + b_2)$$

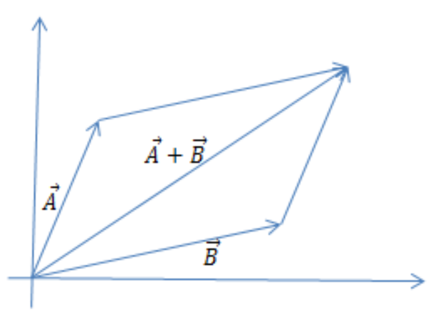


Imagen 3
Fuente: Propia.

Ejemplo: calculemos la suma de los vectores $\vec{A} = (1{,}3) y\ \vec{B} = (-3{,}7)$, .
Siguiendo la definición de suma vectorial se cumple que:

$$\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} = (1 + (-3), 3 + 7)$$

$$\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} = (-2{,}10)$$

Gráficamente se tiene:

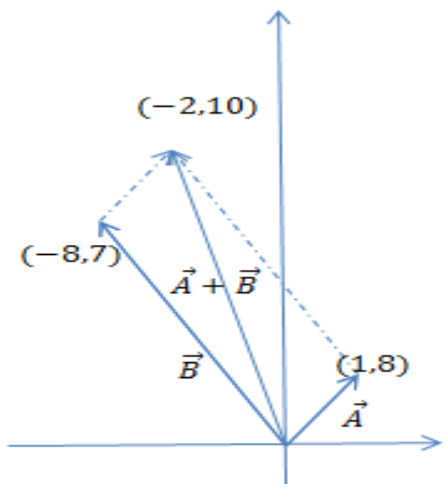


Imagen 4
Fuente: Propia.

De igual manera se cumple para $\mathbb{R}^3$
S$\vec{A} = (a_1, a_2, a_3) y\ \vec{B} = (b_1, b_2, b_3)$, $entonces\ la\ suma\ de\ los\ vectores\ \overrightarrow{A}\ y \overrightarrow{B}\ se\ define$

$$\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} = (a_1 + b_1\ , a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

Producto escalar en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

Definición:
Si $\overrightarrow{A}\ \epsilon \mathbb{R}^2, digamos\ \overrightarrow{A} = (a_1, a_2)\ y\ \lambda \epsilon\ \mathbb{R}, se\ define\ el\ producto\ de\ \lambda\ por\ \overrightarrow{A}, mediante$

$$\lambda \overrightarrow{A} = \lambda(a_1, a_2) = (\lambda a_1, \lambda a_2)$$

Ejemplo: si $\overrightarrow{A} = (3,5)\ y\ \lambda = 2, entonces\ \lambda \overrightarrow{A} = (6,10)$

Ejemplo:

$$Si\ \overrightarrow{A} = (3,5)\ y\ \overrightarrow{B}\ (\ 2,1), calculemos\ 2\overrightarrow{A} + 3\overrightarrow{B}$$

$$2\overrightarrow{A} + 3\overrightarrow{B} = (6,10) + (6,3)$$

$$2\overrightarrow{A} + 3\overrightarrow{B} = (12,13)$$

Así mismo es posible establecer su equivalencia en $\mathbb{R}^3$

$$\overrightarrow{A}\, \epsilon \mathbb{R}^3, digamos\ \overrightarrow{A} = (a_1, a_2, a_3)\ y\ \lambda \epsilon\ \mathbb{R}, se\ define\ el\ producto\ de\ \lambda\ por\ \overrightarrow{A}, mediante$$
$$\lambda \overrightarrow{A} = \lambda(a_1, a_2, a_3) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3).$$

Producto escalar de vectores

Definición: sean $u\ y\ v$ dos vectores se define el producto escalar entre ellos de la siguiente manera.

$$\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|\cos(\vec{u}.\vec{v})$$

Propiedades:
Sean u , $v\ y\ w$ tres vectores entonces se cumple que:

- i) Si $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$
- ii) $\vec{u} = 0$, ó $\vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$
- iii) $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$
- iv) $\vec{u}.(\vec{v}.\vec{w}) = (\vec{u}.\vec{v}).\vec{w}$
- v) $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}\vec{w}$
- vi) Si $B(u\ , v\ )$es una base ortogonal $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u} = 0$
- vii) Si $B(u\ .\ v\ )$es una base ortonormal $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u} = 0, \vec{u}.\vec{u} = 1\ y\ \vec{v}.\vec{v} = 1$

Producto vectorial de vectores

Definición: Sean $u\ y\ v$ dos vectores se define el producto vectorial o producto cruz entre ellos de la siguiente manera;

$$\vec{u}x\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\text{sen}\ \theta$$

Siendo θ el ángulo comprendido entre los vectores $\vec{u}\ y\ \vec{v}$ gráficamente se tiene.

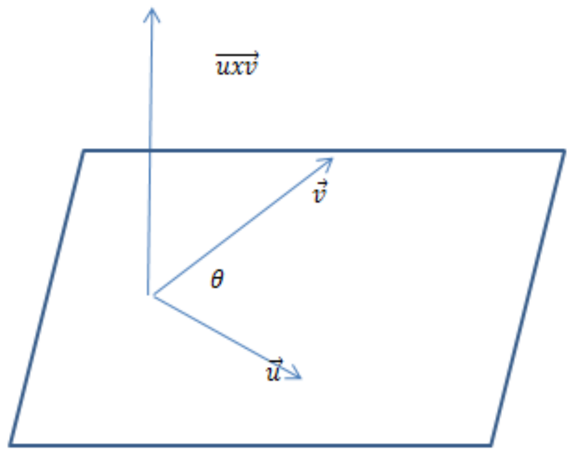


Imagen 5
Fuente: Propia.

El Producto vectorial se puede calcular mediante un determinante.

$$\vec{u}x\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}\vec{\imath} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}\vec{\jmath} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$$

Ejemplo 6: Calcular el producto vectorial de los vectores $\vec{u} = (1,2,3)\ y\ \vec{v} = (-1,1,2)$.

$$\vec{u}\ X\ \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\vec{\imath} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\vec{\jmath} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\vec{k} =$$

$$\vec{\imath} - 5\vec{\jmath} + 3\vec{k}$$

Vector unitario

Un vector es unitario si su módulo es la unidad. Un vector unitario es útil cuando se toma en la misma dirección y sentido de otro dado:

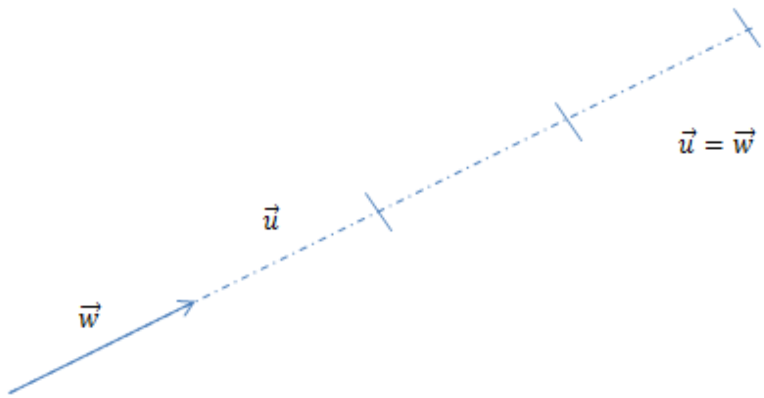


Imagen 6
Fuente: Propia.

Los vectores $\vec{\imath} = (1,0,0), \vec{\jmath} = (0,1,0), \vec{k} = (0,0,1)$ son unitarios en la dirección positiva de los ejes.

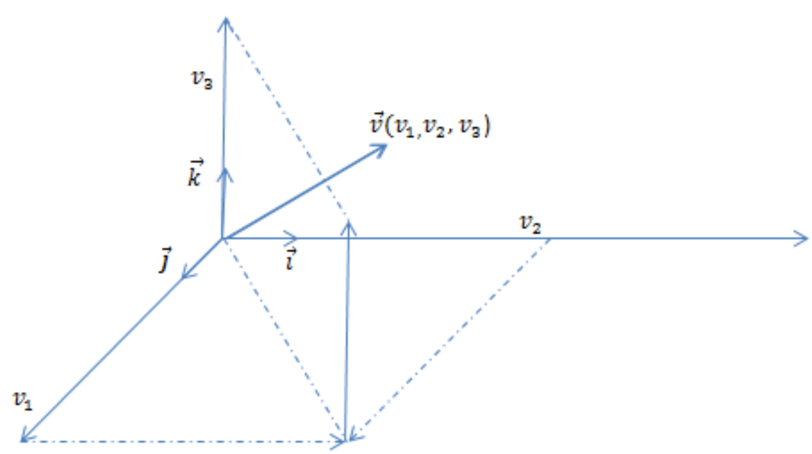


Imagen 7
Fuente: Propia.

Cualquier vector $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$pueden escribirse como combinación lineal de ellos $\vec{v} = v_1\vec{\imath} + v_2\vec{\jmath} + v_3\vec{k}$

Rectas y planos en el espacio 3x3

Sistema de coordenada rectangular en el espacio

Consideremos tres planos mutuamente perpendiculares, Pxy, PXz, Pyz, que se cortan en un mismo punto O. En la figura identificamos los siguientes elementos geométricos.

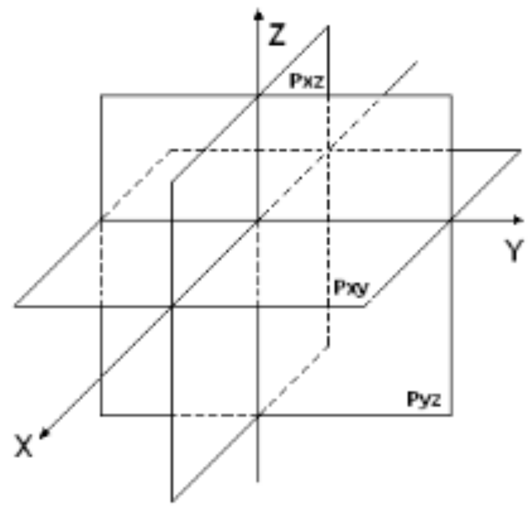


Imagen 8
Fuente: Propia.

Ejes coordenados y planos coordenados

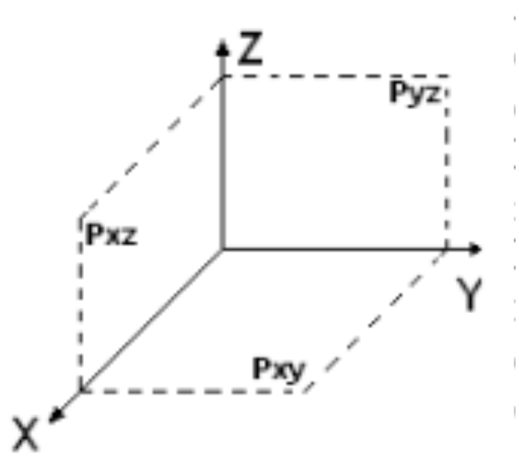


Imagen 9
Fuente: Propia.

Los ejes generalmente son identificados por letras X, Y, Z y se habla frecuentemente del eje X, del eje Y y del eje Z, donde:

El eje X es la recta determinada por la intersección de los planos Pxy y Pxz, el eje Y es la recta determinada por la intersección de los planos Pxy y Pyz y El eje Z es la recta determinada por la intersección de los planos Pxz y Pyz. La dirección positiva se indica por medio de una flecha. Los ejes coordenados tomados de dos en dos determinan tres planos, llamados planos coordenados.

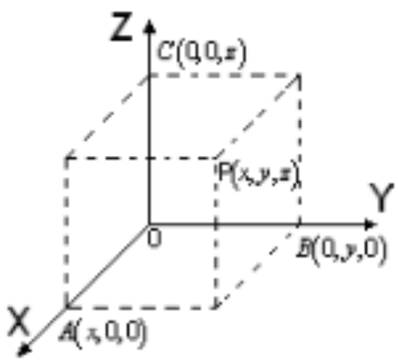


Imagen 9
Fuente: Propia.

El plano coordenado XY que denotaremos por Pxy, es determinado por las rectas: eje X y eje Y.

El plano coordenado XZ que denotaremos por Pxz, es determinado por las rectas: eje X y eje Z.

El plano coordenado YZ que denotaremos por Pyz, es determinado por las rectas: eje Y y eje Z.

Los planos coordenados dividen al espacio tridimensional en 8 sub-espacios llamados octantes.

Consideramos un punto p(x, y, z), cualquiera en el espacio tridimensional, a través de p(x, y, z) se construye tres planos un plano perpendicular a cada uno de los ejes coordenados.

Sean A(x, 0, 0) el punto en el cual el plano perpendicular corta al eje X, B(0, y, 0) el punto en el cual el plano perpendicular corta al eje Y, y sea C(0, 0, z) el punto en el cual el plano perpendicular corta al eje Z.

Distancia entre dos puntos

Teorema: la distancia no dirigida entre dos puntos $p_1(x_1, y_1, z_1)$ y $p_2(x_2, y_2, z_2)$del espacio tridimensional está dado por:

$$d(p_1, p_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

La recta

La recta en el espacio tridimensional

Dado un punto $p_0(x_0, y_0, z_0)$ y un vector $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ no nulo, llamaremos recta que pasa por $p_0(x_0, y_0, z_0)$ paralela al vector $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ al conjunto.

$$L = \{p\epsilon R^3 / P = p_0 + t\vec{a}, t\epsilon R\}$$

Ecuación vectorial de la recta

Sea L la recta que pasa por el punto $p_0(x_0, y_0, z_0)$ paralelo al vector $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$. Si $p(x, y, z)$ de R^3en un punto cualquiera de la recta L, entonces el vector $\overrightarrow{P_0P}$ es paralelo al vector $\vec{a}$, es decir $\overrightarrow{P_0P} / / \vec{a} \Leftrightarrow \exists t\epsilon R$ tal que $\overrightarrow{P_0P} = t\vec{a}$, de donde entonces $p = p_0 + t\vec{a}$, por tanto la recta es dado por:

$$L = \{p\epsilon R^3 / p = p_0 + t\vec{a}, t\epsilon R\}$$

Ecuación paramétrica de la recta en el espacio

Consideremos la ecuación vectorial de la recta:

$$L = \{p\epsilon R^3 / P\, p = p_0 + t\vec{a}, t\epsilon R\}$$

De la observación anterior se tiene:

$$p\epsilon L \Leftrightarrow p = p_0 + t\vec{a}\ para\ algun\ real\ t$$

De donde al reemplazar las coordenadas de P, P_0y de las componentes dl vector $\vec{a}$ se tiene: $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a_1, a_2, a_3), es\ decir$:

$$L: \begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t, t \epsilon R \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases}$$

Estas se conocen con el nombre de ecuaciones paramétricas de la recta L.

Ecuación simétrica de la recta

Consideremos las ecuaciones paramétricas de la recta L.

$$L: \begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t, t \epsilon R \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases}$$

Suponiendo que $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$, y $a_3 \neq 0$ despejando t en cada ecuación se tiene:

$$t = \frac{x - x_0}{2} = \frac{y - y_0}{2} = \frac{z - z_0}{2}$$

De aquí por igualdad:

$$L: \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$$

Ecuación denominada **simétrica de la recta L.**

Angulo entre dos rectas

Consideremos las ecuaciones de dos rectas:

$$L_1 = \{P_0 + t\vec{a} \ / \ t\epsilon R\} \qquad L_2 = \{q_0 + \lambda\vec{b} \ / \ \lambda\epsilon R\}$$

Un ángulo entre las rectas L_1 y L_2 se define como el ángulo formado por sus vectores direccionales $\vec{a}$ y $\vec{b}$, está dado por la fórmula.

$$cos\theta = \frac{ab}{\|a\|\|b\|}, 0 \leq \theta \leq \pi$$

El plano

Definición

Un plano es un conjunto P de puntos p(x, y, z) de R^3 Si existe un punto $p_0(x_0, y_0, z_0)$ de R^3 y dos vectores no paralelos $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ de tal manera que:

$$P = \left\{P(x.y.z)\epsilon R^3 / P(x.y.z) = p_0(x_0, y_0, z_0) + t\vec{a} + \lambda\overrightarrow{b}, t, \lambda\epsilon R\right\}$$

Ecuaciones paramétricas del plano

Consideremos el plano:

$$P = \left\{p_0 + t\vec{a} + \lambda\overrightarrow{b}, t, \lambda\epsilon R\right\}$$

Se cumple que:

$$P: \begin{cases} x = x_0 + a_1 t + b_1\lambda \\ y = y_0 + a_2 t + b_2\lambda, t \; \epsilon \; R \\ z = z_0 + a_3 t + b_3\lambda \end{cases}$$

Ecuación general del plano

Sea P el plano que pasa por el punto $p_0(x_0, y_0, z_0)$ cuyo vector normal es $\overline{N} = (A, B, C)$SI $p\epsilon P$ entonces $\overline{P_0 P}.\overline{N}$ entonces $\overline{N}.(p - P_{0)} = 0$ y reemplazando por sus componentes se obtiene.

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Planos paralelos y ortogonales

El plano P_1 es paralelo al plano P_2, $(P_1 \parallel P_2)$ si y solo si sus normales $\overline{N_1} \, y \, \overline{N_2}$ son paralelas, es decir:

$$\boxed{P_1 // P_2 \Leftrightarrow \overline{N_1} // \overline{N_2}}$$

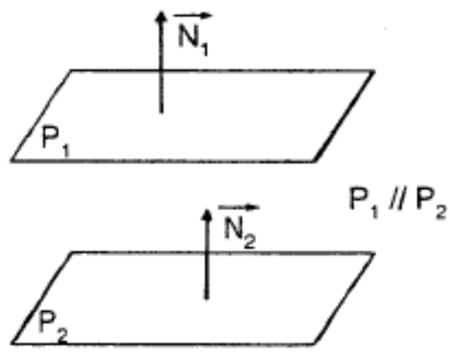


Imagen 10
Fuente: Propia.

El plano P_1 es ortogonal al plano P_2, $(P_1 \perp P_2)$sy y solo si sus normales $\overline{N_1}\ y\ \overline{N_2}$ son ortogonales.

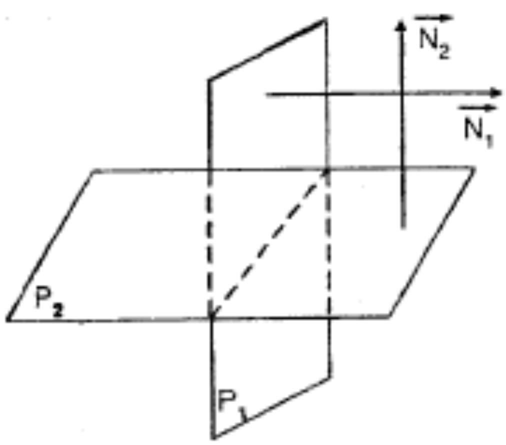


Imagen 11
Fuente: Propia.

Distancia de un punto a un plano

Consideremos la ecuación general de un plano P:

$Ax + By + Cz + D = 0$ y un punto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ que no pertenece al plano P.

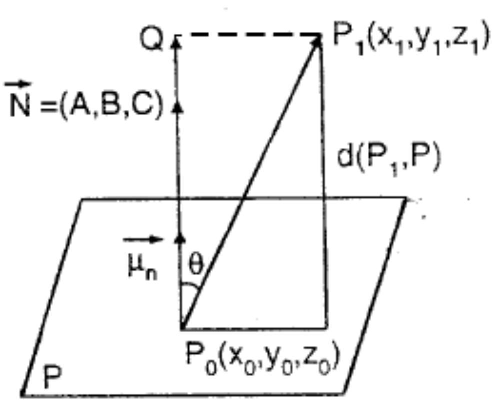


Imagen 12
Fuente: Propia.

Entonces la ecuación que entrega el valor de la distancia es:

$$d(P_{1,}P) = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Distancia entre dos planos paralelos

Sean $P_1: Ax + By + Cz + D_1 = 0$ Y $P_2: Ax + By + Cz + D_2 = 0$ las ecuaciones generales de dos planos paralelos, entonces la distancia entre dichos planos esta dada por la formula:

$$d(P_{1,}P_2) = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

3

Unidad 3

Espacios vectoriales

Álgebra lineal

Autor: Alexander Moreno Quiroga

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina
MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Introducción

Anteriormente se ha llegado al concepto de matrices y vectores, analizando algunas de sus propiedades y operaciones básicas. A continuación nos dedicaremos a estudiar con mayor rigor estos conceptos para realizar un acercamiento a una de las principales estructuras usadas en el álgebra, denominada espacios vectoriales.

Recomendaciones metodológicas

En el desarrollo de la presente cartilla es necesario que el estudiante utilice al máximo su aptitud para la abstracción ya que se utilizan conceptos manejados en las unidades anteriores, porque proporcionan la base para los espacios vectoriales; también es importante realizar las lecturas anexas y desarrollar cada uno de los ejemplos planteados a la par de su lectura.

Desarrollo temático

Espacios vectoriales

Cuando se manejan vectores en $\mathbb{R}^2$ o en $\mathbb{R}^3$ es posible llegar a una serie de propiedades, a partir de las cuales, se deduce el concepto de espacio vectorial como el que cumple dichas propiedades, y que se resumen en la definición.

Definición

Sea V un conjunto y sea K un cuerpo. Supongamos que están definidas un par de operaciones en V, "+" (nombrada suma), la cual asigna a una pareja de elementos $u, v \in V$, un elemento $u + v \in V$ y otra externa ".":$K\ X\ V \longrightarrow V$ (nombrada multiplicación, que asigna a cada elemento) $\lambda \in K$ y a cada $v \in V$ un elemento $\lambda . v \in V$.

Propiedades

Se dice que la terna $(V, +, .)$ es un espacio k- vectorial si se cumplen las siguientes propiedades:

i) V es un grupo abeliano con la suma "+" $\forall u, v, w \in V$ se tiene que:

a. Asociativa

$$(u + v) + w = u + (v + w)$$

b. Conmutativa

$$u + v = v + u$$

c. Elemento neutro

$$u + 0 = u$$

d. Opuesto

Dado $u \in V\ \exists\ v\ tal\ que$

$$u + v = 0$$

Se dice que v es el elemento opuesto de u y se denota $u = -v$

ii) Pseudodistributivas $\forall u, v \in V, \forall \lambda, \mu \in K$ se cumple que:

a. $\lambda.(u + v) = \lambda u + \lambda v$

b. $(\lambda + \mu).u = \lambda u + \mu u$

iii) Pseudoasociativas $\forall u \in V, \forall \lambda, \mu \in K$ se cumple que:

$$(\lambda.\mu).u = \lambda(\mu.u)$$

iv) Pseudoelemento neutro $\forall u \in V$ se cumple que:

$$1.u = u$$

Se dice que 1 es el elemento neutro para la multiplicación en K.

Para cuestiones de notación es importante reconocer algunos aspectos:

- A los elementos de un espacio vectorial se les denomina vectores del espacio vectorial.
- A los elementos del cuerpo K se les llama escalares.
- Para el grupo abeliano se define el vector especial llamado vector nulo que se denota 0_v y es el elemento neutro de la suma.
- El elemento neutro del cuerpo K se denotara en adelante 0_k.
- Para no llevar a confusión en la suma vectorial y la suma escalar se tendrá como notación el mismo símbolo "+" y el elemento neutro 0.

Ejemplo

Tomando $k = \mathbb{R}$ definimos el siguiente conjunto:

$$V = \mathbb{R}^2 = \{(x, y): x.y \in \mathbb{R}\}$$

Definimos dos operaciones en V.

- Interna "+"
- Externa "."

$dados\ u = (x. y), v = (z, t) \in V$ Se define:

$$u + v = (x, y) + (z, t) = (x + z, y + t)$$

$dados\ u = (x. y), \in V\ y\ \lambda \in \mathbb{R}$ Se define:

$$u + v = (x, y) + (z, t) = (x + z, y + t)$$

Demostremos que $\mathbb{R}^2$es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

a. Grupo abeliano:

i) Propiedad asociativa

Sea $u = (x + y), v = (z, t), w = (a + b) \in V$

Se cumple que:

$$(u + v) + w = [(x, y) + (z + t) + (a + b)] =$$

$$(x + z, y + t) + (a + b) = \big((x + z) + a, (y + t) + b\big) =$$

$$\big(x + (z + a), y + (t + b)\big) =$$

$$(x, y) + [(z + a, t + b)] =$$

$$= u + (v + w)$$

(Propiedad asociativa en$\mathbb{R}$)

ii) $u = (x + y), v = (z, t) \in V$

Se cumple que:

$$u + v = (x, y) + (z, t) =$$

$$u + v = (x, y) + (z + t) =$$

$$= (x + z, y + t) = (z + x, t + y) =$$

$$= (z, t) + (x + y) = v + u$$

(Propiedad conmutiva en $\mathbb{R}$)

iii) Elemento neutro

El vector $(0,0)$ es vector neutro para todo$u = (x, y) \in V$ tal que

$$u + 0 = (x, y) + (0,0) = (x + 0, y + 0) = (x, y) = u$$

(0 es el neutro para la suma en $\mathbb{R}$)

iv) Elemento opuesto

Dado $u = (x, y) \in V$existe un vector, denotado por $-u = (-x, -y)$ tal que

$$u + (-u) = (x. y) + (-x. -y) = (0.0)$$

b. Propiedades pseudodistributivas:

i) Sean $u = (x, y), v = (z, t) \in V y\ \lambda \epsilon \mathbb{R}$ se cumple que:

$$\lambda. (u + v) = \lambda[(x, y) + (z, t)] = \lambda. (x + z, y + t) =$$

$$= (\lambda. x, \lambda. y) + (\lambda. z, \lambda. t) = \lambda. (x, y) + \lambda. (z, t) = \lambda u + \lambda v$$

(Propiedad distributiva en $\mathbb{R}$)

ii) $u = (x, y) \in V y\ \lambda, \mu \epsilon \mathbb{R}$ se cumple que:

$$(\lambda + \mu). u = (\lambda + \mu). (x + y) = \big((\lambda + \mu). x, (\lambda + \mu). y\big) =$$

$$(\lambda. x + \mu. x, \lambda. y + \mu. y) = (\lambda. x, \lambda. y) + (\mu. x, \mu. y) =$$

$$= \lambda. (x, y) + \mu(x, y) = \lambda. u + \mu. u$$

(Propiedad distributiva en $\mathbb{R}$)

c. Propiedad pseudoasociativa: $u\ = (x, y) \in V y\ \lambda, \mu \epsilon \mathbb{R}$ se cumple que:

$$(\lambda. \mu). u = (\lambda. \mu). (x, y) = [(\lambda. \mu). x, (\lambda. \mu). y] = [\lambda. (\mu. x), \lambda. (\mu. y)] =$$

$$\lambda. (\mu. x, \mu. y) = \lambda. \big(\mu. (x, y)\big) = \lambda. (\mu. u)$$

(Propiedad asociativa en $\mathbb{R}$)

d. Pseudoelemento neutro: $u\ = (x, y) \in V$ se cumple que:

$$1. u = 1. (x, y) = (1. x, 1. y) = (x, y) = u$$

De igual manera es posible demostrar que para $(\mathbb{R}^3, +, .)$, $(\mathbb{R}^4, +, .)$ y generalmente para $(\mathbb{R}^n, +, .)$ con $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo

Consideramos P el conjunto de polinomios, definido así:

$P = P_2[\mathbb{R}] = \{ax^2 + bx + c: a, b, c \in \mathbb{R}\}$

Se establece una operación interna "+" y una multiplicación por escalares "." de la siguiente manera:

Sea: $ax^2 + bx + c, dx^2 + ex + f \in P, \lambda \in \mathbb{R}$

Definimos la operación interna así:

$$(ax^2 + bx + c) + dx^2 + ex + f = (a + d)x^2 + (b + e)x + c + f$$

También se define:

$$\lambda(ax^2 + bx + c) = \lambda ax^2 + \lambda bx + \lambda c$$

El vector nulo seria el polinomio:

$$0x^2 + 0x + 0 = 0$$

Y el opuesto al vector $ax^2 + bx + c$ es:

$$-ax^2 - bx - c$$

Del mismo modo es posible definir $P_3[\mathbb{R}]$y $P_4[\mathbb{R}]$ y en general $P_n[\mathbb{R}]$

Ejemplo

Sean $m, n \epsilon \mathbb{N}$, también se cumple para las matrices de orden mxn, que posean coeficientes sobre k, conforman un $k - espacio\, vectorial$ con la suma y el producto por escalares, como elemento neutro se toma la matriz nula y como opuesto, la misma matriz con los inversos aditivos de cada una de sus componentes.

Subespacios vectoriales

Definición

Un subconjunto W de un k- espacio vectorial, se dice que W es un subespacio de V denotado por $W \leq V$, si se cumplen las siguientes propiedades.

1. Sean $u, v \ \in W$ un par de vectores, se cumple que $u + v \ \in W$.
2. Para todo vector $u \in W$ y todo escalar $\lambda \in K$ se tiene que $\lambda u \in W$.

Propiedad: si V es un espacio vectorial, entonces.

1. Si $W \leq V$, entonces $(W, +, .)$(Cumple las operaciones de suma y multiplicación de V) es un espacio vectorial.
2. Dado un subconjunto $W \; de \; V$, se tiene que W es un subespacio de V si y solo si para cada par de vectores $u, v \in W$ y cada par de escalares $\lambda, \mu \in K$. Se tiene que $\lambda u + \mu v \in W$.
3. Si $W \leq V$ Entonces $0 \in W$.

Ejemplo

Se considera el espacio vectorial $V = \mathbb{R}^2$ y el subconjunto $W = \{(x, y) tales \; que \; 3x - y = 0\} \; de \; \mathbb{R}^2$. Entonces W es un subespacio de V

Dados $u = (x, y), v = (z, t) y \; \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, se debe probar que $w = \alpha u + \beta v$ esta en W. Como $w = \alpha(x, y) + \beta(z, t) = (\alpha x + \beta z, \alpha y + \beta t)$ y como $3x - y = 0, 3z - t = 0$, se tiene que $3(\alpha x + \beta z) - (\alpha y + \beta t) = \alpha(3x - y) + \beta(3z - t) = 0$. Asi que $w \epsilon W$.

Ejemplo

Sea $V = K^3 = \{(x, y, z) x, y, z \epsilon K\} \; y \; sea \; U = \{(x, y, z) z = 1\}$ Se tiene que U no es un subespacio de V, porque el vector nulo de K^3, $0 = (0,0,0), no \; esta \; en \; U$.

Combinaciones lineales, subespacio generado y sistema generador

Dados un sistema de vectores $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ de un espacio vectorial V. de un vector v del espacio vectorial, diremos que v es combinación lineal del sistema, si:

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n \text{ para algunos } \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n \epsilon k$$

Ejemplo

Encontremos el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores $(2,0,3) y\, (-1,1,0)$. Este es:

$< (2,0,3), (-1,1,0) >= \{\alpha(2,0,3) + \beta(-1,1,0) : \alpha, \beta \epsilon \mathbb{R}\} = \{(2\alpha - \beta, 3\alpha) : \alpha, \beta \epsilon \mathbb{R}\}$

Se dice que $\{v_1, v_2, \dots v_n\}$ es un sistema generador de V si:

$$V =< v_1, v_2, \dots v_n >$$

Lo cual ocurre si y solo si todo vector V es combinación lineal del sistema de los vectores $v_1, v_2, \dots v_n$.

Generalmente una de las maneras más sencillas para determinar si un sistema de vectores es un sistema generador es comprobando si el sistema de ecuaciones lineales es un Sc. Por ejemplo, si se analizan los rangos.

Propiedades

Sea V un espacio vectorial. Entonces:

i) Tenemos un sistema de vectores $v_1, v_2, \dots v_n$ de V, se tiene que para todo $v_i\ i \in \mathbb{N}$ hace parte de $< v_1, v_2, \dots v_n >$.
ii) El subespacio generado por un sistema de vectores no varía si realizamos alguna de las siguientes manipulaciones:
    a. Se aplican trasformaciones elementales de Gauss. Particularmente se realiza a un conjunto generador de V.

b. Es posible además eliminarse algunos vectores que no aporten más información de la que ya aportan los demás, en un sistema de vectores es decir, si a un sistema de vectores le quitamos uno que sea CL de los demás el sistema resultante es de nuevo un SG de V.

Ejemplo

Analicemos el espacio de $\mathbb{R}^4$

$W =< (1,2,0,-1), (0,-1,3,0), (2,4,0,-2), (2,3,3,-2), (0,0,0,0), (1,0,6,-1) >$

Hallar un SG de W que tenga la mayor cantidad de vectores posible, luego de escalonar por Gauss se deduce que uno de los SG de W puede ser:

$$(1,2,0,-1), (0,-1,3,0), (2,3,3,-2), (1,0,6,-1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

Vamos a efectuar los cambios:

$$F_3 - 2F_1$$

$$F_4 - F_1$$

Obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

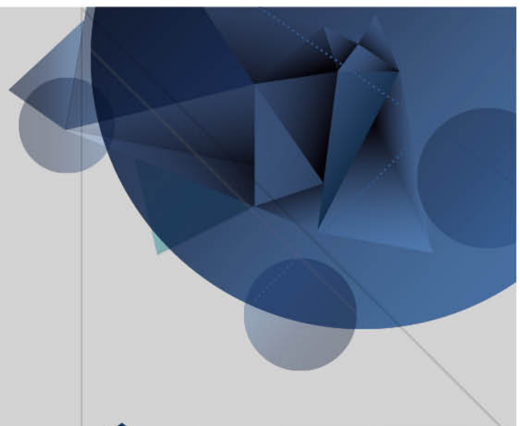
Es posible eliminar la tercera fila ya que es igual a la segunda, y también se puede eliminar la cuarta fila ya que es el doble de la segunda. De esta manera Obtenemos como Sistema generador de W.

$$\{(1.2,0,-1), (0,-1,3,0)\}$$

4

Unidad 4

Espacios euclídeos N dimensiones



Álgebra lineal

Autor: Alexander Moreno Quiroga

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina
MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Introducción

Cuando se trabajan las nociones de distancia y ángulo dentro de un espacio vectorial es necesario definir en él un producto escalar, integrando el concepto de espacio euclídeo tema del cual nos ocuparemos en esta cartilla.

Iniciaremos su estudio con la definición de producto escalar y posteriormente nos dedicaremos a analizar su relación con los espacios vectoriales reales, conduciendo al campo de lo abstracto los conceptos de longitud y ángulo.

Se trabajaran temas relacionados con los espacios vectoriales y algunos conceptos de la geometría tales como ángulo, longitud, ortogonalidad, distancias, áreas.

Recomendaciones metodológicas

Se realiza una completa descripción de los aspectos más relevantes del espacio euclidiano los cuales deben ser interiorizados por el estudiante para lograr establecer la relación de cada uno de ellos con el tema en general, así mismo se presenta una serie de ejemplos que proporcionan una mayor claridad a las definiciones dadas, se recomienda revisar la bibliografía sugerida, para afianzar en los conocimientos y resolver las actividades de repaso de la semana.

Desarrollo temático

Espacios euclídeos N dimensiones

Producto escalar

En $\Re^2$ se encuentra el producto escalar usual $(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = a_1 b_1 + a_2 b_2$

Esta operación entre se realiza entre dos vectores y el resultado es un escalar.

A través del producto escalar es posible determinar si dos vectores son ortogonales siempre que cumplan con la siguiente condición:

Dos vectores son ortogonales si su producto escalar es cero.

Ejemplo

Determinar si los vectores $(1,3)$ y $(-6,2)$ son ortogonales:

$$(1,3).(-6,2) = 1.(-6) + 3.2 = 0$$

Producto escalar en cualquier espacio

Una operación en un espacio vectorial que cumpla con las siguientes propiedades, es un producto escalar. Se denomina espacio euclídeo a un espacio vectorial con la particularidad de tener un producto escalar nombrado como $u \cdot v$.

1. Conmutativa. $u \cdot v = v \cdot u$
2. Distributiva. $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$
3. Reubicación del escalar. $\alpha\, (u \cdot v) = (\alpha\, u) \cdot v = u \cdot (\alpha\, v)$
4. Definida positiva: $v\,.\,v \geq 0$, y se da la igualdad $v \cdot v = 0$ solamente para el vector $v = 0$

Ejemplo

El producto escalar usual en $\mathbb{R}^n$.

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \cdot (b1, b2, \ldots, bn) = a1\, b1 + a2\, b2 + \ldots + an\, bn$$

Se puede expresar como el producto de una matriz fila por una matriz columna.

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n)\begin{pmatrix} b_1 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n$$

A partir de la definición de producto escalar se pueden definir algunos elementos geométricos, teniendo a V como un espacio euclideo.

Norma o módulo de un vector

La norma o módulo de un vector corresponde a la longitud del vector y se puede calcular mediante la fórmula.

$$| v | = v \cdot v$$

Algunas características de los módulos de los vectores son:

- El único vector cuyo módulo cero es el cero.
- El módulo de un vector es el mismo que el de su opuesto.
- Dado un vector $v \epsilon R^n$y $\alpha \epsilon R$ se cumple que el módulo de $\alpha\ v$ es:

$$| \alpha\ v | = | \alpha | | v |$$

- Para cualquier par de vectores $u\ y\ v$ se cumple para cualesquiera u, v la desigualdad triangular:

$$| u + v | \leq | u | + | v |$$

Vectores ortogonales

Como se había enunciado unas líneas más arriba dos vectores u, v son ortogonales si su producto escalar es cero y se denota $u \perp v$.

Sea $A = \{u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n,\}$ un conjunto de vectores cualesquiera diferentes de cero se dice que A es un ortogonal si cada uno de los vectores del conjunto es ortogonal a los demás. Es decir:

$$u_1 \perp u_2 \perp \ldots \perp u_n$$

Es fácil ver que si dos vectores u_1, u_2 son ortogonales entonces también lo son sus múltiplos $\alpha\, u_1 \; y \; \beta\, u_2$ (α, β escalares).

Distancia entre dos vectores

La distancia entre u_1, u_2 se define como la norma del vector diferencia entre los dos.

$$dist\ (u_1, u_2) = |\, u_1, u_2 \,|$$

Ángulo entre dos vectores

Dados dos vectores u_1, u_2 y sea α el ángulo comprendido entre ellos, el producto escalar usual de $\Re^2$ se tiene que:

$$u \cdot v = |\, u \,|\, |\, v \,|\, cos\ \alpha$$

Generalizando para cualquier espacio euclídeo y dos vectores u_1, u_2 no nulos se tiene.

$$\acute{A}ngulo\ (u_1, u_2) = arc\ cos\ \frac{u_1 . u_2}{|\, u_1 \,|\, |u_1\,|}$$

Ejemplo

En $\Re^3$ con el producto escalar usual:

Sea $u = (1,2,1), v = (2,0,1)$.

- Sus módulos son: $|u| = \sqrt{(1,2,1)\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}} = \sqrt{6},\ |v| = \sqrt{(2,,0,1)\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}} = \sqrt{5}$
- Su distancia es $|\ v - u\ | = |\ (1,-2,0)\ | = \sqrt{5}$
- El ángulo que forman es $arccos\,\frac{(1,2,1)\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}}{\sqrt{6}.\sqrt{5}} = arccos\,\frac{3}{\sqrt{30}} = 56{,}7°$

Ejemplo

En el espacio C[0,1] de funciones continuas en el intervalo [0, 1]
Sean los vectores (funciones) $f(x) = x^2$, g$(x) = x + 1$, respecto al producto escalar $f.g = \int_0^1 f(x)g(x)dx$

- Sus módulos son: $|f| = \sqrt{\int_0^1 x^2x^2dx} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \sqrt{\int_0^1 (x+1)(x+1)dx} = \sqrt{\frac{7}{3}}$
- Su distancia es: $\sqrt{\int_0^1 [x^2 - (x+1)^2)]dx} = \frac{41}{30}$
- Ángulo que forman: $\frac{f.g}{|f||g|} = arccos\,\frac{\int_0^1 x^2(x+1)dx}{\frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{\frac{7}{3}}} = 0{,}547\ rad$

Teorema (desigualdad de Cauchy-Schwarz)

Sean u_1 y u_2 dos vectores que se encuentran en un espacio euclídeo, se tiene que el valor absoluto de su producto escalar, siempre es menor o igual que el producto de sus normas.

$$|u_1 \cdot u_2| \leq |u_1| \cdot |u_2|$$

Si se quisiera establecer la igualdad $|u_1 \cdot u_2| = |u_1| \cdot |u_2|$ *sólo es posible hacerlo si* u_1 *es múltiplo de* u_2 *. es decir que existe un* λ *tal que*

$$u_2.\lambda = u_1$$

Normalización, conjunto ortonormal

Normalizar un vector es un proceso mediante el cual se reduce a otro vector (múltiplo suyo) de norma 1. Ello se consigue multiplicando el vector por el número $\frac{1}{|v|}$.

Ejemplo

El vector (6,8) tiene norma 10 es decir que mide diez unidades de longitud Asi, $\frac{(6,8)}{(6,8)} = \frac{(6,8)}{10} = \left(\frac{6}{10}, \frac{8}{10}\right)$ es el vector normalizado: su norma es 1.

Efectivamente $\left(\frac{6}{10}\right)^2 + \left(\frac{8}{10}\right)^2$=1

Se llama conjunto ortonormal a un conjunto ortogonal cuyos vectores tienen todos norma 1. Se puede obtener normalizando un conjunto ortogonal.

Ejemplo

(1,2,0), (4,-2,0) es ortogonal pero no ortonormal. Si normalizamos los vectores, se obtiene:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}},0\right),\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{-1}{\sqrt{5}},0\right)$$

que ya es un conjunto ortonormal.

Matriz ortogonal

Si las columnas de una matriz cuadrada de orden nxn son vectores ortonormales de $\Re^n$ se dice que es una matriz ortogonal.

Ejemplos

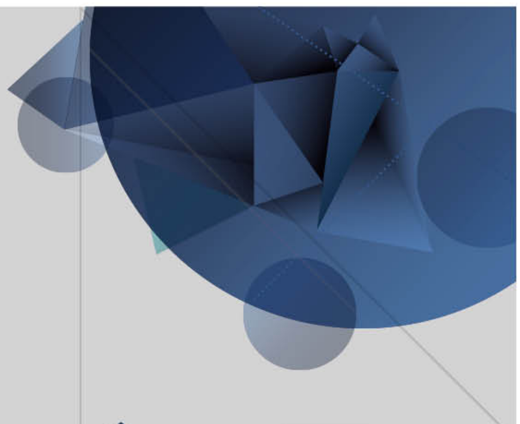
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} en\ \Re^3$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} en\ \Re^2$$

4

Unidad 4

Transformación lineal



Álgebra lineal

Autor: Alexander Moreno Quiroga

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina

MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Introducción

En este espacio se realizará la definición y el estudio de las transformaciones lineales de un espacio vectorial V, nos centraremos básicamente en las funciones denominadas transformaciones lineales, ya que son fundamentales en el estudio del álgebra lineal y en bastantes aplicaciones.

Recomendaciones metodológicas

Las transformaciones lineales constituyen un tópico de interés practico, su estudio requiere el manejo de conceptos tales como matrices, vectores, escalares, etc., por tal motivo es importante tener fuertes bases adquiridas en los módulos anteriores, si considera necesario retome cartillas anteriores para repasar los ejes temáticos en los cuales sienta que tiene alguna debilidad o recurra a las lecturas adicionales de esta semana, en esta cartilla se abordan las transformaciones lineales desde la definición formal hasta sus principales características.

Desarrollo temático

Transformación lineal

Definiciones

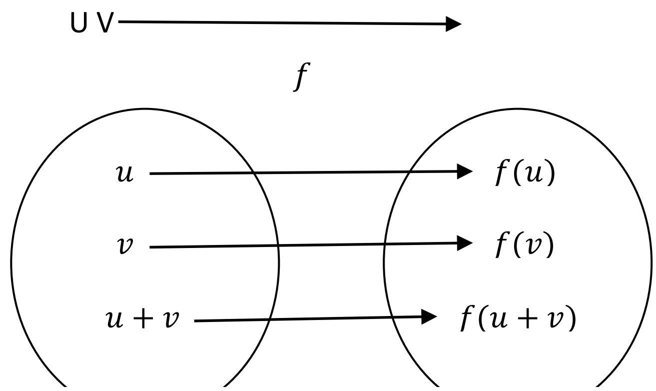
Sean U y V dos espacios vectoriales, ambos definidos sobre un mismo cuerpo K. Se define una aplicación uniforme de U en V como una transformación lineal f, la cual asocia a cada elemento u de U un único elemento del espacio V llamado f(u) que cumple las siguientes condiciones:

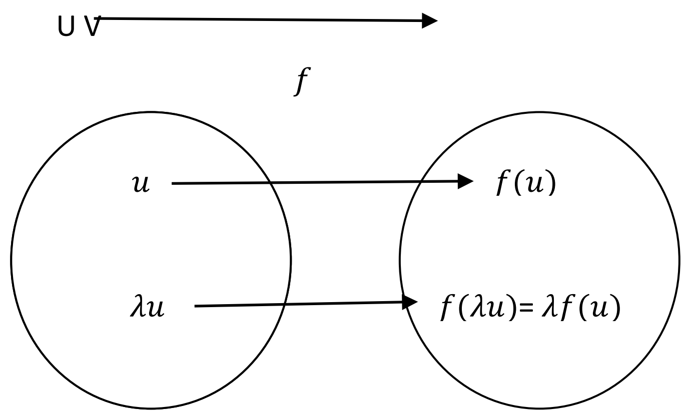
i) $\forall u, v \epsilon U, \Longrightarrow f(u+v) = f(u) + f(v).$

ii) $\forall u \, \epsilon U \;\; \wedge \lambda \, \epsilon \mathbb{R} \Longrightarrow f(\lambda u) = \lambda f(u).$

Es fácil ver que la suma y la multiplicación escalar del primer miembro son elementos de *U* y las del segundo término hacen parte de *V*, así, es posible nombrar a *f* (*u*) como la imagen de *u* bajo la transformación lineal *f.*

Gráficamente se tiene:





Ejemplo

Determinar si $f\big((a, b, c)\big) = (2a - 2b + 3c, a - b + c, 3a - 5b + 3c)$ define una transformación lineal.

Sean $u = (m, n, p) y\ v(r, s, t)$

$dos\ vectores\ del\ espacio\ de\ salida\ \mathbb{R}^3\ y\ sean\ \alpha\ y\ \beta\ escalares, entonces$

$$f(\ \alpha\, u + \ \beta v) = (2\ \alpha m + 2\ \beta r - 2\ \alpha n - 2\ \beta s + 3\ \alpha p + 3\ \beta t, \alpha m + \ \beta r - \ \alpha n - \ \beta s + \ \alpha p + \ \beta t, 3\ \alpha m + 3\ \beta r - 5\ \alpha n - 5\ \beta s + 3\ \alpha p + 3\ \beta t)$$

$$= (2\ \alpha m - 2\ \alpha n + 3\ \alpha p, \alpha m - \ \alpha n + \ \alpha p, 3\ \alpha m - 5\ \alpha n + 3\ \alpha p) + (2\ \beta r - 2\ \beta s + 3\ \beta t, \beta r - \ \beta s + \ \beta t, 3\ \beta r - 5\ \beta s + 3\ \beta t)$$

$$= \alpha(2m - 2n + 3p, m - n + p, 3m - 5n + 3p) + \beta(2r - 2s + 3t, r - s + t, 3r - 5s + 3t)$$

$$= \alpha f(u) + \beta f(v)$$

Ejemplo

Determinar si $f\big((a,b,c)\big) = (3a - 5b, 2a - 2b, a + b^2$ define una transformación lineal.

Sean $u = (m,n,p) y\ v(r,s,t)$

$dos\ vectores\ del\ espacio\ de\ salida\ \mathbb{R}^3\ y\ sean\ \alpha\ y\ \beta\ escalares, entonces$

$$f(\ \alpha\ u +\ \beta v) = (3\alpha m + 3\ \beta r - 5\alpha n - 5\ \beta s, 2\alpha m + 2\ \beta r - 2\alpha n - 2\ \beta s, \alpha m +\ \beta r + (\alpha n +\ \beta s)^2)$$

$$= (3\alpha m - 5\alpha n, 2\alpha m - 2\alpha n, \alpha m + \alpha^2 n^2 + 2\alpha\beta ns) + (3\beta r - 5\ \beta s, 2\ \beta r - 2\ \beta s, \beta r + \beta^2 s^2)$$

$$\neq \alpha f(u) + \beta f(v)$$

Por tanto no es una transformación lineal.

Ejemplo

Sea una transformación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$, y $f((1,0,1)) = (1,-1,3)\ f\big((2,1,0)\big) = (0,2,1), f\big((1,-1,1)\big) = (3,-1,2)$ Calcular $f((-1,-2,3))$

Se hace la combinación lineal con el vector $(-1,-2,3)$:

$$(-1,-2,3) = a(1,0,1) + b(2,1,0)$$

El sistema generado:

$$\begin{cases} a + 2b = -1 \\ a = 3 \\ b = -2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -2 \end{cases}$$

Así, se calcula el resultado:

$$f((-1,-2,3)) = 3f((1,0,1)) - 2f\big((2,1,0)\big)$$

$$f((-1,-2,3)) = 3(1,-1,3) - 2(0,2,1) = (3,-7,7)$$

Representación matricial, matriz de cambio de base

Suponga que a los vectores de la base $S_1 = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, del espacio vectorial U se les asigna otros vectores del espacio vectorial V, $S_2 = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, se dice que hay una transformación lineal f única que va de U en V, transformando los vectores de S_1 en sus vectores correspondientes de S_2. Suponiendo que f existe, y sea u un vector cualquiera de U, representándolo en forma de desarrollo:

$$u = a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_nu_n$$

Entonces

$$f(u) = f(a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_nu_n)$$

$$= a_1f(u_1) + a_2f(u_2) + \cdots + a_nf(u_n)$$

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n)$$

Con esto es posible enunciar el teorema.

La transformación lineal f que actúa del espacio U en el espacio V está definido completamente mediante todas las imágenes $f(u_1), f(u_2) \dots f(u_n)$ para cualquier base definida $S_1 = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ del espacio U.

Ejemplo

Sea f la transformación lineal de $\Omega(2,2) en\ \Omega(3,1)$, definida por:

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a + 3b - c \\ a + 2b + c + 2d \\ a + b - 3c - 4d \end{pmatrix}$$

Hallar la representación matricial de f

Se toman las bases canónicas de $\Omega(2,2)\ y\ \Omega(3,1)$, así:

$$S_1 = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$S_2 = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

Se obtiene la matriz $[f]_{S_1}^{S_2}$, primero se determinan las imágenes de los vectores de la base $\Omega(2,2)$.

$$f\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}; \qquad f\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$$

$$f\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}-1\\1\\-3\end{pmatrix}; \qquad f\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0\\2\\-4\end{pmatrix}$$

En este caso como se ha tomado la base canónica de S_2 de $\Omega(3,1)$se tiene lo siguiente:

$$[f(E_1)]_{S_2}=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} \quad [f(E_2)]_{S_2}=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} \quad [f(E_3)]_{S_2}=\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix} \quad [f(E_4)]_{S_2}=\begin{pmatrix}0\\2\\-4\end{pmatrix}$$

Llegando a:

$$[f]_{S_1}^{S_2}=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1 & 0\\1 & 2 & 1 & 2\\1 & 1 & -3 & 4\end{pmatrix}$$

Algebra de las transformaciones lineales

Definición de suma

Sean $U\ y\ V$ espacio vectoriales, ambos en el mismo cuerpo K. la suma $f+g$ de las transformaciones lineales $f\ de\ U\ en\ V\ y\ g\ de\ U\ en\ V$ está dada por $(f+g)(u)=f(u)+g(u)$ para cada vector $u\ de\ U$.

Ejemplo

La transformación lineal f consiste en que cada vector del plano esta vuelto en el ángulo $\theta=\frac{\pi}{4}$. Hallar en la forma de coordenada la transformación $lineal\ f+i$

Se tiene que:

$f(i) = i\cos\frac{\pi}{4} + j\,sen\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}i + \frac{\sqrt{2}}{2}j.$ $\qquad f(j) = i\cos\frac{3\pi}{4} + j\,sen\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}i + \frac{\sqrt{2}}{2}j$

$$A_f = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Teniendo en cuenta la matriz identidad I_i, entonces:

$$A_f + I_i = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}+1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}+1 \end{pmatrix}$$

De esta manera la transformación lineal $A_f + I_i$, se escribe como:

$$(f+i)\big((a,b)\big) = \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)a - \frac{\sqrt{2}}{2}b, \frac{\sqrt{2}}{2}a + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)b\right)$$

Ejemplo

Tener en cuenta las siguientes transformaciones lineales.

$$f\big((a,b,c)\big) = (a+2b+3c, 4a+5b+6c, 7a+8b)$$

$$g\big((a,b,c)\big) = (a+3b+c, a-3b+2c, a+c)$$

Hallar $3f - 2g: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$3f\big((a,b,c)\big) - 2g\big((a,b,c)\big)$$

$$= 3(a+2b+3c, 4a+5b+6c, 7a+8b) - 2(a+3b+c, a-3b+2c, a+c$$

$$= (3a+6b+9c, 12a+15b+18c, 21a+24b) - (2a+6b+2c, 2a-6b+4c, 2a+2c$$

$$= (a+7c, 10a+21b+14c, 19a+24b-2c)$$

Definición de producto escalar

El producto escalar af de unescalar $a \; de \; K$ y una transformación lineal $f \; de \; U \; en \; V$ está dada por $(af)(u) = af(u)$ para todo vector $u \; de \; U$.

Ejemplo

Sean las transformaciones $f\big((a,b,c)\big) = (a+b, b+c, c+a) \; y \; g\big((a,b,c)\big) = (b+c, a+c, a+b)$ determinar las transformaciones $fg \; y \; gf$.

Las matrices de las transformaciones tienen las siguientes formas:

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; B_g = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Al calcular los productos de estas matrices se obtiene:

$$A_f B_g = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_g A_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Núcleo de una transformación lineal

Sea f una transformación de $U \; en \; V$. el núcleo de la transformación lineal f es el conjunto de todos los vectores $u \; de \; U$ tales que $f(u) = \emptyset$ es decir:

$$Nuc(f) = \{u/u \; \in U \; y \; f(u) = \emptyset, \emptyset \in V\}$$

Ejemplo

Sea $f: R^2 \longrightarrow R^2$ una transformación lineal $f(3,2) = (0,0)$ y $f(1,3) = u \neq 0$ determinar el núcleo de f.

Se comienza por establecer la combinación lineal con un vector (a, b).

$$(a, b) = \alpha(3,2) + \beta(1,3) \Longrightarrow \begin{cases} 3\alpha + \beta = a \\ 2\alpha + 3\beta = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{1}{7}(3a - b) \\ \beta = -\dfrac{1}{7}(2a - 3b) \end{cases}$$

De aquí se dice que:

$$f\big((a, b)\big) = \alpha f\big((3,2)\big) + \beta f\big((1,3)\big) = \frac{1}{7}(3a - b)(0,0) - \frac{1}{7}(2a - 3b)(x, y)$$

$$= \frac{1}{7}(2xa - 3xb, 2ya - 3yb)$$

De esta manera, encontramos el núcleo así:

$$\begin{cases} 2xa - 3xb = 0 \\ 2ya - 3yb = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a - 3b = 0 \\ 2a - 3b = 0 \end{cases} \Longrightarrow 2a - 3b = 0$$

Es claro ver que el núcleo de f es una recta del plano XY que pasa por el origen.

Ejemplo

Determine una transformación lineal $f: R^2 \longrightarrow R^2$ cuyo núcleo sea la recta $3x + 2y = 0$.

$$Nuc(f) = \{(x, y) \ / \ 3x + 2y = 0\}$$

Entonces la transformación lineal $f: R^2 \longrightarrow R^2$sería.

$$f\big((x, y)\big) = \ (3x + 2y, 3kx + 5ky). k \neq 0$$

Ejemplo

Sea $\Omega(2{,}2)$ el espacio vectorial de matrices 2 x 2 sobre $R\ y\ M\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$. Sea $f\colon \Omega(2{,}2) \longrightarrow \Omega(2{,}2)$ La transformación lineal definida por $\mathrm{f(A) = MA}$ Encontrar una base y la dimensión del núcleo.

Teniendo en cuenta la definición de núcleo, se tiene:

$$Nuc(f) = \{A \in \Omega(2{,}2)/\ f(A) = \emptyset, \emptyset \in \Omega(2{,}2)\}$$

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se llega a:

$$Nuc(f) = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{matrix} a = c \\ b = d \end{matrix}\right\}$$

$$BaseNuc(f) = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

Por tanto $Dim\ Nuc(f) = 2$

Rango de una transformación lineal

Dada una transformación lineal f de U en V, donde U es un espacio vectorial de tipo finito, se denomina rango de f, y se representa $Rang(f)$ a la dimensión del Subespacio vectorial imagen.

Teniendo en cuenta la anterior definición es fácil ver que el rango de la transformación no puede exceder a la dimensión es decir:

$$Rang(f) \leq DimU$$

También es posible afirmar que:

$$Rang(f) = DimU - Dim\ Nuc(f)$$

Ejemplo

Sea $f: R^2 \longrightarrow R^3$ tal que $f(u_1) = 2v_1 + v_2 - v_3, f(u_2) = -v_1 - 3v_2 + 2v_3$ donde $\{u_1, u_2\}$ forman una base para el conjunto R^2 y (v_1, v_2, v_3) una base para el conjunto R^3. Determinar la imagen del vector $u = (2,1)$

$$f(u) = f(2u_1 + u_2) = 2f(u_1) + f(u_2) = 2(2v_1 + v_2 - v_3) + (-v_1 - 3v_2 + 2v_3)$$
$$= 3v_1 - v_2$$

Bibliografia

- **Apóstol, T. (1999).** Cálculo con introducción al álgebra lineal. Ed. Neverte.
- **Bru, R., Mas, J., Maria, J. & Tuma, M. (2002).** Álgebra lineal. Universidad Politécnica de Valencia.
- **Grossman, S. (2008).** Algebra Lineal. Última edición. Ed. McGraw – Hill.
- **Murray, S. & Robert, M. (2007).** Algebra Superior. Ed. McGraw.
- **Paniagua, R., Fernández, S. & Martínez, A. (1994).** Álgebra lineal. Manual para la matemática universitaria. Editorial ESIC. Madrid.
- **Wiliams, G. (2002).** Algebra lineal con aplicaciones. Ed. McGraw.

Esta obra se terminó de editar en el mes de noviembre
Tipografá Myriad Pro 12 puntos
Bogotá D.C,-Colombia.

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina

MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO