Estadística de probabilidades

Autor: Danilo de Jesús Ariza Agámez

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina

MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Estadística de probabilidades / Danilo de Jesús Ariza Agámez, /
Bogotá D.C., Fundación Universitaria del Área Andina. 2017

978-958-5459-86-1

Catalogación en la fuente Fundación Universitaria del Área Andina (Bogotá).

Edición:
Fondo editorial Areandino
Fundación Universitaria del Área Andina
Calle 71 11-14, Bogotá D.C., Colombia
Tel.: (57-1) 7 42 19 64 ext. 1228
E-mail: publicaciones@areandina.edu.co
http://www.areandina.edu.co

Primera edición: noviembre de 2017

Corrección de estilo, diagramación y edición: Dirección Nacional de Operaciones virtuales
Diseño y compilación electrónica: Dirección Nacional de Investigación

Hecho en Colombia
Made in Colombia

Estadística de probabilidades

Autor: Danilo de Jesús Ariza Agámez

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina
MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Índice

Índice

1

Unidad 1

Principios de estadística descriptiva

Estadística de probabilidades

Autor: Danilo de Jesús Ariza Agámez

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina
MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Introducción

Ante la necesidad de formación del futuro profesional en relación a principios de estadística y probabilidad, la presente cartilla apunta a una introducción general de la estadística, aborda inicialmente conceptos fundamentales de la misma, tales como la clasificación de la estadística en estadística descriptiva y estadística inferencial, conceptos asociados a población, muestra y variables estadísticas. El desarrollo de la cartilla luego se adentra en temas relacionados con organización y presentación de datos, enmarcados en el área de la estadística descriptiva, específicamente si se trata las distribuciones de frecuencia apoyados en ejemplos.

Las distribuciones de frecuencias presentadas en tablas, son la base para el tratamiento de una temática no menos importante dentro del campo de la estadística: la presentación gráfica de datos. En esta representación gráfica de datos específicamente se estudian los diagramas de barra, los gráficos circulares, los histogramas entre otros. La temática de la cartilla finaliza con un abordaje básico de las medidas de tendencia central, entre las que se destaca la media aritmética o promedio y se presentan cálculos de la misma para los casos de datos originales y datos agrupados.

U1

Metodología

Muy seguramente la principal recomendación que se debe dar al futuro profesional es la adopción de una actitud de compromiso frente a su proceso de formación, no solo en lo que se refiere a esta cartilla, sino al curso en su totalidad; sin embargo, tal recomendación resulta muy general. De manera específica, se recomienda hacer cuidadosa lectura del presente material, tratando de elaborar versiones resumidas a través de un mapa conceptual, un cuadro sinóptico o cualquier otra forma que considere conveniente; tal resumen ha de contemplar las ideas básicas relacionadas con clasificación de la estadística, población, muestra, variables, clasificación de variables, distribuciones de frecuencias, representación gráfica de datos y medidas de tendencia central. Es muy importante la asociación de los diferentes conceptos y formularse el reto de describir otros ejemplos diferentes a los aquí presentados. Es útil también que realice la verificación de las operaciones numéricas de los ejemplos dados.

El estudiante además, debe comprender que la lectura de esta cartilla no es el único elemento propuesto para alcanzar el deseado nivel de comprensión, se presentan también recursos de videoconferencias, resúmenes, videodiapositivas y ejercicios de repaso. En la sección correspondiente a videocápsulas se muestran una serie de videos orientados al fortalecimiento de las temáticas que son objeto del curso. El seguimiento de las recomendaciones aquí dadas puede facilitar el afianzamiento del tema y brindar la posibilidad de adquirir mayor confianza frente a los contenidos posteriores.

U1

Desarrollo temático

Una introducción general a la estadística

A continuación se presentan un conjunto de conceptos básicos de estadística, muchos de ellos serán usados a lo largo del desarrollo del módulo y será importante que como estudiante los tenga en cuenta y se remita a ellos cada vez que lo considere necesario.

¿Qué es la estadística?

El término estadística se deriva de la palabra ESTADO, en razón a que los gobiernos para su planificación, han llevado registros de muchas variables como población, nacimientos, defunciones, exportaciones, impuestos, producción, entre otros. La estadística es una rama de la matemática dedicada al análisis de datos con el fin de poder sacar conclusiones apropiadas que apoyen la toma decisiones. La tarea de la estadística demanda la previa recolección de datos y su organización de tal manera que se facilite el análisis. Esta cuenta con un conjunto de principios, procedimientos y métodos basados, entre otros, en la elaboración de tablas de datos, representaciones gráficas y expresiones matemáticas asociadas a medidas representativas del conjunto de datos bajo análisis, con el fin llevar a cabo las tareas propias que contemplan el estudio o investigación estadística. La estadística es una valiosa herramienta de investigación en campos tales como las ciencias naturales, ciencias sociales, educación, ciencias de la salud, ingeniería, administración, economía y negocios. Se clasifica en dos grandes ramas: la estadística descriptiva y la estadística inferencial.

Estadística descriptiva

Es la rama de la estadística cuya tarea se centra en la recolección, organización y presentación de los datos a fin de ser interpretados y analizados apropiadamente. Sus conclusiones son aplicables al grupo del cual se obtienen los datos y no a la totalidad de casos posibles. Por ejemplo, la coordinación del programa de Negocios Internacionales de la Fundación Universitaria del Área Andina, está interesada en la obtención de información estadística relacionada con el rendimiento académico de sus estudiantes, si aplica procedimientos estadísticos sobre la información correspondiente a los estudiantes de segundo semestre, el análisis realizado no necesariamente se extiende o generaliza a todos los estudiantes del programa, y mucho menos a la totalidad de estudiantes de la institución.

Estadística inferencial

Dada la frecuente dificultad para realizar estudios sobre la totalidad de casos posibles, se suele seleccionar un conjunto restringido de casos sobre los cuales es más viable realizar el estudio. Tomando como base la información correspondiente a casos debidamente seleccionados, la estadística inferencial se centra en la inferencia o deducción respecto a la totalidad de casos posibles. Por ejemplo, una firma encuestadora realiza un estudio sobre la preferencia de los ciudadanos en relación a los candidatos que participarán en la próxima elección de alcalde; puesto que a la firma no le resulta práctico encuestar a todos los votantes, selecciona un grupo de personas habilitadas para votar, y con base en el análisis de los resultados plantea generalizaciones sobre todos los posibles votantes.

El proceso de generalización o inferencia, a partir de la información de un grupo pequeño, es arriesgado y no puede realizarse con certeza absoluta, inherente a él está la incertidumbre o margen de error; sin embargo, esta incertidumbre se puede controlar al tiempo que es posible medir el nivel de confianza de las deducciones, para lo cual resulta esencial el uso de fundamentos de cálculo de probabilidad. Esta primera cartilla y la correspondiente a la semana 2, se centran en el estudio y aplicación de principios y procedimientos de estadística descriptiva, las cartillas de la 2 a la 8 se dedican al estudio de cálculo de probabilidad. Para iniciar el curso se presentan a continuación un conjunto de conceptos propios del ámbito estadístico en general.

Conceptos básicos de estadística

Un estudio estadístico llevado a cabo de manera sistemática involucra un conjunto de conceptos, a continuación se relacionan los conceptos básicos de la estadística:

Población o universo

En un estudio o investigación estadística, la población corresponde a la totalidad de elementos o unidades que forman el área de interés, es decir, el conjunto total de personas, elementos u objetos con características comunes respecto a los cuales se requiere obtener información. Nótese que el término población hace referencia no solo a las personas que habitan en una ciudad, región o país.

En un estudio estadístico la población debe estar perfectamente delimitada en el tiempo y en el espacio, por ejemplo, para hacer un análisis de las pequeñas empresas, se debe especificar cuáles empresas y en qué período de tiempo se analizan, un caso podría ser las pequeñas empresas de la capital del país en el año 2008.

Muestra

El término muestra se refiere a una porción de la población, que es seleccionada para realizar un estudio. Las causas por la cuales se realizan estudios a partir de muestras, y no siempre sobre toda la población, son variadas, una de ellas es la dificultad o imposibilidad de realizarlo sobre toda la población, lo cual está ligado a grandes costos y demasiado tiempo requerido para para la recolección de datos. Otra razón puede ser la naturaleza destructiva de la selección, por ejemplo, al realizar control de calidad sobre un lote de fósforos, no tiene sentido probar todos los elementos del lote.

La muestra debe ser seleccionada de tal manera que sea representativa de la población, un punto sería si se hace una investigación sobre hábitos de consumo de alcohol, quizá no sea apropiado tomar una muestra de un grupo de personas en una discoteca, tampoco en un convento o en una comunidad cristiana. La selección de la muestra debe cumplir requisitos para que sea representativa, estos requisitos se refieren a lo que se conoce como proceso de muestreo.

Individuo

Un individuo, en un estudio estadístico, es cada una de las unidades que forman la población, por ejemplo al considerarla como población la totalidad de personas con empleo formal, un individuo es cualquiera de las personas debidamente empleada. Según este concepto, se puede decir que la población es la totalidad de los individuos.

Variable estadística

En estadística una variable es una característica de interés de cada uno de los individuos, por ejemplo: edad, ingreso, nacionalidad de una persona, cantidad de lluvia caída, entre otras. Las variables usualmente se representan con letras mayúsculas como X, Y, Z, u otra de mayor significado en el contexto. Los valores de una variable corresponden al conjunto de posibles resultados de la observación en un estudio estadístico, todos los valores obtenidos conforman los datos del estudio.

Clasificación de las variables estadísticas

Las variables pueden clasificarse de diferentes formas. Una clasificación diferencia variables cualitativas y cuantitativas, y entre las cuantitativas distinguimos las discretas y continuas. A continuación se presentan estos conceptos asociados a las variables.

Variables cualitativas

Las variables cualitativas hacen referencia a una característica cuyo valor puede indicarse a través de una cualidad o valor no numérico, por ejemplo, el departamento de origen de un estudiante; ocupación, sexo, cargo de un grupo de personas, entre otras.

Variable cuantitativa

Las variables cuantitativas se refieren a características cuyos valores pueden expresarse numéricamente y realizar con ellos operaciones matemáticas, ejemplo: peso, estatura, salarios. Entre las variables cuantitativas distinguimos las discretas de las continuas.

Variable discreta

Las **variables discretas** toman sus valores del conjunto de números naturales, frecuentemente se asumen como variables de conteo, a través de la cual no es posible expresar valores fraccionarios. Ejemplos de variables discretas son: número de automóviles que entran a un parqueadero y número de cheques girados al mes.

Variable continua

Las variables continuas toman sus valores del conjunto de números reales, por lo que pueden tomar cualquier número comprendido entre dos valores específicos, es decir, se permite que tome valores decimales. Ejemplos de variables continuas son: el peso, duración de una conversación, tiempo gastado en ir de la casa al trabajo.

Pasos de una investigación estadística

El proceso de aplicación de la estadística implica una serie de pasos, los principales se describen brevemente a continuación:

- **Definición de población o muestra y variables:** En el caso de que se desee tomar una muestra, es necesario determinar el tamaño y el tipo de muestreo a realizar (probabilístico o no probabilístico).

- **Obtención de los datos:** Este paso puede realizarse mediante observación directa de los elementos, aplicación de encuestas y entrevistas, y la realización de experimentos.
- **Clasificación, tabulación y organización de los datos.** Esto incluye el tratamiento de datos considerados anómalos que pueden en un momento dado falsear el análisis de los resultados. La tabulación implica el resumen de los datos en tablas y gráficos.
- **Análisis descriptivo de los datos.** El análisis se complementa con la obtención de indicadores estadísticos como las medidas, las cuales se estudiarán en este módulo.
- **Análisis inferencial**. Se aplican técnicas de tratamiento de datos, que involucran elementos probabilísticos, permitiendo inferir conclusiones a partir de una muestra.

Distribución de frecuencias

En estadística el término frecuencia se refiere al número de veces que se presenta un valor específico de la variable. Una distribución de frecuencias es una tabla que resume información de los diferentes valores o categorías y las veces que ocurren. En un estudio estadístico se puede elaborar distribuciones de frecuencias para variables cualitativas y cuantitativas.

Frecuencia absoluta y frecuencia relativa

La frecuencia absoluta o simplemente frecuencia se refiere al número de veces que se presenta un valor específico de la variable, mientras que la frecuencia relativa representa la fracción del total de datos que corresponde a un valor o categoría específica. La frecuencia relativa se calcula dividiendo la respectiva frecuencia absoluta por el número total de datos. Las frecuencias absoluta y relativa se pueden calcular tanto para variables cualitativas como cuantitativas.

Frecuencia absoluta acumulada y relativa acumulada

A las variables cuantitativas aplica el concepto de frecuencia acumulada. La frecuencia absoluta acumulada de un valor corresponde a la suma de las frecuencias absolutas de valores menores o iguales que el valor especificado, mientras que la frecuencia relativa acumulada es la frecuencia absoluta acumulada dividida por el número total de datos.

Ejemplo 1.1: En la Tabla 1 se muestra la distribución de frecuencias correspondiente a preferencias de colores de carros. La Tabla 2 muestra la distribución de frecuencias de los resultados obtenidos en 200 lanzamientos de un dado. Se presentan las frecuencias relativas en forma de fracción y en forma decimal.

Color	f_a	f_r
Azul	130	$\frac{130}{600} = 0{,}21666667$
Verde	148	$\frac{148}{600} = 0{,}24666667$
Naranja	72	$\frac{72}{600} = 0{,}12$
Rojo	160	$\frac{160}{600} = 0{,}26666667$
Blanco	54	$\frac{54}{600} = 0{,}09$
Otro	36	$\frac{36}{600} = 0{,}06$

Tabla 1.1. Distribución de frecuencias de una variable cualitativa

Valor	f_a	f_r	F_a	F_r
1	35	$\frac{35}{200} = 0{,}175$	35	$\frac{35}{200} = 0{,}175$
2	27	$\frac{27}{200} = 0{,}135$	62	$\frac{62}{200} = 0{,}31$
3	37	$\frac{37}{200} = 0{,}185$	99	$\frac{99}{200} = 0{,}495$
4	34	$\frac{34}{200} = 0{,}17$	133	$\frac{133}{200} = 0{,}665$
5	28	$\frac{28}{200} = 0{,}14$	161	$\frac{161}{200} = 0{,}805$
6	39	$\frac{39}{200} = 0{,}195$	200	$\frac{200}{200} = 1$

Tabla 1.2. Distribución de frecuencias de una variable cuantitativa, incluye frecuencia acumuladas

Tabla 1.1.
Fuente: propia.

Notación sigma

Antes de continuar con el estudio de conceptos y principios correspondientes a este curso, conviene analizar brevemente la notación sigma. En estadística y en matemática en general, se usa el símbolo Σ (Letra griega sigma en mayúscula) para abreviar la suma de un conjunto de términos que dependen del valor de un índice. La siguiente expresión muestra una suma genérica abreviada con la notación sigma.

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

Aquí se tiene una variable X_i, donde el subíndice i toma los valores $i = 1$, $i = 2, \ldots, i = n$, por lo tanto la X_i toma los valores $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Por ejemplo si $X_1 = 3$, $X_2 = 7$, $X_3 = 10$, $X_4 = 11$, $X_5 = 8$, $X_6 = 5$, $X_7 = 1$, usando la notación sigma se tiene:

$$\sum_{i=1}^{7} X_i = 3 + 7 + 10 + 11 + 8 + 5 + 1 = 45$$

Distribuciones de frecuencia de variables cuantitativas

Cuando se observan variables de interés se obtiene un conjunto de resultados llamados datos originales, si el conjunto de posibles valores es pequeño, como cuando se lanza un dado, no existe dificultad al elaborar la tabla que muestre la frecuencia de cada valor; pero si hay un gran número de posibles valores, puede ser poco práctico crear una tabla de distribución con la frecuencia de cada valor, en estos casos conviene más crear clases, grupos o intervalos de valores y elaborar la distribución de frecuencias de datos agrupados, en la cual se muestre la información concerniente a la frecuencia de cada grupo. Las clases creadas deben ser mutuamente excluyentes y exhaustivas, lo que significa que cada dato debe pertenecer a una y solo una clase, la tabla se construye de tal forma que las clases se escriben en orden ascendente según los valores.

Frecuencias absolutas y relativas de clases

La frecuencia absoluta de la ***i-esima*** clase es el número de ocurrencias de valores que están entre los valores que definen la clase, se denota mediante el símbolo f_i. La frecuencia relativa ***i-esima*** clase es el cociente de su frecuencia absoluta y el número total de datos, si la representamos mediante $\bar{f}_i$. y ***N*** es el número total de datos, se tiene:

$$\bar{f}_i = \frac{f_i}{N} = \quad (\textit{frecuencia relativa de la clase } i)$$

Para efectos de cálculos a partir de la tabla de distribución de frecuencias, es útil asignar un índice o número a cada clase: 1 a la primera, 2 a la segunda y así sucesivamente. En los encabezados de la tabla de frecuencia y en las diferentes fórmulas de cálculo se usa el número ***i*** como subíndice para referirse a valores asociados a la clase que ocupa el lugar ***i*** por ejemplo f_i. representa la frecuencia de la clase donde toma valores desde $i = n$, hasta $i = 1$ lo que usualmente se representa mediante $i = 1, 2, \dots, n.$

La suma de las frecuencias relativas de todas las clases es igual a la unidad, es decir:

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{f}_i = \bar{f}_1 + \bar{f}_2 + \cdots + \bar{f}_n = 1$$

La frecuencia absoluta acumulada de la ***k-esima*** clase corresponde a la suma de las frecuencias absolutas hasta esa clase. La frecuencia absoluta de la ***k-esima*** clase se denota mediante F_k y está dada por:

$$F_k = \sum_{i=1}^{k} f_i = f_1 + f_2 + \cdots + f_k$$

La frecuencia relativa acumulada de la ***k-esima*** clase es el cociente de la frecuencia acumulada de la clase y el número total de datos, se denota mediante $\overline{F}_k$. Para un total de *N* datos, la frecuencia relativa acumulada de la ***k-esima*** clase está dada por:

$$\overline{F}_k = \frac{F_k}{N}$$

La frecuencia relativa acumulada de la última clase corresponde a la unidad o al 100 %.

A continuación se presentan otros conceptos que se deben tener en cuenta en la elaboración de una distribución de frecuencias.

Rango de datos y límites de clase

El rango de un conjunto de datos es la diferencia entre el mayor valor y el menor valor de todas las observaciones. Los límites de clase son los valores que definen una clase, se identifica en ellos el límite inferior y el límite superior. Se deben elegir de tal manera que un valor especifico pertenezca a una y exactamente una clase, una forma de asegurarse de esto en el caso de variables continuas es usar la notación de intervalos.

Amplitud o ancho de clase

La amplitud de una clase es una medida del rango de valores de la clase. No es obligatorio que todas las clases tengan igual amplitud, pero lo usual es definirlo así para facilitar los cálculos. Cuando una distribución de frecuencias está claramente definida, el valor de la amplitud de una clase, excepto la última, se puede calcular restando el límite inferior de la respectiva clase, al límite inferior de la clase siguiente. El cálculo de amplitud de clase también puede hacerse restando el límite superior de la clase anterior al límite superior de la respectiva clase, excepto para la primera.

Existen situaciones en las que a la primera clase no se le defina límite inferior o a la última no se le defina límite superior, por ejemplo, al considerar rangos de edades medidas en años cumplidos, podría tener el siguiente conjunto de clases:

De 0 a 5 años.

De 6 a 12 años.

De 13 a 25 años.

26 años o más.

Marca o punto medio de una clase

La marca de una clase es el valor que se encuentra en la mitad del intervalo de valores de la clase y se considera como su valor representativo. Para cada una de las clases, la marca de clase se representa mediante el símbolo $\overline{x}_i$ y se calcula promediando los valores extremos de la clase.

Construcción de tabla de distribución de datos agrupados

Ante la necesidad de elaborar tablas de distribución de frecuencias de datos agrupados se debe elegir el número de clases y por ende, la amplitud de las clases.

Elección del número de clases

Para elegir el número de clases que agrupen ***N*** datos, una útil sugerencia es tomar un número de clases ***c*** tal ***c*** que sea el menor número que satisfaga la siguiente desigualdad:

$$N \leq 2^c$$

Por ejemplo, para ***N*=100,** datos se busca el primer número natural ***c*** tal que 2^c iguale o supere a ***N*=100.** Al probar con ***c=6,*** se observa que la potencia $2^6 = 64$ es menor que **100,** por lo tanto se prueba con un número mayor. Tomando ***c*=7,** se tiene que el número $2^7 = 128$ supera a **100,** con lo cual ***c*=7** es un apropiado número de clases.

Elección de la amplitud de clase

A partir del valor del rango de datos y el número de clases a crear, se puede definir la amplitud de las clases con base en la siguiente operación:

$$Amplituddeclase = \Delta C = \frac{Rango}{Númerodeclases} = \frac{R}{c}$$

En la práctica se suele hacer aproximaciones hacia un número superior de tal forma que se tenga un valor de cómodo manejo. Por ejemplo, para 120 datos, en donde el mayor valor observado es 224 y el menor es 97, se tiene que el rango de valores es:

$$R = 224 - 97 = 127$$

Un número apropiado de clases es ***c*=7** puesto que $(2^2 = 128 > 120)$. Por tanto, para el cálculo de amplitud de clase se tiene:

$$\Delta C = \frac{R}{c} = \frac{127}{7} = 18,1428$$

Un valor más cómodo para la amplitud de clase ΔC podría ser $\Delta C = 20$

Ejemplo 1.2: a los 150 estudiantes de ingeniería de una universidad se les pregunta sobre la cantidad de obras literarias que han leído en su vida, los datos recogidos se muestran en la siguiente Tabla; con la información se pide construir la tabla de distribución de frecuencias que muestre la marca de clase, las frecuencias absolutas, relativa, absoluta acumulada y relativa acumulada, nótese que se trata de un estudio sobre una variable cuantitativa discreta.

24	96	83	54	85	51	85	69	25	49	30	75	33	58	60
84	63	28	34	76	85	31	97	28	74	71	23	53	63	55
38	33	52	41	79	84	60	51	62	30	40	87	25	58	32
83	78	31	28	40	97	55	56	80	32	59	92	39	91	52
81	85	96	32	97	38	49	73	97	88	65	47	89	32	53
44	52	37	76	79	54	80	62	48	58	25	85	24	33	62
40	47	81	32	33	62	96	31	96	57	57	29	76	86	53
96	87	37	32	31	74	42	67	73	85	57	27	70	51	75
95	86	36	44	38	93	33	27	45	97	53	96	78	42	89
43	28	32	40	95	43	64	61	53	86	26	95	72	53	53

Tabla 1.3. Datos originales de un estudio sobre cantidad de obras leídas.
Fuente: propia.

Solución:

Cantidad de clases: con un total de ***N*= 150** datos, un apropiado número de clases es ***c*= 8** ya que $2^8 = 256$ es la primera potencia de 2 que supera a ***N*= 150.**

Rango de datos: el mayor valor de todas las observaciones es ***X*=97,** mientras que el menor valor es ***X*=20,** por lo tanto el rango está dado por:

***R*= 97-24=73**

Amplitud de clases: como se tomarán 8 clases para la distribución, la amplitud de clases se obtendrá a partir del cociente entre el rango de datos y el número de clases, es decir:

$$\Delta C = \frac{73}{8} = 9,125$$

Un valor conveniente al cual aproximar la amplitud de clase es: $\Delta C = 10.$

Definición de los límites de clase y conteo de valores: los límites de clase se pueden elegir sin que necesariamente correspondan a valores reales de observaciones, para los casos específicos de la primera y última clase, se pueden considerar valores inferiores al mínimo de las observaciones y mayores al máximo, respectivamente. En este caso, dado que los valores son algo mayores que 20 y menores que 100 se consideran las clases que se indican en la Tabla 1.4, que también muestra las marcas del conteo de valores.

Clase	X	Conteo
1	20-29	//// //// //// // =14
2	30- 39	//// //// //// //// //// //// // = 26
3	40-49	//// //// //// //// / = 17
4	50-59	//// //// //// //// //// //// / = 25
5	60-69	//// //// //// / = 13
6	70-79	//// //// //// //// = 16
7	80-89	//// //// //// //// //// // =22
8	90-99	//// //// //// //// / = 17

Tabla 1.4. Definición de clases y conteo.

Fuente: propia.

Elaboración de la tabla de distribución de frecuencias: con base en las clases definidas y el conteo realizado, se presenta en la Tabla 1.5 la distribución de frecuencias, en ella aparece las frecuencias absolutas, relativas y acumuladas y las marcas de clase.

i	X	$\bar{X}_i$	f_i	$\bar{f}_i$	F	$\bar{F}_i$
1	20 – 29	24,5	14	0,0933 …	14	0,0933 …
2	30 – 39	34,5	26	0,1733 …	40	0,2666 …
3	40 – 49	44,5	17	0,1133 …	57	0,38
4	50 – 59	54,5	25	0,166 …	82	0,5466 …
5	60 – 69	64,5	13	0,0866 …	95	0,6333 …
6	70 – 79	74,5	16	0,1066 …	111	0,74
7	80 – 89	84,5	22	0,1466 …	133	0,8866 …
8	90 – 99	94,5	17	0,1133 …	150	1

Tabla 1.5. Tabla de distribución de frecuencias incluyendo marcas de clase.
Fuente: propia.

Ejemplo 1.3: en estudios oftalmológicos se realizan pruebas respecto al tiempo entre parpadeo de los pacientes. Se toman datos de 200 pacientes, los tiempos están dados en segundos y aparecen en la Tabla 1.6, se pide la tabla de distribución de frecuencias.

Solución:

Cantidad de clases: con ***N*= 200,** datos un razonamiento similar al del ejemplo anterior se encuentra que ***c*= 8** es un apropiado número de clases.

11,064	19,1	12,17	11,23	8,12	16,32	19,01	16,29	15,77	17,69
6,156	15,5	5,499	18,87	6,749	15,76	8,784	13,94	5,774	12,77
9,643	17	16,95	11,52	13,13	19,86	6,447	18,78	12,59	15,81
8,04	12,2	9,927	15,02	8,267	18,97	19,14	12,21	9,631	18,93
13,343	11,1	10,13	13,56	12,44	13,74	16,77	19,51	13,5	13,96
7,396	15,7	19,05	19,53	17,21	15,43	13,44	19,83	5,959	19,25
5,753	11,8	13,49	15,93	12,57	15,84	6,047	6,627	12,6	9,522
14,427	9,2	10,62	8,998	19,43	13,75	16,03	16,57	13,56	9,494
12,569	15,7	10,44	7,337	11,21	19,9	10,38	13,22	6,917	9,459
5,359	8,93	13,09	11,14	13,13	7,394	10,87	11,02	13,57	19,01
18,595	12,1	16,65	11,5	6,512	15,34	19,22	13,72	8,761	5,973
6,638	12,3	16,9	14,29	6,078	10,9	18,54	11,73	9,02	17,42

18,965	6,67	7,754	14,51	19,81	11,16	13,02	14,35	10,62	13,57
16,794	17,9	14,09	16,87	6,116	12,84	8,153	17,59	12,17	13,51
14,921	5,62	9,071	16,61	5,614	6,826	6,531	11,32	8,736	9,007
6,485	7,13	14,58	18,02	19,86	15,61	9,619	9,357	11,1	13,42
8,689	11,2	16,19	15,96	8,727	12,82	9,207	14,55	17,73	13,77
18,581	14,7	5,931	12,14	15,28	14,85	9,682	5,732	8,438	13
15,231	14,7	11,77	15,24	17,25	13,04	18,88	6,66	17,06	12,82
16,999	15,2	9,061	13,79	19,67	18,1	11,4	8,382	15,81	18,08

Tabla 1.6. Datos originales de un estudio sobre tiempos entre parpadeos.
Fuente: propia.

Rango de datos: El mayor valor que toma la variable es **=19,901,** y el menor es □ = □,□□□, lo que arroja un valor para el rango dado por:

$$□ = □□,□□□ - □,□□□ = □□,□□□$$

Amplitud de clases: Con 8 clases y rango 14,542, un cálculo para longitud de clases es:

$$\Delta □ = \frac{□□,□□□}{□} = □,□□□□□$$

Por comodidad se considera: $\Delta □ = □$.

Límites de clase y conteo de valores: análisis similares a los del ejemplo 1.2 y revisando los valores extremos del conjunto, es pertinente considerar clases cuyos límites inferiores sean 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 y 18. La Tabla 1.7 muestra las clases y el conteo

Clase	□	Conteo
1	[4,6)	//// //// // =10
2	[6,8)	//// //// //// //// //// =20
3	[8,10)	//// //// //// //// //// //// //// =28
4	[10,12)	//// //// //// //// //// /// =23
5	[12,14)	//// //// //// //// //// //// //// //// //// //// =40

6	[14,16)	//// //// //// //// //// //// //// / =29
7	[16,18)	//// //// //// //// //// // =22
8	[18,20)	//// //// //// //// //// //// //// =28

Tabla 1.7. Definición de clases y conteo de valores.
Fuente: propia.

Elaboración de la tabla de distribución de frecuencias: la Tabla 1.8 es la tabla de distribución de frecuencias, muestra las clases, las marcas de clase, las frecuencias absoluta, relativa, absoluta acumulada y relativa acumulada.

Clase □	□	$\overline{\square_{\square}}$	$\square_{\square}$	$\overline{\square_{\square}}$	□	$\overline{\square_{\square}}$
1	[□, □)	□	□□	□, □□	□□	□, □□
2	[□, □)	□	□□	□, □	□□	□, □
3	[□, □□)	□	□□	□, □□	□□	□, □□
4	[□□, □□)	□□	□□	□, □□□	□□	□, □□□
5	[□□, □□)	□□	□□	□, □	□□□	□, □□□
6	[□□, □□)	□□	□□	□, □□□	□□□	□, □□
7	[□□, □□)	□□	□□	□, □□	□□□	□, □□
8	[□□, □□)	□□	□□	□, □□	□□□	□

Tabla 1.8. Distribución de frecuencia incluyendo marcas de clase.
Fuente: propia.

Presentación gráfica de datos

La presentación gráfica de datos es una herramienta muy útil ya que permite tener una rápida idea del comportamiento de los datos, se diferencia la elaboración de gráficos de variables cualitativas y cuantitativas.

Gráficos de barra

Un gráfico de barras se usa en la representación de datos de variables cualitativas. Se elaboran a partir de una tabla de distribución de frecuencia considerando los valores de la frecuencia absoluta o frecuencia relativa. Su construcción se da en un plano cartesiano, generalmente el eje horizontal se usa para indicar las etiquetas de las categorías, mientras que el eje vertical se usa para representar los valores de frecuencias. Las barras son rectángulos cuya base, por lo general de ancho fijo, se traza sobre cada etiqueta de valores y su altura se traza hasta que coincida con el valor de la frecuencia. Las barras pueden dibujarse notablemente separadas.

Ejemplo 1.4: la figura 1.1 muestra los gráficos de barras de frecuencia absoluta y de frecuencia relativa del Ejemplo 1.2.

Gráfico circular

Los gráficos circulares o diagrama de torta, son otra forma de presentación de datos cualitativos, consiste en un círculo dividido en diferentes sectores. Un gráfico circular se elabora a partir de los valores de frecuencia absoluta y relativa, a cada categoría corresponde un sector cuya área es proporcional a su frecuencia. El área de cada categoría se asigna teniendo en cuenta que al número total de datos 360° le corresponde 360º los del círculo. El cálculo para asignar medidas a cada categoría se base en lo siguiente:

$$N \longrightarrow 360^{0}$$

$$f \longrightarrow x$$

Entonces: $\square = \frac{(\square).(\square\square\square^{\square})}{\square}$

Ejemplo 1.5: la figura 1.2 corresponde al gráfico circular de los datos del ejemplo 1.1. Como el número total de datos es $\square = 80$, para el caso en que la frecuencia absoluta es $\square = 23$, se tiene que la medida del ángulo es:

$$\square = \frac{(\square\square).(\square\square\square^{\square})}{\square\square} = \square\square\square,\square^{\square}$$

Histograma de y polígono de frecuencia

Los histogramas y polígonos de frecuencias se usan en la representación de datos de variables cuantitativas a partir de una distribución de frecuencia de datos agrupados. El histograma se construye sobre un plano cartesiano, en el horizontal se indica los límites de clases y en el vertical los valores de las frecuencias de clase. Los elementos fundamentales del histograma son rectángulos, cuya base se define según el ancho de cada clase y su altura por la frecuencia.

Un **polígono de frecuencia** se construye a partir de los mismos ejes del histograma, pero en el eje horizontal se toma los valores de la marca de clase y en el vertical, la frecuencia respectiva. Los elementos fundamentales del polígono de frecuencias son pares de puntos determinados por las marcas de clase y la respectiva frecuencia, los puntos resultantes se unen mediante segmentos de recta, para una mejor visualización, se acostumbra considerar dos puntos adicionales sobre el eje horizontal, uno que coincida con el límite inferior de la primera clase y otro con el límite superior de la última, aunque en algunos documentos se agrega dos clases ficticias de frecuencia cero, una antes de la primera y la otra después de la última.

Se puede dibujar el polígono de frecuencia sobre el mismo histograma, en cuyo caso basta con unir los puntos medios de la parte superior de los rectángulos sucesivos del histograma.

Ejemplo 1.6: la figura 1.3 muestra los histogramas y polígonos de frecuencias de los datos de los ejemplos 1.3 y 1.4.

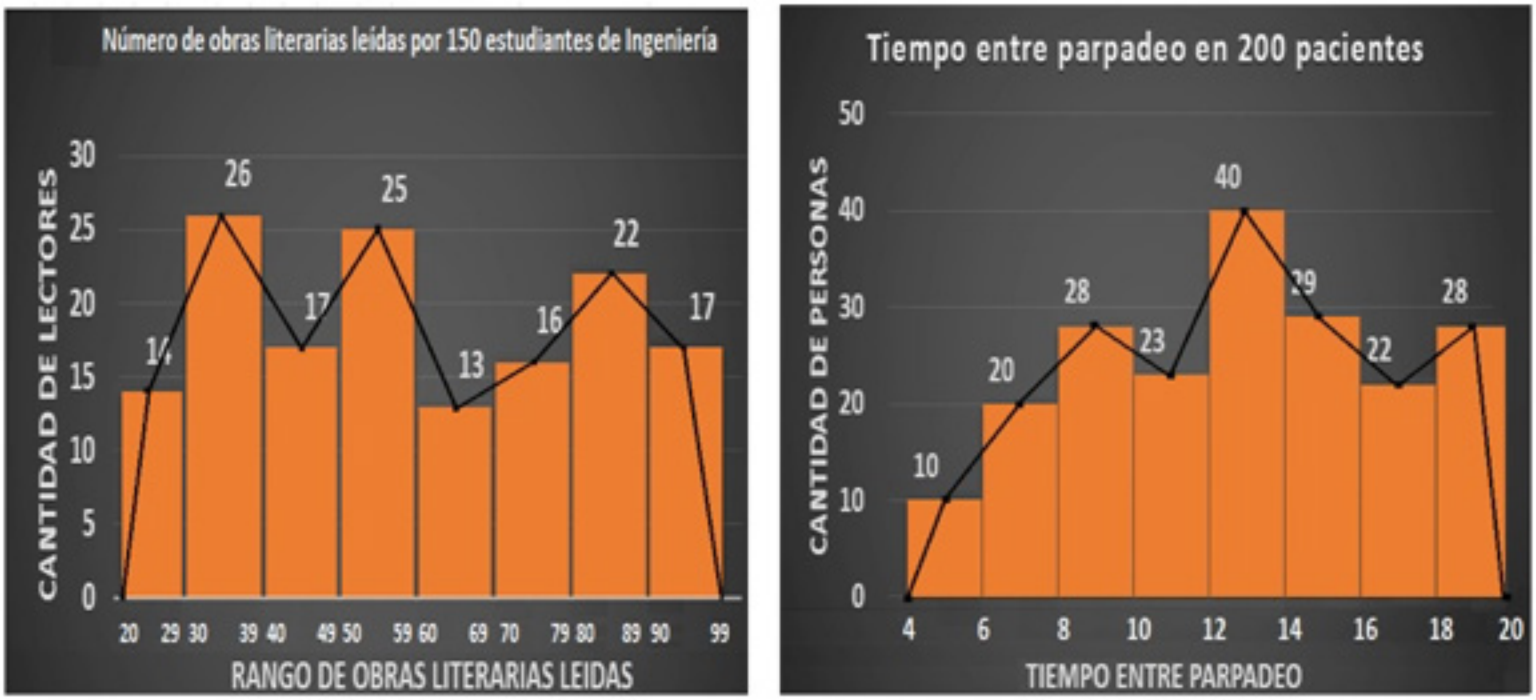

Figura 1.3. Histograma y polígono de frecuencia a) Número de obras leídas por 150 estudiantes b) tiempo entre parpadeo. Fuente: propia.

En un histograma también se puede representar las frecuencias acumuladas, resultando el histograma de frecuencia acumulada. Por otra parte un polígono de frecuencia acumulada, también conocido como Ojiva, se construye de tal forma que en el eje horizontal se consideran los valores de los límites superiores de clases en lugar de la marca de clase; sin embargo, en el caso de variables discretas, se debe tener en cuenta que hay un salto entre el límite superior de una clase y el límite inferior de la siguiente, por lo que realmente se considera el promedio de estos límites consecutivos. Si se desea se puede dibujar la ojiva a partir del histograma de frecuencia acumulada, en cuyo caso basta con unir los puntos extremos derechos de la parte superior de los rectángulos sucesivos del histograma. Los siguientes ejemplos ilustran estas ideas.

Ejemplo 1.7: la figura 1.4 muestra las ojivas de los datos de los ejemplos 1.3 y 1.4.

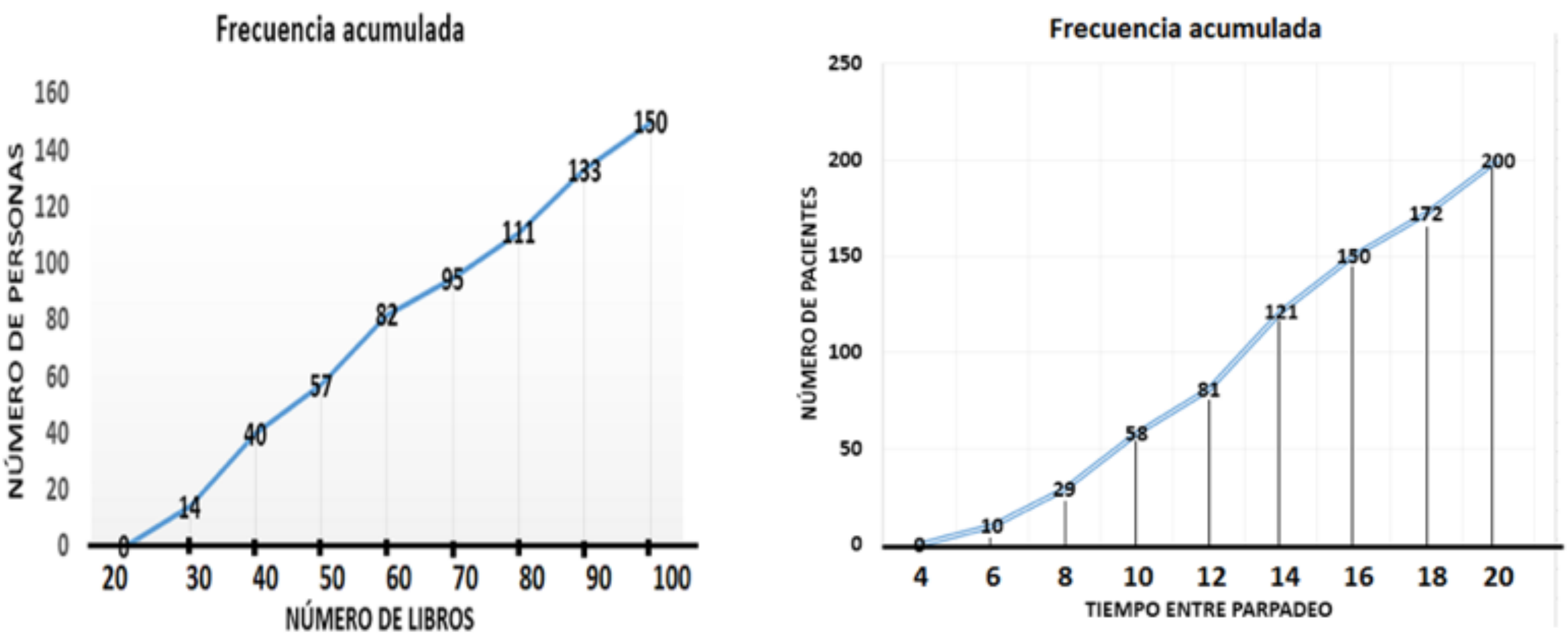

Figura: 1.4.
Fuente: Propia.

Las medidas de tendencia central

Al describir un conjunto de datos, con frecuencia es de deseable hacerlo de la manera más resumida posible, por ejemplo, con un número que proporcione información sobre todo el grupo. Para tal fin, no es pertinente tomar el valor más elevado ni el más pequeño como único representante, ya que solo representan a los extremos y no a los valores típicos. Una solución habitual es buscar un valor central. Las medidas que describen un valor típico en un grupo de observaciones suelen llamarse medidas de tendencia central.

La media aritmética

La media aritmética o promedio es la medida de tendencia central más usual; se calcula para variables cuantitativas y se usa diferente notación para referirse a la media de una muestra y de una población, aunque la fórmula de cálculo es igual en ambos casos. Los símbolos son:

$$\bar{□} = □□□□□□□□□□□□□$$
$$□ = □□□□□□□□□□□□□□□□$$

Cálculo de la media aritmética para datos no agrupados

La media aritmética se define como el cociente de la suma de todos los valores observados y el número total de observaciones. Si el número total de observaciones de una variable □ es □ y los valores observados son $□_□, □_□, □_□, \ldots, □_□$, la media aritmética está dada por:

$$\bar{\square} = \frac{\square}{\square}\sum_{\square=\square}^{\square} \square_{\square}$$

Ejemplo 1.8: calcular la media aritmética de un conjunto de datos correspondiente a la edad de un grupo de 15 personas. Las edades son las siguientes.

12	15	12	14	17	17	15	14	15	16	16	13	15	19	15

Solución: denotando la variable edad mediante $\square$, y asumiendo que los datos corresponden a una muestra, la media aritmética de esta variable está dada por:

$$\bar{\square} = \frac{\square}{\square}\sum_{\square=\square}^{\square} \square_{\square}$$

$$\bar{\square} = \frac{\square\square + \square\square + \square\square + \square\square + \square\square + \square\square + \square\square + \square\square + \square\square + \square\square + \square\square + \square\square + \square\square + \square\square + \square\square}{\square\square}$$

$$\bar{\square} = \frac{\square\square\square}{\square\square} = \square\square$$

Cálculo de la media aritmética para datos agrupados

El cálculo de la media aritmética de un conjunto de datos agrupados, a partir de una tabla de distribución de frecuencias, se hace con base en el número de datos, las marcas de clase $\bar{\square}_{\square}$ y las frecuencias absolutas $\square_{\square}$. La expresión correspondiente es:

$$\bar{\square} = \frac{\square}{\square}\sum_{\square=\square}^{\square} \square_{\square}.\square_{\square}$$

Ejemplo 1.9: la muestra los datos requeridos para calcular la media aritmética de datos del ejemplo, se tiene una columna con las marcas de clase y una con las frecuencias absolutas, nótese que frente a la necesidad calcular el producto de marcas de clase y frecuencias de clase, resulta conveniente incluir una columna con tales productos, al final de tal columna también se muestra la suma de productos. Esta forma de proceder facilita los cálculos.

Clase $\square$	$\square$	$\overline{\square_{\square}}$	$\square_{\square}$	$\overline{\square_{\square}}.\square_{\square}$
1	□□ – □□	□□,□	□□	□□□
2	□□ – □□	□□,□	□□	□□□
3	□□ – □□	□□,□	□□	□□□,□
4	□□ - □□	□□,□	□□	□□□□,□
5	□□ - □□	□□,□	□□	□□□,□
6	□□ - □□	□□,□	□□	□□□□
7	□□ – □□	□□,□	□□	□□□□
8	□□ – □□	□□,□	□□	□□□□,□
				$\sum_{\square=\square}^{\square} \overline{\square_{\square}}.\square_{\square} = \square\square\square\square$

Tabla 1.9. Tabla para cálculo de media de datos del ejemplo 1.2
Fuente: propia.

Puesto que el número de datos es $\square = \square\square\square$, la media aritmética está dada por:

La mediana

La mediana es una medida de tendencia central que corresponde al valor que ocupa la posición central considerando el conjunto de datos ordenados, es decir, divide el conjunto de datos en dos partes iguales. Para representar la mediana se utiliza el símbolo $\square_{\square}$. La mediana se puede calcular para datos originales o no agrupados y para datos agrupados. En la sección de lecturas complementarias de esta semana se encuentra la descripción detallada del cálculo de la mediana para datos agrupados.

Cálculo de la mediana para datos sin agrupar

Para el caso de datos no agrupados, simplemente se debe ordenar el conjunto de datos y observar cuál de ellos ocupa la posición central del conjunto. Si se tiene un número impar de datos efectivamente uno de ellos divide al conjunto en dos partes iguales, ese corresponde a la mediana. En los casos en que se tiene un número par de valores, se toma como mediana el promedio de los dos valores centrales.

Los ejemplos siguientes ilustran estas situaciones.

Ejemplo 1.10: los siguientes once números corresponden a los resultados de observaciones en un simple estudio estadístico:

23, 18, 7, 8, 20, 9, 15, 8, 12, 18, 21.

Al ordenar el conjunto se tiene:

7, 8, 8, 9, 12, 15, 18, 18, 20, 21, 23.

Fácilmente se observa que, al ocupar la sexta posición, el número 15 corresponde a la mediana. Hay el mismo número de observaciones antes y después del 15.

Ejemplo 1.11: número par de datos.

Los siguientes diez números corresponden a observaciones ordenadas en un estudio.

52, 73, 76, 78, 84, 86, 89, 90, 92, 95

Se puede observar que en este conjunto ordenado de 10 datos, los valores escritos en rojo (posiciones quinta y sexta) están en la mitad del conjunto, entonces la mediana será el promedio de ellos dos, es decir:

$$\square_{\square} = \frac{\square\square + \square\square}{\square} = \square\square$$

Este resultado indicaría que el 50% de los valores más bajos tienen un máximo de 85.

La moda

En un conjunto de datos, la moda corresponde al valor que se presenta con mayor frecuencia, se representa mediante el símbolo □□. Por ejemplo, dado el conjunto de datos 2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, es claro que, al ser el valor que se presenta con mayor frecuencia, el 4 es la moda del conjunto. La moda se puede hallar para variables cualitativas y cuantitativas. En el caso de datos no agrupados, si se tiene dos o más valores de la variable con la mayor frecuencia se dice que el conjunto de datos es multimodal. También se presenta el caso de conjuntos de datos en los que no hay un valor que se pueda considerar como moda. Se suele decir también que la moda es una medida de la popularidad que refleja la tendencia de una opinión.

Ejemplo 1.12: atendiendo a la información sobre el nivel de formación académica alcanzado por los 80 empleados de una mina de carbón, mostrada en la siguiente tabla, se puede observar que la moda entre los valores del nivel académico alcanzado es primaria completa.

Nivel de Instrucción	Nivel de Instrucción	Frecuencia
Sin Instrucción	1	2
Primaria Incompleta	2	9
Primaria Completa	3	23
Bachillerato Incompleto	4	20
Bachillerato Completo	5	17
Superior Incompleta	6	5
Superior completa	7	4

Tabla 1.10.
Fuente: propia.

Propiedades de la media, mediana y moda

Finalizamos esta cartilla de esta semana señalando algunas propiedades de las medidas de tendencia central.

Propiedades de la media aritmética

- Puede ser calculada en distribuciones con escala de razón o de intervalo.
- Todos los valores son incluidos en el cómputo de la media.
- Una serie de datos solo tiene una media.
- Es una medida muy útil para comparar dos o más poblaciones.
- Tiene como desventajas que si alguno de los valores es extremadamente grande o extre-

madamente pequeño, la media no es el promedio apropiado para representar la serie de datos.

Propiedades de la mediana

- Hay solo una mediana en una serie de datos.
- No es afectada por los valores extremos (altos o bajos).
- Puede ser calculada en distribuciones de frecuencia con intervalos abiertos, si no se encuentra en el intervalo abierto.

Propiedades de la moda

- La moda se puede determinar en todos los tipos de mediciones (nominal, ordinal, de intervalo, y de razón).
- La moda tiene la ventaja de no ser afectada por valores extremos.
- Al igual que la mediana, puede ser calculada en distribuciones con intervalos abiertos.

Con la presentación de estas propiedades de las medidas de tendencia central finaliza el estudio de esta semana. En aras de alcanzar un mejor acercamiento al dominio de los principios de cálculo tratados, se recomienda al estudiante la minuciosa revisión de los ejemplos desarrollados y la aplicación de las estrategias de trabajo a los ejercicios propuestos. En la cartilla correspondiente a la próxima semana se trabajarán los primeros conceptos relacionados con cálculo de probabilidad.

1

Unidad 1

Experimentos aleatorios y técnicas de conteo

Estadística de probabilidades

Autor: Danilo de Jesús Ariza Agámez

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina

MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Introducción

En la cartilla de la semana 1 hemos señalado que la estadística se divide en estadística descriptiva y estadística inferencial. La estadística inferencial trata precisamente de realizar inferencias o deducciones a partir de estudios realizados sobre muestras seleccionadas en lugar de trabajar sobre toda la población; sin embargo, se debe tener en cuenta que tales inferencias no se obtienen directamente de la visión que otorga el análisis sobre la muestra, sino que se requiere la aplicación de métodos probabilísticos para determinar que tan concluyentes son los valores dados por el estudio sobre la muestra.

Dado que a través de este curso se quiere proporcionar al estudiante los fundamentos que le permitan comprender o llevar a cabo estudios estadísticos, se hace necesario abordar los principios fundamentales del cálculo de probabilidad. En esta cartilla estudiamos las ideas preliminares asociadas a algunos cálculos, por lo que se trata inicialmente las nociones de experimento aleatorio, eventos y técnicas de conteo de puntos muestrales, principios de álgebra de conjuntos aplicables al cálculo de probabilidad, entre otros; todo ello apuntando a los principios de cálculo que se trabajarán en la semana 3.

U1

Metodología

La principal recomendación que se da al estudiante frente al reto de estudio de la introducción a la probabilidad, es la cuidadosa lectura de los elementos contenidos en esta cartilla. Una forma eficiente de acercarse a la comprensión puede ser la elaboración de síntesis de las temáticas a través de un mapa conceptual, un mapa mental, un cuadro sinóptico u otra forma de resumir información; esto a razón de que la elaboración de tal resumen demande una importante dosis de reflexión alrededor del temas relacionados con espacios muestrales, eventos, principios de conteo y otros conceptos. En los casos en que se presenta ejemplos numéricos resueltos es útil verificar tales cálculos a lápiz y papel.

La principal recomendación que se da al estudiante frente al reto de estudio de la introducción a la probabilidad, es la cuidadosa lectura de los elementos contenidos en esta cartilla. Una forma eficiente de acercarse a la comprensión puede ser la elaboración de síntesis de las temáticas a través de un mapa conceptual, un mapa mental, un cuadro sinóptico u otra forma de resumir información; esto a razón de que la elaboración de tal resumen demande una importante dosis de reflexión alrededor del temas relacionados con espacios muestrales, eventos, principios de conteo y otros conceptos. En los casos en que se presenta ejemplos numéricos resueltos es útil verificar tales cálculos a lápiz y papel.

Se debe tener claro que esta cartilla no es el único recurso propuesto al estudiante para alcanzar el deseado nivel de comprensión, se presentan también recursos de videoconferencias, resúmenes, videodiapositivas y ejercicios de repaso; todo ello orientado a brindar oportunidades de adquisición de conocimientos y desarrollo de habilidades a través de diferentes medios. En la sección correspondiente a videocápsulas se presentan una serie de videos orientados al fortalecimiento de los temas objeto de estudio.

El seguimiento de las recomendaciones aquí dadas puede facilitar el afianzamiento del tema y brindar la posibilidad de adquirir mayor confianza frente a los contenidos posteriores.

Elementos preliminares del cálculo de probabilidad

La estadística inferencial se refiere fundamentalmente a estudios sobre conjunto de datos que son resultados de observaciones particulares, los mismos que a priori son impredecibles. Por ejemplo, si en un estudio estadístico se toma datos sobre la preferencia de los electores por los candidatos a un cargo público, diferentes observaciones pueden dar resultados significativamente diferentes, todos ellos pertenecientes a un conjunto de posibles valores. Lo anterior da pie para enunciar algunos conceptos preliminares aplicables al cálculo de probabilidad.

Experimento aleatorio

En estadística un experimento aleatorio se entiende como toda acción orientada a obtener como resultado un dato o un conjunto de datos, de los cuales a priori no se tiene certeza de los resultados. El interés es registrar los datos y a partir de ahí realizar los análisis pertinentes. Se recalca aquí la naturaleza impredecible de los resultados del experimento. Ejemplos de experimentos aleatorios y los respectivos datos de interés son: lanzamiento de un dado en dos ocasiones; la selección de tornillos en forma sucesiva de un lote de producción para observar si son defectuosos (D) o no defectuosos (N); la medición del tiempo de retardo en la llegada de los empleados en días de lluvia.

Espacio muestral y puntos muestrales de un experimento.

En el ámbito del cálculo de probabilidad, el espacio muestral de un experimento aleatorio es el conjunto de todos los posibles resultados del mismo. En lo que concierne a este curso el espacio muestral se denota mediante la letra S.

Ejemplo 2.1: si consideramos el experimento correspondiente al lanzar dos veces un dado, el espacio muestral es:

S= {(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6)

(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6)

(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6)

(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6)

(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6)

(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)}

Ejemplo 2.2: el espacio muestra para la observación sucesiva de tres tornillos es:

S={NNN,DNN,NDN,NND,DDN,DND,NDD, DDD}

Ejemplo 2.3: si estamos interesados en el espacio muestral para el experimento en el que se mide la duración de un bombillo, debemos tener claro que un bombillo se puede dañar en el preciso instante que se enciende o en cualquier instante posterior, que no podemos limitar, por lo tanto el espacio muestral está dado por:

S={t: t≥0}

Cada uno de los posibles valores que conforman el espacio muestral se denomina a su vez punto muestral, si un valor x es uno de los resultados posibles de un experimento, se dice que $x \in S$

Eventos

En cálculo de probabilidad un evento se define como un subconjunto específico del espacio muestral. Frecuentemente resulta útil realizar la representación de los eventos y del espacio muestral en un diagrama de Venn.

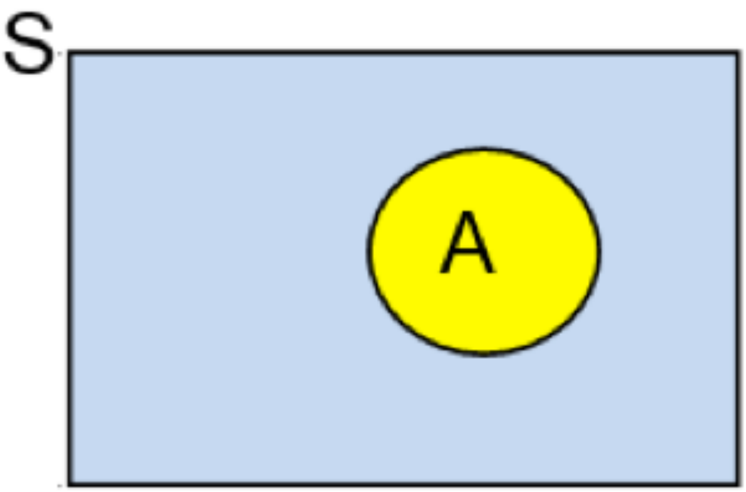

Imagen 1.
Fuente: Propia.

Ejemplo 2.4: consideremos el experimento correspondiente al lanzar dos veces un dado, un ejemplo de evento podría ser aquel en que la suma de los puntajes es menor que 7, si denotamos mediante A a este evento, tenemos que:

A={(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),

(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,1),

(3,2),(3,3),(4,1),(4,2),(5,1)}

Es decir el evento A ocurre siempre que cualquiera de los resultados anteriores, ya que en cada uno de ellos la suma de los puntajes de cada dado no alcanza a ser.

Ejemplo 2.5: en el experimento que mide la duración de un bombillo podemos definir diferentes eventos, por ejemplo, el evento A como aquel en el cual la duración de un bombillo es menor que 120 horas, es decir:

A= {*t*: *t*<120 horas}

Evento seguro y evento imposible

Recordando los conceptos de conjuntos vemos que entre todos los subconjuntos de un conjunto hay dos de particular importancia, el mismo conjunto y el conjunto vacío. En probabilidad, todo evento que coincida con el espacio muestral se conoce como evento seguro, es decir, el evento que siempre ocurre, mientras que el que se asocia al conjunto vacío se conoce como evento imposible. El evento imposible se suele representar mediante el símbolo ϕ .

Ejemplo 2.6: en el experimento del lanzar dos veces un dado un evento seguro podría ser aquel que especifica que la suma es menor que 13, puesto que en este experimento la suma máxima es 12, se encuentra que siempre ocurre el evento. Un ejemplo de evento imposible podría ser precisamente el que indica que la suma es mayor que 12.

Complemento de un evento

Dado un evento *A*, asociado a un espacio muestral S, el complemento de *A* es el evento que ocurre precisamente cuando no ocurre *A,* esto significa que el complemento de *A* está formado por todos los puntos del espacio muestral que no están en *A*. El complemento de A se denota mediante A^c .

Ejemplo 2.7: En el experimento de lanzar dos dados, anteriormente consideramos el evento A correspondiente a aquel en que la suma de puntos es menor que 7, el complemento del evento A es entonces:

A^c= {(1,6),(2,5),(2,6) ,(3,4),(3,5),(3,6),(4,3),

(4,4),(4,5),(4,6),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),

(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)}

Vemos que la suma de puntos en cada uno de estos resultados posibles es un número mayor o igual que 7.

Operaciones entre eventos de un espacio muestral

En lo que hemos venido tratando es claro que los eventos están asociados a conjuntos, por lo que resulta pertinente preguntarse si se puede presentar operaciones entre eventos, la respuesta es sí y su sustentación se presenta a continuación.

Unión de eventos e intersección de eventos

Dados dos eventos A y B incluidos en un espacio muestral S la unión de A y B, denotada mediante mediante $A \cup B$ es aquel evento que ocurre si ocurre el evento A, o si ocurre el evento B o si ocurren ambos eventos. Esto significa que para que un punto muestral pertenezca a la unión de dos eventos debe pertenecer al menos a uno de los dos.

Por su parte la intersección de A y B, denotada mediante $A \cap B$, es el evento que ocurre siempre que ocurran los eventos A y B al mismo tiempo. Para que un punto muestral pertenezca a la intersección de dos eventos debe pertenecer a ambos.

Ejemplo 2.8: sea S el espacio muestral del experimento de lanzar un dado dos veces y sean los eventos:

A={La suma de puntos es múltiplo de 3}

B={El resultado del primer lanzamiento es mayor que el del segundo}

En este caso los eventos corresponden exactamente a:

$$A= \{(1,2),(1,5),(2,1),(2,4),(3,3),(3,6)$$

$$(4,2),(4,5),(5,1),(5,4),(6,3),(6,6)\}$$

$$B= \{(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3),(5,1),(5,2),$$

$$(5,3),(5,4),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),\}$$

Con lo que se tiene que el evento $A \cup B$ es:

$A \cup B= \{(1,2),(1,5),(2,1),(2,4),(3,1),(3,2),(3,3),(3,6),(4,1),(4,2),$

$(4,3),(4,5),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(6,1)(6,2),(6,3),(6,4),(6,5)(6,6)\}$

Observamos que con la ocurrencia de cualquiera de los posibles resultados que pertenecen a $A \cup B$ estaría ocurriendo al menos uno de los dos eventos A o B.

La intersección $A \cap B$ está dada por:

$A \cap B=\{ (2,1),(4,2),(5,1),(5,4),(6,3)\}$

Aquí observamos que cada uno de los elementos de la intersección efectivamente está en ambos eventos, lo que significa que ambos eventos pueden ocurrir al mismo tiempo.

Eventos mutuamente excluyentes

Dados dos eventos *A y B* incluidos en un espacio muestral *S*, se dice que son mutuamente excluyentes si la intersección entre ellos es el evento nulo o evento imposible, es decir, no hay puntos muestrales comunes a ambos eventos.

Ejemplo 2.9: tomando el evento *B* del ejemplo anterior y el evento *C* consistente en todos los puntos del espacio muestral cuyo segundo número es 6, se tiene:

$C=\{ (1,6),(2,6),(3,6),(4,6),(5,6),(6,6)\}$

Lo que deja ver que entre los eventos *B y C* no hay puntos muestrales en común, por lo tanto son eventos mutuamente excluyentes.

Partición de un espacio muestral

Dado un espacio muestral *S*, una partición de *S* es cualquier conjunto de eventos $E_1, E_2, \dots, E_n$ mutuamente excluyentes y que la unión de todos ellos equivale al espacio muestral. Una idea gráfica de una partición se muestra en el siguiente diagrama.

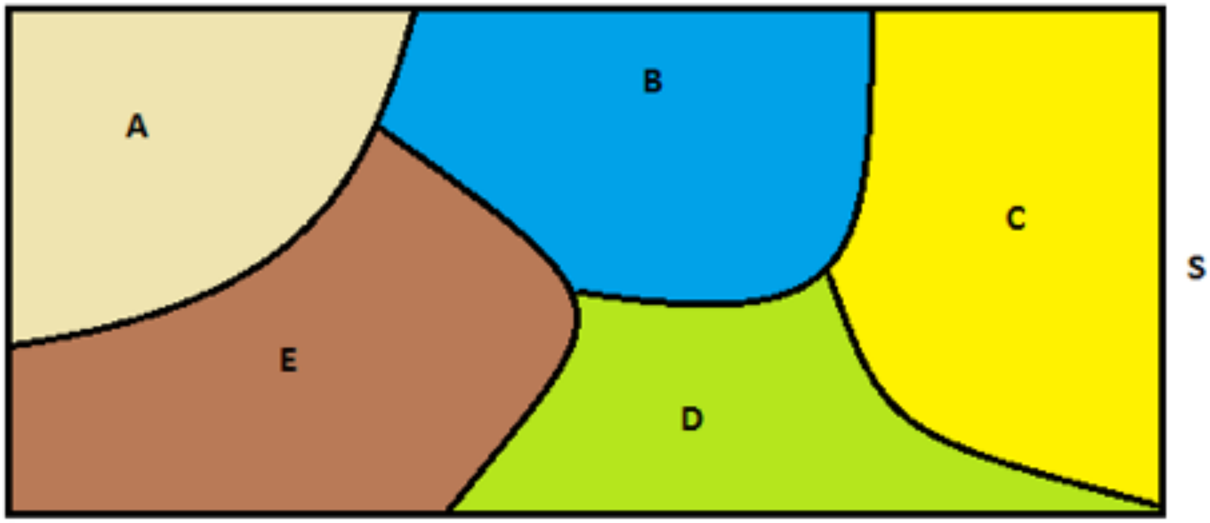

Imagen 2.
Fuente: propia.

Principios de conteo

En el cálculo de probabilidad, buena parte de los problemas requieren el conocimiento de la cantidad de puntos pertenecientes a un espacio muestral, sin que necesariamente se deba realizar una lista de todos ellos; por tal razón, es necesario contar con un conjunto de principios que permitan realizar tal conteo. A continuación se presenta un conjunto de principios empleados en el conteo de puntos muestrales.

Principio fundamental del conteo

Si una acción x se puede dar en un número n_x de formas y por cada una de ellas se puede dar una acción y en un número de n_y formas, las dos acciones en conjunto se pueden realizar en $n_x.n_y$ formas.

Ejemplo 2.10: en el experimento de lanzar un dado dos veces se tiene que la acción del primer lanzamiento se puede dar en 6 formas diferentes, es decir, el primer lanzamiento puede dar como resultado cualquiera de los números de 1 a 6, por cada uno de esos resultados posibles el segundo lanzamiento podría ser también cualquier número de 1 a 6, es por eso que se da las 36 parejas de números que conforman el respectivo espacio muestral.

El principio fundamental de conteo se puede extender a más de dos acciones, con lo que tenemos el siguiente principio:

Generalización del principio fundamental del conteo

Si una acción 1 se puede dar en un número n_1 de formas y por cada una de ellas una acción 2 se puede dar en n_2 formas, y por cada una de todas las combinaciones anteriores una acción 3 se puede dar en n_3 formas, y así sucesivamente hasta un numero de *m* acciones, se tiene que las *m* acciones combinadas se pueden dar en un número de formas dado por:

$$N = n_1.n_2.,,,.n_m$$

Ejemplo 2.11: en una empresa se usa un esquema de identificación usando dos letras seguidas de dos números, en el caso de las letras no se permiten repeticiones y el primer número debe ser un número impar. Calcular el número de posibles identificaciones distintas.

Solución: tomando una de las 26 letras del alfabeto para la primera de las letras, quedan 25 posibilidades para la segunda, por tanto el número total de combinaciones de letras es:

$$Cantidad\ de\ combinaciones\ de\ letras = (26)(25) = 6500$$

Mientras que para el primero de los números se cuenta con 5 posibilidades y para el segundo se tiene 10, por consiguiente el número de posibilidades de números es:

$$Cantidad\ de\ combinaciones\ de\ letras = (5)(10) = 50$$

Por lo tanto el número de identificaciones diferentes es:

$$Cantidad\ de\ identificaciones = (650)(50) = 32500$$

Permutaciones

Se entiende por permutación cada una de las posibles formas en que se puede organizar un conjunto o una parte de un conjunto de objetos.

Ejemplo 2.12: en una bolsa se tienen tres fichas, una roja (r), una amarilla (a) y una verde (v). Se saca de la bolsa una a una las fichas. ¿Cuántas formas diferentes existen para el orden de extracción de las fichas?

Solución: las diferentes posibilidades del orden en que se podría sacar las fichas es el conjunto:

$$\{rav, rva, arv, avr, vra, var\}$$

Vemos que el número de 6 resultados está de acuerdo con la generalización del principio fundamental de conteo, esto porque se tiene 3 posibilidades para la primera extracción, 2 para la segunda y 1 para la primera, esto es:

$$P = (3)(2)(1) = 6$$

Si en lugar de 3, tenemos 4 ficha de diferentes colores, el número de posibilidades o permutaciones es:

$$P = (4)(3)(2)(1) = 24$$

En general para *n* fichas el número de permutaciones es:

$$P = (n)(n-1)(n-2) \ldots .(4)(3)(2)(1)$$

Este producto de *n* por todos los números naturales menores se conoce como el factorial de *n* lo que también se puede escribir como:

$$P = (1)(2)(2)(n-2)(n-1)(n) = n!$$

Número de permutaciones de n objetos

El número total de permutaciones de *n* objetos diferentes está dado por:

$$P_n = n!$$

Número de permutaciones al tomar *r* objetos de un conjunto de *r*

Si en lugar de tomar los r objetos se toma r de ellos, para el primer objeto se tiene *n* posibilidades, para el segundo se tiene $(n-1)$ y así sucesivamente, de tal manera que para el *r-esimo* se tiene $(n-r+1)$ posibilidades. Siguiendo el principio fundamental de conteo, el número de permutaciones de *n* objetos tomados de un conjunto de *r* está dado por:

$$P_{nr} = n(n-1)\dots(n-r+1)$$

Si multiplicamos y dividimos por $(n-r)! = (n-r)(n-r-1)\dots(1)$ encontramos:

$$P_{nr} = n(n-1)\dots(n-r-1).\frac{(n-r)(n-r-1)\dots(1)}{(n-r)(n-r-1)\dots(1)}$$

$$P_{nr} =.\frac{n(n-1)\dots(n-r-1)(n-r)(n-r-1)\dots(1)}{(n-r)(n-r-1)\dots(1)}$$

$$_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Ejemplo 2.13: si se tiene 5 fichas de diferentes colores en una bolsa y se han de extraer dos de ellas, una luego de la otra, la cantidad de posibilidades diferentes que existen es:

$$_nP_r = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = \frac{3!.(4)(5)}{3!} = (4)(5) = 20$$

En el anterior cálculo hemos descompuesto el factorial de un número como el producto del factorial de un número menor por los siguientes factores requeridos.

Permutaciones *n* objetos con grupos de objetos indistinguibles

Si se tiene n objetos de los cuales hay n_1 de clase 1, de clase n_2 2, hasta de clase j, el número de permutaciones diferente es:

$$P = \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_j} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\dots n_j!}$$

Ilustramos la validez de esta afirmación con el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.14: en una bolsa hay 4 fichas rojas y 3 azules, para hallar el número de permutaciones diferentes se tiene en cuenta que con 7 fichas, si todas fueran diferentes, se tendría un total de 7! permutaciones, pero el hecho de tener 4 fichas rojas, el total se reduce en un factor de 4!, al haber 3 fichas azules, el total se reduce además en un factor de 3! lo que arroja un resultado de:

$$P = \frac{7!}{4!\,3!}$$

Lo que está de acuerdo con la fórmula antes señalada, el resultado total es:

$$P = \binom{7}{4,3} = \frac{7!}{4!\,3!} = \frac{(4!)(5)(6)(7)}{4!\,3!}$$

$$P = \frac{(5)(6)(7)}{(2)(3)} = P = (5)(7) = 35$$

Ejemplo 2.15: si además de tener 4 fichas rojas y 3 azules, se tiene 2 blancas, el número total de permutaciones es:

$$P = \binom{9}{4,3,2} = \frac{9!}{4!\,3!\,2''} = \frac{(4!)(5)(6)(7)(8)(9)}{4!\,3!\,2!} = (5)(7)(4)(9) = 1260$$

Combinaciones

En las permutaciones hemos visto que se debe considerar el orden de los objetos, es decir, la permutación *ab* es diferente de la permutación *ba*. Una combinación es cada una de las posibilidades en las que se puede seleccionar k objetos de un conjunto sin importar el orden. Esto se puede considerar como una permutación en la que k objetos son de una clase y los restantes $(n-k)$. por lo tanto el número de combinaciones está dado por:

$$\square_n C_k = \binom{n}{k,\ n-k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Es costumbre abreviar el valor $\binom{n}{k,n-k}$ mediante $\binom{n}{k}$

Con lo que se tiene:

$$\square_n C_k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Ejemplo 2.16: si se tienen 5 objetos y se han de tomar 3 de ellos, el número de combinaciones diferentes está dado por:

$$\square_n C_k = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\,(5-3)!} = \frac{5!}{3!\,2!} = \frac{3!\,(4)(5)}{3!\,2!} = 10$$

2

Unidad 2

Introducción al cálculo de probabilidad

Estadística de probabilidades

Autor: Danilo de Jesús Ariza Agámez

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina

MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Introducción

Tal como se indicó en su momento, la cartilla de la semana 2 se dedicó al estudio de elementos preparatorios para afrontar el cálculo de probabilidad; las temáticas a tratar aquí, en esta cartilla de la semana 3, se centran en el estudio de los elementos fundamentales del cálculo de probabilidad. Se estudiarán principios básicos del cálculo de probabilidad tales como fórmula de Laplace, reglas aditivas, reglas multiplicativas, probabilidad condicional, probabilidad total y regla de Bayes; todo ello, a menos que se indique lo contrario, se hace dentro del contexto de experimentos aleatorios cuyo espacio muestral es un conjunto finito.

U2

Metodología

El objeto de estudio de esta semana obedece al cálculo de probabilidad en el que se consideran experimentos, cuyo espacio muestral es un conjunto finito, por tal razón, aplica los fundamentos previos trabajados en la semana 2. Frente a esta situación, la recomendación que se da al estudiante es la cuidadosa lectura de los elementos contenidos en esta cartilla y tener siempre presente los principios tratados en la semana anterior. Además de esto, una forma eficiente de acercarse a la comprensión puede ser la elaboración de síntesis de las temáticas a través de un mapa conceptual, un mapa mental, un cuadro sinóptico u otra forma de resumir información. La elaboración de un resumen requiere que el estudiante realice importantes reflexiones alrededor de los temas correspondientes a cálculo de probabilidad. En los casos en que se presenta ejemplos numéricos resueltos es útil verificar tales cálculos a lápiz y papel.

Se recalca al estudiante que la presente cartilla no es el único recurso propuesto para alcanzar el deseado nivel de comprensión, se presentan también recursos de videoconferencias, resúmenes, videodiapositivas y ejercicios de repaso, los cuales están orientados a brindar oportunidades de adquisición de conocimientos y desarrollo de habilidades a través de diferentes medios. En la sección de video cápsulas se presentan una serie de videos que buscan fortalecer de los temas objeto de estudio.

El seguimiento de estas recomendaciones puede facilitar el afianzamiento del tema y proporcionar la posibilidad de adquirir mayor confianza frente a contenidos posteriores.

U2 Desarrollo temático

Probabilidad

Cuando se hace referencia al término de probabilidad, bien se podría decir que este concepto está referido a una medida de la creencia de que ocurra determinado hecho, fenómeno o situación, o más específicamente, a un evento en el sentido de lo que se ha comentado antes. Por ejemplo, frecuentemente se escuchan expresiones como: "es muy probable que llueva en la tarde de hoy", "es altamente probable que el resultado de las elecciones dé como ganador a determinado candidato" o "existe un 45% de posibilidades de que podamos acceder a una beca universitaria"; en todos estos ejemplos, así como en muchos otros, se ha de tener en cuenta que tal medida de la creencia no es caprichosa, sino que está fundamentada en el conocimiento histórico, en estudios realizados y en la aplicación de principios debidamente formalizados, entre otros. La determinación de tal medida de la creencia pertenece al campo del cálculo de probabilidad. En lo que resta de esta cartilla se estarán tratando algunos principios de probabilidad referidos principalmente a eventos en los cuales el espacio muestral es un conjunto finito de posibles resultados asociados a un experimento aleatorio.

Probabilidad de un evento en un experimento aleatorio con espacio muestral finito

La medida de la probabilidad correspondiente a un evento en el contexto de un experimento aleatorio en el que el espacio muestral es finito, se fundamenta en la asignación de un probabilidad a cada punto del espacio muestral, de tal manera que la suma de las probabilidades de todos los puntos muestrales sea igual a 1. La probabilidad del evento corresponde entonces a la fracción de las probabilidades asignadas a todos los puntos muestrales pertenecientes al evento. A la cantidad de puntos pertenecientes al evento se le suele llamar casos favorables al evento.

Con lo anterior se tiene que, si un espacio muestral está formado por *N* puntos muestrales, cada uno de ellos con igual probabilidad de ocurrencia, y al evento *A* pertenecen n_A la probabilidad *A* del evento denotada mediante $P(A)$ está dada por:

$$P(A) = \frac{n_A}{N}$$

La anterior fórmula es conocida como fórmula de Laplace. En el caso que no todos los puntos del espacio muestral tenga la misma probabilidad, se debe considerar los pesos correspondientes.

Ejemplo 3.1: considerando el experimento aleatorio de lanzar dos veces un dado, calcular la probabilidad de que la suma de los resultados sea un número múltiplo de 3.

Solución: el espacio muestral, tal como lo hemos visto antes, está compuesto por 36 puntos, de los cuales hay 12 casos favorables al evento *A*, que son los mostrados a continuación:

$$\boldsymbol{A = \{(1,2),(1,5),(2,1),(2,4),(3,3),(3,6)}$$
$$\boldsymbol{(4,2),(4,5),(5,1),(5,4),(6,3),(6,6)\}}$$

Aplicando la fórmula de Laplace encontramos que la probabilidad del evento *A* es entonces:

$$P(A) = \frac{n_A}{N} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

Propiedades de la probabilidad

Es claro que el evento nulo tiene cero puntos muestrales, mientras que el evento seguro, al corresponder al mismo espacio muestral, tiene *N* puntos muestrales, de resto cualquier otro evento está formado por un número de puntos que está entre *0 y N,* por en un espacio muestral se tiene:

$$i) \quad 0 \leq P(A) \leq 1 \quad \text{tanto para cualquier evento } A$$
$$ii) \quad P(S) = 1$$
$$iii) \quad P(\phi) = 0$$

Ejemplo 3.2: considerando el experimento aleatorio de lanzar un dado dos veces, calcular:

a. La probabilidad de que en los dos lanzamientos se obtenga una suma múltiplo de 3.
b. La probabilidad de que el resultado del primer lanzamiento sea mayor que el segundo.
c. La probabilidad de que la suma de los lanzamientos sea múltiplo de 3 o que el resultado del primer lanzamiento sea mayor que el segundo.
d. La probabilidad de que la suma de los lanzamientos sea múltiplo de 3 y que el resultado del primer lanzamiento sea mayor que el segundo.

Solución: En este caso los eventos referidos en los literales son respectivamente los eventos $\boldsymbol{A, B, A \cup B \text{ y} A \cap B}$ presentados a continuación:

$$\boldsymbol{A = \{(1,2),(1,5),(2,1),(2,4),(3,3),(3,6)}$$
$$\boldsymbol{(4,2),(4,5),(5,1),(5,4),(6,3),(6,6)\}}$$

$$\boldsymbol{B = \{(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3),(5,1),(5,2),}$$
$$\boldsymbol{(5,3),(5,4),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),\}}$$

$$\boldsymbol{A \cup B = \{(1,2),(1,5),(2,1),(2,4),(3,1),(3,2),(3,3),(3,6),(4,1),(4,2),}$$
$$\boldsymbol{(4,3),(4,5),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(6,1)(6,2),(6,3),(6,4),(6,5)(6,6)\}}$$

$$\boldsymbol{A \cap B = \{(2,1),(4,2),(5,1),(5,4),(6,3)\}}$$

Entonces las probabilidades pedidas son:

$$\boldsymbol{P(A) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}}$$
$$\boldsymbol{P(B) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}}$$
$$\boldsymbol{P(A \cup B) = \frac{22}{36} = \frac{11}{18}}$$
$$\boldsymbol{P(A \cap B) = \frac{5}{36}}$$

Algunas reglas de probabilidad

En ciertos casos es más fácil calcular la probabilidad de un evento a partir del conocimiento de la probabilidad de otro, esto es útil, por ejemplo, cuando se trata de operaciones entre eventos, tales como unión y eventos complementarios. A continuación se enuncia y ejemplifica algunas reglas de este tipo.

Sea *A*,*B* y *C* eventos incluidos en el espacio muestral de un experimento aleatorio, Entonces:

$\boldsymbol{a)}$ $\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$
$\boldsymbol{b)}$ $\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$ **Si A y B son mutuamente excluyentes.**
$\boldsymbol{c)}$ $\boldsymbol{P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)}$
$\boldsymbol{P(A) + P(A^c) = 1}$

Las pruebas de estas y otras propiedades se ilustran en la sección lecturas complementarias de esta semana.

Ejemplo 3.3: en el Ejemplo 3.2, vimos que:

$$\boldsymbol{P}(A) = \frac{1}{3};\ P(B) = \frac{5}{12};\ P(A \cup B) = \frac{11}{18}\ \ y\ P(A \cap B) = \frac{5}{36}$$

Fácilmente se puede ver que se cumple la relación $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Aquí mismo se puede verificar que el complemento del evento *A* está compuesto por 24 puntos muestrales, por lo que:

$$\boldsymbol{P(A^c) = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}}$$

Vemos entonces que:

$$\boldsymbol{P(A) + P(A^c) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1}$$

Probabilidad condicional

En diversas situaciones del cálculo de probabilidad se requiere hallar la probabilidad de un evento A sobre la base que ha ocurrido un evento B. A la probabilidad de ocurrencia de A, sabiendo que ocurre el evento B, se le llama probabilidad condicional del evento A dada la ocurrencia del evento B, y se denota mediante:

$$P(A/B)$$

Es usual leer los símbolos anteriores simplemente como "probabilidad de A dado B".

Ejemplo 3.4: En el experimento en el que se lanza un dado dos veces, podemos considerar, por ejemplo, que el evento A es aquel en que la suma de los dos lanzamientos es un número par y el evento B es aquel en que los dos números son pares o los dos son impares, estos eventos son:

$$\boldsymbol{A} = \{(\mathbf{1},\mathbf{2}),(\mathbf{1},\mathbf{5}),(\mathbf{2},\mathbf{1}),(\mathbf{2},\mathbf{4}),(\mathbf{3},\mathbf{3}),(\mathbf{3},\mathbf{6})\\ (\mathbf{4},\mathbf{2}),(\mathbf{4},\mathbf{5}),(\mathbf{5},\mathbf{1}),(\mathbf{5},\mathbf{4}),(\mathbf{6},\mathbf{3}),(\mathbf{6},\mathbf{6})\}$$

$$\boldsymbol{B} = \{(\mathbf{1},\mathbf{1}),(\mathbf{1},\mathbf{3}),(\mathbf{1},\mathbf{5}),(\mathbf{2},\mathbf{2}),(\mathbf{2},\mathbf{4}),(\mathbf{2},\mathbf{6}),\\ (\mathbf{3},\mathbf{1}),(\mathbf{3},\mathbf{3}),(\mathbf{3},\mathbf{5}),(\mathbf{4},\mathbf{2}),(\mathbf{4},\mathbf{4}),(\mathbf{4},\mathbf{6}),\\ (\mathbf{5},\mathbf{1}),(\mathbf{5},\mathbf{3}),(\mathbf{5},\mathbf{5}),(\mathbf{6},\mathbf{2}),(\mathbf{6},\mathbf{4}),(\mathbf{2},\mathbf{6})\}$$

Al pedir la probabilidad de A dado B realmente se está considerando un espacio muestral que se reduce a las 18 posibilidades del evento B, de este espacio muestral reducido, solo hay 5 posibilidades de ocurrencia del evento A, por tanto, la probabilidad de A sabiendo que se da B es:

$$P(A/B) = \frac{5}{18}$$

Aquí hemos realizado el cálculo con base en las 18 posibilidades correspondientes a B, sin embargo, al dividir cada término por el número total de posibilidades del espacio muestra original, podemos reescribir el cálculo como sigue:

$$P(A/B) = \frac{5}{18} = \frac{\frac{5}{36}}{\frac{18}{36}}$$

Lo interesante del planteamiento anterior es que el numerador $\frac{5}{36}$ corresponde a la probabilidad de la intersección y el denominador $\frac{18}{36}$ corresponde a la probabilidad de B, calculadas con base en el espacio muestral original, lo cual es una muestra de la siguiente expresión para hallar la probabilidad condicional.

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad con\ P(B) > 0$$

La fórmula se puede transformar para considerar la probabilidad de B dado A, con lo que se obtiene:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \qquad con\ P(B) > 0$$

De las dos expresiones anteriores se deduce que la probabilidad de la intersección de dos eventos A y B está dada por:

$$P(A \cap B) = P(B/A).P(A) \qquad o$$
$$P(A \cap B) = P(A/B).P(B)$$

Ejemplo 3.5: Se tiene en una urna 4 fichas naranja y 8 fichas verdes y se realiza el experimento aleatorio de sacar una de las fichas, dejarla por fuera de la urna y realizar nuevamente una extracción. Calcular la probabilidad de que la segunda ficha sea verde dado que la primera es naranja.

Consideremos como N el evento de obtener una ficha Naranja en la primera extracción y como V el de extraer una ficha verde en la segunda. En este caso se tiene para la primera extracción un total de 12 fichas de las cuales 4 son naranja, con lo que se tiene:

$$P(N) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

Para la segunda extracción, si en la primera se obtuvo una ficha naranja, se tiene

$$P(V/N) = \frac{8}{11}$$

Ejemplo 3.6: consideremos como espacio muestral a los estudiantes de una universidad que han alcanzado los requisitos para obtener título profesional. Estas personas se han clasificado según su género y estado civil, los datos correspondientes son los siguientes:

	Soltero	Casado	Total
Hombre	230	20	250
Mujer	70	130	200
Total	300	150	450

Se ha de seleccionar aleatoriamente una de estas personas para que pronuncie el discurso de despedida el día de la graduación. Se pide calcular la probabilidad de que el seleccionado sea un hombre dado que es soltero.

Solución: definamos los eventos H y E como sigue:

H= {El seleccionado es hombre}

E = {El seleccionado es soltero}

En este caso el espacio muestral se reduce a 300 posibilidades, de las cuales 230 son favorables al evento H, por lo tanto, la probabilidad pedida corresponde a:

$$P(H/E) = \frac{230}{300} = \frac{23}{30}$$

Se obtiene el mismo resultado si realizamos el cálculo mediante la fórmula basada en el espacio muestral original, tal como se muestra a continuación:

$$P(H/E) = \frac{P(H \cap E)}{P(E)} = \frac{P(H \cap E)}{P(E)} = \frac{\frac{230}{450}}{\frac{300}{450}} = \frac{23}{30}$$

Independencia de eventos

En el primer ejemplo ilustrativo de la probabilidad condicional (Ejemplo 3.4) vemos que $P(A/B) = \frac{5}{18}$ mientras que la probabilidad de ocurrencia del evento A es $P(A) = \frac{1}{3}$. En el Ejemplo 3.5, la probabilidad de obtener una ficha verde en el segundo lanzamiento dado que la primer fue naranja es $P(V/N) = \frac{8}{11}$; estos ejemplos muestran claramente que la probabilidad de un evento puede estar influenciada por la probabilidad de ocurrencia de otro; sin embargo, también existen situaciones en las que la probabilidad de ocurrencia de un evento no depende de la ocurrencia de otro, en este caso se dice que los eventos son independientes, para ilustrarlo consideremos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.7: Se tiene en una urna 4 fichas naranja y 8 fichas verdes y se realiza el experimento aleatorio de sacar una de las fichas, registrar su color, devolverla a la urna y realizar nuevamente una extracción. Consideremos como N el evento de obtener una ficha Naranja en la primera extracción y como V el de extraer una ficha verde en la segunda. En este caso se tiene:

$$P(N) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$
$$P(V) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

Si nos interesamos por la probabilidad de que la segunda ficha extraída sea verde dado que la primera es naranja encontramos que $P(V/N) = \frac{2}{3} = P(V)$, lo que indica que la probabilidad de ocurrencia del evento V no se ve afectada por la ocurrencia de N, por lo tanto, los eventos son independientes.

En el caso de eventos independientes vemos entonces que $P(A/B) = P(A)$, por lo tanto:

Propiedad de la independencia de eventos

Dos eventos A y B son independientes si y sólo si la probabilidad de su intersección es igual al producto de sus probabilidades, es decir:

$$P(A \cap B) = P(A/B).P(B) = P(A).P(B)$$

Probabilidad total

Iniciamos el estudio de esta parte del tema considerando nuevamente la situación del Ejemplo 3.6, referida a los estudiantes a obtener el título profesional en una universidad. Agregamos en este caso que 18 de los 6 de los casados tienen ofertas de trabajo en una prestigiosa compañía extranjera. Hallar la probabilidad de que la persona seleccionada para pronunciar el discurso de despedida sea una de las que recibió oferta laboral de la compañía.

	Soltero	Casado	Total
Hombre	230	20	250
Mujer	70	130	200
Total	300	150	450

Para una mejor comprensión conviene tener en cuenta la figura 3.3, en la cual se representa el espacio muestral S particionado en los eventos E (solteros) y C (Casados), además se representa el evento A que consiste en que la persona seleccionada es una de las que tiene oferta laboral de la compañía extranjera.

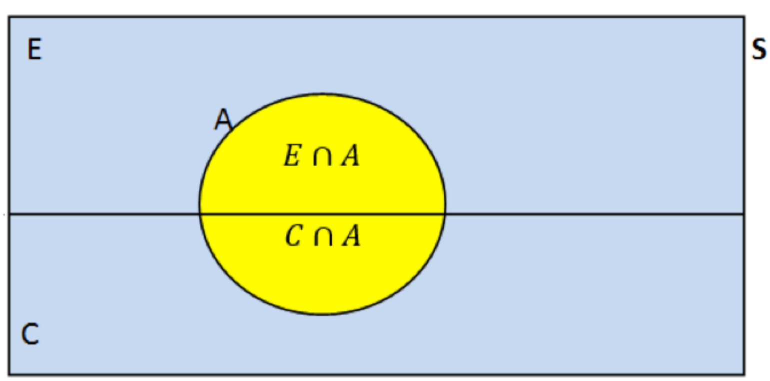

Imagen 1.
Fuente: Propia.

Podemos notar que el evento A es la unión de los eventos $E \cap A$ y $C \cap A$, con lo que, al aplicar probabilidad de la unión para eventos mutuamente excluyentes, se tiene:

$$A = (E \cap A) \cup (C \cap A)$$
$$P(A) = P[(E \cap A) \cup (C \cap A)]$$
$$P(A) = P(E \cap A) + P(C \cap A)$$

Al aplicar principios de probabilidad condicional se encuentra que:

$$P(E \cap A) = P(A/E).P(E)$$
$$P(C \cap A) = P(A/C).P(C)$$

Con lo que la probabilidad de A es:

$$P(A) = P(A/E).P(E) + P(A/C).P(C)$$

Al sustituir los datos de la tabla en la anterior expresión encontramos los valores de probabilidades requeridos para hallar la probabilidad de A:

$$P(E) = \frac{300}{450} = \frac{2}{3};\ P(A/E) = \frac{18}{300} = \frac{3}{50};\quad P(C) = \frac{150}{450} = \frac{1}{3};\ P(A/C) = \frac{6}{150} = \frac{1}{25}$$

Entonces:

$$P(A) = \left(\frac{3}{50}\right).\left(\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{25}\right).\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{25} + \frac{1}{75} = \frac{4}{75}$$

La probabilidad calculada se conoce como probabilidad total y en este caso se ha calculado para un evento A contenido en el espacio muestral S, y una partición de S en los eventos E y C. A partir de este análisis se puede extender a los casos en que el espacio muestral está particionado en n eventos con lo cual se tiene el siguiente teorema:

Teorema 3.3: es un espacio muestral S particionado en los eventos $E_1, E_2, \dots, E_n$ tal que la probabilidad $P(E_i)$ de cada uno de los eventos que constituye la partición es distinta de cero. Entonces, para cualquier evento A contenido en S se tiene:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i \cap A) = P(E_1 \cap A) + P(E_2 \cap A) + \cdots + P(E_n \cap A) \qquad o$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i)P(A/E_i) = P(E_1)P(A/E_1) + P(E_2)P(A/E_2) + \cdots + P(E_n)P(A/E_n)$$

Ejemplo 3.8: en una urna rotulada con la letra A se tiene 6 fichas color naranja y 4 verdes, una segunda urna B tiene 4 fichas naranja y 8 verdes. Se lanza un dado, si el resultado del lanzamiento es menor que 3; se extrae una ficha de la urna A; si el resultado es mayor o igual que 3 la ficha se extrae de la urna B. calcular a) La probabilidad de que se saque una ficha

Naranja de la urna B b) La probabilidad de que la ficha sea verde.

Solución: definimos los siguientes eventos asociados al problema planteado:

A = la ficha se extrae de la urna A

B = la ficha se extrae de la urna B

N = la ficha que se extrae es de color naranja

V = la ficha que se extrae es de color Verde

a) Es claro que $P(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. La probabilidad que se saque una ficha Naranja y que sea de la urna B corresponde a $P(N \cap B)$ y la probabilidad que se saque una ficha naranja al hacerlo de la urna B corresponde a la probabilidad de N dado B, es decir $P(N/B)$; estas probabilidades se relacionan mediante:

$$P(N \cap B) = P(N/B).P(B)$$

Tenemos que de las 12 fichas de la urna B, 4 son naranja, con lo cual:

$$P(N/B) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

Por tanto

$$P(N \cap B) = \frac{1}{3}.\frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

b) Al extraer una ficha Verde esta puede provenir de la urna A o de la B, entonces se pide la probabilidad *P(V),* la cual corresponde a una probabilidad total, esta viene dada por:

$$P(V) = P(V/A)\,P(A) + P(V/B\,)P(B) = \left(\frac{4}{10}\right)\left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{8}{12}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{30} + \frac{16}{36} = \frac{2}{15} + \frac{4}{9}$$
$$= \frac{26}{45}$$

Teorema de Bayes

En la sección anterior, para un evento A contenido en un espacio muestral particionado en n eventos $E_1, E_2, \dots, E_n$ hemos visto la expresión para calcular la probabilidad total de *A,* la cual se encuentra en términos de las probabilidades condicionales del evento *A;* sin embargo, así como se puede hallar la probabilidad condicional de *A* dado cualquiera de los eventos E_i de la partición del espacio muestral *S* también se puede hallar la probabilidad de cualquiera de los eventos E_i dada la ocurrencia de *A* . Partiendo de la fórmula de la probabilidad condicional se tiene:

$$P(E_i/A) = \frac{P(E_i \cap A)}{P(A)}$$

Pero puesto que *P(A)* es la probabilidad total de A está dada por:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i)P(A/E_i)$$

Se encuentra finalmente que la probabilidad condicional de la ocurrencia de cualquiera de los eventos E_i dado que ocurrió *A* está dada por:

$$P(E_i/A) = \frac{P(E_i \cap A)}{\sum_{i=1}^{n} P(E_i)P(A/E_i)}$$

Esta expresión se conoce como regla de Bayes y puede decirse que mide la probabilidad de que un evento dado haya sido causado por la ocurrencia de uno de evento específico que constituye una partición del espacio muestral.

Ejemplo 3.9: consideremos la situación de las fichas de colores en las urnas A y B descrita en el Ejemplo 3.8. Hallar la probabilidad de que la extracción se hiciera de la urna A dado que la ficha extraída fue de color verde:

Solución: la probabilidad en este caso viene dada por la Regla de Bayes, por tanto corresponde a *P(A/V)* y está dada por:

$$P(A/V) = \frac{P(A \cap V)}{\sum_{i=1}^{n} P(E_i)P(A/E_i)} = \frac{P(A \cap V)}{P(V)}$$

En el Ejemplo 3.8 encontramos que: $P(V) = \frac{26}{45}$ $y\, P(A \cap V) = P(V/A)\, P(A) = \frac{2}{15}$, con lo que resulta:

$$P(A/V) = \frac{\frac{2}{15}}{\frac{26}{45}} = \frac{2}{\frac{26}{3}} = \frac{6}{26}$$

2

Unidad 2

Distribución de probabilidad de una variable aleatoria

Estadística de probabilidades

Autor: Danilo de Jesús Ariza Agámez

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina
MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Introducción

En la primera semana se introdujo el concepto de variable, definiéndolo como una característica observable de cada uno de los individuos de una población. En el campo de probabilidad se utiliza el término variable aleatoria de manera significativamente diferente. La temática a tratar en esta cartilla de la semana 3 se centra precisamente en el estudio de distribuciones de probabilidad de una variable aleatoria, donde se considera esta última como una función que asigna un número real a cada punto de un espacio muestral. Se estudia en forma general los casos de variable aleatoria discreta y variable aleatoria continua. Por su parte, una distribución de probabilidad es una función o regla que asigna una probabilidad a cada valor real que toma la variable.

U2

Metodología

En la presente semana, al afrontar el estudio de variable aleatoria y distribuciones de probabilidad, es importante que el estudiante tenga presente los principios básicos de cálculo integral; además, tal como sucede con todas las cartillas, es recomendable la cuidadosa lectura de los elementos contenidos en ésta y tener siempre presente los principios tratados en la semana 3, ya que en esta cuarta semana se hace fuerte de principios de probabilidad ya tratados. Además de lo anterior, una forma eficiente de acercarse a la comprensión puede ser la elaboración de síntesis temática. La elaboración de un resumen requiere que el estudiante realice importantes reflexiones en relación a los temas de cálculo de probabilidad. En los casos en que se presenta ejemplos numéricos resueltos es útil verificar tales cálculos a lápiz y papel.

El estudiante debe tener en cuenta que la presente cartilla no es el único recurso propuesto para alcanzar el deseado nivel de comprensión, se presentan también recursos de videoconferencias, resúmenes, videodiapositivas y ejercicios de repaso, ejercicios resueltos, ejercicios propuestos; los cuales están orientados a brindar oportunidades de adquisición de conocimientos y desarrollo de habilidades a través de diferentes medios. En la sección de videocápsulas se presentan una serie de videos que buscan fortalecer los temas objeto de estudio.

El seguimiento de estas recomendaciones puede facilitar el afianzamiento del tema y proporcionar la posibilidad de adquirir mayor confianza frente a temas posteriores.

Variable aleatoria

En buena parte de la cartilla de la semana 1 hablamos de variables estadísticas entendidas como características observables de los individuos de una población, en lo que sigue de este curso se hará referencia al concepto de variable aleatoria, la cual se estudia en el contexto del cálculo de probabilidad. Para poder comprender la importancia y necesidad de una variable aleatoria conviene retomar las ideas trabajadas alrededor de espacio muestral. Un experimento aleatorio se asocia a un conjunto de posibles resultados cuyo valor puede ser de diferente naturaleza, por ejemplo, al lanzar una moneda el resultado puede ser cara (C) o sello (S), al lanzar un dado dos veces el resultado puede ser cualquier pareja de números en el que cada número está entre 1 y 6 inclusive, a realizar experimentos aleatorios de extracción de fichas de una urna los resultado de interés pueden ser los posibles colores. Como se puede ver, los resultados no necesariamente son números reales. Considerando esto tenemos entonces el concepto de variable aleatoria.

Concepto e Variable aleatoria

Una variable aleatoria es una función que asigna un número real a cada punto de un espacio muestral asociado a un experimento aleatorio. Es usual denotar la función misma mediante letras mayúsculas *X* como y letras en minúsculas *x* como para referirnos a valores de la variable aleatoria. Una interpretación gráfica del concepto de variable aleatoria se muestra a continuación:

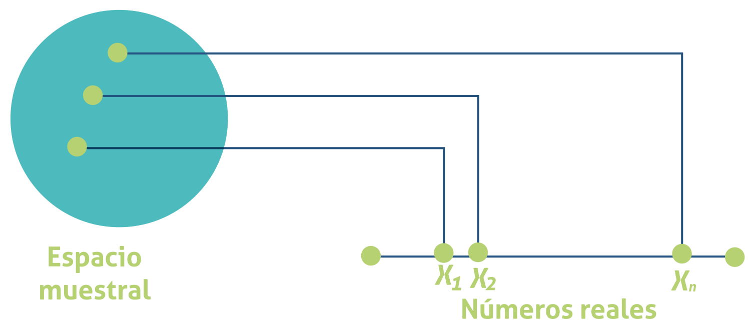

Imagen 1.
Fuente: propia.

En notación de funciones (desde la perspectiva de funciones matemática) se tiene:

$$\begin{aligned} X: S &\rightarrow \quad R \\ \omega &\rightarrow X(\omega) \end{aligned}$$

Ejemplos de variables aleatorias

Tal vez la mejor manera de ilustrar el concepto de variable aleatoria es mediante ejemplos, es por eso que presentamos los siguientes:

Ejemplo 4.1: si consideramos el experimento de seleccionar sucesivamente tres tornillos y anotar D si el tornillo es defectuoso y N no defectuoso, el espacio muestral es:

S={NNN,DNN,NDN,NND,DDN,DND,NDD,DDD}

A partir de este espacio muestral podemos definir la variable aleatoria

X= Número de tornillos defectuosos

Es claro que el número de tornillos defectuosos puede ser 0, 1, 2 o 3. Estos son entonces los valores que toma la variable aleatoria. La asignación de números reales a cada punto del espacio muestral es:

Espacio muestral (S)	*X*
NNN	0
DNN	1
NDN	1
NND	1
DDN	2
DND	2
NDD	2
DDD	3

Ejemplo 4.2: Consideremos el experimento aleatorio de lanzar un dado dos veces, el espacio muestral es:

***S*= {(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6)**

(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6)

(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6)

(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6)

(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6)

(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)}

Si nuestro interés se centra en la suma de los puntajes de cada par de lanzamientos, podemos definir una variable aleatoria suma *(X),* de tal manera que a cada punto muestral le asigna la suma de puntos, por tanto, los valores que podría tomar la variable aleatoria *X* corresponden al siguiente conjunto:

***X*={2,3,4,5,6,7,8,910,11,12}**

Variables aleatorias discretas y continuas

Así como un espacio muestral puede ser discreto o continuo, una variable aleatoria también se puede clasificar como variable aleatoria discreta y variable aleatoria continua. Una variable aleatoria es discreta si se puede numerar sus posibles valores, por el contrario, si una variable aleatoria puede tomar un conjunto de valores que coinciden con el conjunto de puntos de un segmento de recta, se denomina variable aleatoria continua.

Distribución discreta de probabilidad

Hemos visto en la cartilla de la semana 3 que la probabilidad de cualquier evento es un número entre 0 y 1, inclusive, es decir, pertenece al intervalo cerrado [0, 1]. En este apartado estamos interesados en la asignación de un valor específico de probabilidad a cada valor de una variable aleatoria, con tal fin se define un nuevo concepto, el de función de distribución de probabilidad. A una variable aleatoria discreta le corresponde una función de distribución de probabilidad discreta. Para ilustrar la idea de distribución discreta de probabilidad se debe tener en cuenta el Ejemplo 4.2, n el cual no hay razón para creer que los diferentes puntos muestrales tengan diferente probabilidad, en este caso cada punto tiene una probabilidad de $\frac{1}{36}$. Con base en ello podemos escribir la siguiente tabla en la que se asigna la correspondiente probabilidad a cada valor de la variable aleatoria considerada.

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Total
$f(x) = P(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$	1

Tabla 1.
Fuente: propia.

Como se puede observar, a cada valor *x* de la variable aleatoria se le asigna una probabilidad *P(x)* determinada por el número de casos favorables en el espacio muestral, además se observa que la suma de todas las probabilidades es igual a la unidad. Apoyados en esta ilustración podemos pasar a plantear la siguiente definición

Definición: dada una variable aleatoria discreta *X* asociada al espacio muestral *S* de un experimento aleatorio, la distribución de probabilidad es una función o regla que asigna la correspondiente probabilidad a cada valor de la variable aleatoria. La asignación de probabilidad obedece las siguientes condiciones:

$$\begin{array}{ll} a) & f(x) \geq 0 \\ b) & \sum_{S} f(x) = 1 \\ c) & P(x) = f(x) \end{array}$$

Ejemplo 4.3: Un lote de 8 televisores contiene tres televisores defectuosos. Si compramos 2 de los ocho televisores, hallar la distribución de probabilidad de la variable aleatoria correspondiente al número de televisores defectuosos que pueden resultarnos en la compra.

Solución: al comprar dos televisores, los únicos valores posibles de la variable aleatoria son 0, 1 y 2. En este caso debemos tener en cuenta que la cantidad de posibilidades en que se pueden seleccionar 2 de los ocho televisores está dada por el número de posibles combinaciones, es decir:

$$_8C_2 = \binom{8}{2} = \frac{8!}{2!\,(8-2)!} = \frac{8!}{2!\,6!} = \frac{6!\,(7)(8)}{2!\,6!} = \frac{(7)(8)}{2!} = 28$$

Por otro lado, el número de formas en que se puede seleccionar 0 televisores defectuosos de 3 que se compran es:

$$\binom{3}{x}\binom{5}{2} = \left(\frac{3!}{0!\,(3-0)!}\right)\left(\frac{5!}{2!\,(5-2)!}\right) = (1)(10) = 10$$

El número de formas en que se puede seleccionar 1 televisor defectuoso es:

$$\binom{3}{1}\binom{5}{1} = \left(\frac{3!}{1!\,(3-1)!}\right)\left(\frac{5!}{1!\,(5-1)!}\right) = (3)(5) = 15$$

El número de formas en que se puede seleccionar 2 es:

$$\binom{3}{2}\binom{5}{0} = \left(\frac{3!}{2!\,(3-2)!}\right)\left(\frac{5!}{0!\,(5-0)!}\right) = (3)(1) = 3$$

Por tanto los valores de las probabilidades son:

$$P(0) = f(0) = \frac{10}{28}; \quad P(1) = f(1) = \frac{15}{28} \quad ; P(2) = f(2) = \frac{3}{28}$$

Distribución de probabilidad discreta acumulada

Frecuentemente resulta de interés el cálculo no de la probabilidad de un valor específico de una variable aleatoria discreta, sino el valor de la probabilidad que la variable aleatoria tome un valor menor o igual que el valor dado; para ello, resulta necesario definir una nueva función que tome los valores acumulados de probabilidad, a esta función se le conoce como función de probabilidad acumulada y se define a continuación:

Definición: la función de distribución de probabilidad acumulada de una variable aleatoria discreta *X*, cuya función de distribución de probabilidad es $f(x)$, está dada por:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} f(t)$$

Ejemplo 4.4: para el caso de la variable aleatoria del Ejemplo 4.2 se muestra a continuación las funciones de distribución de probabilidad y de probabilidad acumulada distribución de probabilidad:

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Total
$f(x) = P(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$	1
□(□) = □(□ < = □)	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{13}{18}$	$\frac{10}{12}$	$\frac{11}{12}$	$\frac{35}{36}$	1	

Muchas veces resulta útil realizar la gráfica de las funciones de distribución de probabilidad, para lo cual se aplica los principios señalados en la cartilla de la semana 1.

Distribución continua de probabilidad

Un hecho muy importante en el cálculo de probabilidad, y que a muchos podría parecer sorprendente, es que la probabilidad de que la variable aleatoria tome exactamente un valor específico tiende a cero; esto se debe a que entre dos posibles valores que una variable aleatoria continua pueda tomar, existen infinitos valores, y al realizar la distribución de la totalidad de probabilidad entre esos infinitos valores se tendría el valor cero. Esta situación lleva a interesarnos en la probabilidad que la variable aleatoria tome un valor comprendido entre dos valores específicos.

La función de distribución de probabilidad de una variable aleatoria continua no se puede representar en forma tabular, porque requeriríamos infinitas entradas en la respectiva tabla, sin embargo si se puede representar mediante una fórmula a la que seguramente se puede asociar una curva continua, aunque puede darse casos en que la gráfica de la función presente saltos o discontinuidades. A una función de distribución continua de probabilidad se le suele llamar función densidad de probabilidad o simplemente función densidad.

Una función densidad de probabilidad debe ser tal que el área total bajo la curva de la función sea igual a la unidad, además, del cálculo integral se sabe que el área limitada por la curva f, de una función , el eje y las rectas *X=a* y *X= b* está dada por la integral de la función entre *X=a* y *X= b* es decir, la probabilidad de que la variable aleatoria, cuya función de densidad de probabilidad es $f(x)$, tome un valor comprendido entre *X=a* y *X= b,* está dada por:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

Con base en las consideraciones anteriores podemos definir la función de distribución de probabilidad como sigue:

Definición: una función $\square(\square)$ es la distribución de probabilidad de una variable aleatoria X si cumple las siguientes condiciones:

$$\square) \qquad \square(\square) \geq 0$$

$$b) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

$$\square) \quad P(a \leq X \leq b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

Nota: En la integral de la condición *b)* vemos que se debe considerar la posibilidad que la variable aleatoria tome cualquier número real; sin embargo, en muchas ocasiones se tiene conocimiento de los intervalos de valores que no corresponden a la variable aleatoria, por lo que la contribución de la integral es cero en tales intervalos.

Ejemplo 4.5: una variable aleatoria continua $\square$ tiene la siguiente función de densidad de probabilidad:

$$\square(0 < \square < 1) = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{2(\square + 2)}{5}dx = \frac{1}{5}\int_0^1 (2\square + 4)\square\square$$

$$\square(0 < \square < 1) = \frac{1}{5}\int_0^1 (2\square + 4)\square\square = \frac{1}{5}(1 + 4) = 1$$

a. Verificar que efectivamente es una función de densidad de probabilidad

b. Hallar la probabilidad de que x tome un valor entre 0 y ½.

Solución:

a. Es claro que para los valores de $\square$ en $0 < \square < 1$ la función es no negativa, por tanto se cumple la condición $\square(\square) \geq 0$ para todo $\square$. También podemos ver que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx = \int_{1}^{\infty} f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{1} 2xdx = \int_{1}^{\infty} 0dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{0}^{1} 2xdx = x^2 = 1$$

Lo anterior evidencia el cumplimiento de la condición 2.

b. La probabilidad de que x se encuentre entre 0 y 1/2 corresponde a:

$$P(0 \leq X \leq 1/2) = \int_0^{\frac{1}{2}} 2x dx = \frac{1}{4}$$

Una interpretación geométrica se muestra en la siguiente gráfica, donde se ve que el área bajo la gráfica de □(□) entre □ = *0* y □ = ½ es exactamente ¼.

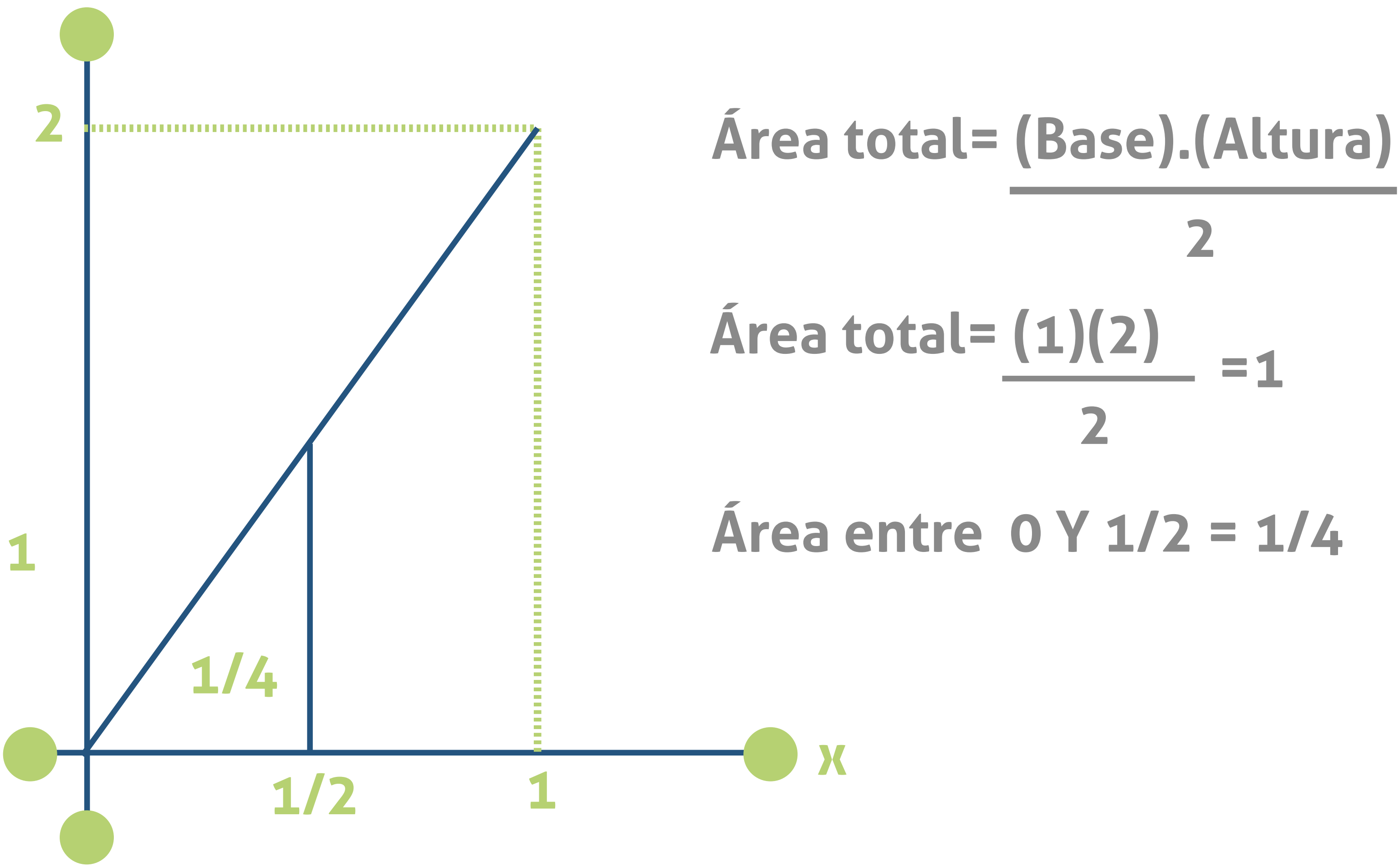

Imagen 2.
Fuente: propia.

Ejemplo 4.6: La fracción de personas que responden a una encuesta enviada por correo es una variable aleatoria continua $\square$ a la cual le corresponde la siguiente función densidad de probabilidad:

$$\square(\square) = \begin{cases} \dfrac{2(\square + 2)}{5} & \square\square\ 0 < \square < 1 \\ & \square \\ 0\ \square\square\ \square\square\square\square\square\square\square\square\square\ \square\square\square\square\ \square\square\square\square & \end{cases}$$

a. Mostrar que $\square(0 < \square < 1) = 1$

b. Hallar la probabilidad de que más de la cuarta parte de las personas pero menos de la mitad responden la encuesta.

Solución:

a.

$$\square(0 < \square < 1) = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{2(\square + 2)}{5}dx = \frac{1}{5}\int_0^1 (2\square + 4)\square\square$$

$$\square(0 < \square < 1) = \frac{1}{5}\int_0^1 (2\square + 4)\square\square = \frac{1}{5}(1 + 4) = 1$$

b. La probabilidad de que más de la cuarta parte de la personas pero menos de la mitad responden la encuesta corresponde $P\left(\frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}\right)$ a y está dada por:

$$P\left(\frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{5}\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} (2\square + 4)\square\square = \frac{19}{80}$$

Distribución acumulada de una variable aleatoria continua

La definición de la distribución de probabilidad de una variable aleatoria continua es análoga a la correspondiente a una variable aleatoria discreta, a continuación se presenta la definición:

Definición: sea $\square$ una variable aleatoria continua cuya función de de densidad de probabilidad es $\square(\square)$, la función de distribución de probabilidad acumulada está dada por:

$$\square(\square) = \square(\square \leq \square) = \int_{-\infty}^{\square} \square(\square)\square\square$$

La distribución está dada por:

$$P(X \leq x) = \int_{0}^{x} 2x dx = x^2$$

Ejemplo 4.7: la variable aleatoria X del Ejemplo 4.5, tiene función densidad de probabilidad:

$$\square(\square) = \begin{cases} 2\square & \square\square\ 0 < \square < 1 \\ & \square \\ 0 & \square\square\ \square\square\square\square\square\square\square\square\square\square\ \square\square\square\square\ \square\square\square\square \end{cases}$$

La función de distribución de probabilidad acumulada está dada entonces por:

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{1} f(t)dt = \int_{1}^{\infty} f(t)dt$$

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{0}^{x} 2tdt = x^2 \qquad para\ 0 \leq x \leq 1$$

Con base en la definición de distribución acumulada de una variable aleatoria continua y el hecho que:

$$P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a)$$

Se encuentra que:

$$P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a)$$

Además con base en principios de cálculo integral se tiene:

$$f(x) = \frac{dF}{dx}$$

Distribuciones de probabilidad conjunta de variables aleatorias discretas

Hasta este punto hemos estudiado algunos aspectos del cálculo de probabilidad en el contexto de experimentos aleatorios asociados a una sola variable aleatoria, pero diversas situaciones probabilísticas se estudian adecuadamente considerando dos o más variables, por ejemplo, el análisis del comportamiento del nivel de precios de un producto □el de un producto □ da lugar a un espacio muestral en el que cada punto muestral está compuesto por dos variables.

Si dos variables aleatorias discretas □, □ la distribución de probabilidad conjunta de su ocurrencia simultánea se representa mediante la función □(□), donde:

$$\square(\square, \square) = \square(\square = \square; \square = \square)$$

Estas breves descripciones permiten extender las ideas de distribución de probabilidad al caso de dos variables a través de la siguiente definición:

Definición: una función $\square(\square, \square)$ es una distribución de probabilidad conjunta de las variables aleatorias discretas □, □ si $\square(\square, \square)$ cumple las siguientes condiciones:

$$\square)\quad \square(\square, \square) \geq 0 \;\square\square\square\square\; \square\square\square\square\; (\square, \square)$$

$$\square)\quad \sum_{\square}\sum_{\square} \square(\square, \square) = 1$$

$$\square)\quad \square(\square = \square; \square = \square) = \square(\square, \square)$$

Distribuciones de probabilidad conjunta de variables aleatorias continuas

Para el caso de variables aleatorias continuas la definición de distribución de probabilidad conjunta corresponde a lo siguiente:

Definición: la función $f(x,y)$ es una función de distribución de densidad de probabilidad conjunta de las variables aleatorias *X,Y* si cumple las siguientes condiciones.

$$a)\; f(x,y) \geq 0 \;\; para\ todo\ par\ (x,y)$$

$$b)\; \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = 1$$

$$P[(X,Y) \in A] = \iint_{A}^{\square} f(x,y)dxdy$$

$P[(X,Y) \in A]$ corresponde a la probabilidad que la pareja *(X,Y)* se encuentre en una zona □ del plano *xy*.

Ejemplo 4.8: una empresa fabricante de dulces vende cajas de chocolate con surtido de crema, almendras y galleticas recubiertas con chocolate claro y oscuro. Si se selecciona aleatoriamente una caja de dulces sean X y Y, respectivamente, las proporciones de chocolate claro y oscuro que son cremas, y si la función conjunta de distribución de probabilidad es:

$$\square(\square,\square) = \begin{cases} \frac{2}{5}(2\square + 3\square) & \square\square\ 0 \le \square \le 1, \quad 0 \le \square \le 1 \\ 0 & \square\square\ \square\square\square\square\square\square\square\square\square\ \square\square\square\square\ \square\square\square\square \end{cases}$$

Verificar que se cumple la segunda condición de la definición de distribución de probabilidad conjunta y hallar la probabilidad de que $0 \le \square \le \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{4} \le \square \le \frac{1}{2}$

Solución:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \square(\square,\square)\square\square\square\square = \int_0^1\int_0^1 \frac{2}{5}(2\square + 3\square)\ \square\square\square\square =$$

$$\frac{1}{5}\int_0^1 (2 + 6\square)\square\square = \frac{1}{5}(2+3) = 1$$

Lo anterior muestra el cumplimiento de la condición 2. El cálculo de la probabilidad está dada por:

$$\square\left(0 \le \square \le \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{4} \le \square \le \frac{1}{2}\right) = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2}{5}(2\square + 3\square)\ \square\square\square\square$$

$$\square\left(0 \le \square \le \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{4} \le \square \le \frac{1}{2}\right) = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{10} + \frac{3\square}{5}\right)\square\square = \frac{13}{160}$$

Distribuciones marginales de probabilidad

A partir de la distribución de probabilidad conjunta $f(x,y)$ de dos variables aleatorias *X y Y,* se puede definir las distribuciones de probabilidad de las variables individuales, a tales distribuciones se les llama distribuciones marginales de las variables aleatorias, estas definiciones se presentan a continuación:

Definición: la distribución marginal de la variable aleatoria X y la de la variable aleatoria Y están dadas por:

Caso discreto:

$$\square(\square) = \sum_{\square} \square(\square, \square) \qquad \square \qquad h(\square) = \sum_{\square} \square(\square, \square)$$

Caso continuo:

$$\square(\square) = \int_{-\infty}^{\infty} \square(\square, \square)\square\square \qquad\qquad h(\square) = \int_{-\infty}^{\infty} \square(\square, \square)\square\square$$

Reiteramos la necesidad de hacer uso de los otros recursos referenciados, particularmente las videocápsulas, en las que se presentan más explicaciones sobre cada tema.

3

Unidad 3

Media y varianza de una variable aleatoria

Estadística de probabilidades

Autor: Danilo de Jesús Ariza Agámez

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina
MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Introducción

La cartilla de la semana anterior se centró en el estudio de variables aleatorias y distribuciones de probabilidad para los casos discretos y continuos; también se presentó una breve introducción al estudio de distribución de probabilidad conjunta de dos variables aleatorias. En el campo de la probabilidad y la estadística inferencial se usa un conjunto de parámetros de las variables aleatorias, entre ellas se destaca las de *esperanza matemática* o media de una variable aleatoria y la varianza. Apoyados en el estudio de la cartilla de la semana 4, en esta semana 5 se tratará precisamente el cálculo de estos parámetros. Se estudiarán los procedimientos de cálculo de manera general para variables aleatorias discretas y continuas, y se ilustrarán brevemente los parámetros análogos en el caso de distribuciones de probabilidad conjunta.

U3 Metodología

Esta cartilla bien puede considerarse una continuación de la correspondiente a la semana anterior en la que se inició el estudio de variable aleatoria y distribuciones de probabilidad, razón por la cual, aplica las recomendaciones antes dadas. Estas recomendaciones se refieren a la necesidad de que el estudiante tenga presente los principios básicos de cálculo integral, los principios generales de cálculo de probabilidad estudiados al inicio de la semana 3, y la recomendación que se ha planteado siempre en el sentido de realizar una síntesis conceptual de los contenidos de esta cartilla, además de su cuidadosa lectura y verificación de los cálculos presentados en los ejemplos.

Esta cartilla no constituye el único recurso propuesto para alcanzar el deseado nivel de comprensión en lo referente a media y varianza de variables aleatorias, se deben tener en cuenta también los recursos de videoconferencias, resúmenes, videodiapositivas y ejercicios de repaso, ejercicios resueltos, ejercicios propuestos; los cuales están orientados a brindar oportunidades de adquisición de conocimientos y desarrollo de habilidades a través de diferentes medios. En la sección de videocápsulas se presentan una serie de videos que buscan fortalecer de los temas objeto de estudio.

Seguir este conjunto de recomendaciones puede facilitar el afianzamiento del tema y proporcionar la posibilidad de adquirir mayor confianza frente a contenidos posteriores.

Esperanza matemática de una variable aleatoria

En la cartilla de la semana 1 se trataron las medidas de tendencia central de observaciones de un conjunto de valores. En esta cartilla, entre otros temas, se tratará una medida análoga a la media aritmética de las observaciones, pero referida ahora a una variable aleatoria. Para introducir el concepto de media aritmética de una variable aleatoria, conviene hacerlo a partir de la consideración de una situación en la que se lanza muchas veces dos monedas rotuladas, cada una con las letras A y B. En esta situación tomamos como variable aleatoria X aquella que cuenta el número de veces que se obtiene A como resultado de un lanzamiento, lo cual indica que en un lanzamiento se podría obtener 0, 1 o 2 veces la letra A. supongamos ahora que realizamos 32 lanzamientos de las dos monedas, dándose que en 8 de las 32 veces no salió ninguna A, 14 veces salió una A y 10 veces el resultado del lanzamiento fue dos A.

Con base en lo anterior, y realizando cálculos como los estudiados en la semana 1, encontramos que la media aritmética de los resultados es:

$$\frac{(0)(8)+(1)(14)+(2)(10)}{32}=\frac{0+14+20}{32}=\frac{34}{32}=1{,}0625$$

Aunque 1,0625 no es ninguno de los posibles valores que tome la variable aleatoria, se esperaría que el número promedio de veces que se obtiene A como resultado es el valor citado.

El anterior procedimiento de cálculo lo podríamos reescribir de la siguiente forma:

$$(0)\frac{8}{32}+(1)\frac{14}{32}+(2)\frac{10}{32}=1{,}0625$$

Los valores $\frac{8}{32},\frac{14}{32}\ y\ \frac{10}{32}$ corresponden a la frecuencia relativa de ocurrencia de los valores 0, 1 y 2 correspondientes a la variable aleatoria que mide el número de veces que se obtiene la A. Esto muestra que es posible calcular la media aritmética de un conjunto de datos con base en el conocimiento de la frecuencia relativa con la que ocurre cada uno de los posibles valores.

Esta idea de cálculo se puede emplear para hallar el número promedio de veces que se obtiene la letra A como resultado de muchos lanzamientos, en cuyo caso nos estaríamos refiriendo a la media aritmética o promedio de la variable aleatoria. Dado el carácter probabilístico del hecho, al promedio de una variable aleatoria se le llama también *esperanza matemática* o valor esperado y se simboliza mediante μ_X o $E(X)$. En caso que no haya lugar a confusión se puede omitir la referencia a la variable *X* y escribir simplemente μ o E.

Los comentarios y cálculos anteriores se basaron en un caso particular de un conjunto de lanzamientos, pero podemos realizar el análisis a partir del conocimiento de las probabilidades asociadas al respectivo experimento aleatorio, para ello podemos considerar la situación de una moneda legal, en cuyo caso el espacio muestral del experimento de lanzar dos veces la moneda es:

$$S = \{AA, AB, BA, BB\}$$

Dado que en cada lanzamiento existe igual probabilidad de obtener A o B, con lo que la probabilidad de cada resultado de un lanzamiento A o B $\frac{1}{2}$. es en razón a que el resultado del primer lanzamiento no afecta el resultado del segundo, los lanzamientos son independientes y por tanto la probabilidad de cada uno de los resultados posibles contenidos en el espacio muestral es .

$$\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$

La distribución de probabilidad de la variable es entonces:

X	$P(X)$
0	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$

Esta distribución de probabilidad indica que a la larga, en muchos lanzamientos que se realice, la mitad de las veces se obtendrá como resultado una letra A y una cuarta parte de las veces se obtiene cada uno de los otros dos valores de *X* (0 o 2), pudiéndose decir entonces que estas probabilidades corresponden a los valores de frecuencias relativas, por lo cual el valor de la media corresponde a:

$$\mu = E(X) = 0.\left(\frac{1}{4}\right) + 1.\left(\frac{1}{2}\right) + 2.\left(\frac{1}{4}\right) = 1$$

Lo cual indica que es razonable esperar obtener una A por cada instancia del experimento consistente en un par de lanzamientos. Con base en estos razonamientos podemos definir el concepto y fórmula de cálculo de la esperanza matemática o valor esperado de variables aleatorias discretas y continuas.

Esperanza matemática de una variable aleatoria discreta

Definición: dada una variable aleatoria discreta *X,* cuya función de distribución de probabilidad $f(x)$, la media aritmética, esperanza matemática o valor esperado está dado por:

$$\mu = E(X) = \sum_x x f(x)$$

Es decir, la esperanza matemática de una variable aleatoria discreta es la suma de los productos de cada valor de la variable y su respectiva probabilidad.

Esperanza matemática de una variable aleatoria continua

Definición: dada una variable aleatoria continua X, cuya función de distribución de probabilidad $f(x)$, la media aritmética, esperanza matemática o valor esperado está dado por:

$$\mu_X = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

Es decir, la esperanza matemática de una variable aleatoria continua es la integral del los productos de cada valor de la variable y su respectiva probabilidad.

Ejemplos de cálculo de la esperanza matemática de variables aleatorias

Ejemplo 5.1: hallar el valor esperado de la variable aleatoria *X* del Ejemplo 4.3 correspondiente al número de televisores defectuosos que pueden resultarnos en la compra de dos sí se sabe que del lote de 8 televisores hay 3 defectuosos.

Solución: En la solución del Ejemplo 4.3, encontramos que la función de distribución de probabilidad es:

$$P(0) = f(0) = \frac{10}{28}; \quad P(1) = f(1) = \frac{15}{28} \quad ; P(2) = f(2) = \frac{3}{28}$$

Por tanto el valor esperado de la variable se calcula como sigue:

$$\mu = E(X) = \sum_x x f(x) = (0)\left(\frac{10}{28}\right) + (1)\left(\frac{15}{28}\right) + (2)\left(\frac{3}{28}\right) = \frac{21}{28} = \frac{3}{4}$$

Ejemplo 5.2: hallar el valor esperado de la distribución de probabilidad de la variable aleatoria X correspondiente a la suma de los puntajes obtenidos al lanzar un dado dos veces.

Solución: en la cartilla de la semana 4 presentamos la introducción de distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta con base en el experimento de lanzar el dado dos veces, ahí encontramos que la distribución de probabilidades es:

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Total
$f(x) = P(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$	1

Tabla 1.
Fuente: propia.

Con base en la anterior tabla podemos presentar la siguiente en la que además se muestra el producto de cada valor de *X* por su probabilidad.

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$
$xP(x)$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{10}{9}$	1	$\frac{5}{6}$	$\frac{11}{18}$	$\frac{1}{3}$

Tabla 2.
Fuente: propia.

El estudiante puede verificar que la suma de estos productos es:

$$\sum xP(x) = 7$$

Ejemplo 5.3: hallar el valor esperado de la variable aleatoria continua presentada en el Ejemplo 4.5.

Solución: en el Ejemplo 4.5, vimos que la función de densidad de probabilidad era:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & si\ 0 < x < 1 \\ 0 & en\ cualquier\ otro\ caso \end{cases}$$

Por lo tanto, el valor esperado está dada por:

$$\mu_X = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^1 x.2xdx = 2\int_0^1 x^2dx = \frac{2}{3}$$

Ejemplo 5.4: hallar el valor esperado de la variable aleatoria *X* del Ejemplo 4.6 correspondiente a la fracción de personas que responden a una encuesta enviada por correo, cuya función densidad de probabilidad es:

$$\square(\square) = \begin{cases} \dfrac{2(\square + 2)}{5} & \square\square\ 0 < \square < 1 \\ 0\ \square\square\ \square\square\square\square\square\square\square\square\square\ \square\square\square\square\ \square\square\square\square & \end{cases}$$

Solución: se aplica, al igual que el ejemplo anterior, la fórmula correspondiente al valor esperado de una variable continua:

$$\text{continua:} \square_{\square} = \square(\square) = \int_{-\infty}^{\infty} \square\square(\square)\square\square = \int_0^1 \square . \frac{2(\square+2)}{5} \square\square$$

$$\square_{\square} = \square(\square) = \int_0^1 \frac{2(\square^2 + 2\square)}{5} dx = \frac{2}{5}\left(\int_0^1 \square^2 dx + 2\int_0^1 \square dx\right)$$

$$\mu_X = E(X) = \frac{2}{5}\left(\frac{1}{3} + 2\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{2}{5}\left(\frac{1}{3} + 1\right) = \frac{6}{15}$$

Medidas de dispersión

En la estadística en general, la media se considera como una medida de gran importancia en razón a que es un descriptor que indica el valor en que se centra la distribución de datos. En el caso de probabilidad, la esperanza matemática es el valor alrededor del cual se centra la distribución de probabilidad; sin embargo, se ha de tener en cuenta que la media no es un indicador suficiente para describir completamente un conjunto de datos o una distribución de probabilidad.

Para sustentar la anterior afirmación, en lo que concierne a un conjunto de datos, considérese los puntajes obtenidos en una prueba de aptitud matemática por dos grupos de estudiantes, los puntajes de cada grupo son:

Puntajes Grupo A	69	72	69	73	69	68	68	70	73	69
Puntajes Grupo B	91	90	47	50	90	88	45	87	70	42

Tabla 3.
Fuente: propia.

El estudiante puede verificar que el cálculo de la media para cada grupo da como resultado 70 puntos, pero si se observa la diferencia de los datos en relación con la media, se tiene que en el grupo A hay desviaciones relativamente pequeñas, de hecho la máxima diferencia respecto a la media es de 3 unidades y la máxima separación encontrada entre cualquier par de datos es de cinco unidades. Por su parte, en el grupo B se encuentran desviaciones de hasta 21 unidades respecto a la media y una máxima separación entre datos de 49 unidades. Se tiene entonces que la media por sí sola no es un adecuado descriptor debido a que no da información de la variabilidad que presentan los datos. Frente a situaciones de este tipo, se requiere de otros descriptores que midan la variabilidad de los datos y que se complementen con las media. Estas nuevas medidas son las medidas de dispersión entre las que se encuentra la varianza y la desviación estándar.

La varianza y la desviación estándar

De todas las medidas de dispersión, tal vez la más importante, más conocida y usada es la *varianza*. Se define como la media aritmética de los cuadrados de las desviaciones respecto a la media. El símbolo empleado para la varianza es σ^2. Por su parte la *desviación estándar,* también conocida como desviación típica, corresponde a la raíz cuadrada positiva de la varianza. El símbolo empleado para la desviación estándar es σ

La desviación estándar se mide en las mismas unidades que los valores de los datos o de la variable, por lo tanto, resulta más fácil la comparación directa de la desviación estándar con la media aritmética. La desviación estándar se interpreta como la variación promedio de los datos con respecto a la media.

Cálculo de la varianza y la desviación estándar

Decir que la varianza equivale al promedio de los cuadrados de las desviaciones respecto a la media, significa que para calcular la varianza, primero se debe hallar la desviación de cada observación respecto a la media, luego se halla el cuadrado de cada desviación y sobre estos cuadrados se calcula el promedio. Para un conjunto de *N* datos, en el que la media aritmética es μ, la fórmula que permite el cálculo de la varianza es:

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(X_i - \mu)^2$$

A manera de ilustración consideremos los puntajes de los grupos A y B antes citados y calculemos las respectivas varianzas.

Para hallar los valores conviene escribir en una tabla los valores de X_i, las desviaciones respecto a la media, los cuadrados de las desviaciones, la media y la suma de los cuadrados de las desviaciones. A continuación se muestra las tablas y cálculo de varianza para cada grupo.

Grupo A		$\mu = 70$
X_i	$(X_i - \mu)$	$(X_i - \mu)^2$
69	-1	1
72	2	4
69	-1	1
73	3	9
69	-1	1
68	-2	4
68	-2	4
70	0	0
73	3	9
69	-1	1
		$\sum_{i=1}^{10}(X_i - \mu)^2 = 34$

Grupo B		$\mu = 70$
X	$(X_i - \mu)$	$(X_i - \mu)^2$
91	21	441
90	20	400
47	-23	529
50	-20	400
90	20	400
88	18	324
45	-25	625
87	17	289
70	0	0
42	-28	784
		$\sum_{i=1}^{10}(X_i - \mu)^2 = 4192$

Tabla 4 y 5.
Fuente: propia.

Con base en las tablas las varianzas σ_A^2 y σ_B^2 de los grupos A y B respectivamente están dadas por:

$$\sigma_A^2 = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}(X_i - \mu)^2 = \frac{34}{10} = 34$$

$$\sigma_B^2 = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}(X_i - \mu)^2 = \frac{4192}{10} = 419,2$$

La gran diferencia que registran las varianzas de los dos grupos es un reflejo de la diferencia en la variabilidad de los datos. Se evidencia también cómo la varianza mide la variabilidad de los datos.

En el caso de una variable aleatoria *X* se calcula como el valor esperado de $(X - \mu)^2$. A continuación sepresenta las expresiones de cálculo de la varianza y la desviación estándar de variables aleatorias discretas y continuas.

Varianza y desviación estándar de una variable aleatoria discreta.

Definición: Dada una variable aleatoria discreta *X*, cuya función de distribución de probabilidad es $f(x)$, y sea $\square = \square(X)$ la media aritmética o valor esperado. La varianza de la variable aleatoria es el valor esperado de $(X - \mu)^2$ es decir:

$$\sigma^2 = \boldsymbol{E}[(X - \mu)^2] = \sum_{X}(X - \mu)^2 f(x)$$

La desviación estándar es:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\sum_{X}(X - \mu)^2 f(x)}$$

Ejemplo 5.5: hallar la varianza y la desviación estándar de la variable aleatoria *X* correspondiente al número de televisores defectuosos que pueden resultarnos en la compra de dos si se sabe que del lote de 8 televisores hay 3 defectuosos.

Solución: En la solución del ejemplo 5.1 encontramos que la media aritmética o valor esperado de la variable aleatoria de una función de distribución de probabilidad es:

$$\square = \square(\square) = \frac{3}{4}$$

También se tiene que los valores de las probabilidades son:

$$\square(0) = \square(0) = \frac{10}{28}; \quad \square(1) = \square(1) = \frac{15}{28} \quad ; \square(2) = \square(2) = \frac{3}{28}$$

Con base en ello se presenta a continuación la tabla que resume los valores de , $\square$, $(\square - \square)$, $(\square - \square)^2$, $\square(\square)$ y los productos $\square(\square).(\square - \square)^2$

Entonces los valores de $(X - \mu)^2$ se dan a continuación:

X	0	1	□
$(X - \mu)$	$\left(0 - \frac{3}{4}\right) = -\frac{3}{4}$	$\left(1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4}$	$\left(2 - \frac{3}{4}\right) = \frac{5}{4}$
$(X - \mu)^2$	$\frac{9}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{25}{16}$
$\square(\square)$	$\frac{10}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$
$\square(\square).(X - \mu)^2$	$\frac{90}{448}$	$\frac{15}{448}$	$\frac{45}{448}$

Tabla 6.
Fuente: propio.

Con base en la tabla anterior se encuentra que la varianza es:

$$\sigma^2 = \boldsymbol{E}[(X - \mu)^2] = \sum_{X} (X - \mu)^2 f(x) = \frac{150}{448} = \frac{75}{224}$$

La desviación estándar es entonces:

$$\sigma = \sqrt{\boldsymbol{\sigma^2}} = \sqrt{\frac{75}{224}} \approx 0{,}578$$

Varianza y desviación estándar de una variable aleatoria continua

Definición: Dada una variable aleatoria continua X, cuya función de densidad de probabilidad es $f(x)$, y sea $\square = \square(X)$ la media aritmética o valor esperado. La varianza de la variable aleatoria es el valor esperado de $(X - \mu)^2$, es decir:

$$\sigma^2 = \boldsymbol{E}[(X - \mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (X - \mu)^2 f(x)dx$$

La desviación estándar es:

$$\sigma = \sqrt{\boldsymbol{\sigma^2}} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (X - \mu)^2 f(x)dx}$$

Ejemplo 5.6: hallar la varianza y la desviación estándar de la variable aleatoria continua presentada en el ejemplo 5.3.

Solución: en el ejemplo 5.3 vimos que la función de densidad de probabilidad es:

$$\square(\square) = \begin{cases} 2\square & \square\square\ 0 < \square < 1 \\ & \square \\ 0 & \square\square\ \square\square a\square\square\square\square\square\square\square\ \square\square\square\square\ \square\square\square\square \end{cases}$$

Y la media es:

$$\square_{\square} = \square(\square) = \frac{2}{3}$$

Por tanto la varianza está dada por el siguiente cálculo.

$$(X - \mu)^2 = \left(X - \frac{2}{3}\right)^2$$

$$\sigma^2 = E[(X - \mu)^2] = E\left[\left(X - \frac{2}{3}\right)^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 f(x)dx$$

$$\sigma^2 = E[(X - \mu)^2] = \int_0^1 2x\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 dx = \int_0^1 2x\left(x^2 - \frac{4x}{3} + \frac{4}{9}\right) dx$$

$$\sigma^2 = E[(X - \mu)^2] = \int_0^1 \left(2x^3 - \frac{8x^2}{3} + \frac{8x}{9}\right) dx = \frac{1}{2} - \frac{8}{9} + \frac{4}{9} = \frac{1}{18}$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{18}$$

La desviación estándar es entonces:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{18}} = \frac{1}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{6}$$

Fórmula alternativa para calcular la varianza de una variable aleatoria

Una expresión para el cálculo de la varianza, deducida de la fórmula de la definición es la siguiente.

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2$$

Ejemplo 5.6: hallar la varianza de la variable aleatoria continua presentada en el ejemplo anterior mediante el uso de la fórmula alternativa.

Solución: primero calculamos $E(X^2)$ según se muestra a continuación:

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2$$

Se tiene además que el valor esperado es $\mu = \frac{3}{4}$ con lo cual el valor de la varianza es:

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 = \frac{1}{4} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}$$

El cálculo realizado mediante el uso de la fórmula alternativa evidencia la mayor facilidad para realizar el cálculo, por lo cual se le invita al estudiante a aprovechar las facilidades que ofrece.

Teorema de Chebishev

El valor de la varianza es una medida de la variabilidad de posibles valores de una variable aleatoria respecto al valor esperado. Una variable aleatoria con varianza pequeña presenta poca variabilidad respecto al valor esperado, esto indica que la mayor parte de los datos presentan la tendencia a estar cercanos a la media o valor esperado, lo cual indica que la probabilidad de encontrar un valor de la variable dentro de un intervalo alrededor del valor esperado es superior que la correspondiente a una variable aleatoria con varianza mayor. Un principio matemático que trata estas características del comportamiento de una variable aleatoria es el teorema de Chebishev, establecido por P. Chebishev (1821- 1894), el teorema establece lo siguiente:

Teorema de Chebyshev: dada cualquier variable aleatoria *X* con valor esperado es μ y desviación σ. estándar . La probabilidad de que la variable tome un valor dentro de k desviaciones estándar de la media es al menos $1 - 1/k^2$. Es decir:

$$P(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

El estudiante podría preguntarse qué sentido tiene un principio que sólo da una cota superior para la probabilidad de que la variable aleatoria tome un valor contenido en determinado rango, si se podría calcular el valor exacto de la probabilidad a partir del conocimiento de su distribución de probabilidad. Frente a este interrogante indicamos que el teorema tiene su gran valor en situaciones en las que no se conoce la distribución de probabilidad de la variable. El siguiente ejemplo ilustra esta afirmación.

Ejemplo 5.7: Una variable aleatoria, de la que no se conoce su distribución de probabilidad, tiene valor esperado $\mu = 8$ y desviación estándar $\sigma = 3$. Hallar un estimativo de la probabilidad de que la variable aleatoria tome un valor mayor que -4 y menor que 20.

Solución: Se nos pide hallar $P(-4 < X < 20)$, haciendo uso de los valores de $\mu = 8$, $\sigma = 3$ y $k = 4$ y en el contexto del Teorema de Chebishev, vemos que:

$$P(-4 < X < 20) = P[8 - (4)(3) < X < 8 + (4)(3)] \geq 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

3

Unidad 3

Distribución de probabilidad de una variable aleatoria binomial

Estadística de probabilidades

Autor: Danilo de Jesús Ariza Agámez

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina

MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Introducción

El desarrollo de la cartilla de la semana 4 trató sobre distribuciones de probabilidad de variables aleatorias considerando en general los casos discreto y continuo. La cartilla de la semana 5 se centró en el estudio de esperanza matemática o media de una variable aleatoria, la varianza y la desviación estándar. Tomando en cuenta las definiciones de esas dos semanas anteriores, en esta semana 6 se tratará una de las distribuciones de probabilidad discreta de mayor importancia en cálculo de probabilidad y estudios estadísticos, esta es la distribución de probabilidad de una variable aleatoria binomial. Una variable aleatoria binomial se entiende como aquella que se asocia a la repetición de múltiples ensayos independientes, en los cuales los resultados posibles se clasifican en dos categorías, éxito o fracaso. Cada ensayo se conoce como proceso de Bernoulli. El interés es hallar la probabilidad de que en n ensayos se dé un determinado número de éxitos. Además, a partir de las ideas subyacentes, se encontrarán expresiones de cálculo para hallar la media y la varianza de la variable aleatoria binomial. Finalmente se extiende la ideas de variables aleatorias binomiales a los casos en que los el número de posibles resultados es superior a 2, lo cual corresponde al estudio de una variable aleatoria conocida como multinomial.

U3

Metodología

Esta cartilla trata un caso particularmente importante dentro del contexto de las distribuciones de probabilidad de variables aleatorias discretas, es por eso que se recalca el seguimiento del mismo conjunto de recomendaciones dadas en las cartillas anteriores; tales recomendaciones se refieren a la necesidad de permanente revisión de principios generales de cálculo de probabilidad estudiados al inicio de la semana 3, y la recomendación que se ha planteado siempre en el sentido de realizar una síntesis conceptual de los contenidos de la cartilla, de su cuidadosa lectura y verificación de los cálculos presentados en los ejemplos.

La lectura aquí planteada no es el único recurso que se presenta para alcanzar el deseado nivel de comprensión en lo referente a al estudio de la distribución de probabilidad de variables aleatorias binomiales, debe tener en cuenta que se presenta también recursos de videoconferencias, resúmenes, videodiapositivas, ejercicios de repaso, ejercicios resueltos y ejercicios propuestos; los cuales, están orientados a brindar oportunidades de adquisición de conocimientos y desarrollo de habilidades a través de diferentes medios. En la sección de videocápsulas se presentan una serie de videos que buscan fortalecer los temas objeto de estudio.

Seguir este conjunto de recomendaciones puede facilitar el afianzamiento del tema y proporcionar la posibilidad de adquirir mayor confianza frente a contenidos posteriores.

Proceso de Bernoulli y distribución binomial

Un proceso de Bernoulli es un experimento aleatorio en el que los resultados se pueden clasificar en dos categorías, éxito con probabilidad de ocurrencia p y fracaso con probabilidad $q=1-p$. Siempre que se repita el experimento, es decir, el resultado de una instancia del experimento, no se alterarán los valores de las probabilidades de éxito y fracaso. Un ejemplo de proceso de Bernoulli es el lanzamiento de una moneda, en este caso sólo se considera dos posibles resultados y si la moneda es legal, la probabilidad de cada posible resultado es de 0,5. Otro ejemplo de proceso de Bernoulli puede ser la extracción de un tornillo de un lote de producción y clasificarlo como defectuoso (éxito) o no defectuoso (fracaso). Se aclara aquí que la clasificación de los resultados como éxito o fracaso puede ser arbitraria.

Variable aleatoria binomial y distribución binomial

La repetición varias veces de un proceso de Bernoulli, da lugar a la variable aleatoria conocida como variable aleatoria binomial. Una variable aleatoria binomial cuenta el número de veces que se presenta el resultado catalogado como éxito cuando se realiza un número n del proceso de Bernoulli. El estudio de la distribución binomial se debe al matemático suizo Jakob Bernoulli (1654-1705), ésta es quizá la principal distribución de probabilidad discreta.

El interés frente al estudio de una variable aleatoria binomial es establecer su función de distribución de probabilidad, es decir, definir el valor de la probabilidad para cada uno de los valores x cuando se realiza n ensayos de Bernoulli en los que el resultado catalogado como éxito tiene probabilidad p en cada ensayo, esto se simboliza mediante:

$$P(X=x)=B(n,x,p)$$

P(X=x) es la probabilidad de que la variable aleatoria tome el valor x cuando se realiza n ensayos de Bernoulli, en los que el resultado éxito tiene probabilidad.

El estudiante se preguntará como calcular esta probabilidad. Para ilustrar las características de la distribución de probabilidad de una variable aleatoria binomial, podemos considerar el experimento aleatorio descrito en el Ejemplo 4.1, consistente en la extracción sucesiva de tres tornillos y anotar D si el tornillo es defectuoso y N si no es defectuoso. Bien podría decirse que este experimento se puede asociar a una variable aleatoria binomial, ya que solo se toma en cuenta dos resultados de interés; sin embargo se recalca la necesidad de que la probabilidad de un ensayo no debe verse afectada por el resultado de ensayos anteriores.

Recuérdese del Ejemplo 4.1 que el espacio muestral correspondiente al experimento es:

$$S=\{NNN,DNN,NDN,NND,DDN,DND,NDD,DDD\}$$

A partir del cual se definió la variable aleatoria X que cuenta el número de tornillos defectuosos. Siendo los posibles resultados 0, 1, 2 y 3, la variable aleatoria quedó definida como muestra la siguiente tabla:

Espacio muestral (S)	x
NNN	0
DNN	1
NDN	2
NND	1
DDN	2
DND	2
NDD	2
DDD	3

Tabla 1.
Fuente: propia.

Se supone en este caso, que los tornillos se seleccionan de un lote en el que hay una gran cantidad de unidades, y se sabe, por procedimientos previos de control de calidad, que de cada 10 unidades se encuentra una defectuosa, es decir, en cada ensayo $P(D) = \frac{1}{10}$ y $P(N) = \frac{9}{10}$, con lo cual, teniendo en cuenta que los ensayos son independientes, se puede ampliar la tabla anterior para mostrar las probabilidades de cada punto muestral.

Espacio muestral (S)	$P(cada\ punto\ muestral)$	x
NNN	$\left(\frac{9}{10}\right)\left(\frac{9}{10}\right)\left(\frac{9}{10}\right)=\left(\frac{9}{10}\right)^3$	0
DNN	$\left(\frac{1}{10}\right)\left(\frac{9}{10}\right)\left(\frac{9}{10}\right)=\left(\frac{1}{10}\right)\left(\frac{9}{10}\right)^2$	1
NDN	$\left(\frac{9}{10}\right)\left(\frac{1}{10}\right)\left(\frac{9}{10}\right)=\left(\frac{1}{10}\right)\left(\frac{9}{10}\right)^2$	1
NND	$\left(\frac{9}{10}\right)\left(\frac{9}{10}\right)\left(\frac{1}{10}\right)=\left(\frac{1}{10}\right)\left(\frac{9}{10}\right)^2$	1
DDN	$\left(\frac{1}{10}\right)\left(\frac{1}{10}\right)\left(\frac{9}{10}\right)=\left(\frac{1}{10}\right)^2\left(\frac{9}{10}\right)$	2
DND	$\left(\frac{1}{10}\right)\left(\frac{9}{10}\right)\left(\frac{1}{10}\right)=\left(\frac{1}{10}\right)^2\left(\frac{9}{10}\right)$	2
NDD	$\left(\frac{9}{10}\right)\left(\frac{1}{10}\right)\left(\frac{1}{10}\right)=\left(\frac{1}{10}\right)^2\left(\frac{9}{10}\right)$	2
DDD	$\left(\frac{1}{10}\right)\left(\frac{1}{10}\right)\left(\frac{1}{10}\right)=\left(\frac{1}{10}\right)^3$	3

Tabla 2.
Fuente: propia.

Con lo anterior se encuentra que la distribución de probabilidad es:

X	0	1	2	3
$P(X)$	$\left(\frac{9}{10}\right)^3$	$3\left(\frac{1}{10}\right)\left(\frac{9}{10}\right)^2$	$3\left(\frac{1}{10}\right)^2\left(\frac{9}{10}\right)$	$\left(\frac{1}{10}\right)^3$

Con el fin de obtener una expresión general que sea útil a todos los posibles casos de variable aleatoria binomial, se tenga en cuenta que en esta ilustración hemos considerado el caso $n = 3$, de la probabilidad de éxito es $p = \frac{1}{10}$ y por consiguiente la probabilidad de fracaso $q = 1 - p = \frac{9}{10}$. Vemos en la distribución de probabilidad que:

Para *x*=3 (3 éxitos y 0 fracasos) aparece el factor $p^3 = \left(\frac{1}{10}\right)^3$, no aparece *q*

Para *x*=2 (2 éxitos y 1 fracaso) aparecen los factores $p^2 = \left(\frac{1}{10}\right)^2$, y $q^1 = (\frac{9}{10})^1$

Para *x*=1 (1 éxito y 2 fracasos) aparecen los factores $p^1 = \left(\frac{1}{10}\right)^1$, y $q^2 = (\frac{9}{10})^2$

Para *x*=0 (0 éxitos y 3 fracaso) no aparece *p* y si aparece $q^3 = (\frac{9}{10})^3$

En general, lo anterior indica que con *n* ensayos y *x* éxitos, y por consiguiente *n-x* fracasos, la expresión de la correspondiente probabilidad contiene los factores p^x y q^{n-x}.

Por otra parte, podemos analizar que el número de puntos muestrales en los que se dan *x* éxitos y *n-x* fracasos corresponde al número de combinaciones de n objetos tomando x de ellos (se recomienda al estudiante remitirse nuevamente al estudio de combinaciones dado en la cartilla de la semana 2), este valor es el coeficiente binomial $\binom{n}{x}$ por lo tanto, se está en condiciones de enunciar .

Distribución de probabilidad de una variable aleatoria binomial

Sea X una variable aleatoria binomial que cuenta el número de éxitos en n ensayos de Bernoulli, cada uno con probabilidad de éxito p y probabilidad de fracaso *q=1-p,* la probabilidad de obtener x é éxitos está dada por:

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

Recuérdese que el coeficiente corresponde a:

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!\,(n-x)!}$$

Ejemplo 6.1: apoyados en estudios genéticos se tiene información que la probabilidad de que una pareja de esposos tenga una niña es de 0,65, la de que tenga un niño es entonces de 0,35. Hallar la probabilidad de que en 3 partos de la pareja el número de niñas sea 3.

Solución: la elección de éxito o fracaso es arbitraria, para hallar la probabilidad de que en 3 partos resulten 2 niñas se considera como éxito el hecho de tener una niña en un parto, por tanto:

$$P = 0{,}65;\ q = 0{,}35, n = 3;\ k = 2$$

$$P(X = 2) = \binom{3}{2}(0{,}65)^2(0{,}35)^1 = 3(0{,}4225)(0{,}35) = 0{,}443625$$

Ejemplo 6.2: se sabe que 2 de cada 5 estudiantes de una universidad han solicitado crédito educativo. Hallar la probabilidad de que dos de los próximos 4 estudiantes que ingresen a la cafetería hayan solicitado crédito.

Solución: si 2 de cada 5 estudiantes han solicitado crédito educativo se puede afirmar que la probabilidad (éxito) de que un estudiante seleccionado al azar sea solicitante de crédito es de, $p = \frac{2}{5}$, por tanto la probabilidad de fracaso es al $p = \frac{3}{5}$. considerar estudiantes (ensayos), la probabilidad de que 2 de ellos sean solicitantes es:

$$P(X = 2) = \binom{4}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)^{4-2} = \frac{4!}{2!\,(4-2)!}\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)^2$$

$$P(X = 2) = \frac{4!}{2!\,(4-2)!}\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{24}{4}\left(\frac{4}{25}\right)\left(\frac{9}{25}\right) = \frac{216}{625}$$

Si se considera *n* ensayos de Bernoulli, la variable aleatoria asociada puede tomar *n+ 1* posibles valores $(x = 0, 1, \ldots, n)$. Un hecho particularmente importante es que los valores de $P(X = x) = B(n, x, p) = \binom{n}{x}p^x q^{n-x}$ para los valores , coinciden con los términos del desarrollo del binomio $(p + q)^n$ (razón por la cual se le da el nombre de distribución binomial) es decir:

$$(p + q)^n = \binom{n}{0}p^0q^{n-0} + \binom{n}{1}p^1q^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n-1}p^{n-1}q^1 + \binom{n}{n}p^nq^{n-n}$$

$$(p + q)^n = P(X = 0) + P(X = 1) + \cdots + P(X = n - 1) + P(X = n)$$

$$(p + q)^n = \sum_{i=0}^{n} P(X = i) = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}p^iq^{n-i}$$

Dado que *(p+q)=1,* se tiene también que $(p + q)^n = 1$ y por tanto:

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}p^iq^{n-i} = 1$$

Este último resultado es precisamente una de las condiciones que debe cumplir una distribución de probabilidad.

Uso de tablas de sumas binomiales

Usualmente se pregunta por la probabilidad que la variable aleatoria tome un valor contenido entre dos valores específicos, o que tome un valor mayor o menor que un valor dado, por ejemplo *P(a<X<b),P(X>b),* estos requerimientos podrían llevar a tediosos cálculos; sin embargo, existen tablas de sumas binomiales que dan el valor de la probabilidad acumulada hasta determinado valor *x* menor o igual que *n* . En la carpeta Recursos para el aprendizaje correspondiente a esta semana 6 se incluye una tabla de probabilidades acumuladas hasta *n* =20 y valores de *p* del orden de las décimas e incluso de centésimas. A continuación se presenta un ejemplo que ilustra el uso de tales tablas, al tiempo que se refuerza el uso de los principios de la distribución binomial.

Ejemplo 6.3: considerando una variable aleatoria binomial en la que se realizan *n* =18 ensayos de Bernoulli, cada uno con probabilidad de éxito *p=0,2* y probabilidad de fracaso *q*=0,8. Hallar a) La probabilidad que el número de éxitos sea a lo sumo de 5, b) La probabilidad de que el número de éxitos sea de al menos 9. c) La probabilidad de que el número de éxitos sea mayor que 3 y menor que 9.

Solución:

a. La probabilidad de que el número de éxitos sea a lo sumo de 5 corresponde a:

$$P(X \leq 5) = P(X = 0) + P(X = 1) + (X = 2) + P(X = 3) + P(X = 0) + P(X = 0)$$

$$P(X \leq 5) = \sum_{i=0}^{5} P(X = i)$$

Se podrían realizar los cálculos de cada una de la probabilidades individuales con base en la fórmula de la distribución binomial, los valores de *n,x,p y q* y luego realizar la suma; sin embargo, como se ha comentado antes, se puede usar la tabla de probabilidades acumuladas, en este caso con *n*=18; *x*=5 y *p*=0,2 se observa en la tabla que el valor de la probabilidad acumulada hasta *x*=5 es 0,8671.

Tabla D.2: DISTRIBUCIÓN BINOMIAL: F(x)

n	p / x	0,01	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,75
18	0	0,8345	0,3972	0,1501	0,0180	0,0056	0,0016	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,9862	0,7735	0,4503	0,0991	0,0395	0,0142	0,0013	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,9993	0,9419	0,7338	0,2713	0,1353	0,0600	0,0082	0,0007	0,0000	0,0000	0,0000
	3	1,0000	0,9891	0,9018	0,5010	0,3057	0,1646	0,0328	0,0038	0,0002	0,0000	0,0000
	4		0,9985	0,9718	0,7164	0,5187	0,3327	0,0942	0,0154	0,0013	0,0000	0,0000
	5		0,9998	0,9936	0,8671	0,7175	0,5344	0,2088	0,0481	0,0058	0,0003	0,0000
	6		1,0000	0,9988	0,9487	0,8610	0,7217	0,3743	0,1189	0,0203	0,0014	0,0002
	7			0,9998	0,9837	0,9431	0,8593	0,5634	0,2403	0,0576	0,0061	0,0012
	8			1,0000	0,9957	0,9807	0,9404	0,7368	0,4073	0,1347	0,0210	0,0054
	9				0,9991	0,9946	0,9790	0,8653	0,5927	0,2632	0,0596	0,0193
	10				0,9998	0,9988	0,9939	0,9424	0,7597	0,4366	0,1407	0,0569
	11				1,0000	0,9998	0,9986	0,9797	0,8811	0,6257	0,2783	0,1390
	12					1,0000	0,9997	0,9942	0,9519	0,7912	0,4656	0,2825
	13						1,0000	0,9987	0,9846	0,9058	0,6673	0,4813
	14							0,9998	0,9962	0,9672	0,8354	0,6943
	15							1,0000	0,9993	0,9918	0,9400	0,8647
	16								0,9999	0,9987	0,9858	0,9605
	17								1,0000	0,9999	0,9984	0,9944
	18									1,0000	1,0000	1,0000

Tabla 3.
Fuente: propia.

b. La probabilidad de que el número de éxitos sea de al menos 9 corresponde a:

$$P(X \geq 9) = \sum_{i=9}^{18} P(X = i)$$

Dado que las tablas dan la probabilidad acumulada hasta un valor específico, es necesario aplicar la probabilidad del complemento así:

$$P(X\geq 9)+ P(X<9)=1$$

Entonces:

$$P(X\geq 9)=1-P(X<9)$$

Pero la probabilidad $P(X<9)$ es la misma que $P(X\leq 8)$. La tabla muestra que $P(X\leq 8)=0{,}9957$, entonces:

$$P(X\geq 9)=1-P(X<9)=1-0{,}9957=0{,}0043$$

c. La probabilidad de que el número de éxitos sea mayor que 3 y menor que 9 equivale a la probabilidad de que x sea un número mayor que 3 y menor o igual que 8, es decir:

$$(3<X\leq 8)=P(X\leq 8)-P(X\leq 3)$$

La tabla en este caso da los valores:

$$P(X\leq 8)=0{,}9957$$

$$P(X\leq 7)=0{,}5010$$

Entonces:

$$P(3<X\leq 8)=0{,}9957-0{,}5010=0{,}4947$$

Cálculo de la media y la varianza de la distribución binomial

La media y la varianza de la distribución binomial se puede calcular aplicando las respectivas definiciones de media y varianza de variables aleatorias. A continuación se emplean tales definiciones y la expresión de la distribución de probabilidad de una variable aleatoria binomial para hallar su media y su varianza.

A partir de una variable aleatoria binomial de *n* ensayos de Bernoulli, con probabilidad de éxito igual a p y probabilidad de fracaso igual a *q,* se denota el resultado del *k-esimo* ensayo mediante una nueva variable aleatoria I_k, esta variable toma el valor 1 con probabilidad p y 0 con probabilidad q, con base en lo anterior, en un experimento binomial el número de éxitos es igual a la suma de los valores de los I_k, por tanto el valor de X corresponde a:

$$X = I_1 + I_2 + \cdots + I_n$$

Para cualquier I_k el valor esperado está dado por:

$$E(I_k) = 1.p + o.q = p$$

Con lo cual la media de la n variables independientes $I_1, I_2, \ldots, I_n$ es la suma de la media de cada una es decir *np,* el cual es el valor del promedio o valor esperado de la variable aleatoria binomial.

Por otro lado, para cualquier I_k la varianza es:

$$\sigma_I^2 = E[(I_k - \mu)^2] = E[I_k^2] - \mu^2 = 0^2.q + 1^2.p - p^2 = p(1-p)$$

$$\sigma_I^2 = p.q$$

Para las *n* variables aleatorias I_k la varianza es la suma de todas ellas, es decir *npq* y ese valor es precisamente la varianza de la variable binomial.

Resumiendo los resultados de estos razonamientos se tiene que:

Dada una variable aleatoria binomial consistente en *n* ensayos de Bernoulli, en donde la probabilidad de éxito en cada ensayo es *p* y la probabilidad de fracaso es q, la media o valor esperado es $\mu=np$ y la varianza es $\sigma_X^2 = npq$.

Ejemplo 6.4: en un experimento binomial con n=16 la probabilidad de éxito es p=0,3. Hallar la media y la varianza.

Solución: la media es igual a:

$$\mu = np = (16)(0{,}3) = 4{,}8$$

Mientras que la varianza es:

$$\sigma_X^2 = npq = (16)(0{,}3)(0{,}7) = 3{,}36$$

Ejemplo 6.5: con base en el histórico de las planillas de calificaciones entregadas a la coordinación académica, por parte de un profesor de Cálculo de Probabilidad, se sabe que la probabilidad de que un estudiante apruebe el curso es de 0,8. ¿Cuál es la probabilidad de que de un grupo de 20 estudiantes aprueben el curso 16 de ellos seleccionados al azar? ¿Cuál es la media de aprobación y la varianza en grupos de 20 estudiantes?

Solución: con n=20; x=11; p=0,8; q=0,2 se tiene:

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

$$P(X = 16) = \frac{20!}{16!\,(20-16)!}(0{,}8)^{16}(0{,}2)^{20-16}$$

$$P(X = 8) = \frac{20!}{11!\,(9)!}(0{,}8)^{16}(0{,}2)^{4}$$

El cálculo anterior puede resultar algo tedioso, pero podemos usar las tablas de probabilidad binomial acumuladas. La probabilidad de que el número de aprobados sea exactamente de 16 es:

$$P(X=16)=P(X\leq 16)-P(X\leq 15)$$

$$P(X=16)=0{,}5886-0{,}3704=0{,}2146$$

La media de aprobación del mismo profesor en grupos de 20 estudiantes es:

$$\mu = np = (20)(0{,}8) = 16$$

Mientras que la varianza es:

$$\sigma_X^2 = npq = (20)(0,8)(0,2) = 3,2$$

Variable aleatoria multinomial y distribución multinomial

La distribución binomial estudiada hasta la sección anterior, se basa en la repetición de ensayos de Bernoulli, en los cuales solo se considera dos posibles resultados, éxito y fracaso con probabilidades *p* y *q* respectivamente. En diversas situaciones de diferentes contextos, se debe considerar más de dos resultados posibles por cada ensayo, lo que se conoce como ensayo multinomial, mientras que la repetición de múltiples de éstos, corresponde a variables aleatorias multinomiales.

En general, si un experimento aleatorio consiste en la repetición de *n* ensayos, en los cuales los posibles resultados son $E_1, E_2, \dots, E_k$ cada uno con probabilidades de ocurrencia $p_1, p_2, \dots, p_k,$ La variable aleatoria multinomial cuenta la cantidad de veces x_1 de veces que ocurre el resultado $E_2,$ la cantidad de veces x_2 que ocurre el resultado $E_1, \dots$ y la cantidad de veces x_k que ocurre el resultado $E_k.$

Distribución de probabilidad de una variable aleatoria multinomial

Sea *X* una variable aleatoria multinomial que consiste en un experimento compuesto por n ensayos independientes, cada uno con posibles resultados $E_1, E_2, \dots, E_k,$ y probabilidades de ocurrencia $p_1, p_2, \dots, p_k,$ respectivamente, donde

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$$
$$p_1 + p_2 + \cdots + p_k = 1$$

La distribución de probabilidad de la variable aleatoria multinomial mide la probabilidad de que $E_1 = x_1, E_2 = x_2, \dots, E_k = x_k.$ La correspondiente distribución de probabilidad se denota mediante:

$$f(x_1, x_2, \dots x_k;\ p_1, p_2, \dots p_k; n)$$

Para hallar la expresión de cálculo correspondiente se debe tener en cuenta que al ser ensayos independientes, la probabilidad de cualquiera de las posibilidades de obtener x_1 veces $E_1,$ x_2 veces $E_2, \dots,$ x_k veces $E_k.$ es:

$$p_1^{x_1} . p_2^{x_2} \dots p_k^{k}$$

Además, la cantidad total de particiones de n ensayos en k grupos, donde $E_1,$ se da x_1 veces, $E_2,$ se da x_2 veces, … $E_k.$ se da x_k veces, está dado por:

$$\binom{n}{x_1, x_2, \dots x_k} = \frac{n!}{x_1!\, x_2! \dots x_{k!}}$$

En razón a que cada una de estas posibilidades son mutuamente excluyentes, y ocurren con la misma probabilidad, la distribución multinomial corresponde a:

$$f(x_1, x_2, \dots x_k;\ p_1, p_2, \dots p_k; n) = \binom{n}{x_1, x_2, \dots x_k} p_1^{x_1} . p_2^{x_2} \dots p_k^{k}$$

Es decir, si un experimento puede dar los resultados $E_1, E_2, \dots, E_k,$ con probabilidades $p_1, p_2, \dots, p_k,$ entonces la distribución de probabilidad de las variables aleatoria $X, X_2, \dots, X_k$ correspondientes al número de ocurrencias para cada $E_1, E_2, \dots, E_k,$ en *n* pruebas independientes es:

$$f(x_1, x_2, \dots x_k;\ p_1, p_2, \dots p_k; n) = \binom{n}{x_1, x_2, \dots x_k} p_1^{x_1} . p_2^{x_2} \dots p_k^{k}$$

Ejemplo 6.6: la valoración académica a cada estudiante de una institución educativa se puede expresar como Excelente (E), Bueno (B), Aceptable (A) e Insuficiente (I). Se tiene el conocimiento histórico de que el 40% de los estudiantes se clasifican como excelentes, el 30% como buenos, 20% como aceptables y 10% como insuficientes. Se elige aleatoriamente 9 estudiantes, ¿cuál es la probabilidad de que se distribuyan en 3 estudiantes excelentes, 3 buenos, 1 aceptable y 2 insuficientes?

Solución: la situación corresponde al contexto de variables aleatorias multinomiales, por tanto:

$$P(E = 3, B = 2, A = 1, I = 2) = f(3, 3, 1, 2;\ 0.4, 0.3, 0.2, 0.1; 9)$$

$$P(E = 3, B = 3, A = 1, I = 2) = \binom{9}{3, 3, 1, 2} (0.4)^3 (0.3)^3 (0.2)^1 (0.1)^3$$

$$P(E = 3, B = 3, A = 1, I = 2) = \frac{9!}{3!.3!.1!.2!} (0.4)^3 (0.3)^3 (0.2)^1 (0.1)^3$$

$$P(E = 3, B = 3, A = 1, I = 2) = \frac{(4)(5)(6)(7)(8)(9)}{(6)(1)(2)} (0.064)(0.027)(0.2)(0.001)$$

$$P(E = 3, B = 3, A = 1, I = 2) = (5040)(0.064)(0.027)(0.2)(0.001) = 0{,}001741824$$

4

Unidad 4

Distribución de probabilidad de una variable aleatoria de Poisson

Estadística de probabilidades

Autor: Danilo de Jesús Ariza Agámez

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina

MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Introducción

Otra de las distribuciones de probabilidad de variables aleatorias discretas, junto a la distribución binomial estudiada en la semana 6, es la *distribución de Poisson*. La distribución de Poisson es útil para describir diferentes procesos tales como el conteo de número de personas que ingresan a un banco durante un tiempo específico, la cantidad de llamadas realizadas por minuto a través de una central telefónica, entre muchísimos otros casos. Como se puede observar, las variables aleatorias asociadas descritas son de tipo discreto.

Cada una de estas variables aleatorias representa el número total de ocurrencias de un fenómeno a lo largo de un determinado tiempo o en una región del espacio. Es claro que no solo se considera el tiempo en el cual se dan las ocurrencias del hecho de interés, pero en lo que sigue de la presente cartilla, a menos que se especifique lo contrario, se usará esta variable. La distribución de probabilidad de una variable de Poisson expresa la probabilidad de que en un tiempo dado ocurra k hechos o fenómenos, tales fenómenos ocurren con una frecuencia promedio conocida y son independientes del tiempo que ha transcurrido desde la última ocurrencia. El objetivo de la presente cartilla es brindar al estudiante la oportunidad de apropiación de conocimientos y desarrollo de destrezas requeridas en el uso adecuado de los principios de la distribución de Poisson en el cálculo de probabilidades.

U4

Metodología

Esta cartilla trata un caso particularmente importante dentro del contexto de las distribuciones de probabilidad de variables aleatorias discretas, es por eso que se recalca el seguimiento del mismo conjunto de recomendaciones dadas en las cartillas anteriores; tales recomendaciones se refieren a la necesidad de permanente revisión de principios generales de cálculo de probabilidad estudiados al inicio de la semana 3, y la recomendación que se ha planteado siempre en el sentido de realizar una síntesis conceptual de los contenidos de cada cartilla, además de su cuidadosa lectura y verificación de los cálculos presentados en los ejemplos.

La lectura aquí planteada no es el único recurso que se presenta para alcanzar el deseado nivel de comprensión en lo referente a al estudio de la distribución de probabilidad de variables aleatorias binomiales, debe tener en cuenta que se presenta también recursos de videoconferencias, resúmenes, videodiapositivas, ejercicios de repaso, ejercicios resueltos y ejercicios propuestos; los cuales están orientados a brindar oportunidades de adquisición de conocimientos y desarrollo de habilidades a través de diferentes medios. En la sección de videocápsulas se presenta una serie de videos que buscan fortalecer de los temas objeto de estudio.

Seguir este conjunto de recomendaciones puede facilitar el afianzamiento del tema y proporcionar la posibilidad de adquirir mayor confianza frente a contenidos posteriores.

Experimento de Poisson

Un experimento de Poisson es aquel en el cual los resultados son números que corresponden a la cantidad de ocurrencias de valores de una variable aleatoria durante un intervalo dado o en una región específica. En un experimento de Poisson se debe tener claridad de la unidad de tiempo o de medida de la región del espacio. Si lo que se considera es el tiempo, la unidad puede ser cualquiera elegida arbitrariamente y acorde al contexto de la situación bajo análisis, por ejemplo, un segundo, un minuto, un día, entre otras. De acuerdo con esto, es posible que nos interese como variable aleatoria el número de llamadas por hora que se realizan a una central de atención al cliente. A un experimento de Poisson se asocia lo que se conoce como Proceso de Poisson, las características del proceso de Poisson se describen en el siguiente numeral.

Proceso de Poisson

El proceso de Poisson, asociado a un experimento de Poisson, se caracteriza por lo siguiente:

- La cantidad de resultados presentes en un intervalo dado es independiente de la que se presenta en cualquier otro intervalo disjunto. Con esta característica se suele afirmar que el proceso de Poisson no tiene memoria.
- La probabilidad de ocurrencia de un resultado en un intervalo muy corto (matemáticamente se suele decir que tiende a cero), es proporcional a la duración del intervalo o tamaño de la región y su valor es independiente de la cantidad de resultados que puedan ocurrir fuera del intervalo o región.
- La probabilidad de ocurrencia de más de un resultado en un intervalo muy corto tiende a cero.

Distribución de probabilidad de una variable aleatoria de Poisson

Se llama variable aleatoria de Poisson al número X de ocurrencias del hecho de interés en un experimento de Poisson. La expresión que da la probabilidad de cada valor de la variable se conoce como distribución de probabilidad de Poisson. La cantidad promedio de resultados μ se calcula mediante $\mu=\lambda t$ siendo t la duración del intervalo de tiempo y el valor de la rapidez promedio de ocurrencias. La probabilidad de ocurrencia de cada valor de la variable aleatoria de Poisson depende de λ,por tal razón, nos referimos simbólicamente a la probabilidad de que la variable aleatoria de Poisson X tome el valor x mediante $P(x; \lambda t)$. La deducción de la fórmula o expresión que define la distribución de probabilidad de la variable de Poisson supera los objetivos y alcance de este curso, sin embargo se relaciona a continuación y se utiliza para el cálculo de probabilidades en buena parte de la presente cartilla.

Distribución de probabilidad de Poisson: sea *X* una variable aleatoria de Poisson correspondiente al número de resultados de interés en un experimento de Poisson en un intervalo dado o región *t,* si *λ* es la cantidad promedio de resultados por unidad de tiempo o región, la distribución de probabilidad de la variable *X* está dada por la siguiente expresión:

$$P(x;\lambda t)=\frac{e^{\lambda t}(\lambda t)^{x}}{x!}$$

Donde *e* es el número de Euler, un número irracional cuyo valor aproximado a cuatro cifras decimales es *e*=2,7182 (le siguen infinitas cifras). A una variable aleatoria de Poisson con rapidez de ocurrencia *λ,* se le suele referir como variable de Poisson de parámetro *λ.*

Ejemplo 7.1: se sabe que a una central de servicio de atención al cliente ingresan en promedio 6 llamadas por minuto ¿cuál es la probabilidad de que en un minuto cualquiera ingresen 4 llamadas? ¿Cuál es la probabilidad de que ingresen 10 llamadas en dos minutos consecutivos?

Solución: La variable aleatoria *X* puede tomar los valores *X=1.2,3,…* Esta variable se puede considerar como una variable aleatoria de Poisson, en la cual *λ=6.* La probabilidad de que en un minuto lleguen 4 llamadas es:

$$P(x;\lambda t)=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^{x}}{x!}$$
$$P(4;6(1))=\frac{e^{-6}(6)^{4}}{4!}\cong 0{,}138$$

La probabilidad de 10 llamadas en dos minutos consecutivos es:

$$P(10;6(2))=P(10;12)=\frac{e^{-12}(6)^{10}}{10!}\cong 0{,}104953$$

Ejemplo 7.2: en un proceso de control de calidad de tornillos galvanizados se detectan en promedio 0,2 tornillos imperfectos por minuto. Hallar: a) La probabilidad de que se encuentre un tornillo imperfecto en un tiempo de 3 minutos b) la probabilidad de detectar al menos dos tornillos imperfectos en 5 minutos, c) a lo sumo un tornillo imperfecto en 15 minutos.

Solución: la variable aleatoria de Poisson de este ejemplo se caracteriza por un valor de parámetro *λ*=0,2, por tanto:

Para $x = 1 \text{ y } t = 5$

$$P(1; 0{,}2 * 3) = P(2; 0{,}6) = \frac{e^{-0{,}6}(0{,}6)^1}{1!} \cong 0{,}3292$$

La probabilidad de que el número de tornillos imperfectos sea mayor o igual que 2 corresponde a:

$$P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) + \cdots = \sum_{x=2}^{\infty} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^x}{x!}$$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)]$$

$$P(X \geq 2) = 1 - \left[\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^x}{x!} + \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^x}{x!}\right]$$

Con λt=1;x=0;x=1

$$P(X \geq 2) = 1 - \left[\frac{e^{-1}(1)^0}{0!} + \frac{e^{-1}(1)^1}{1!}\right] = 1 - [e^{-1} + e^{-1}]$$

$$P(X \geq 2) = 1 - 2e^{-1} = 1 - \frac{2}{e} \cong 1 - 0{,}7357 \cong 0{,}2653$$

La probabilidad de hallar a lo más un tornillo en 15 minutos, con λt=0,2*15=3, es:

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1)$$

$$P(X \leq 1) = \left[\frac{e^{-3}(3)^0}{0!} + \frac{e^{-3}(3)^1}{1!}\right] = [e^{-3} + 3e^{-3}] = 4e^{-3}$$

$$P(X \leq 1) = 4e^{-3} \cong 0{,}1991$$

Uso de tablas de probabilidades de Poisson acumuladas

En el Ejemplo 7.2 ¿cuál es el valor de la probabilidad de que el número de tornillos defectuosos sea a lo sumo 10? La respuesta, tal como lo sugeriría la solución del mismo ejemplo corresponde a:

$$P(X \leq 10) = P(X = 0) + P(X = 1) + \cdots + P(X = 10) = \sum_{x=0}^{10} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^x}{x!}$$

Aunque es claramente posible realizar los cálculos correspondientes cada vez que sea necesario, es claro también que tales cálculos pueden resultar bastante tediosos, por fortuna, al igual que para el caso de la distribución binomial, existen tablas que dan la probabilidad acumulada hasta determinado valores de X $P(X \leq x)$ y un importante rango de valores del producto λt. En la sesión de recursos para el aprendizaje el estudiante podrá encontrar una tabla de probabilidades acumuladas de la variable aleatoria de Poisson.

Ejemplo 7.3: a un pequeño puerto, el promedio diario de llegadas de barcos pesqueros es 10 ¿Cuál es la probabilidad de que en un día cualquiera lleguen al menos 16 barcos?

Solución: denotamos con X la variable aleatoria que cuenta el número de barcos que llega cada día. Se quiere calcular $P(X \geq 16)$.

Se tiene entonces que:

$$\boldsymbol{P(X \geq 16) = 1 - P(X < 16) = 1 - P(X \leq 15)}$$

$$\boldsymbol{P(X \geq 16) = 1 - \sum_{x=0}^{15} P(x, \lambda t\,)}$$

Tabla de probabilidades acumuladas de Poisson

λ = μ x	4,5	5	5,5	6	6,5	7	7,5	8	8,5	9	9,5	10	10,5
0	0,0111	0,0067	0,0041	0,0025	0,0015	0,0009	0,0006	0,0003	0,0002	0,0001	0,0001	0,0000	0,0000
1	0,0611	0,0404	0,0266	0,0174	0,0113	0,0073	0,0047	0,0030	0,0019	0,0012	0,0008	0,0005	0,0003
2	0,1736	0,1247	0,0884	0,0620	0,0430	0,0296	0,0203	0,0138	0,0093	0,0062	0,0042	0,0028	0,0018
3	0,3423	0,2650	0,2017	0,1512	0,1118	0,0818	0,0591	0,0424	0,0301	0,0212	0,0149	0,0103	0,0071
4	0,5321	0,4405	0,3575	0,2851	0,2237	0,1730	0,1321	0,0996	0,0744	0,0550	0,0403	0,0293	0,0211
5	0,7029	0,6160	0,5289	0,4457	0,3690	0,3007	0,2414	0,1912	0,1496	0,1157	0,0885	0,0671	0,0504
6	0,8311	0,7622	0,6860	0,6063	0,5265	0,4497	0,3782	0,3134	0,2562	0,2068	0,1649	0,1301	0,1016
7	0,9134	0,8666	0,8095	0,7440	0,6728	0,5987	0,5246	0,4530	0,3856	0,3239	0,2687	0,2202	0,1785
8	0,9597	0,9319	0,8944	0,8472	0,7916	0,7291	0,6620	0,5925	0,5231	0,4557	0,3918	0,3328	0,2794
9	0,9829	0,9682	0,9462	0,9161	0,8774	0,8305	0,7764	0,7166	0,6530	0,5874	0,5218	0,4579	0,3971
10	0,9933	0,9863	0,9747	0,9574	0,9332	0,9015	0,8622	0,8159	0,7634	0,7060	0,6453	0,5830	0,5207
11	0,9976	0,9945	0,9890	0,9799	0,9661	0,9467	0,9208	0,8881	0,8487	0,8030	0,7520	0,6968	0,6387
12	0,9992	0,9980	0,9955	0,9912	0,9840	0,9730	0,9573	0,9362	0,9091	0,8758	0,8364	0,7916	0,7420
13	0,9997	0,9993	0,9983	0,9964	0,9929	0,9872	0,9784	0,9658	0,9486	0,9261	0,8981	0,8645	0,8253
14	0,9999	0,9998	0,9994	0,9986	0,9970	0,9943	0,9897	0,9827	0,9726	0,9585	0,9400	0,9165	0,8879
15	1,0000	0,9999	0,9998	0,9995	0,9988	0,9976	0,9954	0,9918	0,9862	0,9780	0,9665	0,9513	0,9317
16		1,0000	0,9999	0,9998	0,9996	0,9990	0,9980	0,9963	0,9934	0,9889	0,9823	0,9730	0,9604
17			1,0000	0,9999	0,9998	0,9996	0,9992	0,9984	0,9970	0,9947	0,9911	0,9857	0,9781
18				1,0000	0,9999	0,9999	0,9997	0,9993	0,9987	0,9976	0,9957	0,9928	0,9885
19					1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9995	0,9989	0,9980	0,9965	0,9942
20							1,0000	0,9999	0,9998	0,9996	0,9991	0,9984	0,9972
21								1,0000	0,9999	0,9998	0,9996	0,9993	0,9987
22									1,0000	0,9999	0,9999	0,9997	0,9994
23										1,0000	0,9999	0,9999	0,9998
24											1,0000	1,0000	0,9999
25													1,0000

Tabla 1.
Fuente Poisson.

Con λ=10 y t=1 la tabla de probabilidades acumuladas de Poisson nos da:

$$\sum_{x=0}^{15} P(x, 10) = 0,9513$$

Por tanto, la probabilidad de que al puerto lleguen al menos 16 barcos es:

$$P(X \geq 16) = 1 - 0,9513 = 0,0487$$

Representación gráfica de la distribución de Poisson

Tomando los valores de las probabilidades en el eje y y los valores de la variable aleatoria en el eje X, la gráfica siguiente corresponde al comportamiento de los valores de la probabilidad tomados por una variable aleatoria de Poisson con μ=λt=3.

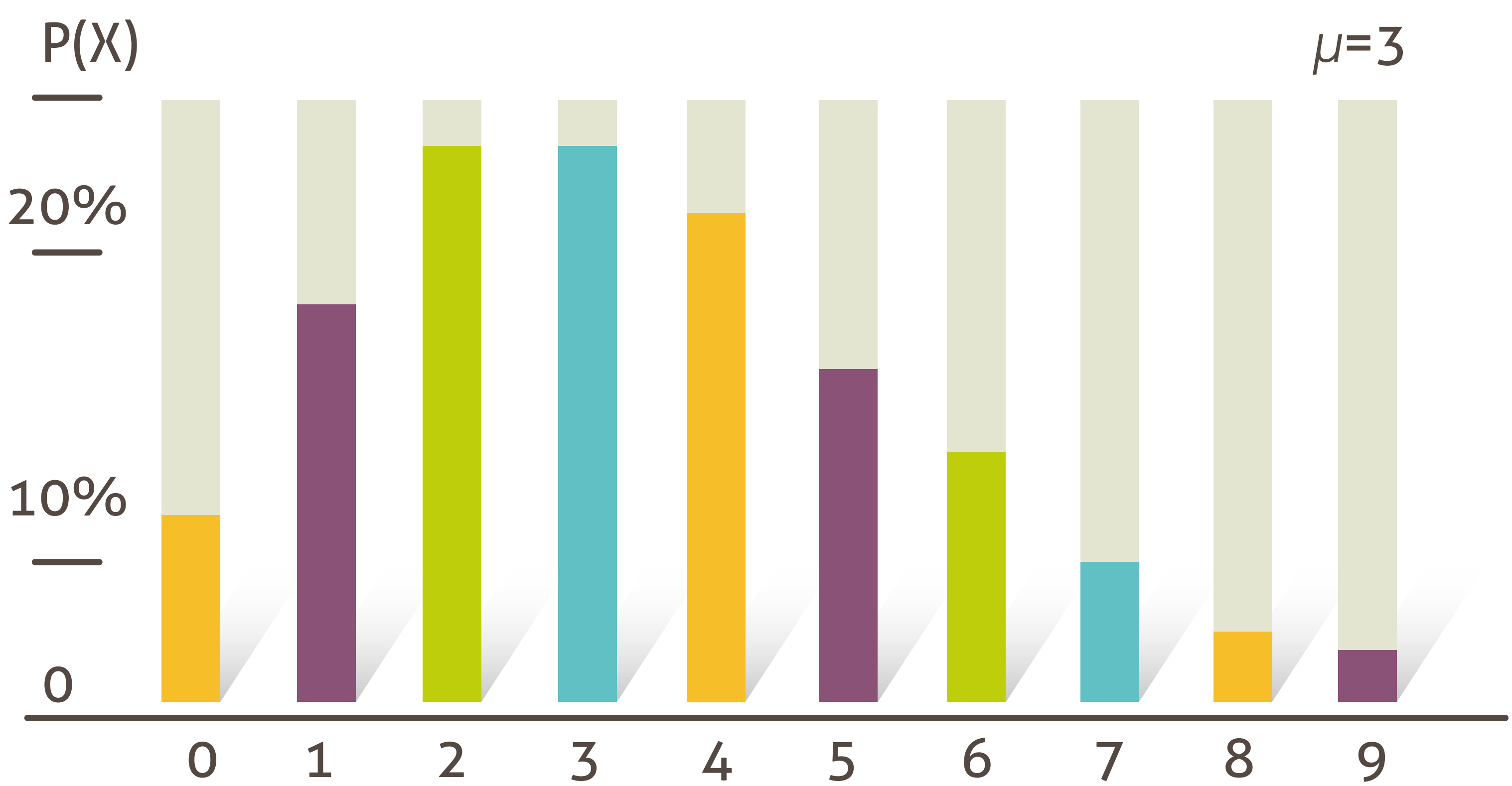

Figura 1.
Fuente: propia.

Media y varianza de la distribución de Poisson

Partiendo de la expresión genérica de cálculo de la media o valor esperado de una variable aleatoria discreta, para el caso de la distribución de Poisson se tiene:

$$E(X)=\sum_{x=0}^{\infty} xP(x)=\sum_{x=0}^{\infty} x\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^{x}}{x!}=\sum_{x=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^{x-1}(\lambda t)}{(x-1)!}$$

La anterior sumatoria toma valores diferentes de cero a partir de x=1, por lo que se puede escribir:

$$E(X)=(\lambda t)\sum_{x=1}^{\infty}\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^{x-1}}{(x-1)!}$$

En la anterior expresión podemos realizar el cambio de variable $z=x-1$, con lo cual se tiene:

$$\mu=E(X)=(\lambda t)\sum_{z=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^{z}}{z!}$$

Según las condiciones que debe cumplir cualquier distribución de probabilidad, se debe dar que:

$$\sum_{z=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^{z}}{z!}=1$$

Por lo tanto:

$$\mu=E(X)=(\lambda t)$$

La varianza la encontramos valiéndonos inicialmente del siguiente cálculo:

$$E[X(X-1)]=\sum_{x=0}^{\infty} x(x-1)P(x)=\sum_{x=0}^{\infty} x(x-1)\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^{x}}{x!}$$

La última sumatoria toma valores diferentes de cero desde *x=2,* por tanto:

$$E[X(X-1)] = \sum_{x=2}^{\infty} x(x-1)\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^x}{x!} = \sum_{x=2}^{\infty} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^{x-2}(\lambda t)^2}{(x-2)!} =$$

$$[X(X-1)] = (\lambda t)^2 \sum_{x=2}^{\infty} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^{x-2}}{(x-2)!}$$

En la última sumatoria podemos realizar el cambio de variable *z=x*-2 con lo que se tiene:

$$E[X(X-1)] = (\lambda t)^2 \sum_{z=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^z}{z!} = (\lambda t)^2 = \mu^2$$

Pero

$$E[X(X-1)] = E[X^2 - X] = E[X^2] - E[X] = \mu^2 - \mu$$

Entonces:

$$E[X(X-\square)] = \square^{\square} = \square[\square^{\square}] - \square[\square]$$
$$\square^{\square} = \square[\square^{\square}] - \square[\square]$$

De donde resulta que:

$$\square[\square^{\square}] - \square^{\square} = \square[\square] = \square = \lambda t$$

La anterior expresión corresponde a la varianza.

En resumen se tiene que dada una distribución de Poisson de parámetro *λ,* la media y la varianza en un periodo *t* tienen el valor de *λt.*

La distribución de Poisson como aproximación a la distribución binomial

Un hecho particularmente importante que se encuentra en el contexto de las distribuciones discretas, es que la distribución de Poisson se puede considerar como una aproximación de la distribución binomial para los casos en que el número de ensayos de Bernoulli de la distribución binomial es significativamente grande, y la probabilidad de éxito p es bastante pequeña.

Para verificarlo consideremos la distribución de probabilidad de una variable aleatoria binomial, dada por:

$$P(x,n,p) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \frac{n!}{x!\,(n-x)!} p^x q^{n-x}$$

$$P(x,n,p) = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-x+1)}{x!} p^x q^{n-x}$$

Si en esta expresión realizamos la sustitución $p = \frac{\mu}{n}$ encontramos:

$$P(x,n,p) = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-x+1)}{x!} \left(\frac{\mu}{n}\right)^x \left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{n-x}$$

$$P(x,n,p) = 1\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{x-1}{n}\right)\frac{\mu^x}{x!}\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{n-x}$$

Si $n \rightarrow \infty$ **y** □ □ □ permanecen constantes se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty} 1\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{x-1}{n}\right) = 1 \; y \quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\mu}{n}\right)^{-x} = 1$$

Por otro lado tenemos, con base en la definición del número de Euler dado en cálculo, que:

$$\lim_{n\to\infty} 1\left(1-\frac{\mu}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left\{\left[1+\frac{1}{\left(-\frac{n}{\mu}\right)}\right]^{-n/\mu}\right\}^{-\mu} = e^{-\mu}$$

De donde se deduce que:

$$\lim_{n\to\infty} P(x,n,p) = \lim_{n\to\infty} 1\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{x-1}{n}\right)\frac{\mu^x}{x!}\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{n-x} = \frac{\mu^x}{x!}e^{-\mu}$$

Es decir, si X es una variable aleatoria binomial cuya distribución de probabilidad es $P(x,n,p)$, □ $\rightarrow \infty$, □ $\rightarrow 0$ □ □ $=$ □□ permanece constante, la distribución de probabilidad binomial tiende a ser la misma distribución de Poisson con $\lambda t =$ □ $=$ □□.

Ejemplo: en la elaboración de cerámica algunas bajas notables de temperatura dan lugar a imperfecciones. Se tiene conocimiento que en promedio de cada mil objetos producidos, uno de ellos resulta no apto para la comercialización. ¿Cuál es la probabilidad de que una muestra de 8000 piezas contenga menos de 7 defectuosas?

Solución: este problema encaja en el marco de variable aleatoria binomial donde n $\square = 8000$; $\square = 0{,}001$. En este caso podemos considerar que el valor □ es lo suficientemente grande y □ lo suficientemente pequeño como para poder aplicar la aproximación de la distribución binomial a la distribución de Poisson; para tal efecto el valor de □= es:

$$\lambda t = \square = \square\square = (8000)(0{,}001) = 8$$

La probabilidad de que se encuentre menos de 7 piezas defectuosas, usando la distribución de Poisson es:

$$\square(\square < 7) = \square(\square \leq 6) = \sum_{\square=0}^{6} \binom{8000}{\square} (0{,}001)^{\square} (0{,}999)^{8000-\square} = \sum_{\square=0}^{6} \frac{\square^{-\lambda t}(\boldsymbol{\lambda t})^{\square}}{\square!}$$
$$= 0{,}3134$$

4

Unidad 4

Distribución normal

Estadística de probabilidades

Autor: Danilo de Jesús Ariza Agámez

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina

MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Introducción

La distribución de probabilidad continua de mayor importancia en estadística es quizá la de distribución normal. En esta cartilla se presenta la función de densidad de probabilidad de variables aleatorias de este tipo, se estudia el proceso para transformar una variable normal cualquiera a una conocida como variable aleatoria normal estándar, y a partir de ello, se hace uso de tablas de probabilidad acumulada para hallar la probabilidad de un valor de cualquier variable aleatoria normal entre dos valores específicos de la misma. La cartilla termina con la presentación de unos ejemplos que ilustran la utilidad de esta distribución.

U4

Metodología

Esta cartilla trata del que es tal vez, el caso más importante dentro del contexto de las distribuciones de probabilidad de variables aleatorias continua, la de distribución de probabilidad normal; por ello, se recalca nuevamente el seguimiento del mismo conjunto de recomendaciones dadas en las cartillas anteriores. Tales recomendaciones se refieren a la necesidad de permanente revisión de principios generales de cálculo de probabilidad estudiados al inicio de la semana 3, y la recomendación que se ha planteado siempre de realizar síntesis conceptuales de los contenidos de las cartillas, además de una cuidadosa lectura y verificación de los cálculos presentados en los ejemplos.

Las lecciones aquí planteadas, no son el único recurso que se presenta para alcanzar el deseado nivel de comprensión en lo referente al estudio de la distribución de probabilidad de variables aleatorias binomiales. Se debe tener en cuenta que se presenta también recursos de videoconferencias, resúmenes, videodiapositivas, ejercicios de repaso, ejercicios resueltos y ejercicios propuestos; los cuales están orientados a brindar oportunidades de adquisición de conocimientos y desarrollo de habilidades a través de diferentes medios. En la sección de videocápsulas se presentan una serie de videos que buscan fortalecer de los temas objeto de estudio.

Seguir este conjunto de recomendaciones puede facilitar el afianzamiento del tema y proporcionar la posibilidad de adquirir mayor confianza frente a contenidos posteriores.

U4 Desarrollo temático

Vimos en la cartilla de la semana 4 que una variable aleatoria es continua si puede tomar todos los infinitos valores contenidos en un intervalo. Una de las distribuciones de probabilidad de variable aleatoria continua que está presente en muchos fenómenos, es la de distribución normal, también conocida como distribución de Gauss.

La distribución normal fue desarrollada por Abraham de Moivre(1667-1754), pero posteriormente Carl Friedrich Gauss(1777-1855), presentó trabajos más detallados en los que formuló la ecuación de la curva, razón por la cual a la curva resultante, que tiene forma de campana, se le conoce campana de Gauss. Un ejemplo de campana de Gauss se muestra en la siguiente imagen.

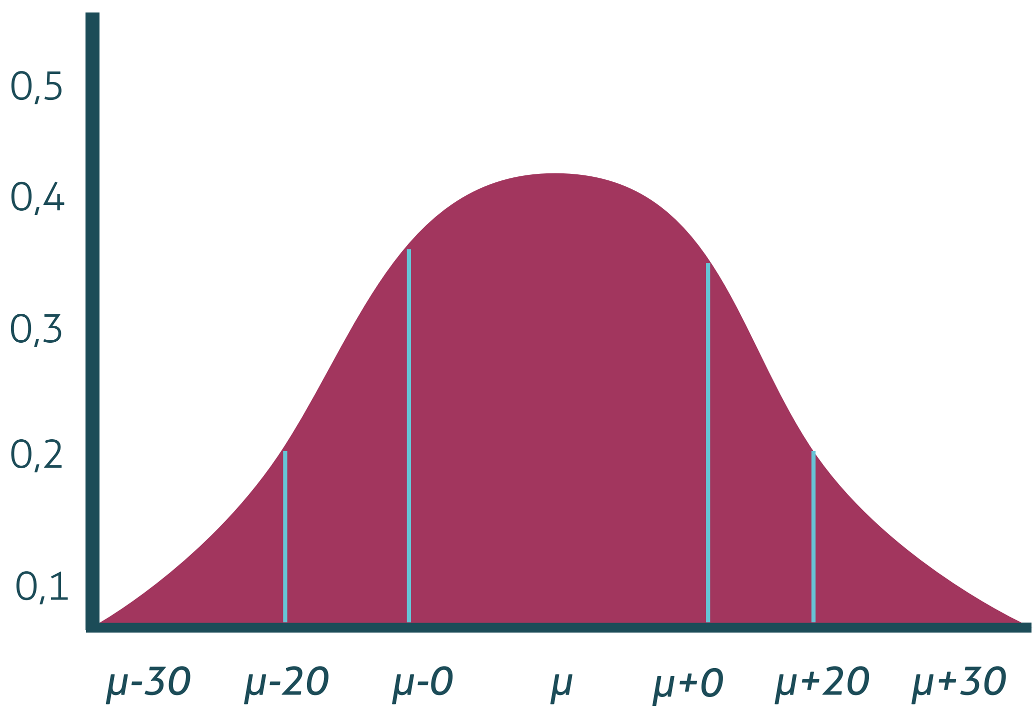

Imagen 1.
Fuente: propia.

La distribución normal queda completamente determinada por la media y la desviación estándar. Desde una perspectiva científica, la distribución normal aproxima notablemente los valores obtenidos para variables que se miden sin errores sistemáticos. Se ha visto que buena parte de experimentos físicos presentan distribuciones que son aproximadamente normales, ejemplo de ello son estaturas, pesos de los individuos, la duración de un producto, entre otros.

Una variable aleatoria continua *X* cuya representación gráfica tiene forma de campana de Gauss se dice que es una variable aleatoria normal.

Función densidad de probabilidad de una variable aleatoria normal

Dada una variable aleatoria normal, cuya media aritmética es μ y desviación estándares σ la función de densidad de probabilidad correspondiente está dada por:

$$N(x,\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad -\infty < x < \infty$$

Conocidos los valores de μ y σ se puede calcular, para diferentes valores de *x*, el correspondiente valor de *N(x,μ,σ)* a partir de la ecuación anterior, con lo cual se podría trazar la curva respectiva.

Es claro que diferentes variables aleatorias que obedecen una distribución normal, con diferentes escalas de valores, presentan diferentes valores de media y desviación estándar, lo que lógicamente da lugar a representaciones gráficas diferentes, pero todas conservando la forma de campana de Gauss. La figura 8.2 muestra diferentes curvas normales, tres de ellas con media igual a 0 y otra con media igual a -2. La figura 8.3, tres curvas normales con media igual a cero y diferentes valores de la desviación estándar.

Figura 8.2

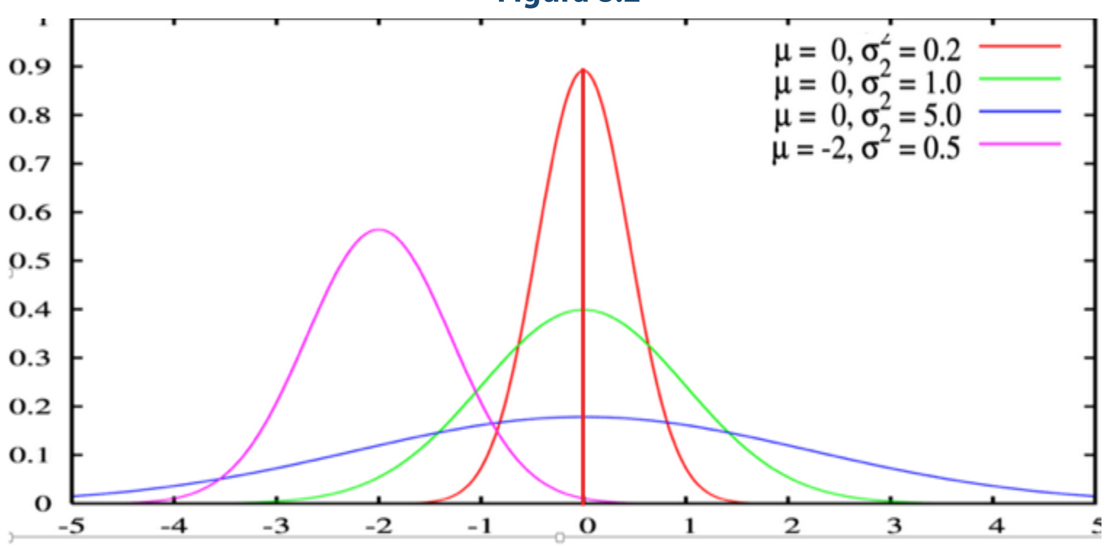

Imagen 2.
Fuente: propia.

Figura 8.3

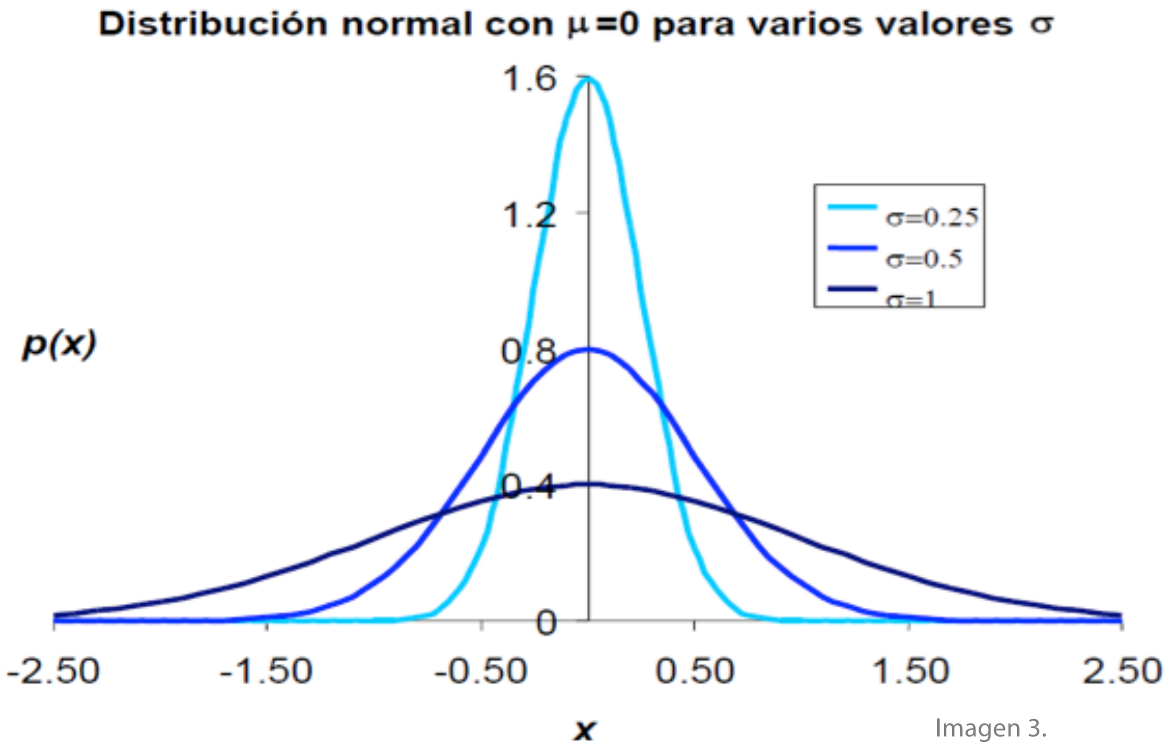

Imagen 3.
Fuente: propia.

Propiedades de la función densidad de probabilidad Normal

Apoyados en análisis fundamentados en cálculo diferencial, se puede encontrar las siguientes propiedades de la función densidad de probabilidad normal:

- La moda ocurre en $x=\mu$, es decir, el valor de la abscisa en el cual la curva alcanza su máximo.
- La curva de la función es simétrica alrededor de la línea vertical que pasa por la media.
- En los valores de $x=\mu\pm\sigma$, la curva presenta puntos de inflexión. La curva es cóncava hacia abajo en la región $\mu-\sigma<X<\mu-\sigma$, siendo cóncava hacia arriba en los otros valores de X.
- A medida que x se aleja del valor de la media, la curva se acerca al eje x.
- El área bajo la curva de la función densidad de probabilidad y sobre el eje X, es igual a 1.

Media y varianza a partir de la función de densidad de probabilidad

El propósito de este aparte es mostrar, a partir de la función densidad de probabilidad, que los valores de μ y σ son efectivamente la media y la desviación estándar de la distribución de la variable aleatoria normal.

A partir de la definición de valor esperado o media de una distribución de probabilidad, y la función densidad de probabilidad de la variable aleatoria normal, se tiene:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} x e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

En la anterior integral podemos plantear la sustitución:

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

Entonces:

$$dz = \frac{dx}{\sigma} \qquad o \qquad dx = \sigma dz$$

Con lo cual se tiene:

$$E[X] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} (\mu + \sigma z) e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

$$E[X] = \mu \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

La primera integral es la integral de la función densidad multiplicada por μ, lo que según condiciones de una distribución corresponde a μ por y resolviendo la segunda integral se encuentra que es igual a cero, por tanto:

$$E[X] = \mu$$

Por su parte la varianza está dada por:

$$E[(X-\mu)^2] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dz$$

Ahora aplicamos la misma sustitución anterior:

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma}; \qquad dx = \sigma dz$$

Con lo cual se obtiene:

$$E[(X-\mu)^2] = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

Aplicando procedimientos de cálculo integral, particularmente integración por partes, la sustitución:

$$u = z; dv = ze^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

Conduce:

$$du = dz; \quad v = -e^{-\frac{z^2}{2}}$$

Lo que finalmente lleva a:

$$E[(X-\mu)^2] = \sigma^2$$

Gran parte de la importancia de la distribución normal radica en que muchas distribuciones de probabilidad pueden ser descritas mediante la curva de la distribución normal, siempre que se tenga claridad de los valores de *μ y σ*. Además, bajo el cumplimiento de algunas condiciones específicas, otras distribuciones de probabilidad se pueden aproximar a la distribución normal, ejemplo de ello es la distribución binomial, en lo que llama la atención que la distribución de una variable aleatoria discreta se aproxime a la de una continua.

El área bajo la curva de la función de densidad de la distribución normal

En la cartilla de la semana 4 se señala la igualdad numérica entre el área bajo la curva de la función densidad de probabilidad de una variable aleatoria continua, entre dos valores de la variable, y la probabilidad que la variable tome un valor contenido entre los dos valores específicos; esto es claramente aplicable al caso de la distribución normal, con lo cual se tiene que la probabilidad de que la variable aleatoria normal *X,* cuya media y desviación estándar son respectivamente *μ y σ,* tome un valor comprendido entre x_1 y x_2, corresponde a:

$$P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} N(x,\mu,\sigma)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\,dx$$

La figura 8.4 muestra la representación gráfica de esta idea, donde el valor de la probabilidad es el área sombreada. Dado que la configuración de la curva depende de los valores de la media y la desviación estándar, es claro que el área sombreada entre dos valores específicos de la variable, y por ende el valor de la probabilidad, depende de tales parámetros.

Figura 8.4

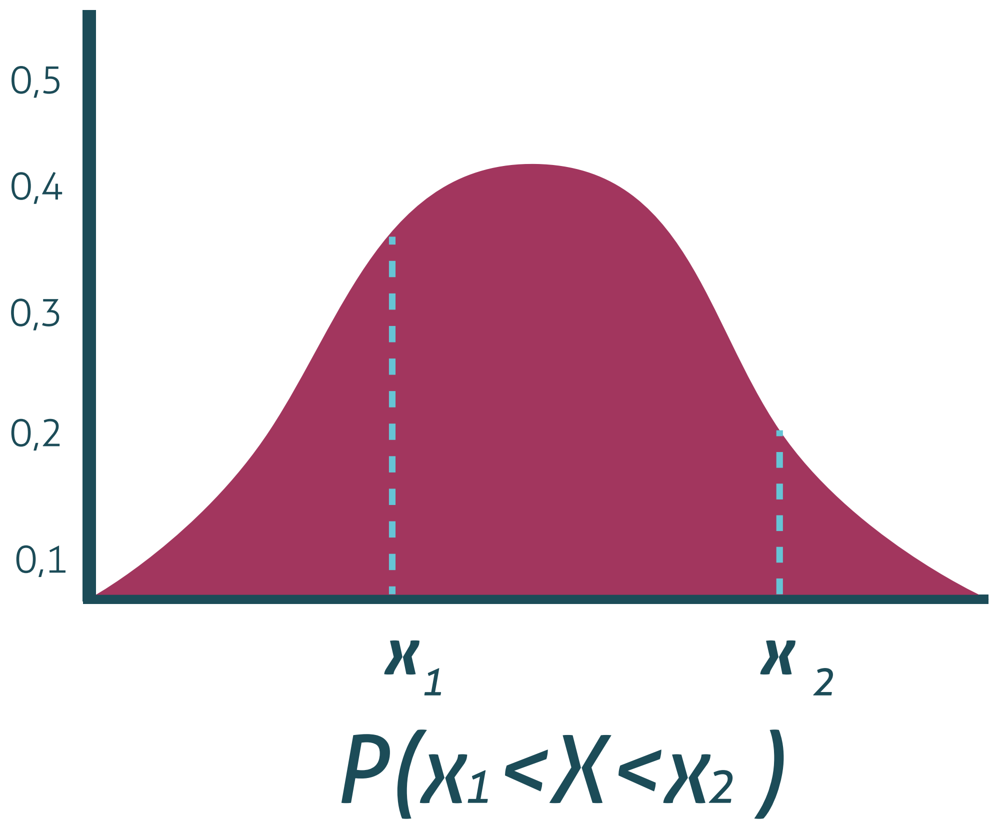

Imagen 4.
Fuente: propia.

Distribución normal estándar y uso de tablas de probabilidad

En este punto vale la pena señalar lo tedioso que resultaría estar realizando cálculos de integrales de la función densidad siempre que se quiera hallar el valor de una probabilidad, razón por la cual cobra importancia el uso de tablas que proporcionan valores de área bajo la curva normal, pero sería intratable la situación de crear tablas para cada uno de los posibles valores de la media y la desviación estándar, por fortuna contamos con la posibilidad de convertir los valores de cualquier variable aleatoria X que obedezca una distribución normal, en una nueva variable aleatoria Z , a la que se le llama variable aleatoria normal estándar, cuya varianza es uno y su media es cero. La transformación se basa en la sustitución siguiente:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Lo anterior significa que el valor de Z asociado a un valor específico de X se halla restando μ del valor x de y dividiendo el resultado por σ. Si necesitamos calcular la probabilidad $P(x_1 < X < x_2)$ de que la variable aleatoria X tome un valor comprendido entre x_1 **y** x_2, tendremos:

$$P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} N(x, \mu, \sigma)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

Con la posibilidad de usar la transformación de la distribución de probabilidad de cualquier variable aleatoria normal en la distribución de probabilidad de la variable aleatoria normal estándar, solo requerimos de una tabla de probabilidades de distribución normal. En la sección recursos para el aprendizaje se encuentra tablas de probabilidades de la distribución normal estándar. Los ejemplos que se muestran a continuación ilustran el uso de esta distribución de probabilidad.

Ejemplo 8.1: sea *X* una variable aleatoria normal con media μ y desviación estándar σ. Hallar la probabilidad de que *X* tome un valor del intervalo [μ-3σ,μ+3σ].

Solución: haciendo uso de la trasformación de estandarización se tiene:

$$para\ x_1 = \mu - 3\sigma;\ z_1 = \frac{\mu - 3\sigma - \mu}{\sigma} = \frac{-3\sigma}{\sigma} = -3$$

$$para\ x_2 = \mu + 3\sigma;\ z_2 = \frac{\mu + 3\sigma - \mu}{\sigma} = \frac{3\sigma}{\sigma} = 3$$

Lo que significa que debemos hallar la probabilidad:

$$P(-3 \leq z \leq 3)$$

La tabla de áreas de la curva normal nos da probabilidades acumuladas $P(Z \leq z)$, por tanto la probabilidad pedida corresponde a:

$$P(-3 \leq z \leq 3) = P(z \leq 3) - P(z \leq -3)$$

El uso de tablas indica que $P(z \leq 3) = 0{,}998650\ y\ P(z \leq -3) = 0{,}001350$ tal como muestran las imágenes 8.5 y 8.6, con lo cual:

$$P(z \leq 3) = 0{,}998650\ y\ P(z \leq -3) = 0{,}001350$$

Lo que indica que el 99,73% están en un rango de valores que va desde tres desviaciones estándar antes de la media, hasta tres desviaciones después de la media. La figura 8.5 ilustra la situación.

Figura 8.5

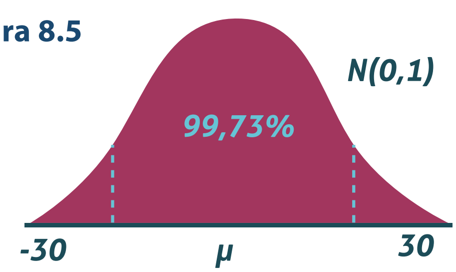

Imagen 5.
Fuente: propia.

Figura 8.6

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.9	0.971283	0.971933	0.972571	0.973197	0.973810	0.974412	0.975002	0.975581	0.976148	0.976705
2.0	0.977250	0.977784	0.978308	0.978822	0.979325	0.979818	0.980301	0.980774	0.981237	0.981691
2.1	0.982136	0.982571	0.982997	0.983414	0.983823	0.984222	0.984614	0.984997	0.985371	0.985738
2.2	0.986097	0.986447	0.986791	0.987126	0.987455	0.987776	0.988089	0.988396	0.988696	0.988989
2.3	0.989276	0.989556	0.989830	0.990097	0.990358	0.990613	0.990863	0.991106	0.991344	0.991576
2.4	0.991802	0.992024	0.992240	0.992451	0.992656	0.992857	0.993053	0.993244	0.993431	0.993613
2.5	0.993790	0.993963	0.994132	0.994297	0.994457	0.994614	0.994766	0.994915	0.995060	0.995201
2.6	0.995339	0.995473	0.995604	0.995731	0.995855	0.995975	0.996093	0.996207	0.996319	0.996427
2.7	0.996533	0.996636	0.996736	0.996833	0.996928	0.997020	0.997110	0.997197	0.997282	0.997365
2.8	0.997445	0.997523	0.997599	0.997673	0.997744	0.997814	0.997882	0.997948	0.998012	0.998074
2.9	0.998134	0.998193	0.998250	0.998305	0.998359	0.998411	0.998462	0.998511	0.998559	0.998605
3.0	0.998650	0.998694	0.998736	0.998777	0.998817	0.998856	0.998893	0.998930	0.998965	0.998999

Imagen 6.
Fuente: propia.

Figura 8.7

Tabla 1: Función de Distribución Normal Estándar

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
-3.0	0.001350	0.001306	0.001264	0.001223	0.001183	0.001144	0.001107	0.001070	0.001035	0.001001
-2.9	0.001866	0.001807	0.001750	0.001695	0.001641	0.001589	0.001538	0.001489	0.001441	0.001395
-2.8	0.002555	0.002477	0.002401	0.002327	0.002256	0.002186	0.002118	0.002052	0.001988	0.001926
-2.7	0.003467	0.003364	0.003264	0.003167	0.003072	0.002980	0.002890	0.002803	0.002718	0.002635
-2.6	0.004661	0.004527	0.004396	0.004269	0.004145	0.004025	0.003907	0.003793	0.003681	0.003573
-2.5	0.006210	0.006037	0.005868	0.005703	0.005543	0.005386	0.005234	0.005085	0.004940	0.004799
-2.4	0.008198	0.007976	0.007760	0.007549	0.007344	0.007143	0.006947	0.006756	0.006569	0.006387
-2.3	0.010724	0.010444	0.010170	0.009903	0.009642	0.009387	0.009137	0.008894	0.008656	0.008424
-2.2	0.013903	0.013553	0.013209	0.012874	0.012545	0.012224	0.011911	0.011604	0.011304	0.011011
-2.1	0.017864	0.017429	0.017003	0.016586	0.016177	0.015778	0.015386	0.015003	0.014629	0.014262
-2.0	0.022750	0.022216	0.021692	0.021178	0.020675	0.020182	0.019699	0.019226	0.018763	0.018309

Imagen 7.
Fuente: propia.

Ejemplo 8.2: en una ciudad se considera que la mayor temperatura a mitad de año (mes de junio), obedece una distribución normal; si el promedio de temperatura es de 23 grados Celsius y la desviación estándar es de 5 grados, hallar la cantidad de días del mes en los que se esperaría alcanzar temperaturas máximas entre 21 y 27 grados.

Solución: tomamos la variable X como la correspondiente a las temperaturas máximas, entonces:

$$para\ x_1 = 21;\ z_1 = \frac{21-23}{5} = \frac{-2}{5} = -0{,}4$$
$$para\ x_2 = 27;\ z_2 = \frac{27-23}{5} = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

Por tanto requerimos hallar:

$$P(-0{,}4 \leq z \leq 0{,}8)$$

Lo que viene dado por:

$$P(-0{,}4 \leq z \leq 0{,}8) = P(z \leq 0{,}8) - P(z \leq -0{,}4)$$

Las tablas muestran que:

$$P(z \leq 0{,}8) = 0{,}788145$$
$$P(z \leq -0{,}4) = 0{,}344578$$

Entonces:

$$P(-0{,}4 \leq z \leq 0{,}8) = 0{,}788145 - 0{,}344578 = 0{,}443567$$

La anterior probabilidad representa aproximadamente el 44% de los días del mes, es decir 13 días.

Ejemplo 8.3: cierto tipo de microorganismo tiene un tiempo de vida promedio de 3 años, con una desviación estándar de medio año. Si esta variable aleatoria que mide el tiempo de vida del microorganismo obedece una distribución normal, hallar la probabilidad de que un microorganismo viva menos de 2,3 años.

Solución:

$$para\ x = 2{,}3;\ z = \frac{2{,}3-3}{0{,}5} = \frac{-0{,}7}{0{,}5} = -1{,}4$$

Lo que significa que la probabilidad:

$$P(z < -1{,}4) = 0{,}080757$$

Ejemplo 8.4: en la fabricación de roscas empleadas en tuberias de conducción de gas, se acepta que el diámetro de las mismas se encuentren en el rango de $3{,}0 \pm 0{,}01$ cm. Es sabido que en el proceso de producción el valor de los diámetros obedece una distribución normal con media 3,0 y desviación estándar 0,005. ¿Cuál será la cantidad promedio de roscas desechadas?

Solución: para que una rosca no sea rechazada su diámetro debe estar entre 2,99 y 3,01 centímetros, lo cual corresponde a los siguientes valores de *Z:*

$$para\ x_1 = 2{,}99;\ z_1 = \frac{2{,}99 - 3}{0{,}005} = -2$$
$$para\ x_2 = 3{,}01;\ z_2 = \frac{3{,}01 - 3}{0{,}005} = 2$$

Por tanto requerimos hallar:

$$P(-2 \leq z \leq 2)$$

Lo que viene dado por:

$$P(-2 \leq z \leq 2) = P(z \leq 2) - P(z \leq -2)$$

Con ayuda de las tablas encontramos que:

$$P(-2 \leq z \leq 2) = 0.977250 - 0{,}022750 = 0{,}9545$$

Lo que significa que la probabilidad de que una rosca sea rechazada es de 1-0,9545=0,455, por tanto, en promedio se rechaza el 4,55% de las roscas fabricadas.

Bibliografia

- Walpole, R. Myers, R. Myers, S. & Ye, K. (s.f.) Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias. Editorial Pearson
- Ortuño, M. & Sanz, L. (2007). Cálculo de Probabilidades. España: editorial Anaya.
- Velez, R. & Hernández, V. (2011). Cálculo de probabilidades Bogotá: UNED.

Esta obra se terminó de editar en el mes de noviembre
Tipografá Myriad Pro 12 puntos
Bogotá D.C,-Colombia.

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina

MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO