Cálculo Integral

Autor: Edgar Palacino Antia

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina
MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Cálculo Integral / Edgar Palacino Antia, / Bogotá D.C., Fundación Universitaria del Área Andina. 2017

978-958-5460-26-3

Catalogación en la fuente Fundación Universitaria del Área Andina (Bogotá).

Edición:
Fondo editorial Areandino
Fundación Universitaria del Área Andina
Calle 71 11-14, Bogotá D.C., Colombia
Tel.: (57-1) 7 42 19 64 ext. 1228
E-mail: publicaciones@areandina.edu.co
http://www.areandina.edu.co

Primera edición: noviembre de 2017

Corrección de estilo, diagramación y edición: Dirección Nacional de Operaciones virtuales
Diseño y compilación electrónica: Dirección Nacional de Investigación

Hecho en Colombia
Made in Colombia

Cálculo Integral

Autor: Edgar Palacino Antia

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina
MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Índice

Índice

1

Unidad 1

Antiderivadas o integrales indefinidas y el problema del área

Cálculo integral

Autor: Edgar Palacino Antia

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina

MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Introducción

En la presente cartilla se introducen elementos básicos para comprender el cálculo relacionado con operaciones sobre integrales, su importancia y aplicaciones. Elementos como el concepto de antiderivada, el problema del área que es clásico para explicar el concepto de integral junto con la aproximación por sumas de Riemann y por último la introducción de la integral definida dan los conceptos base para abordar temas más avanzados en cálculo integral.

Recomendaciones metodológicas

El curso de cálculo integral requiere que se tengan claros los conceptos de cálculo diferencial, de tal manera que antes de abordar el tema es conveniente recordar el significado de la derivada, su interpretación geométrica y su significado como velocidad con que una función cambia al igual que la notación de derivada de una función f(x) como $\frac{dy}{dx}$ adicionalmente la interpretación de los términos *dy* y *dx* como incrementos infinitesimalmente pequeños.

Teniendo en cuenta que el cálculo y en general la matemática nos van dando reglas en cada tema es importante aplicar estas reglas por partes, empezando por lo más simple e irlas practicando para tomar dominio de ellas antes de pasar a los temas siguientes ya que lo complejo está formado por la unión de muchas partes simples pequeñas, debemos manipularlas para apropiarnos de ellas y tomar dominio del rigor matemático. En síntesis se trata de leer cada párrafo, asegurarnos de que se comprende perfectamente, mirar los ejemplos que se dan y practicar por si mismo ejercicios que nos permitan dominar el tema.

Es conveniente repasar los conocimientos algebraicos y el manejo de expresiones racionales al igual que los conocimientos fundamentales de geometría y trigonometría.

Es recomendable para el estudiante seguir con el orden de temas que se emplea tanto en esta cartilla como en las subsecuentes, esto con el fin de asegurar una mayor comprensión de los términos y técnicas básicas del cálculo integral. A medida que se avanza en los temas, los conceptos previamente abordados serán empleados para introducir nuevos términos de mayor complejidad, creando un orden lógico de ideas que permite una comprensión mayor de los temas del curso.

Desarrollo temático

Antiderivadas o integrales indefinidas y el problema del área

Antiderivadas

En el estudio de las matemáticas ha sido necesario definir operaciones sobre los números y consecuentemente también se han definido operaciones inversas, el ejemplo clásico de una operación matemática y su operación inversa es la suma y la resta. Como seguramente lo habrá aprendido antes, todo número real tiene un inverso. Si a un número real a, le sumamos su inverso, representado por –a, el resultado es el cero, que es el elemento idéntico de la adición. Este ejemplo ilustra la importancia de los inversos. La resta se define como una suma ya que esta consiste en tomar un número real y sumarle el inverso de otro. Si sumamos dos números A y B da origen a un tercer numero C, y si tomamos el numero C y le restamos el numero B obtendremos de nuevo el numero A, demostrando que la operación inversa de la suma es la resta. Así mismo existen otras operaciones y operaciones inversas como la multiplicación y la división, exponenciación (elevar a una potencia) y la radicación, logaritmación y antilogaritmación entre otras. Igualmente, el derivar una función genera una función nueva con una serie de propiedades y atributos relacionados con la función original, surge en el cálculo integral un interesante problema y es que dada una determinada función f(x) debemos tratar de deducir cuál es la función que al derivarse da como resultado esta función. A esta operación se le denomina antiderivada y su para comprender su sentido observe los ejemplos:

¿Cuál es la función que al derivarse da como resultado $5x^4$?

Recordemos que para derivar una expresión en la cual la variable independiente está elevada a un exponente entero, se resta uno al exponente y se multiplica el coeficiente por el resultado de esta resta.

Si nos dan la función que se ha derivado como $5x^4$ basta hacer lo contrario: sumar uno al exponente y luego dividir el coeficiente por este resultado:

$$5x^4 \text{ -------- } > 5x^5 / 5 = x^5$$

A la función que hemos hallado se le llama antiderivada. En conclusión:

Para la función $F(x) = 5x^4$ su antiderivada es $f(x) = x^5$

Observación: x^5 no es la única antiderivada de $5x^4$ ya que si derivamos las funciones $5x^4$ + 5, o $5x^4$ -2 también se obtiene la función primitiva x^5. En general cualquier función de la forma $5x^4 + k$, donde k es una constante real, tiene como antiderivada a $5x^4$

Definición de antiderivada

Téngase en cuenta que la expresión $D_xF(x)$ significa “derivada con respecto a x de la función F de x”.

Llamamos a F una antiderivada de f en un intervalo I si $D_xF(x)=f(x)$ en I es decir:

$$\frac{d(F(x))}{dx} = f(x)$$

Es necesario anotar que se usa el termino *una* antiderivada ya que puede existir más de una función que cumpla dicha condición como se verá más adelante.

Ejemplo: hallar la antiderivada de la función:

$$f(x) = 8x^7$$

Solución: para hallar la solución debemos mirar de nuevo el concepto de antiderivada, es decir, necesitamos hallar una función que al ser derivada de origen a la función $8x^7$. Recordando las reglas de la derivación tenemos:

$$\frac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1}$$

Así que debemos hallar un numero n que cumpla dicha condición, al examinar la función derivada vemos que n=8 y n-1=7, entonces la función F es x^8.
Sin embargo también tenemos:

$$\frac{d(x^n + C)}{dx} = nx^{n-1}$$

Siendo C una constante cualquiera, mostrándonos que tenemos una *familia* infinita de funciones que cumple dicha condición.

Ejemplo: hallar la antiderivada de la función:

$$f(x) = x^{12}$$

Retomamos el concepto de antiderivada, es decir, necesitamos hallar una función que al ser derivada de origen a la función en cuestión.

$$\frac{d(x^n + C)}{dx} = nx^{n-1}$$

Así que debemos encontrar un número tal que cumpla las condiciones descritas, la primera idea que viene a mente es que n=13 pero al observar la función que el número que acompaña a la variable es 1, pero si planteamos la función:

$$F(x) = \frac{1}{13}x^{13} + c$$

Su derivada es igual a:

$$\frac{d(F(x))}{dx} = x^{12}$$

Notación para antiderivadas

Al igual que las diversas operaciones empleadas en matemáticas tienen símbolos o notaciones que las identifica, para la operación que consiste en hallar la antiderivada de una función se han empleado dos notaciones: al inicio de los estudios sobre esta operación se empleó la notación A_x en concordancia al uso de D_x para denotar la operación de derivación, sin embargo Leibniz propuso una notación que hoy en día se emplea con amplia mayoría en los textos de cálculo.

$$\int f(x)dx = F(x)$$

Leibniz al introducir su notación también introdujo el nombre de **integral indefinida** como nombre alterno a antiderivada, y al igual que la notación de Leibniz, este nombre es el universalmente adoptado para esta operación.

Teoremas sobre integrales indefinidas

Existen 4 teoremas fundamentales relacionados con las integrales indefinidas y que permiten realizar el cálculo sencillo de ciertas integrales.

Teorema A: regla de la potencia para integrales:

Sea r cualquier racional diferente de -1, entonces se cumple que:

$$\int x^r\,dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C$$

De esta manera se puede hallar la "integral indefinida" de cualquier función que consista cualquier múltiplo de una potencia de x. Nótese que la integral indefinida en realidad significa que el resultado es una familia infinita de funciones. Este resultado es entonces la integral de la función x^r.

Demostración: con el fin de probar que la integral de la función f(x) es de la forma:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

Es suficiente aplicar la derivada (D_x) al resultado de la integral:

$$D_x[F(x) + C] = f(x)$$

Aplicando la derivada en a la integral obtenida para x^r se tiene:

$$D_x\left[\frac{x^{r+1}}{r+1} + C\right] = \frac{1}{r+1}(r+1)x^r = x^r$$

Pregunta: ¿Cuál es la integral si r = 0? , Es decir la integral de x^0?

El caso cuando r=0 el resultado es:

$$\int x^0\,dx = \int 1\,dx = x + C$$

Segundo, debido a que se define un intervalo, se concluye que este teorema es válido solo en los intervalos donde x^r este definido ($r \neq 1$).

Ejemplo: hallar la integral indefinida de:

$$\int x^{4/3} dx$$

Empleando el teorema A se obtiene:

$$\int x^{4/3} dx = \frac{x^{7/3}}{7/3} + C = \frac{3}{7} x^{7/3} + C$$

Teorema B:

$$\int sen(x) dx = -cos(x) + C$$

$$\int cos(x) dx = sen(x) + C$$

Este teorema relaciona las dos entidades fundamentales de la trigonometría y sus integrales indefinidas. Estas identidades, junto con otras identidades trigonométricas son una herramienta poderosa para resolver integrales y serán estudiadas en el apartado de técnicas de integración.

Teorema C: linealidad de la integración:

Sean f y g dos funciones con integrales indefinidas y k una constante, entonces:

i. $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$

ii. $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

iii. $\int [f(x) - g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$

Demostración: para demostrar (i) e (ii) simplemente debemos diferenciar la ecuación:

$$D_x \left[k \int f(x) dx \right] = k D_x \int f(x) dx = k f(x)$$

$$D_x \left[\int f(x) dx + \int g(x) dx \right] = D_x \int f(x) dx + D_x \int g(x) dx = f(x) + g(x)$$

Y la propiedad (iii) se demuestra de manera similar.

Este teorema implica que la integración es una operación lineal, facilitando de esta manera el cálculo de integrales de múltiples términos y sacar términos constante de la integral para facilitar la operación.

Ejemplo: resolver:

$$\int \left(\frac{1}{u^2} + \sqrt{u}\right) du$$

Nota: nótese que en este caso la variable es u, así que es necesario si el símbolo diferencial coincide con la variable a trabajar, en este casi es du, esta comprobación es especialmente crítica cuando se traten los temas relacionados con cálculo multivariado.

$$\int \left(\frac{1}{u^2} + \sqrt{u}\right) du = \int \left(u^{-2} + u^{1/2}\right) du = \int u^{-2} du + \int u^{1/2} du$$

$$= \frac{u^{-1}}{-1} + \frac{u^{3/2}}{3/2} + C = -\frac{1}{u} + \frac{2}{3} u^{3/2} + C$$

Teorema D: regla generalizada de la potencia para integrales:

Sea g una función diferenciable y r un numero raciona diferente de -1. Entonces:

$$\int [g(x)]^r g'(x) dx = \frac{[g(x)]^{r+1}}{r+1} + C$$

Este teorema se basa en la aplicación de la regla de la cadena:

$$D_x\left(\frac{[g(x)^{r+1}]}{r+1}\right) = [g(x)]^r * g'(x)$$

Siendo r un número racional y r≠1.

Este teorema es particularmente práctico al momento de realizar la integración de funciones trigonométricas.

Ejemplo: hallar:

$$\int \sin^{10} x \cos x dx$$

Tomando g(x)=sin(x), entonces g`(x)=cos(x), entonces:

$$\int \sin^{10} x \cos x dx = \int [g(x)]^{10} g'(x) dx = \frac{[g(x)]^{11}}{11} + C$$

$$= \frac{\sin^{11} x}{11} + C$$

El problema del área

El cálculo como rama de la matemática se nutre de sus antecesores, uno de ellos es la geometría. La geometría ha planteado grandes desafíos a los matemáticos de todas las épocas y gracias a esto se han logrado generar grandes avances en las matemáticas. Uno de estos problemas fue cómo se podría calcular la pendiente de la línea tangente en un punto determinado de una curva, llevando al desarrollo de concepto de derivada y por consecuencia el desarrollo del cálculo diferencial. En el caso del cálculo integral esta aproximación se dio por la necesidad de calcular el área bajo una curva determinada, cuyo valor se puede calcular a través de la *integral definida*.

Para los polígonos, hallar su área no es un problema especialmente difícil, dependiendo de las características del polígono se han desarrollado fórmulas a partir de fundamentos geométricos para calcular su área como se puede observar en la imagen 1.

El área de hasta el más sencillo de los polígonos debe satisfacer una serie de propiedades:

- El área de una región plana es un valor (numero) real no negativo.
- El área de un rectángulo es el producto de su longitud por su ancho empleando las mismas unidades de medida y el resultado tiene iguales unidades de medida al cuadrado (cm^2, m^2, ft^2).
- Regiones congruentes tienen iguales áreas.
- El área de la unión de dos regiones que se superpongan solo en un segmento de línea es la suma de las áreas de las dos regiones.
- Si una región es contenida en una segunda región, entonces el área de la primera región es menor o igual a la región de la segunda.

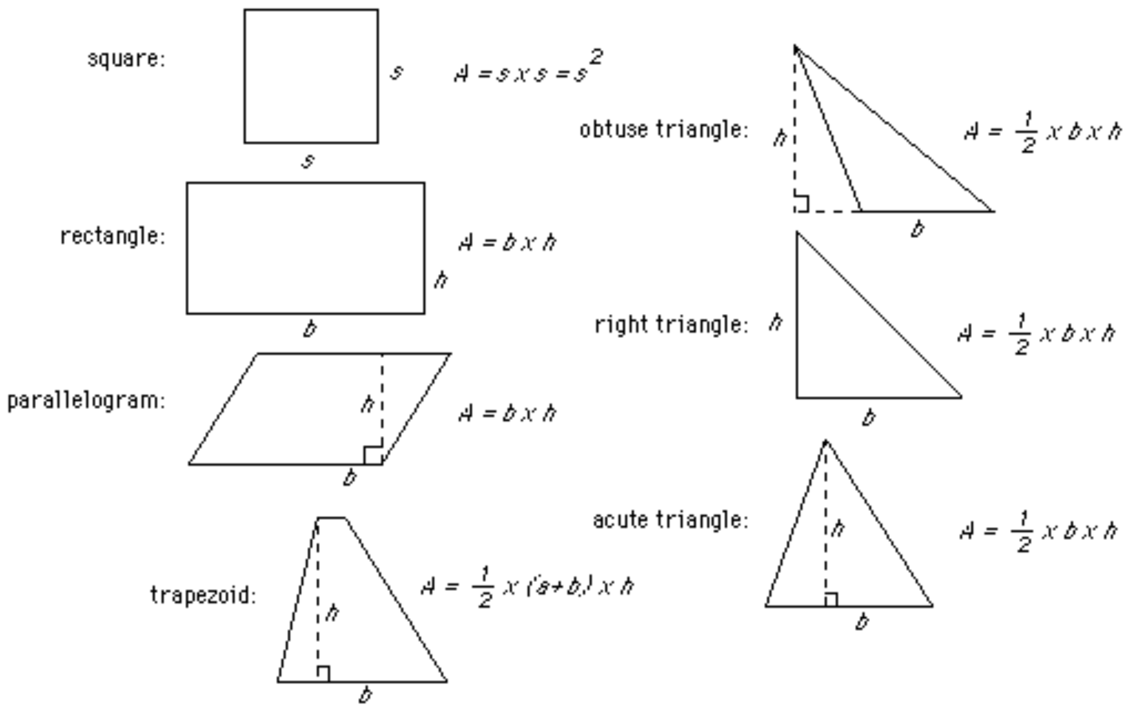


Imagen 1. Fórmulas para hallar el área de diversos polígonos

Fuente: http://mathforum.org/trscavo/geoboards/intro3.html

Sin embargo, el problema del área se torna complejo cuando se habla de regiones con fronteras circulares o curvas. Una primera aproximación la realizo Arquímedes hace más de 2000 años. Su idea consistió en inscribir un polígono con n lados dentro de un circulo con $r = 1$, a medida que el numero de lados aumenta, el área del polígono se acerca cada vez más al área del circulo. Entonces, si $A(F)$ denota el área de una región F, entonces:

$$A(circulo) = \lim_{n \to \infty} A(P_n)$$

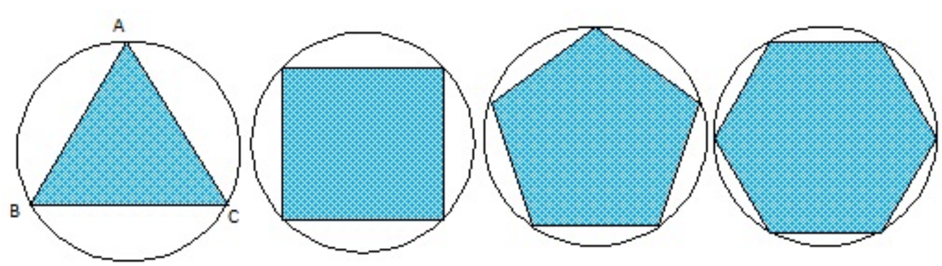


Imagen 2. Polígonos inscritos de 3, 4, 5 y 6 lados

Fuente: http://www.veritasprep.com/blog/wp-content/uploads/2013/07/GeometryPost11Fig3.jpg

Ahora consideremos la región R limitada por la parábola $y = f(x) = x^2$, el eje x y la línea vertical $x = 2$ (ilustración 3) y si nos referimos a R como la región bajo la curva $y = x^2$ entre $x = 0$ y $x = 2$, nuestro objetivo es calcular R.

Una aproximación es realizar la partición del intervalo en el eje x en el intervalo [0,2] en n intervalos cada uno con longitud $\Delta x = 2/n$.

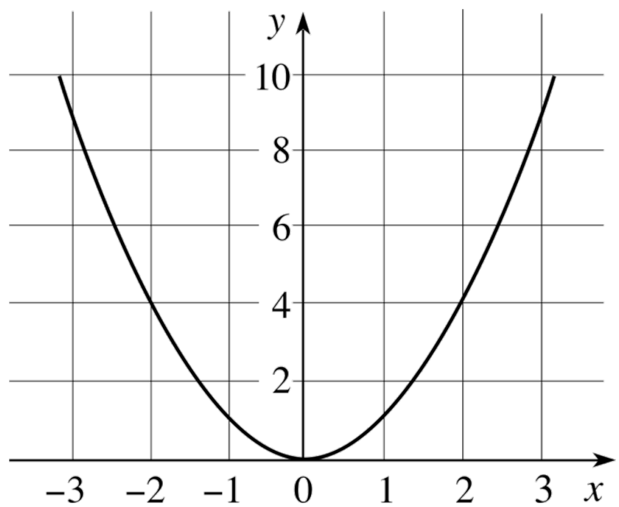


Imagen 2. Función $y = x^2$

Fuente: http://ejemplosde.org/wp-content/uploads/2015/08/x2.png

Considerando un rectángulo típico de base $[x_{i-1}, x_i]$ y altura $f(x_{i-1}) = x_{i-1}^2$. Su área es $f(x_{i-1})\Delta x$. La suma de todos los rectángulos se acercan al área debajo de la curva (ver imagen 4).

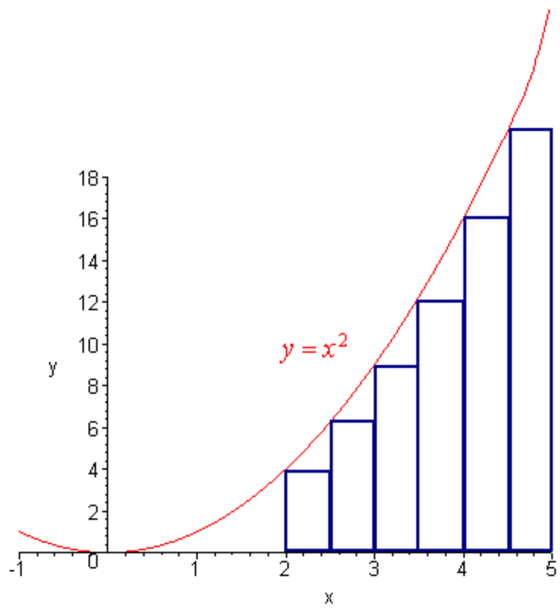


Imagen 3. Rectángulos inscritos en la función $y = x^2$

Fuente: http://ltcconline.net/greenl/courses/105/Antiderivatives/area.h1.gif

El área $A(R_n)$ puede ser calculada de la siguiente manera:

$$A(R_n) = f(x_o)\Delta x + f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\Delta x$$

Teniendo en cuenta que:

$$f(x_i)\Delta x = x_i^2 \Delta x = \left(\frac{2i}{n}\right)^2 * \frac{2}{n} = \left(\frac{2i}{n^3}\right) i^2$$

Entonces:

$$A(R_n) = \left[\left(\frac{8}{n^3}\right)(0^2) + \left(\frac{8}{n^3}\right)(1^2) + \left(\frac{8}{n^3}\right)(2^2) + \cdots + \left(\frac{8}{n^3}\right)(n-1)^2\right]$$

$$= \frac{8}{n^3}[1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2]$$

El término entre paréntesis cuadrados puede ser reemplazado por la fórmula de la sumatoria de i^2 si se reemplaza $n = n - 1$:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Reemplazando:

$$= \frac{8}{n^3}\left[\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\right]$$

Eliminando paréntesis internos:

$$= \frac{8}{6}\left[\frac{2n^3 - 3n^2 + n}{n^3}\right]$$

Resolviendo la división y eliminando el paréntesis:

$$= \frac{4}{3}\left(2 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$$

$$= \frac{8}{3} - \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}$$

Si tomamos el límite cuando n tiende a infinito:

$$A(R) = \lim_{n\to\infty} A(R_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{8}{3} - \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}\right) = \frac{8}{3}$$

Entre más pequeño sea el rectángulo, al sumar todos los rectángulos el área obtenida se obtiene una aproximación muy cercana al área en cuestión.

También se puede hacer una aproximación con polígonos circunscritos, pero su deducción se deja al estudiante como ejercicio.

Sumas de Riemann

Las sumas de Riemann es una técnica desarrollada por el matemático Bernhard Riemann (1826 - 1866) para calcular el área de regiones irregulares trazando un número finito de rectángulos, calculando sus áreas y sumándolas. Esta técnica es una aproximación numérica al problema del área pero tiene como desventaja un gran margen de error.

Consideremos una función f definido en un intervalo cerrado $[a, b]$. Puede tener tanto valores como positivos como negativos en el intervalo y no necesariamente continua.

Considerando una partición P del intervalo $[a, b]$ en n subintervalos (no necesariamente de igual longitud) por medio de puntos $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ y sea $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. En cada uno de los subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$, tomar un punto arbitrario $\overline{x_i}$; este punto lo llamaremos *punto de muestra*.

Si aplicamos una sumatoria queda:

$$R_p = \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i})\Delta x_i$$

Podemos llamar a R_p **suma de Riemann** de f correspondiente a la partición P.

Ejemplo: evaluar la suma de Riemann R_p para:

$$f(x) = (x+1)(x-2)(x-4) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8$$

En el intervalo [0,5] usando la partición *P* con puntos de partición 0<1.1<2<3.2<4<5 y los correspondientes puntos de muestra $\overline{x_1} = 0.5, \overline{x_2} = 1.5, \overline{x_3} = 2.5, \overline{x_4} = 3.6, \overline{x_5} = 5$.

Tomando la definición de suma de Riemann:

$$R_p = \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i})\Delta x_i$$

$$= f(\overline{x_i})\Delta x_1 + f(\overline{x_2})\Delta x_2 + f(\overline{x_3})\Delta x_3 + f(\overline{x_4})\Delta x_4 + f(\overline{x_5})\Delta x_5$$

$$= f(0.5)(1.1-0) + f(1.5)(2-1.1) + f(2.5)(3.2-2) + f(3.6)(4-3.2) + f(5)(5-4)$$

$$= (7.875)(1.1) + 3.125)(0.9) + (-2.625)(1.2) + (-2.944)(0.8) + 18(1)$$

$$= 23.9698$$

Ejemplo: evaluar la suma de Riemann R_p para:

$$f(x) = x^2 + 2$$

Empleando 8 puntos de partición en el intervalo $[-2, 2]$

Calculando el tamaño de cada partición tomando el tamaño del intervalo y dividiéndolo en el número de particiones a emplear.

$$\Delta x_i = \frac{2-(-2)}{8} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

Entonces los puntos medios de la partición queda:

$$-1.75 < -1.25 < -0.75 < -0.25 < 0.25 < 0.75 < 1.25 < 1.75$$

Aplicando la fórmula de sumas de Riemann:

$$R_p = \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i})\Delta x_i$$

$$= \sum_{i=1}^{8} f(\overline{x_i})\Delta x_i$$
$$= \big(f(-1.75) + f(-1.25) + f(-0.25) + f(0.25) + f(0.75) + f(1.25) + f(1.75)\big) * 0.5$$

Evaluando la función $f(x) = x^2 + 2$ se obtiene:

$$R_p = [(5.062) + (3.562) + (2.562) + (2.062) + (2.062) + (2.532) + (3.562) + (5.062)] * 0.5$$

$$R_p = 13.25$$

La antiderivada de la función $f(x) = x^2 + 2$ es $F(x) = \frac{x^3}{3} + 2x$ y si se evalúa la antiderivada en el intervalo se obtiene:

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + 2x\Big|_{-2}^{2} = \frac{2^3}{3} + 2(2) - \frac{(-2)^3}{3} + 2(-2) = \left(\frac{8}{3} + 4\right) - \left(-\frac{8}{3} - 4\right) = \frac{16}{3} + 8$$
$$= 13.33$$

Como se puede observar, la aproximación que se obtiene al utilizar las sumas de Riemann es muy cercana al valor real de la antiderivada evaluada en los extremos del intervalo donde se desea evaluar la suma de Riemann, y a medida que aumentamos el número de particiones, este valor se aproximara al valor de la antiderivada.

Los anteriores conceptos unidos pueden ser extrapolados para crear la definición de integral definida, la cual será abordada en la siguiente semana del curso.

1 Unidad 1

Teorema fundamental del cálculo y la integral definida

Cálculo integral

Autor: Edgar Palacino Antia

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina
MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Introducción

En la presente cartilla se introducen elementos básicos para comprender el cálculo relacionado con operaciones de integración. Elementos como el concepto de antiderivada, el problema del área que es clásico para explicar el concepto de integral junto con la aproximación por sumas de Riemann y por último la introducción de la integral definida dan los conceptos base para abordar temas más avanzados en cálculo integral.

Recomendaciones metodológicas

Es recomendable para el estudiante seguir con el orden de temas que se emplea tanto en esta cartilla como en las subsecuentes, esto con el fin de asegurar una mayor comprensión de los términos y técnicas básicas del cálculo integral. A medida que se avanza en los temas, los conceptos previamente abordados serán empleados para introducir nuevos términos de mayor complejidad, creando un orden lógico de ideas que permite una comprensión mayor de los temas del curso.

Desarrollo temático

Teorema fundamental del cálculo y la integral definida

Integral definida

Considerando el problema del área y la aproximación a través de las sumas de Riemann ahora podemos definir lo que es una integral definida.

Supongamos que $P, \Delta x_i\ y\ \overline{x_i}$ tienen las mismas definiciones que en las sumas de Riemann y también definimos $|P|$ como la **norma** de *P*, denota la longitud del más largo de los subintervalos de la partición *P*.

Definición

Sean f una función que es definida en el intervalo cerrado [a, b], si:

$$\lim_{|p|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i})\Delta x_i$$

Existe, se puede decir que f es integrable en [a, b]. Más aun, $\int_a^b f(x)dx$, es llamada la integral definida (o integral de Riemann) de f de a hasta b, definida como:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|p|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i})\Delta x_i$$

Este concepto es más general que las definiciones anteriormente dadas porque se permite que la función a integrar pueda tener valores negativos en el rango definido y en general $\int_a^b f(x)dx$ define a la región confinada entre la función $f(x)$ y el eje x en el intervalo $[a, b]$.

Teorema de integrabilidad

Si f es una función limitada en $[a, b]$ y si es continua allí excepto en un numero finito de números, entonces f es integrable en $[a, b]$. Particularmente, si f es continua en todo el intervalo $[a, b]$, entonces es integrable en $[a, b]$.

Como consecuencia de este teorema, las siguientes funciones son integrables en cada intervalo cerrado $[a, b]$.

- Funciones polinomiales.
- Funciones seno y coseno.
- Funciones racionales, teniendo en cuenta que el intervalo $[a, b]$ no contiene puntos donde el denominador sea 0.

Teorema fundamental del cálculo

El Teorema fundamental del cálculo brinda un método más sencillo para calcular integrales definidas, sin necesidad de tener que calcular los límites de las sumas de Riemann. Dicho teorema unifica los conceptos de la derivación e integración, mostrando que ambos procesos son mutuamente inversos como ya se había mencionado con anterioridad.

Definición

Sea f una función integrable en el intervalo [a, b] con las siguientes características:

- Sea continua en [a, b].
- En cualquier punto c que este en el intervalo [a, b] la función F es derivable en dicho punto y F´(c) = f(c).

Entonces teniendo en cuenta la siguiente definición:

$$\frac{d(F(x))}{dx} = f(x)$$

Para un punto c:

$$\frac{d(F(c))}{dx} = f(c)$$

Y se cumple que:

$$\frac{d(F(a))}{dx} = f(a) < \frac{d(F(c))}{dx} = f(c) < \frac{d(F(b))}{dx} = f(b)$$

Es decir, que la derivada de la integral de cualquier punto c está entre las derivadas de los puntos extremos del intervalo, mostrando que la derivada de la integral es la misma función que al ser integrada genera la función $f(x)$.

En conclusión:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Demostración

Sea $P: a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ sean una partición del intervalo $[a, b]$. Entonces podemos reagrupar de la siguiente forma:

$$F(b) - F(a) = F(x_n) - F(x_{n-1}) + F(x_{n-1}) - F(x_{n-2}) + \cdots + F(x_i) - F(x_0)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - F(x_{i-1})]$$

Empleando el teorema del valor medio para derivadas (el cual se estudio en el curso de cálculo integral) aplicado a F en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$,

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\overline{x_i})(x_i - x_{i-1}) = f(\overline{x_i})\Delta x_i$$

Si escogemos un $\overline{x_i}$ en el intervalo abierto (x_{i-1}, x_i).

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i})\Delta x_i$$

En el lado izquierdo tenemos una constante; en el derecho tenemos una suma de Riemann para f en $[a, b]$. Si tomamos límite a ambos lados cuando $|P| \to 0$, obtenemos:

$$F(b) - F(a) = \lim_{|P| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i})\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

Ejemplo: demostrar que: $\int_a^b k dx = k(b-a)$, siendo k una constante.

Recordando que $F(x) = kx$ es una antiderivada o integral indefinida de $f(x) = k$. Entonces, por el teorema fundamental del cálculo,

$$\int_a^b k dx = F(b) - F(a) = kb - ka) = k(b-a)$$

Ejemplo: mostrar que si r es un número racional diferente de -1, **entonces:**

$$\int_a^b x^r dx = \frac{b^{r+1}}{r+1} - \frac{a^{r+1}}{r+1}$$

Recordando que $F(x) = x^{r+1}/(r+1)$ es una integral indefinida de la función $f(x) = x^r$. Entonces, por el teorema fundamental del cálculo.

$$\int_a^b x^r dx = F(b) - F(a) = \frac{b^{r+1}}{r+1} - \frac{a^{r+1}}{r+1}$$

Ejemplo: evaluar: $\boldsymbol{\int_{-1}^{2}(4x - 6x^2)dx}$

$$\int_{-1}^{2}(4x - 6x^2)dx = [2x^2 - 2x^3]_{-1}^{2}$$

$$= (8 - 16) - (2 + 2) = -12$$

Propiedades de la integral definida

La integral definida, al igual que la indefinida, tiene unas propiedades determinadas que facilita el cálculo de integrales de funciones complejas y que también facilita su interacción con otras operaciones matemáticas.

Linealidad de la integral definida

Suponga que f y g son dos funciones integrables en el intervalo $[a, b]$ y k es una constante. Entonces kf y $f + g$ también son integrables y:

i. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx.$
ii. $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ y subsecuentemente.
iii. $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx.$

Demostración

La demostración de las anteriores propiedades depende de la propiedad de linearilidad de las sumatorias y las propiedades de los límites.

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} [f(\overline{x_i}) + g(\overline{x_i})]\Delta x_i$$

$$= \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} [f(\overline{x_i})\Delta x_i + g(\overline{x_i})\Delta x_i]$$

$$= \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i})\Delta x_i + \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} g(\overline{x_i})\Delta x_i$$

$$= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

La tercera propiedad tiene una demostración similar simplemente escribiendo $f(x) - g(x)$ como $f(x) + (-1)g(x)$.

Ejemplo: evaluar: $\int_{-1}^{2}(4x - 6x^2)dx$

Este es el mismo ejemplo 2.3, pero lo podemos evaluar empleando las propiedades de linealidad de la integral definida la podemos evaluar de la siguiente forma:

$$\int_{-1}^{2}(4x - 6x^2)dx = 4\int_{-1}^{2} 4xdx - \int_{-1}^{2} 6x^2dx$$

$$= 4\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{2} - 6\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2}$$

$$= 4\left[\frac{4}{2} - \frac{1}{2}\right]_{-1}^{2} - 6\left[\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right]_{-1}^{2} = -12$$

Propiedad de adición de intervalos

Si f es integrable en un intervalo [a, c] donde b sea un punto intermedio, entonces:

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

Propiedad comparativa

Si f y g son integrables en $[a, b]$ y si $f(x) \leq g(x)$ para todo x en $[a, b]$, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

Comprobación

Sea $P: a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ sean una partición del intervalo $[a, b]$, y para cada i existe un $\overline{x_i}$ que es un punto en el ith subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ podemos concluir que:

$$f(\bar{x}_i) \leq g(\bar{x}_i)$$

$$f(\bar{x}_i)\Delta x \leq g(\bar{x}_i)\Delta x$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} g(\bar{x}_i)\Delta x_i$$

$$\lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i \leq \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} g(\bar{x}_i)\Delta x_i$$

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

Este teorema es especialmente útil al momento de estimar el valor de una integral con respecto a otra integral. Esto también se puede deducir desde el problema del área, ya que si el área por debajo de la curva de la función $f(x)$ es menor que el área por debajo de la curva $g(x)$, entonces se mantiene la desigualdad al realizar las respectivas integraciones.

Propiedad de acotación

Si $f(x)$ es integrable en $[a, b]$ y si $m \leq f(x) \leq M$ para todo x en $[a, b]$, entonces:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

Demostración

Para demostrar esta desigualdad se puede emplear la propiedad comparativa. Sea $g(x)dx = M$ para todo x en $[a, b]$, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

Sin embargo:

$$\int_a^b g(x)dx = \int_a^b Mdx = [Mx]_a^b = M(b-a)$$

Para el término de la izquierda se puede realizar la misma demostración.

Diferenciación de una integral definida

Como ya estudiamos en el apartado del teorema fundamental del cálculo, las operaciones derivación e integración son operaciones inversas, sin embargo, al momento de tratar con una integral definida, surge una variante de este teorema fundamental, la cual es de suma importancia, tanta que algunos autores lo llegan a considerar como el segundo teorema fundamental del cálculo.

Para enunciarlo debemos de tener en cuenta las siguientes condiciones:

f Es una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y x es la variable que representa el valor de la función en algún punto del intervalo cerrado. Entonces:

$$D_x\left[\int_a^x f(x)dx\right] = f(x)$$

En palabras coloquiales se puede interpretar de la siguiente manera.

“La derivada de una integral definida con respecto a su límite superior es el integrando evaluado en el valor del límite superior”.

A continuación veremos la demostración de esta propiedad.

Demostración

Si asumimos una función $G'(x) = \int_a^x f(t)dt$ (empleando t como variable de cambio) debemos demostrar que:

$$G'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{G(x+h) - G(x)}{h} = f(x)$$

Reordenando y reemplazando:

$$G(x+h) - G(x) = \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt$$

Aplicando la propiedad de adición de intervalos visto anteriormente:

$$\int_x^{x+h} f(t)dt$$

Si asumimos que $h > 0$ y a su vez asumimos que m y M sean los valores mínimos y máximos de f en el intervalo $[x, x+h]$ y aplicamos la propiedad de acotación.

$$mh \leq \int_x^{x+h} f(t)dt \leq Mh$$

Regresando a la función original:

$$mh \leq G(x+h) - G(x) \leq Mh$$

Dividiendo todos los términos en h:

$$m \leq \frac{G(x+h) - G(x)}{h} \leq M$$

Como asumimos que $G(x)$ es una función continua en el intervalo, al hacer que $h \to 0$ el valor de $f(x)$ es aproximado por los valores de $m\ y\ M$, así que empleando el teorema del sándwich (visto en cálculo derivado).

$$\lim_{h \to 0} \frac{G(x+h) - G(x)}{h} = f(x)$$

Ejemplo: determinar: $D_x\left[\int_5^x \frac{1}{2}(sen^2 2t)dt\right]$

Empleando la propiedad de diferenciación de una integral definida tenemos:

$$D_x\left[\int_5^x \frac{1}{2}(sen^2 2t)dt\right] = \frac{1}{2}(sen^2 2x)dx$$

Se puede observar que simplemente cambiamos la variable t por x, la cual es la variable que se encuentra en el límite superior de la integral.

Ejemplo: determinar: $D_x\left[\int_x^8 (\tan u \csc u)du\right]$

Aquí podemos ver que x no se encuentra en el límite superior de la integral, pero esto se manejar de la siguiente manera:

$$D_x\left[\int_x^8 (\tan u \csc u)du\right] = D_x\left[-\int_8^x (\tan u \csc u)du\right]$$

Como podemos escribir el signo negativo como -1 y teniendo en cuenta la propiedad de linealidad de la integral (y su similar en la derivación) obtenemos:

$$-D_x\left[\int_8^x (\tan u \operatorname{cosec} u)du\right] = -\tan x \operatorname{cosec} x$$

Ejemplo: determinar: $D_x\left[\int_0^{x^2} \sqrt{t}dt\right]$

Este ejemplo es interesante pues el límite superior es x^2 y no x, sin embargo la resolución de este problema no representa mayor problema si aplicamos la regla de la cadena de la siguiente forma:

Creamos una variable alternativa $b = x^2$ y la reemplazamos en el integrando:

$$\int_0^b \sqrt{t}dt$$

$$D_b\left[\int_0^b \sqrt{t}dt\right].D_x b$$

Aplicando la propiedad de diferenciación de una integral definida obtenemos:

$$\int_0^b \sqrt{t}dt\,.\,D_x b = (\sqrt{b})(2x) = (\sqrt{x})(2x) = 2x^{3/2}$$

Teorema del valor medio

Una función f adopta una serie de valores a lo largo de un intervalo cerrado $[a, b]$, y en algún punto la función tomara un valor c el cual es el valor promedio de la función. Este teorema ayuda a calcular dicho valor de manera más sencilla sin tener que calcular el valor de la función punto a punto y posteriormente hacer el cómputo del promedio de dichos valores.

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

Sin embargo esta forma puede ser confusa y generalmente se transforma en:

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{(b-a)} = f(c)$$

Demostración

Asumimos una función $G(x) = \int_a^x f(t)dt$ con valores de x tales que $a \leq x \leq b$

Aplicando el teorema del valor medio tenemos:

$$G(b) - G(a) = G'(c)(b-a)$$

$$\int_a^b f(x)dx = G'(c)(b-a)$$

Empleando la propiedad de diferenciación de una integral definida:

$$G'(c) = f(c)$$

Y despejando $f(c)$:

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(t)dt}{(b-a)}$$

Evaluación de integrales definidas

La evaluación de integrales es uno de los objetivos principales que se tiene al estudiar cálculo integral. Empleando los teoremas ya vistos y otras propiedades provenientes del cálculo diferencial y del algebra podemos determinar o bien la integral indefinida o el valor de la integral definida. En esta sección veremos diversas técnicas y aproximaciones para lograr este cometido

Tablas de integrales

En diversos textos de cálculo encontraremos bien en sus páginas interiores o en las solapas del libro, una extensa lista de derivadas inmediatas o tablas de integrales que permite hallar de manera directa alguna integral o, a través de las técnicas que se abordaran con posterioridad, evaluar integrales de mayor complejidad. A continuación se reproduce una lista de integrales básica para que el estudiante se familiarice con ella y se insta al estudiante a comprobar dichas integrales y a expandir esta tabla de integrales a través de la consulta de otros textos de cálculo.

1. $\int \frac{d}{dx}[f(x)]dx = f(x) + C$
2. $\int (u+v)dx = \int udx + \int vdx$
3. $\int x^m\, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$
4. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$
5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ con\ a > 0\ y\ a \neq 1$
6. $\int e^x dx = e^x + C$
7. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$
8. $\int \cos x\, dx = \sin x + C$
9. $\int \tan x\, dx = \ln|\sec u| + C$
10. $\int \cot x\, dx = \ln|\operatorname{sen} u| + C$
11. $\int Sec\ x\ dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$
12. $\int \csc x\, dx = \ln|\csc x + \cot x| + C$
13. $\int sec^2 x\ dx = \tan x + C$
14. $\int csc^2 x\ dx = -\cot \mathrm{x} + C$
15. $\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + C$
16. $\int \csc x \cot x\ \ dx = -\csc x + C$

En secciones posteriores veremos algunas integrales inmediatas más, en especial que involucran funciones trigonométricas.

Regla de sustitución para integrales

En ocasiones nos encontraremos integrales las cuales no podemos evaluar de manera directa empleando las propiedades ya mencionadas y los conocimientos propios de cálculo diferencial. Para estos casos existen ciertas técnicas que permiten hallar la integral y/o calcular el valor de la integral definida.

La regla de la sustitución es una de las herramientas más poderosas que posee el cálculo integral. Primero definiremos la regla de sustitución para el caso de las integrales indefinidas.

Sea g una función diferenciable y suponga que F es una antiderivada de f. Entonces si hacemos la sustitución $u = g(x)$.

$$\int f\big(g(x)\big)g'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + C = F\big(g(x)\big) + C$$

Ejemplo: determinar: $\int 3x^2 \sin x^3 \, dx$

Si escogemos la función $g = x^3$ tendremos que hallar su respectiva derivada $g'(x) = 3x^2$, reemplazando:

$$\int 3x^2 \sin x^3 \, dx = \int \sin g \, dg = -\cos g + C$$

Retornando a la variable original la integral queda:

$$= -\cos g + C = -\cos x^3 + C$$

Ejemplo: determinar: $\int \sqrt{5x-3}\,dx$

Si escogemos la función $g = 5x - 3$ entonces $g'(x) = 5$.

Como la función original a integrar no cuenta con 5 fuera del símbolo de radical, podemos solventar esta situación multiplicando y dividiendo en 5.

$$\int \sqrt{5x-3}\,dx = \frac{1}{5}\int \sqrt{5x-3}\;5dx = \frac{1}{5}\int \sqrt{g}dg$$

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{g^{1/2+1}}{\frac{1}{2}+1}\right) + C = \frac{1}{5}\left(\frac{g^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right) + C = \frac{2}{15}\left(g^{\frac{3}{2}}\right) + C$$

$$= \frac{2}{15}\sqrt{g^3} + C = \frac{2}{15}\sqrt{(5x-3)^3} + C$$

Cuando tenemos la necesidad de encontrar la integral definida de una función en un intervalo determinado la regla de la sustitución adopta la siguiente forma:

$$\int_a^b f\big(g(x)\big)g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

Esto se deriva del hecho que se puede evaluar la función $g(x)$ en los puntos extremos del intervalo para obtener los nuevos intervalos para la función que empleamos para sustituir.

Ejemplo: evaluar: $\int_0^2 \frac{x\,dx}{(3x^2-4)^4}$

Escogiendo $g(x) = 3x^2 - 4$ tenemos $g'(x) = 6x\,dx$

$$\int_0^2 \frac{x\,dx}{(3x^2-4)^4} = \frac{1}{6}\int_0^2 \frac{6x\,dx}{(3x^2-4)^4} = \frac{1}{6}\int_{-4}^8 \frac{dg}{g^4}$$

$$= \frac{1}{6}\int_{-4}^8 \frac{dg}{g^4} = \frac{1}{6}\left[\frac{u^{-3}}{-3}\right]_{-4}^8 = \frac{1}{6}\left[\frac{8^{-3}}{-3} - \frac{(-4)^{-3}}{-3}\right]$$

Ejemplo: evaluar: $\int_0^1 e^{3x}\,(1-e^{3x})^2 dx$

Escogemos como $g(x) = 1 - e^{3x}$ entonces $g'(x) = -e^{3x}dx$

$$\int_0^1 e^{3x}\,(1-e^{3x})^2 dx = -\frac{1}{3}\int_0^1 -e^{3x}\,(1-e^{3x})^2 dx$$

$$= -\frac{1}{3}\int_1^e g^2\,dg = -\frac{1}{3}\left[\frac{g^3}{3}\right]_1^e = -\frac{1}{3}\left[\frac{e^3}{3} - \frac{1}{3}\right] = \frac{1-e^3}{9}$$

Se debe notar que al momento de realizar el cambio de variable, también cambia los límites de la integral y no es necesario regresar a la variable original para evaluar la integral.

Unidad 2

Integración por partes, Integrales trigonométricas y sustituciones trigonométricas

Cálculo integral

Autor: Edgar Palacino Antia

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina
MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Introducción

En esta tercera semana iniciaremos el estudio de diversas técnicas de integración que se han desarrollado a lo largo de los últimos siglos. Dependiendo de la naturaleza del integrando se pueden aplicar una o más técnicas de integración obteniéndose el mismo resultado, o en casos extraordinarios, aplicar varias técnicas de integración conjugadas con el fin de poder resolver la integral.

Recomendaciones metodológicas

Se recomienda a los estudiantes el estudio detenido de la cartilla y de los ejemplos que se consignan en ella, además de visualizar las video capsulas y el uso de las lecturas adicionales para nutrirse con mayor información. Por último, es aconsejable que el estudiante resuelva los ejercicios propuestos como actividad de repaso para evaluar su avance en el aprendizaje e identificar dificultades en el mismo.

Desarrollo temático

Integración por partes, Integrales trigonométricas y sustituciones trigonométricas

Integración por partes

La técnica de integración por partes es una forma avanzada de la técnica de integración por sustitución y se deriva de la regla de diferenciación de un producto.

$$D'_x[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + f'(x)gx$$

Si aplicamos la operación de integración a ambos lados de la igualdad:

$$\int D'_x[f(x)g(x)]\,dx = \int f(x)g'(x)dx + \int f'(x)g(x)dx$$

Empleando el teorema fundamental del cálculo en el término izquierdo y reorganizando obtenemos:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

Usualmente en los textos de cálculo se emplea una notación más sencilla para recordar de manera rápida, si $f(x) = u$ y $g(x) = v$ la anterior fórmula queda:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

En el caso de tener una integral definida:

$$\int_a^b udv = [uv]_a^b - \int_a^b vdu$$

Ejemplo: determinar $\int x\ sinx\ dx$

Sea $u = x$ y $dv = dx\sin x$ entonces $du = dx$ y $v = -\cos x$

Aplicando la fórmula tenemos:

$$\int x\sin x\,dx = x(-\cos x) - \int (-\cos x)\,dx$$

$$= -x\cos x + \sin x + C$$

Ejemplo: determinar $\int x^2 e^x dx$

En este ejemplo tenemos la ventaja que al diferenciar x^2 se simplifica su potencia, así que podemos utilizar esta situación:

Sea $u = x^2$y $dv = e^x dx$ entonces $du = 2xdx$ y $v = e^x$

Aplicando la fórmula de integración por partes:

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2\int xe^x dx$$

La integral del lado derecho, a pesar de ser más sencilla que la original, aun no se puede calcular de manera directa, sin embargo es susceptible de aplicar por segunda vez integración por partes.

Sea $u = x$ y $dv = e^x dx$ entonces $du = dx$ y $v = e^x$

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2\left(xe^x - \int e^x dx\right)$$

$$= x^2 e^x - 2(xe^x - e^x + C)$$

$$= x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x - 2C$$

Ejemplo: determinar $\int x\sqrt{(1+x)}dx$

Sea $u = x$ y $dv = \sqrt{(1+x)}dx$ entonces $du = dx$ y $v = \frac{2}{3}(1+x)^{3/2}$

Aplicando la fórmula de integración por partes:

$$\int x\sqrt{(1+x)}dx = \frac{2}{3}x(1+x)^{3/2} - \frac{2}{3}\int (1+x)^{3/2}\, dx$$

$$= \frac{2}{3}x(1+x)^{3/2} - \frac{2}{3}\left(\frac{2}{5}(1+x)^{5/2}\right)$$

$$= \frac{2}{3}x(1+x)^{3/2} - \frac{4}{15}(1+x)^{5/2} + C$$

Ejemplo: determinar$\int_1^2 \ln x\, dx$

Sea $u = \ln x$ y $dv = dx$ entonces $du = \left(\frac{1}{x}\right)dx$ y $v = x$

Aplicando la fórmula de integración por partes:

$$\int_1^2 \ln x \, dx = [x \ln x]_1^2 - \int_1^2 x \frac{1}{x} dx$$

$$= [x \ln x]_1^2 - \int_1^2 dx = 2 \ln 2 - 1$$

Ejemplo: calcular $\int sin^2 x \, dx$

Sea $u = \sin x$ y $dv = \sin x \, dx$ entonces $du = \cos x \, dx$ y $v = -\cos x$

Aplicando la fórmula de integración por partes:

$$\int sin^2 x \, dx = -\sin x \cos x + \int \cos^2 x \, dx$$

La integral del lado derecho tenemos nuevamente una función trigonométrica elevada al cuadrado, empleando la identidad trigonométrica $\sin^2 x + cos^2 x = 1$

$$\int sin^2 x \, dx = -\sin x \cos x + \int (1 - \ sin^2 x) \, dx$$

Empleando la propiedad de linearilidad de la integración nos queda:

$$\int sin^2 x \, dx = -\sin x \cos x + x - \int sin^2 x \, dx + C$$

Si tomamos la integral del lado derecho y la pasamos al lado izquierdo obtenemos:

$$2 \int sin^2 x \, dx = -\sin x \cos x + \ x + C$$

$$\int sin^2 x \, dx = -\frac{1}{2} \sin x \cos x + \frac{1}{2} x + \frac{C}{2} = \frac{1}{2} x \ - \frac{1}{2} \sin x \cos x + C$$

Ejemplo: calcular $\int \arcsin x \, dx$

Sea $u = \arcsin x$ y $dv = dx$ entonces $du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ dx$ y $v = x$

Aplicando la fórmula de integración por partes:

$$\int \arcsin x\, dx = x \arcsin x - \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

$$= x \arcsin x + \frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)dx$$

$$= x \arcsin x + \frac{1}{2} 2(1-x^2)^{1/2} + C$$

$$= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$$

Integrales trigonométricas

Las funciones trigonométricas son pieza esencial en la matemática moderna, por lo tanto su comportamiento frente a operaciones como la derivación e integración es de especial interés. Ya se han mostrado estrategias que pueden resolver integrales que contienen funciones trigonométricas, pero en este apartado veremos técnicas específicas para la resolución de integrales con funciones trigonométricas elevadas a diversas potencias y combinadas.

Para evaluar las integrales de funciones trigonométricas elevadas a potencias y de ángulo múltiple debemos tener en cuenta las siguientes identidades.

Identidades pitagóricas:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$1 + tan^2 x = sec^2 x$$

$$1 + cot^2 x = csc^2 x$$

Identidades de medio ángulo:

$$\sin^2 x = \frac{1 - cos2\, x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + cos2\, x}{2}$$

Identidades del producto de ángulos:

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}[\sin(\mathrm{m}+\mathrm{n})\mathrm{x} + \sin(\mathrm{m}-\mathrm{n})\mathrm{x}]$$

$$\sin mx \sin nx = -\frac{1}{2}[\cos(m+n)x - \cos(m-n)x]$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x]$$

Integrales de la forma $\int \boldsymbol{sin^n\, x\, dx}$, $\int \boldsymbol{cos^n\, x\, dx}$

Si n es impar el primer paso para resolver la integral es separar la función en una potencia par multiplicada por la función trigonométrica y la función con potencia par se puede reemplazar por la identidad pitagórica.

Ejemplo: determinar $\int sin^3 x\, dx$

Separando $sin^3 x$ en $sin^2 x \sin x$ y reemplazando:

$$\int sin^3 x\, dx = \int sin^2 x \sin x\, dx$$

Reemplazando por la identidad pitagórica:

$$\int sin^3 x\, dx = \int (1 - cos^2 x) \sin x\, dx$$

$$= \int (\sin x - \sin x\, cos^2 x)\, dx$$

Aplicando la propiedad de linearilidad de la integral y aplicando integración por partes al segundo término obtenemos:

$$\int sin^3 x\, dx = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + \ C$$

Como podemos ver en el anterior ejemplo, en el último paso fue necesario aplicar la técnica de integración por partes (se sugiere que el estudiante confirme este resultado).

Ejemplo: determinar $\int cos^5 x\, dx$

Separando $cos^5 x$ en $cos^4 x \cos x$ y reemplazando:

$$\int cos^5 x\, dx = \int (1 - sin^2 x)^2 \cos x\, dx$$

Repartiendo en cuadrado en los términos del paréntesis y empleando la propiedad de linearidad de la integral.

$$= \int (1 - sin^2 x)^2 \cos x\, dx$$

$$= \int \cos x\, dx - 2\int sin^2 x \cos x\, dx + \int sin^4 x \cos x\, dx$$

Empleando la técnica de integración por partes para los dos términos finales de la derecha obtenemos:

$$= \sin x - \frac{2}{3} sen^3 x + \frac{1}{5} sen^5 x + C$$

Al igual que en el ejemplo anterior, se sugiere que el estudiante confirme los resultados de la integración por partes.

Si n es par se emplean las identidades de medio ángulo para facilitar el cálculo de las integrales.

Ejemplo: determinar $\int cos^4\, x\, dx$

Para resolver la integral descomponemos $cos^4\, x$ en $(cos^2\, x)^2$ y reemplazamos por la identidad de ángulo medio respectiva.

$$\int cos^4\, x\, dx = \int \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 dx$$

Repartiendo el cuadrado entre los elementos del paréntesis y empleando la propiedad de linearilidad de la integral.

$$= \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{4}\int (\cos 2x)(2)\, dx + \frac{1}{8}\int (1 + \cos 4x)\, dx$$

Empleando integración por partes queda:

$$= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$$

Integrales de la forma $\int \boldsymbol{sin^n\, x} \, \mathbf{cos^m x \, dx}$

Al igual que los casos anteriormente estudiados, la estrategia para abordar este tipo de integrales depende si n y m son números pares o impares, en general su la potencia del seno o del coseno es impar se debe descomponer en dos factores como se vio con anterioridad y aplicar la identidad pitagórica. En el caso en que las potencias de seno y coseno sean pares se recomienda usar las identidades de medio ángulo y si el caso lo amerita la identidad $\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$.

Ejemplo: determinar $\int sin^2 x\, cos^3 x\, dx$

Como la potencia de coseno es impar podemos descomponerla.

$$\int sin^2 x\, cos^3 x\, dx = \int sin^2 x\, cos^2 x \cos x \; dx$$

Utilizando la identidad pitagórica.

$$= \int sin^2 x\,(1 - sin^2 x) \cos x \; dx$$

Repartiendo valores y separando.

$$= \int sin^2 x \cos x \; dx - \int sin^4 x \cos x \; dx$$

Empleando lo aprendido anteriormente sobre integrales con funciones trigonométricas e integración por partes obtenemos:

$$= \frac{1}{3} sin^3 x - \frac{1}{5} sin^5 x + C$$

Ejemplo: determinar $\int sin^3 3x \cos^5 3x\, dx$

Descomponiendo $sen^3 3x$ y empleando la identidad pitagórica.

$$\int sin^3 3x \cos^5 3x\, dx = \int (1 - cos^2 3x) \sin 3\mathrm{x} \; \cos^5 3x\, dx$$

Empleando la propiedad de linearilidad de la integral obtenemos:

$$= \int cos^5 3x\; sin^3 3x\, dx - \int cos^7 3x\; sin 3x\, dx$$

Empleando integración por partes obtenemos:

$$= -\frac{1}{18}\, cos^6 3x + \frac{1}{24} cos^7 2x + C$$

Ejemplo: determinar $\int sin^2 x\, cos^2 x\, dx$

En este caso los exponentes de ambas funciones son pares, se sugiere aplicar las identidades de ángulo medio.

$$\int sin^2 x\, cos^2 x\, dx = \frac{1}{4}\int sen^2 2x\, dx$$

$$= \frac{1}{8}\int (1 - \cos 4x) dx$$

$$= \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + C$$

Ejemplo: determinar $\int sin^2 x\, cos^4 x\, dx$

En este caso podemos descomponer la potencia del coseno y reemplazar tanto el seno como el coseno por las identidades de medio ángulo.

$$\int sin^2 x\, cos^4 x\, dx = \int \left(\frac{1 - cos2x}{2}\right)\left(\frac{1 + cos2x}{2}\right)^2 dx$$

Repartiendo el exponente y los términos para eliminar los paréntesis queda:

$$= \frac{1}{8}\int (1 + \cos 2x - \cos^2 2x - cos^3 2x) dx$$

Volviendo a emplear las identidades de ángulo medio para los exponentes mayores a 1.

$$= \frac{1}{8}\int \left[1 + \cos 2x - \frac{1}{2}(1 + \cos 4x) - (1 - sin^2 2x)\cos 2x\right] dx$$

Reorganizando y empleando la propiedad de linearidad de la integral.

$$= \frac{1}{8}\left[\int \frac{1}{2} dx - \frac{1}{8}\int 4x \cos 4x\, dx + \frac{1}{2}\int \sin x2\ \ sin^2 2x\, dx\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\sin 4x + \frac{1}{6} sin^3 2x\right] + C$$

$$= \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x + \frac{1}{48} sin^3 2x + C$$

Para otras funciones trigonométricas como tangente, cotangente, secante, cosecante entre otras, se pueden emplear las identidades trigonométrica equivalentes a las que se han empleado en los ejemplos y el procedimiento es igual.

Sustituciones trigonométricas

Cuando se presenta Integrandos de la forma $\sqrt{a^2-b^2x^2}$, $\sqrt{a^2+b^2x^2}$ o $\sqrt{b^2x^2-a^2}$ se pueden sustituir por funciones trigonométricas para facilitar su integración según las siguientes transformaciones.

Estas sustituciones provienen del teorema de Pitágoras y la variable θ hace referencia al ángulo que del triangulo rectángulo correspondiente.

Expresión	sustitución	Identidad
$\sqrt{a^2-b^2x^2}$	$x=\frac{a}{b}\sin\theta$	$a\sqrt{1-sin^2\theta}=a\cos\theta$
$\sqrt{a^2+b^2x^2}$	$x=\frac{a}{b}\tan\theta$	$a\sqrt{1+tan^2\theta}=a\sec\theta$
$\sqrt{b^2x^2-a^2}$	$x=\frac{a}{b}\sec\theta$	$a\sqrt{sec^2\theta-1}=a\tan\theta$

Cuadro 1
Fuente: Propia.

Ejemplo: calcular $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}}$

Tomando $x=2\tan\theta$ tenemos $dx=2\sec^2\theta\,d\theta$ y $\sqrt{4+x^2}=2\sec\theta$

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}}=\int\frac{2\sec^2\theta\,d\theta}{(4\tan^2\theta)(2\sec\theta)}$$

Simplificando términos:

$$=\frac{1}{4}\int\frac{\sec\theta}{\tan^2\theta}d\theta=\frac{1}{4}\int sen^{-2}\theta\cos\theta d\theta$$

$$=-\frac{1}{4\sin\theta}+C=-\frac{\sqrt{4+x^2}}{4x}+C$$

Ejemplo: calcular $\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2} dx$

Tomando $x = 2\sin\theta$ tenemos $dx = 2\cos\theta\, d\theta$ y $\sqrt{9-x^2} = 3\cos\theta$

Reemplazando:

$$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2} dx = \int \frac{3\cos\theta}{9\, sin^2\theta} 3\cos\theta\, d\theta$$

Simplificando términos:

$$= \int \frac{\cos^2\theta}{sin^2\theta} d\theta = \int cot^2\theta d\theta$$

Empleando la identidad $cot^2\theta = csc^2\theta - 1$

$$= \int (csc^2\theta - 1) d\theta = -cot\theta - \theta + C$$

Para regresar a la variable original debemos recordar que:

$$cot\theta = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$$

Y:

$$\sin\theta = \frac{x}{3} \rightarrow \theta = sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)$$

Reemplazando:

$$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2} dx = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x} - sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + C$$

Ejemplo: calcular $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}} dx$

Tomando $x = 2\sec\theta$ tenemos $dx = 2\sec\theta tan\theta\, d\theta$ y $\sqrt{x^2-4} = 2\tan\theta$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}} dx = \int \frac{4\, sec^2\theta}{2\tan\theta}(2\sec\theta\tan\theta\; d\theta)$$

$$= 4\int sec^3\theta d\theta$$

Empleando las técnicas de integración de funciones trigonométricas e integración por partes obtenemos:

$$= 2\sec\theta + 2\ln|\sec\theta + \tan\theta| + C$$

Regresando a la variable original:

$$= \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-4} + 2\ln\left|x + \sqrt{x^2-4}\right| + C$$

Unidad 2

Fracciones parciales, integración aproximada, integrales impropias

Cálculo integral

Autor: Edgar Palacino Antia

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina
MIEMBRO DE LA RED ILUMNO

Introducción

En la semana 4 continuamos con el estudio de las diversas técnicas de integración que se emplean en cálculo. En esta cartilla abordaremos los temas de integración por fracciones parciales, la integración aproximada empleando las reglas de Simpson y del punto medio y el desarrollo de integrales impropias, brindado mas herramientas para que el estudiante este en la capacidad de resolver ejercicios en cálculo integral.

Recomendaciones metodológicas

Se recomienda a los estudiantes el estudio detenido de la cartilla y de los ejemplos que se consignan en ella, además de visualizar las video capsulas y el uso de las lecturas adicionales para nutrirse con mayor información. Por último, es aconsejable que el estudiante resuelva los ejercicios propuestos como actividad de repaso para evaluar su avance en el aprendizaje e identificar dificultades en el mismo.

Desarrollo temático

Fracciones parciales, integración aproximada, integrales impropias

Fracciones parciales

La técnica de integración de funciones racionales empleando fracciones parciales se basa en el axioma del algebra que afirma que cualquier función racional puede escribirse en términos de fracciones más simples. Dependiendo del grado del numerador (exponente de la variable más alto en el polinomio) se pueden clasificar en funciones racionales (cuando el grado del numerador es al menos un grado mayor que el del denominador) o irracionales (cuando el grado del polinomio en el denominador es al menos 1 grado mayor que el del numerador) se debe aplicar un paso previo o no a la descomposición de la función racional en fracciones parciales.

Fracciones irracionales

Si se desea hacer la integración de una función racional irracional se debe aplicar primero la técnica de división sintética para obtener factores hasta obtener una fracción racional a la cual aplicar las técnicas para obtener fracciones parciales. Para realizar la integración se debe integrar cada uno de los factores obtenidos y evaluarlos en los límites de la integral en caso que sea una integral definida.

Fracciones racionales

El verdadero reto de integrar funciones racionales es la integración de funciones racionales, y es en este tema donde profundizaremos. Para poder abordar este desafío debemos separar en distintos casos las funciones racionales. Para poder estudiar estas funciones definamos una función $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ donde $P(x)$ es el numerador de la función racional y $Q(x)$ es el denominador de la misma.

Funciones cuyo denominador es un producto de distintos factores lineales

Cuando la función $Q(x)$ es el producto de varios factores lineales y ningún factor se repite o es un múltiplo de otro podemos considerar que existen constantes $A_1, A_2, \dots, A_i$ de tal manera que:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{a_2x + b_2} + \cdots + \frac{A_k}{a_kx + b_k}$$

Ejemplo: determinar $\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}dx$

El primer paso es obtener los factores en que se puede descomponer el denominador.

$$2x^3 + 3x^2 - 2x = x(2x^2 + 3x - 2) = x(2x - 1)(x + 2)$$

(Se recomienda al estudiante hacer un repaso de las técnicas de factorización de polinomios. En las lecturas complementarias de la semana 4 se encuentra un documento relacionado con este tema).

Como el denominador se puede descomponer en tres factores distintos podemos escribir la función de la siguiente forma:

$$\frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{2x + 1} + \frac{C}{x + 2}$$

Para determinar los valores de las constantes podemos multiplicar ambos lados de la ecuación por el producto de los factores.

$$x^2 + 2x - 1 = A(2x - 1)(x + 2) + Bx(x + 2) + Cx(2x - 1)$$

Multiplicando términos para eliminar paréntesis y agrupando términos según el exponente de la variable resulta:

$$x^2 + 2x - 1 = (2A + B + 2C)x^2 + (3A + 2B - C)x - 2A$$

Como el polinomio del lado derecho es igual al del lado izquierdo, podemos igualar sus coeficientes.

$$2A + B + 2C = 1$$

$$3A + 2B - C = 2$$

$$-2A = -1$$

Este sistema de ecuaciones es sencillo de resolver por cualquier método visto en cursos anteriores. Resolviendo obtenemos $A = \frac{1}{2}, B = \frac{1}{5}, C = -\frac{1}{10}$.

Con estos valores la integral queda:

$$\int \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x}dx = \int \frac{1}{2}\frac{1}{x} + \frac{1}{5}\frac{1}{2x + 1} - \frac{1}{10}\frac{1}{x + 2}dx$$

Empleando el teorema de linealidad de la integral y cambio de variables obtenemos:

$$\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}dx = \frac{1}{2}\ln|x| + \frac{1}{10}\ln|2x-1| - \frac{1}{10}\ln|x+2| + k$$

Ejemplo: determinar $\int \frac{dx}{x^2-4}$

La descomposición de factores para x^2-4 es $(x-2)(x+2)$

Entonces la función queda $\frac{1}{(\mathrm{x}-2)(\mathrm{x}+2)}$

Ahora es necesario determinar los números A y B que satisfacen la ecuación.

$$A(x+2)+B(x-2)=1$$

Para poder resolver esta ecuación hacemos $x=2$ y obtenemos $A=1/4$, igualmente si hacemos $x=-2$ obtenemos $B=-1/4$

Reemplazando en la integral original obtenemos:

$$\int \frac{dx}{x^2-4} = \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{\mathrm{x}-2} - \frac{1}{\mathrm{x}+2}\right)dx$$

Integrando obtenemos:

$$= \frac{1}{4}(\ln|\mathrm{x}-2| - \ln\ln|\mathrm{x}+2|) + \mathrm{C}$$

Funciones cuyo denominador es un producto de factores lineales algunos de los cuales son repetidos

Al momento de realizar la factorización de la función del numerador pueden aparecer algunos factores que se repiten,

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{a_2x+b_2} + \cdots + \frac{A_k}{(a_kx+b_k)^r}$$

A través de ejemplos veremos cómo proceder en caso de tener uno o más factores repetidos al momento de integrar una función.

Ejemplo: determinar $\int \frac{x}{(\mathrm{x}-3)^2}\mathrm{dx}$

Al realizar la descomposición de la función obtenemos:

$$\frac{x}{(\mathrm{x}-3)^2}=\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{x}-3}+\frac{\mathrm{B}}{(\mathrm{x}-3)^2}$$

Para determinar los valores de A y B empleamos el mismo procedimiento anteriormente mencionado.

$$x=A(x-3)+B$$

Haciendo $x=3$ el valor de B es 3 y si tomamos el valor $x=0$ A toma el valor de 1, reemplazando en la integral original.

$$\int \frac{x}{(\mathrm{x}-3)^2}\mathrm{dx}=\int \left(\frac{1}{\mathrm{x}-3}+\frac{3}{(\mathrm{x}-3)^2}\right)\mathrm{dx}$$

Aplicando la propiedad de linealidad de la integral y haciendo la sustitución $u=\mathrm{x}-3$ la integral resulta.

$$\int \left(\frac{1}{\mathrm{x}-3}+\frac{3}{(\mathrm{x}-3)^2}\right)\mathrm{dx}=ln|x-3|-\frac{3}{x-3}+C$$

Ejemplo: determinar $\int \frac{x^4-2x^2+4x+1}{x^3-x^2-x+1}dx$

En este caso podemos aplicar la división sintética para simplificar la función racional.

$$\frac{x^4-2x^2+4x+1}{x^3-x^2-x+1}=x+1+\frac{4x}{x^3-x^2-x+1}$$

Descomponiendo la función del denominador obtenemos (el estudiante deberá verificar el proceso de descomposición en factores de la función).

$$x^3-x^2-x+1=(x-1)^2(x+1)$$

Como $x-1$ aparece 2 veces la descomposición de la función queda:

$$\frac{4x}{(x-1)^2(x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+1}$$

Igualando los términos obtenemos los siguientes valores A=1, B=2 y C=-1, reemplazando en la integral original.

$$\int \frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} dx = \int x + 1 + \frac{1}{x - 1} + \frac{2}{(x - 1)^2} - \frac{1}{x + 1} dx$$

Aplicando la propiedad de linealidad y empleando sustitución la integral resulta:

$$= \frac{x^2}{2} + x + ln|x - 1| - \frac{2}{x - 1} - ln|x - 1| + C$$

Funciones cuyo denominador tiene factores cuadráticos irreducibles

Si la función del denominador es de la forma $ax^2 + bx + c$ donde $b^2 - 4ac < 0$ al momento de buscar las fracciones parciales vamos a obtener un término de la forma:

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$$

Luego de determinar los valores de A y B, este término se puede integrar completando el cuadrado de la función del denominador y aplicando:

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

A través de los siguientes ejemplos veremos cómo aplicar esta fórmula para resolver integrales.

Ejemplo: determinar $\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} dx$

El factor del denominador puede factorizarse $x(x^2 + 4)$, así que la función puede escribirse de la forma:

$$\frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4}$$

Despejando la ecuación para encontrar el valor de A, B y C obtenemos (el estudiante debe verificar este proceso).

$$A = 1, B = 1\ y\ C = -1$$

Reemplazando en la integral original.

$$\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{x - 1}{x^2 + 4}\right) dx$$

Aplicando sustitución y separando el segundo término de la integral resulta:

$$\int \left(\frac{1}{x} + \frac{x - 1}{x^2 + 4}\right) dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{x}{x^2 + 4} - \frac{x}{x^2 + 4}\right) dx$$

$$= ln|x| + \frac{1}{2}\ln(x^2 + 4) - \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + K$$

Ejemplo: determinar $\int \frac{6x^2-3x+1}{(4x+1)(x^2+1)} dx$

Como cada término en el denominador es irreducible, las fracciones parciales deben ser de la forma:

$$\frac{6x^2 - 3x + 1}{(4x + 1)(x^2 + 1)} = \frac{A}{4x + 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1}$$

Despejando la ecuación para obtener el valor de A, B y C obtenemos:

$$6x^2 - 3x + 1 = A(x^2 + 1) + (Bx + C)(4x + 1)$$

De aquí se puede obtener (el estudiante deberá verificar el proceso para obtener estos valores).

$$A = 2, B = 1\ y\ C = -1$$

Reemplazando en la integral original.

$$\int \left(\frac{2}{4x + 1} + \frac{x - 1}{x^2 + 1}\right) dx$$

Empleando la propiedad de linealidad de la integral y otras técnicas de integración obtenemos:

$$\int \left(\frac{2}{4x + 1} + \frac{x - 1}{x^2 + 1}\right) dx = \frac{1}{2} ln|4x + 1| + \frac{1}{2} ln(x^2 + 1) - \tan^{-1} x + C$$

Ejemplo: determinar $\int \frac{1-x+2x^2-x^3}{x(x^2+1)^2}dx$

El denominador, al ser factorizado, posee dos factores cuadráticos, así que las fracciones parciales quedan:

$$\frac{1-x+2x^2-x^3}{x(x^2+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$$

Como se puede observar, por cada factor cuadrático irreducible aparece un término Bx+C.

Multiplicando ambos lados de la ecuación por el término $x(x^2+1)^2$ se obtiene:

$$-x^3+2x^2-x+1=A(x^2+1)^2+(Bx+C)x(x^2+1)+Dx^2+Ex$$

Igualando coeficientes y resolviendo el sistema se obtienen los siguientes valores:

$$A=1, B=-1\ y\ C=-1, D=1, E=0$$

Reemplazando en la integral obtenemos:

$$\int \frac{1-x+2x^2-x^3}{x(x^2+1)^2}dx=\int \frac{1}{x}+\frac{x+1}{x^2+1}+\frac{x}{(x^2+1)^2}dx$$

Empleando integración por sustitución $(u=x^2+1)$

$$=ln|x|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-\tan^{-1}x-\frac{1}{2(x^2+1)}+K$$

Integración aproximada

Reglas del punto medio y del trapecio

A pesar de las herramientas que posee el cálculo integral para hallar la antiderivada o integral de las funciones, existen situaciones donde o es imposible hallar la antiderivada de una función determinada o los datos provienen de una fuente real y continua (un experimento científico, un programa de computador, datos provenientes de fenómenos naturales, etc.), entonces es posible emplear técnicas y reglas para hallar el valor aproximado de la integral.

Con anterioridad ya vimos las sumas de Riemann, que fueron las primeras aproximaciones al valor de la integral, y a las sumas de Riemann se les puede hacer algunas modificaciones para obtener una mejor aproximación al valor de la integral.

Una de estas aproximaciones mejoradas es la **regla del punto medio**, esta consiste en trazar un rectángulo de altura igual al valor medio de la función entre dos puntos a y b, formalmente se escribe:

$$\int_b^b f(x)dx \approx M_n = \Delta x[f(\overline{x_1}) + f(\overline{x_2}) + \cdots + f(\overline{x_n})]$$

Donde $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

Además $\bar{x}_i = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i)$

Esta última expresión se emplea para hallar el valor medio de la variable independiente entre $[x_{i-1}, x_i]$.

Una aproximación aun más cercana al valor real se puede obtener a través de la aplicación de la **regla del trapecio**, la cual integra la aproximación a través de la regla del punto medio con las aproximaciones empleando las sumas de Riemann tanto por el lado derecho como izquierdo.

La expresión empleada en la regla del trapecio es:

$$\int_a^b f(x)dx \approx T_n = \frac{\Delta x}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

Donde $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ y $x_i = a + i\Delta x$

A través del siguiente ejemplo observaremos que tan precisas son ambas aproximaciones.

Ejemplo: determinar el valor aproximado de la integral $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$ con $n = 5$

- Regla del punto medio:

Primero tenemos que dividir el intervalo en 5 subintervalos.

Extremo izquierdo	Extremo derecho	Valor intermedio
1	1.2	1.1
1.2	1.4	1.3
1.4	1.6	1.5
1.6	1.8	1.7
1.8	2	1.9

Cuadro 1
Fuente: Propia.

Empleando la fórmula de la regla del punto medio se obtiene:

$$\int_{1}^{2} \frac{1}{x} dx \approx \Delta x[f(1.1) + f(1.3) + f(1.5) + f(1.7) + f(1.9)]$$

$$\approx \frac{1}{5}\left[\frac{1}{1.1} + \frac{1}{1.3} + \frac{1}{1.5} + \frac{1}{1.7} + \frac{1}{1.9}\right] \approx 0.691908$$

- Regla del trapecio:

Empleando la regla del trapecio obtenemos.

$$\int_{1}^{2} \frac{1}{x} dx \approx \frac{0.2}{2}[f(1) + 2f(1.2) + 2f(1.4) + 2f(1.6) + 2f(1.8) + f(2)]$$

$$\approx 0.1\left[\frac{1}{1} + \frac{2}{1.2} + \frac{2}{1.4} + \frac{2}{1.6} + \frac{2}{1.8} + \frac{1}{2}\right] \approx 0.695635$$

La integral de la función propuesta es fácilmente calculable ($\int_{1}^{2} \frac{1}{x} dx = \ln(x)_1^2$) y si evaluamos la integral obtenemos:

$$\int_{1}^{2} \frac{1}{x} dx = \ln(x)_1^2 = 0.693147 \ldots$$

Si definimos el error como la diferencia entre el valor real de la función integrada y el valor de la aproximación empleada, obtenemos:

Error de la regla del punto medio ≈ 0.001239.

Error de la regla del trapecio ≈ -0.002488.

Si aumentamos el valor de n en cada una de la reglas, es decir, aumentando la cantidad de intervalos, la aproximación será más cercana al valor real y por lo tanto disminuye el tamaño del error. Se recomienda al estudiante que repita el ejemplo dado aumentando el número de intervalos y calcule el error de cada uno de las reglas empleadas.

Regla de la parábola o de Simpson

La base de la regla de Simpson es la aproximación a través del uso de parábolas en cambio de trapecios o rectángulos, lo cual disminuye el error de la aproximación. En las lecturas complementarias se encuentra la deducción completa de la regla de Simpson, aquí solo se limita a enunciar la fórmula y ver dos ejemplos de la aplicación de la misma.

En la regla de Simpson es necesario que el número de intervalos a emplear sea par y $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

$$\int_a^b f(x)dx \approx S_n = \frac{\Delta x}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \cdots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

El orden de los coeficientes es 4 – 2 – 4 así sucesivamente excluyendo el primer y último término de la regla.

Ejemplo: estimar a través de la regla de Simpson el valor de la integral $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$ con n=10

El valor de $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-1}{10} = 0.1$ entonces empleando la fórmula de la regla de Simpson obtenemos:

$$\int_a^b f(x)dx \approx S_{10} = \frac{0.1}{3}\left[\frac{1}{1} + \frac{4}{1.1} + \frac{2}{1.2} + \frac{4}{1.3} + \frac{2}{1.4} + \frac{4}{1.5} + \frac{2}{1.6} + \frac{4}{1.7} + \frac{2}{1.8} + \frac{4}{1.9} + \frac{1}{2}\right]$$
$$= 0.693150$$

Al compararse con los valores obtenidos en el ejemplo anterior con las reglas del límite aproximación mayor al valor autentico de la integral (error = -0.00003).

Integrales impropias

Cuando se desarrolló la definición de integral, se hicieron algunas consideraciones acerca de las funciones a integrar y acerca del intervalo en el cual se realizaría la integración, sin embargo, en ocasiones encontramos funciones o intervalos que no cumplen a cabalidad todos los preceptos asumidos en una integral. En este caso se denominan integrales impropias y existen técnicas las cuales permite calcular las integrales en este tipo de casos.

Límites de integración infinitos

Al momento de definir una integral, siempre se hablo que la función debería ser continua en un intervalo $[a, b]$ y que estos serian los límites de la integral, sin embargo, existen ciertas circunstancias o aplicaciones en las cuales uno o ambos límites tienden a infinito.

Para poder calcular la integral cuando uno o los dos límites tienden a infinito emplearemos la definición de límite al infinito.

Veamos los casos que se puedan presentar:

- Si $\int_a^t f(x)dx$ existe siendo $t \geq a$, entonces

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)dx$$

- Si $\int_t^b f(x)dx$ existe siendo $t \leq b$, entonces

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^b f(x)dx$$

En estos casos, si los límites existen se dice que la integral **converge** de lo contrario se dice que la integral **diverge.**

- Si $\int_a^{\infty} f(x)dx$ y $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ convergen, entonces podemos definir

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_a^{\infty} f(x)dx$$

Siendo a cualquier número real.

Ejemplo: determinar $\int_1^{\infty} \left(\frac{1}{x}\right) dx$

$$\int_1^{\infty} \left(\frac{1}{x}\right) dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x} dx = \lim_{t\to\infty} \ln|x|\,|_1^t$$

Al evaluar este límite se encuentra $\lim\limits_{t\to\infty} \ln(t) = \infty$, por lo tanto el límite no existe y la integral evaluada es divergente.

Ejemplo: determinar $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+4}$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+4} = \lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{dx}{x^2+4}$$

La integral del lado derecho se puede evaluar empleando una sustitución trigonométrica.

$$= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{2}\arctan\frac{1}{2}x\Big|_0^t + \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{4}\pi$$

Al existir el límite la integral converge.

Ejemplo: determinar $\int_{-\infty}^0 e^{2x}dx$

$$\int_{-\infty}^0 e^{2x}\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^0 e^{2x}\,dx$$

Para evaluar la integral podemos emplear cualquiera de las técnicas anteriormente aprendidas.

$$\lim_{t\to-\infty}\int_t^0 e^{2x}\,dx = \lim_{t\to-\infty}\frac{1}{2}e^{2x}|_t^o = \frac{1}{2}$$

Como el límite existe, entonces la integral converge.

Ejemplo: determinar $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{e^x+e^{-x}}dx$

Ambos límites de la integral son infinitos, así que debemos escoger un numero a para poder calcular la integral, en este caso por facilidad optaremos por a=0

Para facilitar la integración dividimos en e^x, entonces la integral queda.

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{e^x+e^{-x}}dx = \int_{-\infty}^\infty \frac{e^x dx}{e^{2x}+1}dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{e^x dx}{e^{2x}+1}dx + \lim_{t\to-\infty}\int_t^0 \frac{e^x dx}{e^{2x}+1}dx$$

Las integrales se pueden calcular empleando una tabla de integrales o realizando una sustitución trigonométrica.

$$= \lim_{t\to\infty} \arctan e^x|_0^t + \lim_{t\to-\infty} \arctan e^x|_t^0$$

Evaluando los límites de las integrales y tomando el límite cuando t tiende a infinito en ambos sentidos obtenemos:

$$\lim_{t\to\infty} \arctan e^x|_0^t + \lim_{t\to-\infty} \arctan e^x|_t^0 = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{4}\pi - 0 = \frac{1}{2}\pi$$

Por lo tanto la integral converge.

Discontinuidad en el intervalo de integración

Otra de las situaciones que genera una integral impropia es la presencia de una discontinuidad de la función en un punto del intervalo de integración, esto contradice directamente una de los requisitos que se enunciaron al momento de definir la integral, sin embargo, si la continuidad no implica que el límite no exista en inmediaciones de dicho punto, aun es posible realizar el cálculo de la integral.

Al igual que cuando el límite tiende a infinito, existen 3 casos en los cuales pueden calcularse el límite cuando existe una discontinuidad en el intervalo.

- Si f es continua en $[a, b)$ y es discontinua en b, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\mathrm{t}\to\mathrm{b}^-} \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{t}} \mathrm{f(x)\,dx}$$

- Si f es continua en $(a, b]$ y es discontinua en a, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\mathrm{t}\to\mathrm{a}^+} \int_{\mathrm{t}}^{\mathrm{b}} \mathrm{f(x)\,dx}$$

Al igual que en el caso anterior, si los límites existen, entonces se dice que la integral converge y en caso contrario se dice que diverge.

Si f tiene una discontinuidad en c, donde $a < c < b$ y las integrales $\int_a^c f(x)dx$ y $\int_c^b f(x)dx$ existen (convergen), entonces podemos definir.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

A través de los siguientes ejemplos veremos la aplicación de estos casos.

Ejemplo: determinar $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$

Analizando la función a integrar podemos observar que cuando x=3 la función presenta una discontinuidad, entonces es necesario aplicar el primer caso enunciado.

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}} = \lim_{t \to 4^-} \int_0^{4-} \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$$

Realizando la integración de la función:

$$= \lim_{t \to 4^-} \arcsin \frac{x}{4} \Big|_0^{4^-}$$

Si tomamos el límite por la izquierda de la función, esta tiende a 1, y tomando el arco seno de 1 el resultado es $\frac{1}{2}\pi$. Por lo tanto el límite existe y la integral converge.

Ejemplo: determinar $\int_0^6 \frac{dx}{6-x}$

La función a integrar presenta una discontinuidad en $x = 6$, entonces aplicaremos el límite cuando la integral se acerca a 6 por el lado izquierdo.

$$\int_0^6 \frac{dx}{6-x} = \lim_{t \to 6^-} \int_0^{6-} \frac{dx}{6-x}$$

Realizando la integral obtenemos:

$$\lim_{t \to 6^-} \int_0^{6-} \frac{dx}{6-x} = \lim_{t \to 6^-} \ln \frac{1}{6-x} \Big|_0^{6-}$$

Si evaluamos el límite de la función cuando se acerca a 6 por el lado izquierdo encontramos que dicho límite no existe, por lo tanto la integral diverge.

Ejemplo: determinar $\int_0^6 \frac{dx}{x-2}$

Al analizar la función a integrar, esta presenta una discontinuidad cuando se acerca a $x = 2$, entonces aplicaremos el tercer caso que se enuncio para poder resolver integrales que presentan discontinuidades en medio del intervalo de integración con $c = 2$.

$$\int_0^6 \frac{dx}{x-2} = \int_0^2 \frac{dx}{x-2} + \int_2^6 \frac{dx}{x-2}$$

Ahora analizaremos la primera integral del lado derecho.

$$\int_0^2 \frac{dx}{x-2} = \lim_{\mathrm{t}\to 2^-} \int_0^2 \frac{dx}{x-2} = \lim_{\mathrm{t}\to 2^-} \ln|x-2|\Big|_0^2$$

Si se calcula el límite de la función cuando se acerca a $x = 2$ este tiende a $-\infty$, lo cual hace que el límite no exista y por lo tanto la integral evaluada es divergente, haciendo innecesario evaluar la segunda integral del lado derecho.

Unidad 3

Área de una región plana, volúmenes de sólidos, sólidos de revolución

Cálculo integral

Autor: Edgar Palacino Antia

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina
MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Introducción

En las anteriores cartillas y semanas de estudio hemos estudiado las herramientas que han sido desarrolladas para el cálculo de integrales de funciones, sin embargo, esto no pasaría de ser curiosidades matemáticas si no tuvieran aplicación en la vida real, sin embargo, el cálculo de integrales tiene una gran cantidad de aplicaciones en la vida real las cuales estudiaremos en esta y la próxima semana. Una de las primeras aplicaciones es el cálculo de áreas, problema que fue uno de los orígenes de la definición de integral, y derivado de este está el cálculo de volúmenes de sólidos y de sólidos de revolución. A través de ejemplos estudiaremos estas aplicaciones y su relación con el mundo real.

Recomendaciones metodológicas

Se recomienda al estudiante que estudie de manera detallada y detenida cada ejemplo brindado en la cartilla y realice los ejercicios propuestos de la semana, así como otros ejercicios que puede encontrar en la bibliografía sugerida. A través del estudio y desarrollo de ejercicios el estudiante adquirirá mayor habilidad en el uso de herramientas matemáticas y podrá enfrentarse a problemas de mayor complejidad.

Desarrollo temático

Área de una región plana, volúmenes de sólidos, sólidos de revolución

Área de una región plana

Como se mencionó cuando se realizó la introducción a las sumas de Riemann y a la definición de integral, cuando los matemáticos del siglo XIX se enfrentaron a la necesidad de calcular el área de una región bajo una curva, desarrollaron las bases para el cálculo integral. En esta sección retomaremos este problema y profundizaremos en los casos en los cuales el área se encuentre en una región negativa del plano o cuando el área se encuentra enmarcada entre dos funciones.

Área de una región plana

Este es el caso más básico del cálculo del área de una región debajo de una función, en este caso es necesario definir el intervalo de la variable x entre los cuales se realiza la integración, convirtiendo la integral en una integral definida.

Ejemplo: calcular el área bajo la curva $y = x^2$ por encima del eje x y limitada entre $x = 0$ y $x = 5$.

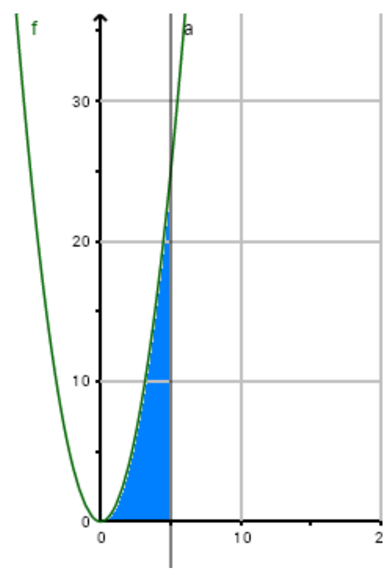


Imagen 1. Función a integrar en el ejemplo. El área sombreada corresponde a la integral
Fuente: Propia.

Como sabemos el área bajo una curva equivale a calcular la integral de la función en el intervalo dado, en este caso $[0,5]$, así:

$$Area = \int_0^5 x^2\, dx$$

Haciendo el cálculo de la integral tenemos:

$$Area = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^5$$

Evaluando la integral en los límites del intervalo de integración:

$$Area = \frac{5^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{125}{3}\ unidades\ de\ area$$

Aquí se denomina *unidades de área* porque la integral o el problema no mencionan alguna unidad de medida para el área de la integral.

Ejemplo: la velocidad de una partícula (dada en cm/seg) es descrita por la función $y = 1 + 2x + x^2$, calcular la distancia recorrida por la partícula desde el inicio del movimiento hasta 30 segundos después del inicio del movimiento.

Este es uno de los problemas típicos que se encuentran en el estudio de la física clásica y donde la integración tiene aplicación, pues el área debajo de la curva que representa la velocidad es la distancia recorrida por la partícula en un determinado tiempo. El tiempo dado equivale al intervalo de integración, como se menciona que se debe calcular la distancia desde el momento en que se inicia el movimiento el límite inferior de la integral es 0 y el superior es 30 segundos, pues es el tiempo en el que se nos pide calcular la distancia recorrida, entonces la integral que nos ayuda a resolver este problema es:

$$Distancia = \int_0^{30} (1 + 2x + x^2)\, d$$

Calculando la integral queda:

$$Distancia = \left(x + x^2 + \frac{x^3}{3}\right)\Big|\, 030$$

Evaluando la integral obtenemos:

$$Distancia = 9930\ cm$$

Área de una región plana en una región negativa

Ejemplo: calcular el área debajo de la curva $y = x^2 - 5$ comprendida en el intervalo $[-1, 4]$.

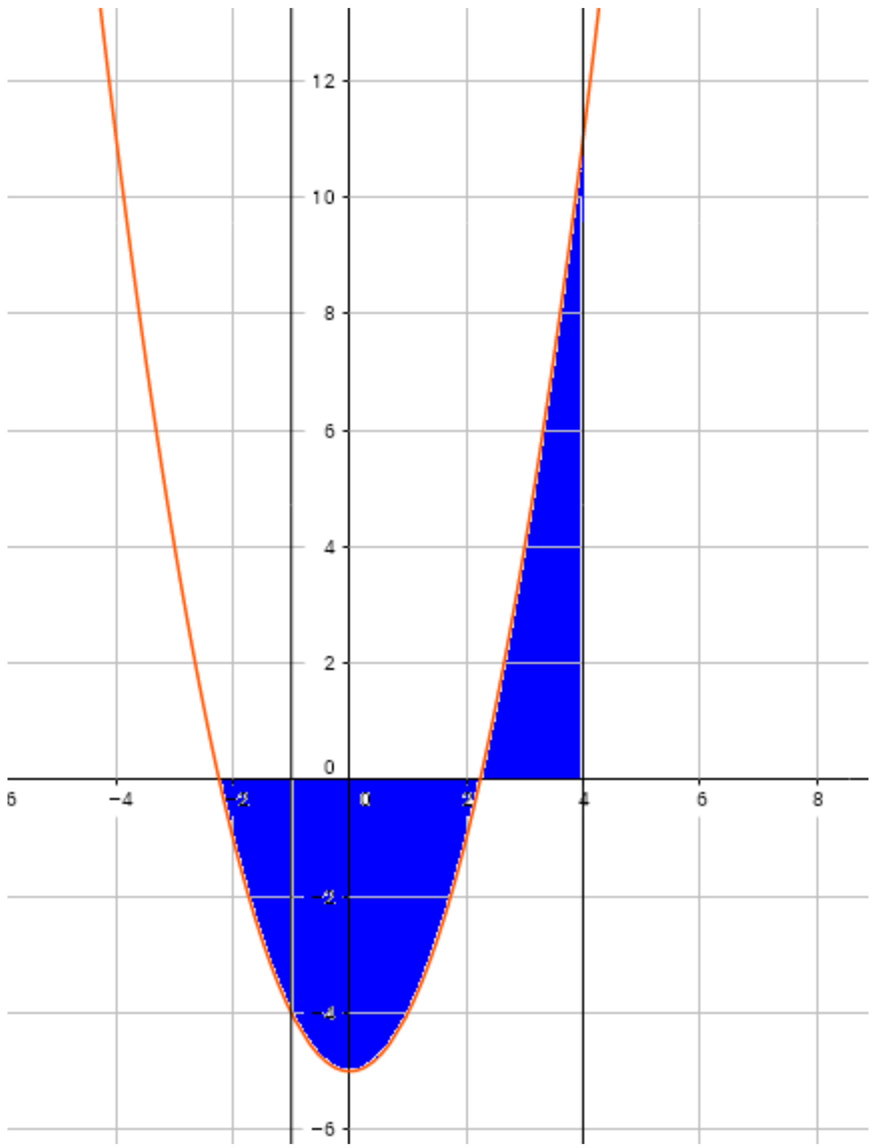


Imagen 2. Función a integrar en el ejemplo. El área sombreada corresponde a la integral
Fuente: Propia.

En el intervalo de trabajo, el área debajo de la curva se encuentra por debajo del eje x, en una región negativa del espacio cartesiano, sin embargo es necesario tener en cuenta que el área no puede ser un valor negativo, así que solo es el valor negativo del área.

$$Area = \int_{-1}^{4} x^2 - 5\, dx$$

Haciendo la integración:

$$Area = \frac{x^3}{3} - 5x \Big|_{-1}^{4}$$

Evaluando la integral:

$$\left(\frac{4^3}{3} - 5(4)\right) - \left(\frac{-1^3}{3} - 5(-1)\right) = \left(\frac{64}{3} - 20\right) - \left(-\frac{1}{3} + 5\right) = -3.33\ aprox$$

Sin embargo, como lo mencionamos, este número es el valor negativo del área bajo (o en este caso por encima de la curva y limitada por el eje x) de la función, así que el área es 3.33.

Área entre dos curvas

Ejemplo: calcular el área entre las curvas $y = x$ y $y = x^2$.

Este ejemplo desea ilustrar el caso en el cual es necesario calcular el área entre dos curvas. Lo primero es saber en cuales puntos se intersectan ambas curvas para hallar la región de trabajo, esto equivale a solucionar la ecuación $x = x^2$, esta ecuación tiene dos soluciones básicas cuando $x = 0$ y $x = 1$, siendo este el intervalo de integración.

Calcular el área entre dos funciones se puede asimilar a calcular el área de la función que se encuentra por encima y restarle el área de la función inferior (se recomienda al estudiante que realiza la gráfica de ambas funciones y verifique esta situación), entonces la función que debemos integrar para hallar el área de la región es $y = x - x^2$.

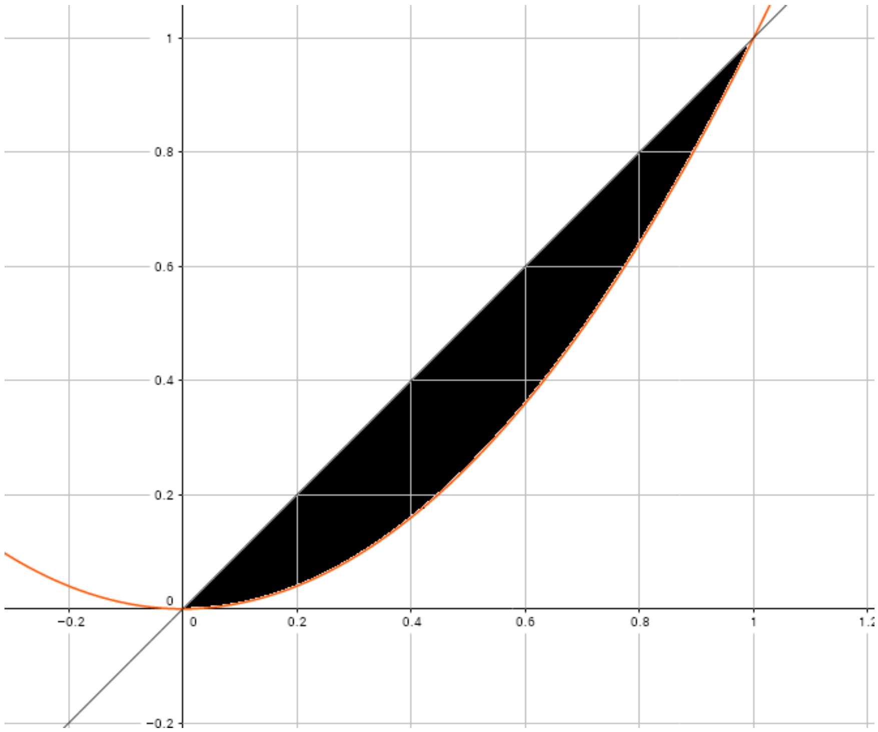


Imagen 3 Funciones a integrar en el ejemplo. El área sombreada entre las funciones corresponde al valor de la integral

Fuente: Propia.

$$Area = \int_0^1 (x - x^2)\, dx$$

Calculando la integral:

$$Area = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1$$

Evaluando la integral obtenemos:

$$Area = \left(\frac{1^2}{2} - \frac{1^3}{3}\right) - \left(\frac{0^2}{2} - \frac{0^3}{3}\right) = \frac{1}{6}\ unidades\ de\ area$$

Volúmenes de sólidos

Si tenemos un sólido cuya área transversal se puede describir a través de una función ($A(x)$), podemos multiplicar dicha función por un delta (dx), dando origen a un delta de volumen. Ahora bien, si este delta tiende a cero y sumamos dichos deltas, tendremos una buena aproximación al volumen original. En términos matemáticos podemos expresarlo de la siguiente manera:

$$Volumen = \int_a^b A(x)dx$$

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo: un sólido cuya base es un elipse de eje mayor =10 y eje menor = 8 posee una sección transversal que es un triángulo isósceles perpendicular al eje mayor con una altura = 6. Hallar el volumen.

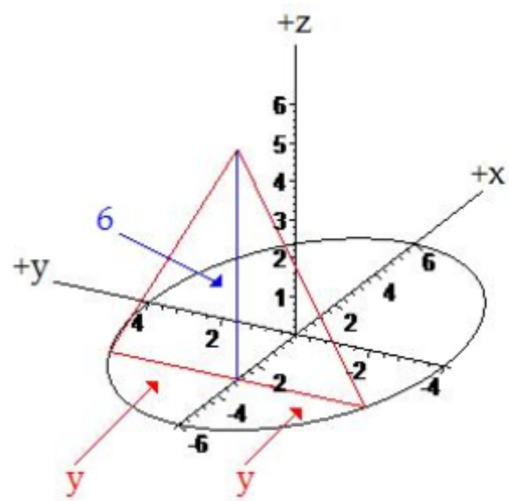


Imagen 4. Sección transversal del solido del ejemplo

Fuente: *http://atenea.inf.udec.cl/~psandana/asignaturas/calc/list/practica 22.pdf*

La base del solido es una elipse con centro (0, 0) y ecuación.

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

El triángulo isósceles que tiene por sección transversal puede ser descrito por la ecuación $Area = 5y$. Despejando el valor de y de la ecuación de la elipse y reemplazando en la ecuación del área obtenemos:

$$Area = 6y = 6\left({}^{4}/_{5}\right)\sqrt{25 - x^2}$$

Recordando que el volumen está dado por la integral del área en función de x podemos escribir:

$$Volumen = \frac{24}{5}\int_{-5}^{5}\sqrt{25 - x^2}\,dx = \frac{24}{5}\left(\frac{5}{2}\sqrt{25 - x^2} + \frac{x}{2}\sin^{-1}\frac{x}{5}\right)\Bigg|_{-5}^{5} = 60\pi$$

Ejemplo: hallar el volumen del solido obtenido a partir de la intercepción del plano $y = x$ con el cilindro de radio $r = 3$ y origen en $(0, 0)$.

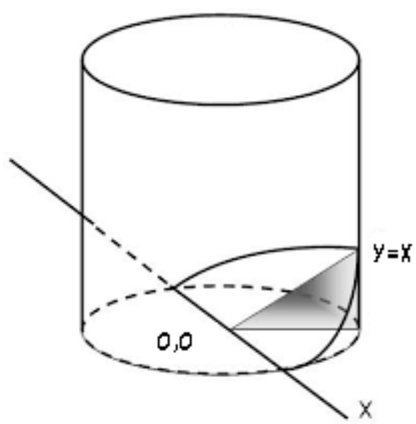


Imagen 5. Sección transversal del solido del ejemplo
Fuente: http://atenea.inf.udec.cl/~psandana/asignaturas/calc/list/practica 22.pdf

Las secciones del solido se pueden tomar como rectángulos de altura x y base $2\sqrt{9 - x^2}$, el área del rectángulo esta dado por la fórmula $area = 2x\sqrt{9 - x^2}$.

Los límites de integración se deben expresar en términos de la variable x, como el plano intercepta al cilindro a través de $y = x = 0$ hasta $x = 3$. La integral queda:

$$Volumen = \int_{0}^{3} 2x\sqrt{9 - x^2}\,dx$$

Resolviendo la integral obtenemos:

$$Volumen = -\frac{2}{3}(9 - x^2)^{3/2}\Big|_0^3 = 18\, unidades\ de\ volumen$$

Sólidos de revolución

Otra aproximación al cálculo del volumen de un sólido son los llamados sólidos de revolución. Estos se basan en el hecho que si tomamos un área determinada y lo hacemos girar sobre un eje, este generara un sólido.

La fórmula básica para hallar el volumen de un sólido de revolución es:

$$Volumen = \int_a^b \pi(f(x))^2\, dx$$

Donde $f(x)$ es la función que hacemos rotar para generar el sólido de revolución y a y b los límites de integración que se emplearían si se desea calcular el área bajo la función.

Sin embargo es aconsejable que en cada caso que se desee resolver mirar con detenimiento como se genera el sólido de revolución y adaptar la anterior fórmula según las necesidades.

Ejemplo: calcular el volumen generado al rotar la función $y = \sqrt{x}$ sobre el eje x y acotada por la recta $x = 8$

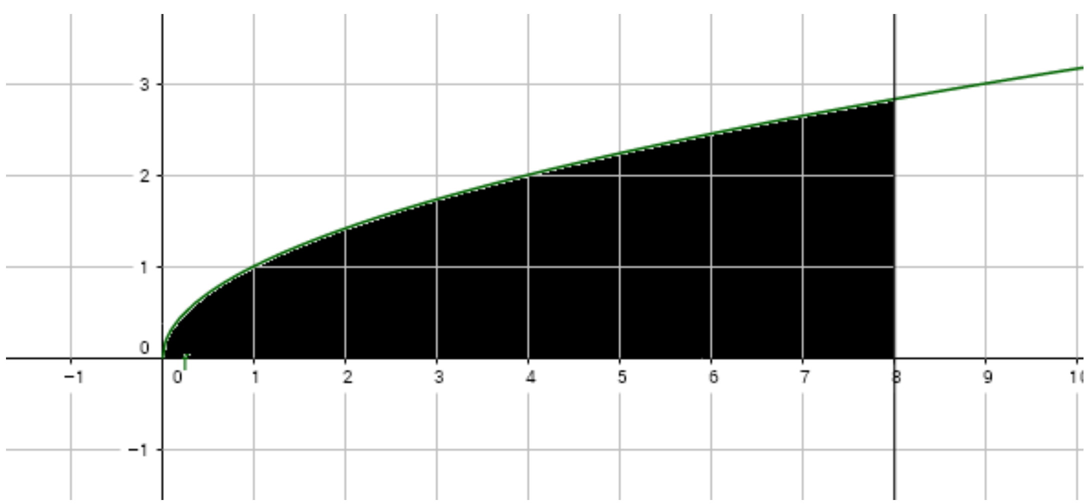


Imagen 6. Área del solido de revolución del ejemplo
Fuente: Propia.

La función representa una parábola acostada sobre el eje x y como se menciona, la recta $x = 4$ la acota, así que el intervalo de integración es $(0, 8)$. Empleando la fórmula mencionada resulta:

$$Volumen = \pi \int_0^4 \left(\sqrt{x}\right)^2 dx = \pi \int_0^4 x\, dx$$

$$= \pi \frac{x^2}{2}\bigg|_0^8 = 32\pi\ unidades\ de\ volumen$$

Si el área que hacemos girar está determinada por la intercepción entre dos funciones entonces es necesario calcular el volumen generado por la función superior y restarle el volumen que genera la función inferior al ser girada, lo cual altera la fórmula general de la siguiente manera:

$$Volumen = \int_a^b \pi((f(x))^2 - (g(x))^2)\, dx$$

Siendo $f(x)$ la función que se encuentra por encima en el plano cartesiano y $g(x)$ la función inferior. Veamos un ejemplo:

Ejemplo: hallar el volumen del solido de revolución generado por el área enmarcada entre las funciones $y = x$ y $y = x^2$ al ser rotado sobre el eje x.

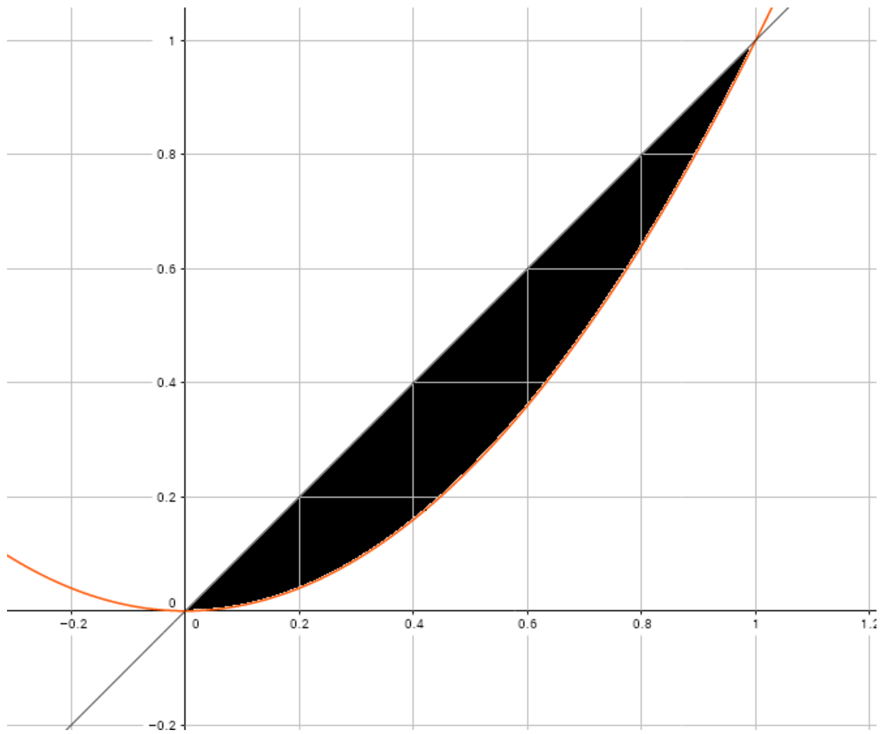


Imagen 7. Área del solido de revolución del ejemplo
Fuente: Propia.

Esta área la calculamos en la sección anterior, pero en este caso la hacemos girar sobre el eje x para generar un sólido de revolución. El intervalo de integración igualmente es $(0, 1)$ ya que en estos dos puntos las funciones se cruzan generando un área cerrada.

Empleando la fórmula:

$$Volumen = \int_0^1 \pi((x)^2 - (x^2)^2)\, dx$$

$$= \int_0^1 \pi((x)^2 - (x^2)^2)\, dx = \pi\left(\left(\frac{x^3}{3}\right) - \left(\frac{x^5}{5}\right)\right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{15}\pi\; unidades\ de\ volumen$$

En el caso que el giro sea alrededor del eje y o una asíntota paralela a este, se puede aproximar el volumen generado por el área de $2\pi r$ multiplicado por h y multiplicado por un Δx. Pero se puede asimilar que $r = x$ y $h = f(x)$, esto nos genera la siguiente fórmula general.

$$Volumen = \int_a^b 2\pi x f(x)\, dx$$

En caso que el área que estamos haciendo rotar sea producto de la intercepción de dos funciones la fórmula general queda:

$$Volumen = \int_a^b 2\pi x\,(f(x) - g(x))dx$$

Donde $f(x)$ es la función ubicada más hacia la derecha del plano cartesiano y $g(x)$ la función hacia la izquierda de $f(x)$.

Ejemplo: hallar el volumen del solido de revolución generado a partir de la intercepción de las curvas $y = \sqrt{8x}$ y $y = x^2$

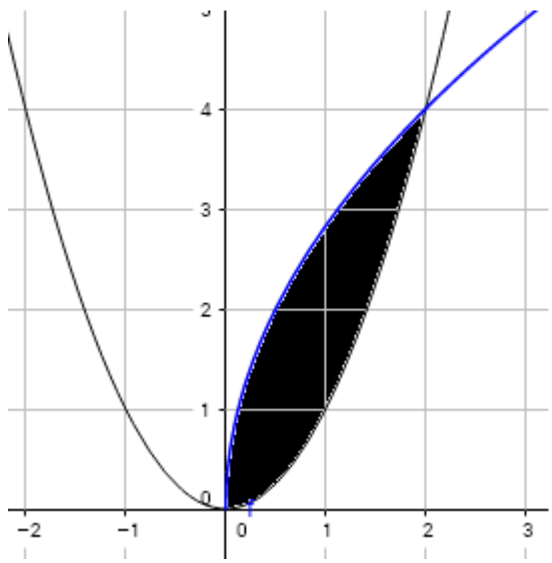


Imagen 8. Graficas de las funciones del ejemplo. El área sombreada es la que, al girar, genera el sólido de revolución
Fuente: Propia.

El primer paso en la resolución de este ejercicio es hallar los límites de integración, para esto igualamos ambas ecuaciones y buscamos las soluciones a la ecuación.

$$\sqrt{8x} - x^2 = 0$$

Las soluciones a esta ecuación son 0 y 2.

Aplicando la fórmula mencionada anteriormente.

$$Volumen = \int_0^2 2\pi x\left(\sqrt{8x} - x^2\right)dx$$

Integrando:

$$Volumen = 2\pi\left(\frac{2\sqrt{8}}{5}x^{5/2} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^2$$

Evaluando la integral obtenemos:

$$Volumen = \frac{24}{5}\pi\ unidades\ de\ volumen$$

Ejemplo: hallar el volumen del solido de revolución limitado por las funciones $y = -x^2 - 3x + 6$ y $x + y - 1$ y que gira sobre la recta $x = 3$

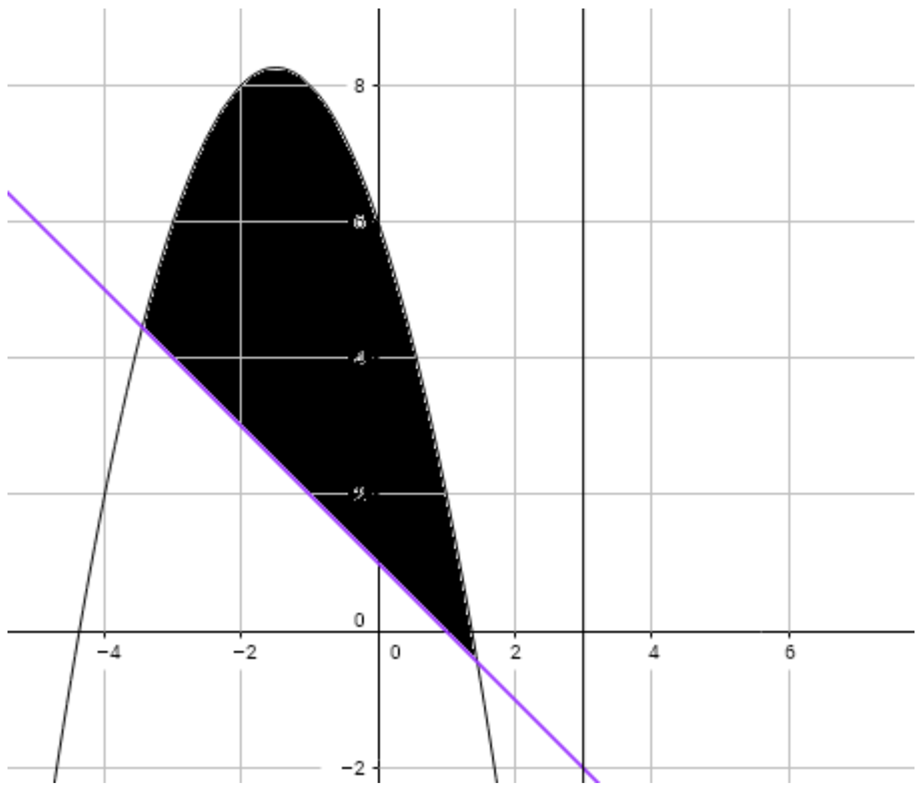


Imagen 9. Graficas de las funciones del ejemplo. El área sombreada es la que, al girar, genera el sólido de revolución
Fuente: Propia.

En este caso el área no rota sobre uno de los ejes principales, entonces podemos modificar la ecuación de la siguiente forma:

$$Volumen = \int_{a}^{b} 2\pi(k - x)\,(f(x) - g(x))dx$$

Donde k es la recta donde gira el área.

Al igual que en el ejemplo anterior, es necesario encontrar en cuales puntos se interceptan ambas ecuaciones, en este caso se interceptan en los valores de x $(-3, 1)$ (se recomienda al estudiante que verifique esta solución).

$$Volumen = \int_{-3}^{1} 2\pi(3 - x)\left((-x^2 - 3x + 6\,) - (1 - x)\right)dx$$

$$Volumen = \int_{-3}^{1} 2\pi(3 - x)\,(-x^2 - 4x + 5)dx$$

$$Volumen = \int_{-3}^{1} 2\pi(3 - x)\,(-x^2 - 4x + 5)dx = \int_{-3}^{1} 2\pi(x^3 + x^2 - 17x + 15)\,dx$$

Integrando y evaluando:

$$2\pi\left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{17x^2}{2} + 15x\right)\Bigg|_{-3}^{1} = 117.3\, unidades\ de\ volumen$$

3

Unidad 3

Trabajo, momentos y centros de masa, longitud de una curva plana, teorema de Pappus

Cálculo integral

Autor: Edgar Palacino Antia

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina
MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Introducción

Es esta cartilla estudiaremos algunas aplicaciones más de la integral. En el estudio de la física clásica es una herramienta poderosa para estimar la fuerza que se aplica sobre un objeto o para determinar los centros de masa de un sólido. También es útil para conocer la longitud de una curva plana. Estas y las anteriores aplicaciones son solo algunas de la gran cantidad de aplicaciones que hacen uso de las propiedades de la integral para resolver problemas.

Recomendaciones metodológicas

Como el esquema de aprendizaje es autónomo, se recomienda al estudiante que haga un uso adecuado y responsable del tiempo de estudio y que, al momento de abordar la lectura de esta cartilla, lo haga con el tiempo suficiente y en un ambiente tranquilo para sacar el máximo provecho a esta lectura, y hacer énfasis en los ejemplos que se muestran en la misma. También se recomienda que el estudiante haga uso de las herramientas que brinda la plataforma como las videocápsulas y las lecturas complementarias para afianzar los conocimientos adquiridos.

Desarrollo temático

Trabajo, momentos y centros de masa, longitud de una curva plana, teorema de Pappus

Trabajo

En física, existen magnitudes tales como la masa, la distancia o el tiempo que son unidades básicas. A partir de estas unidades básicas se pueden obtener unidades derivadas tales como la velocidad (conjunción de distancia y tiempo), y así sucesivamente. Por definición el trabajo es el producto de aplicar una fuerza por una determinada distancia, sin embargo, en pocas ocasiones la fuerza es un valor absoluto, sino es una función, entonces si se desea calcular el valor del trabajo podemos emplear la siguiente expresión.

$$W = \int_a^b F(x)dx$$

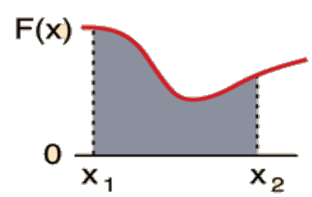


Figura 1
Fuente: Propia.

Siendo $F(x)$ una función que modela la fuerza aplicada en función de la distancia y dx un diferencial de distancia.

Veamos a través de los siguientes ejemplos la aplicación de esta fórmula.

Ejemplo: trabajo de bombeo. Un depósito de agua cilíndrico tiene 1 metro de radio y 10 metros de altura y se encuentra totalmente lleno, calcular el trabajo necesario para bombear toda el agua hasta la parte superior del depósito.

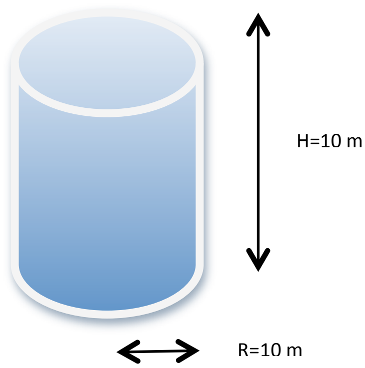


Figura 2
Fuente: Propia.

En este caso es una de las aplicaciones específicas del trabajo, podemos imaginar un cilindro con las dimensiones citadas. El trabajo de bombear el agua se puede aproximar al trabajo que realiza un pistón del mismo diámetro del tanque empujando el agua hacia arriba desde el fondo hasta el borde. La distancia que recorre el pistón en cada momento es $10 - y$ y tomamos un disco de tamaño $\pi r^2 \Delta y$. La fuerza equivale al peso que tiene el disco y que es una fuerza opuesta a la del pistón, entonces tenemos que multiplicar el volumen del disco $\pi r^2 \Delta y$ por la densidad del agua (1kg/m^3), entonces la fórmula que modela la fuerza en este caso es:

$$F(x) = (10 - y)\pi r^2 \left(\frac{1kg}{m^3}\right) \Delta y$$

Aplicando la integral y recordando que $r = 1\, metro$

$$\int_0^{10} (10 - y)\pi r^2 \left(\frac{1kg}{m^3}\right) \Delta y = 10\pi y - \pi \frac{y^2}{2}\Big|_0^{10} = 50\pi\, kg * m$$

Ejemplo: trabajo realizado por un gas confinado. Un ejemplo cásico es el empleado en termodinámica para estudiar el comportamiento de los gases confinados en recipientes cerrados con un embolo en uno de sus extremos. Supongamos que tenemos un gas confinado en condiciones normales, se expande de 20 a 30 cm^3. Suponiendo que el gas se comporta de manera ideal, calcular el trabajo realizado.

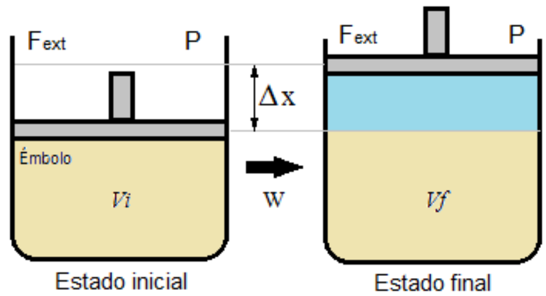


Imagen 1
Fuente: http://www.quimitube.com/wp-content/uploads/2013/04/embolo-movil-trabajo-expansion-compresion-gas.png

En los sistemas como el descrito, el trabajo realizado es debido a la presencia de presión que ejerce el gas sobre las paredes del recipiente $F = P * A$, este trabajo genera un cambio en el volumen del recipiente que podemos modelar así:

$$dV = Adx$$

$$\frac{dV}{A} = dx$$

Si recordamos la expresión integral del trabajo.

$$W = \int_a^b F(x)dx$$

Reemplazando las expresiones de fuerza y de dx anteriores obtenemos:

$$W = \int_a^b P * A\frac{dV}{A}$$

Eliminando términos obtenemos:

$$W = \int_{v_2}^{v_1} PdV$$

La cual es la expresión base del trabajo ejercido por un fluido en confinamiento.

En este ejemplo el gas se comporta de manera ideal, así que su comportamiento es regido por la siguiente expresión:

$$PV = nRT$$

Donde n es la masa molar del gas, la cual para este ejercicio es 1 mol, R es la constante de los gases ideales (82,0562 atm cm3 mol-1 K-1). Despejando de la ecuación de los gases ideales P obtenemos:

$$P = \frac{nRT}{V}$$

Y reemplazando en la expresión integral de trabajo.

$$W = \int_{v_2}^{v_1} \frac{nRT}{V} dV$$

Como la masa molar, la constante universal de los gases y la temperatura son constantes para este caso pueden ser sacadas de la integral.

$$W = nRT \int_{v_2}^{v_1} \frac{dV}{V}$$

Integrando obtenemos:

$$W = nRT \ \ln \frac{V_2}{V_1}$$

Como en el ejercicio se menciona que el gas esta a condiciones normales, la temperatura es igual a 0ºC (273 K) y la masa molar n es 1 mol. Reemplazando los valores obtenemos:

$$W = (1\,mol)(82{,}0562 \text{ atm cm3 mol} - 1 \text{ K} - 1)(273 \text{ k}) \ln \frac{30 \text{ cm}^3}{20 \text{ cm}^3} = 9.082 \text{ N} - \text{m}$$

Ejemplo: otra aplicación interesante de las integrales con respecto al trabajo mecánico son los resortes. La fuerza necesaria para deformar un resorte (comprimirlo o estirarlo) puede ser modelada por la Ley de Hooke.

$$F(x) = kx$$

Donde k es la constante del resorte.

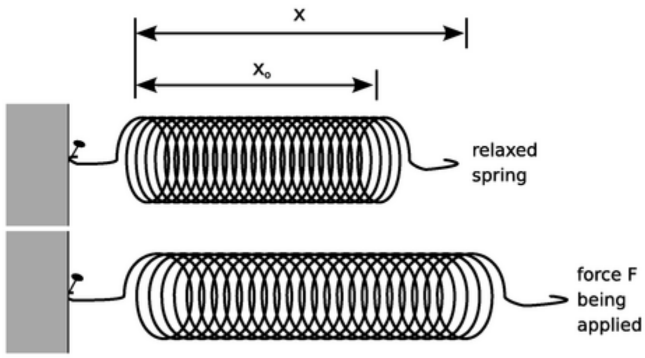


Imagen 2. Ley de Hooke

Fuente: http://coccweb.cocc.edu/bemerson/public_html/physics/ZGlobalResources/CCTextAlgebra/ATNewtonian/images/Forces/hooke-definitions.png

Un resorte con longitud natural de 10 cm se extiende 3 cm cuando se le aplica una fuerza de 5 libras ¿Qué trabajo se debe realizar sobre el resorte si se desea extender desde su longitud natural hasta 15 centímetros?

Los primeros datos dados nos permiten calcular la constante del resorte. Empleando la Ley de Hooke tenemos:

$$F(x) = kx$$

$$5\ libras = k3\ cm$$

$$k = \frac{5}{3} libras/cm$$

Entonces la función se puede expresar:

$$F(x) = \frac{5}{3}x$$

Ahora, como la longitud natural del resorte es 10 cm, al extenderse 15 cm la deformación total es 5 cm.

Aplicando la ecuación del trabajo en resorte:

$$\int_a^b kx\,dx = \int_0^5 \frac{5}{3}x\,dx$$

Integrando:

$$\frac{5}{3}\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^5 = \frac{125}{6}\ libras$$

Momentos y centros de masa

El equilibrio mecánico se logra cuando un objeto se coloca de tal manera que no genere o sufra desplazamiento alguno. Cuando se está trabajando con superficies pequeñas, este equilibrio se logra cuando el objeto se coloca sobre su centro de masa, para comprender de manera más sencilla este concepto vamos a colocar un ejemplo.

Supongamos que tenemos dos masas, una a cada extremo de una tabla rectangular y debajo de esta superficie existe un punto de apoyo o fulcro (algo similar a un balancín o sube-baja). Si colocamos un eje cartesiano con origen en el punto de apoyo, existirá una posición del punto de apoyo que permita a las masas estar en equilibrio. Para poder estimar estas posiciones emplearemos el concepto de momento.

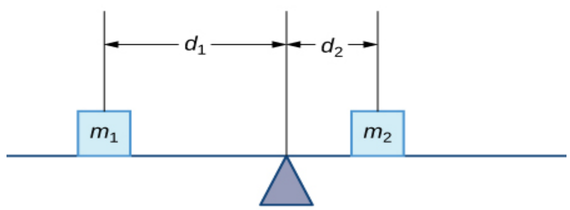


Figura 3
Fuente: Propia.

El momento es el producto de la masa del objeto multiplicada por la distancia que existe entre el punto de apoyo y su posición, para que el sistema este en equilibrio es necesario que la suma de todos los momentos sea igual a cero, es decir matemáticamente.

$$x_1 m_1 + x_2 m_2 = 0$$

Siendo x la distancia de cada una de las masas con respecto al punto de equilibrio.

Ya que las masas se consideran constantes en cada situación, se debe hallar la posición del punto de equilibrio de tal manera que los valores de x satisfagan la ecuación anteriormente vista. Este punto se le llama **centro de masa**.

Cuando el sistema no está en equilibrio, la sumatoria de los momentos tiene un valor M.

$$x_1 m_1 + x_2 m_2 = M$$

Existe un punto $\overline{x}$ de tal manera la sumatoria de los momentos que se obtienen al multiplicar cada masa por la diferencia entre su posición y dicho punto sea cero.

$$(x_1 - \overline{x})m_1 + (x_2 - \overline{x})m_2 = 0$$

Eliminando paréntesis y reagrupando términos semejantes obtenemos:

$$x_1m_1 + x_2m_2 = \overline{x}(m_1 + m_2)$$

$$\overline{x} = \frac{x_1m_1 + x_2m_2}{(m_1 + m_2)}$$

Esta deducción se puede generalizar a un número n de masas.

$$\overline{x} = \frac{M}{m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

En el caso en que deseamos calcular el centro de masa de un alambre (que sería el símil del caso anterior con un número infinito de masas a lo largo de su longitud), podemos imaginarnos un alambre con densidad lineal modelada por la función $\delta(x)$, lo cual permite estimar la masa de una pieza de alambre de longitud Δx en función de la longitud, asimilando a la ecuación anterior podemos afirmar que:

$$\overline{x} = \frac{M}{m} = \frac{\int_a^b x\delta(x)dx}{\int_a^b \delta(x)dx}$$

Ejemplo: la densidad de un alambre es dada por la función $\delta(x) = 4x^2$ con unidades de gramo por centímetro. Encontrar el centro de masa entre los puntos $x = 0$ y $x = 15$.

Aplicando la ecuación anterior con $\delta(x) = 4x^2$ obtenemos:

$$\overline{x} = \frac{M}{m} = \frac{\int_a^b x(4x^2)dx}{\int_a^b 4x^2dx}$$

Integrando:

$$\left.\frac{x^4}{\frac{4}{3}x^3}\right|_0^{15} = \left.\frac{3}{4}x\right|_0^{15} = 11.25\ cm$$

Sin embargo, un modelo más cercano al real es el caso en que se requiera hallar el centro de masa de una lámina finita. Para facilitar el análisis consideramos que la lámina tiene una densidad uniforme en toda su extensión (δ), entonces el centro de masa debe coincidir con el centro geométrico. Si la lámina está comprendida entre dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ en el intervalo (a, b), entonces, para determinar el centro geométrico podemos tomar una pieza de ancho Δx, escribiendo las ecuaciones para la masa y para las dimensiones tanto en el eje x como el y tenemos:

Masa:

$$\Delta m \approx \delta[f(x) - g(x)]\Delta x$$

Variable y:

$$\Delta M_y \approx x\delta[f(x) - g(x)]\Delta x$$

Variable x:

$$\Delta M_x \approx \frac{f(x) - g(x)}{2}\delta[f(x) - g(x)]\Delta x$$

Pasando las anteriores ecuaciones a forma integral resultan.

Masa:

$$m = \delta \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$$

Variable y:

$$M_y = \delta \int_a^b x[f(x) - g(x)]\, dx$$

Variable x:

$$M_x = \frac{\delta}{2} \int_a^b \left[\left(f(x)\right)^2 - (g(x))^2\right] dx$$

Recordando la ecuación para determinar el centro de masa en cada una de las variables.

$$\overline{x} = \frac{M_y}{m}$$

$$\overline{y} = \frac{M_x}{m}$$

Reemplazando las ecuaciones:

$$\overline{x} = \frac{\int_a^b x[f(x) - g(x)]\,dx}{\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx}$$

$$\overline{y} = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b \left[\left(f(x)\right)^2 - (g(x))^2\right] dx}{\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx}$$

Se puede observar en estas últimas ecuaciones que el centro de masas no depende de la densidad de la lámina, sino de las funciones que la limita, haciendo que este problema no sea de tipo físico sino geométrico. A este punto se le conoce mejor con el nombre de centroide.

Ejemplo: determinar el centroide de la región limitada por las ecuaciones $y = x^3$ y $y = \sqrt{x}$.

Los puntos donde ambas ecuaciones coinciden son 0 y 1, así que son los límites de integración para el ejercicio.

Aplicando las ecuaciones

$$\overline{x} = \frac{\int_a^b x[f(x) - g(x)]\,dx}{\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx} = \frac{\int_0^1 x\left[\sqrt{x} - x^3\right] dx}{\int_0^1 \left[\sqrt{x} - x^3\right] dx} = \frac{\int_0^1 x\left[\sqrt{x} - x^3\right] dx}{\int_0^1 \left[\sqrt{x} - x^3\right] dx}$$

$$= \frac{\frac{2}{5}\sqrt{x^5} - {x^5}/{5}\Big|_0^1}{2\sqrt{x^3}/3 - {x^4}/{4}\Big|_0^1} = \frac{1/5}{5/12} = \frac{12}{25}$$

$$\overline{y} = \frac{\frac{1}{2}\int_0^1 \left[\left(\sqrt{x}\right)^2 - (x^3)^2\right] dx}{\int_0^1 \left[\sqrt{x} - x^3\right] dx} = \frac{\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^7}{7}\right]\Big|_0^1}{5/12} = \frac{3}{7}$$

Longitud de una curva plana

Cuando se tiene una función, en ocasiones surge la necesidad de calcular la longitud de esta función, es decir, cuan larga es la función. Para poder resolver esta situación es necesario expresar la función en función de un parámetro t, y la longitud de la curva estará dada por:

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt$$

Si la función es explicita ($y = f(x)$ o $x = g(y)$) la anterior fórmula puede reducirse a las siguientes expresiones:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + [g'(y)]^2}\, dy$$

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo: determinar la longitud de la circunferencia modelada por la ecuación. $x^2 + y^2 = 1$

Para paramétrizar la ecuación de un círculo generalmente se emplea las siguientes fórmulas:

$$x^2 + y^2 = a^2$$

$$x = a\cos t$$

$$y = a\sin t$$

Con $0 \leq t \leq 2\pi$

Como $a^2 = 1$, reemplazando:

$$x = \cos t$$

$$y = \sin t$$

Aplicando la fórmula de la longitud en términos paramétricos.

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}\, dt = 2\pi$$

Ejemplo: hallar la longitud de la curva $y = x^2$ en el intervalo $(0, 5)$.

Como la función se encuentra de manera explícita de la forma $y = f(x)$ podemos emplear la fórmula.

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

Derivando la función obtenemos $f'(x) = 2x$

$$L = \int_0^5 \sqrt{1 + [2x]^2}\, dx = \int_0^5 \sqrt{1 + 4x^2}\, dx$$

Integrando obtenemos:

$$\int_0^5 \sqrt{1 + 4x^2}\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{4x^2 + 1}x + \frac{1}{2} ln\left(\sqrt{4x^2 + 1} + 2x\right)\Big|_0^5 = \frac{5}{2}\sqrt{101}$$

Teorema de Pappus

El teorema de Pappus fue formulado por el matemático griego Pappus de Alejandría (290 –350), y se le conoce más exactamente por el nombre "Teorema del centroide de Pappus" y relaciona el volumen del solido de revolución con la distancia a la cual el centroide del área se encuentra del eje de revolución a través de la siguiente fórmula.

$$V = 2\pi A\overline{y}$$

Donde A es área de la superficie que genera el sólido de revolución y $\overline{y}$ es la posición del centroide en el eje y, esto equivale a que el área esta rotando sobre el eje x, en caso de rotar sobre el eje y se debe emplear $\overline{x}$.

Este teorema es especialmente útil cuando se desea calcular el volumen de un toro.

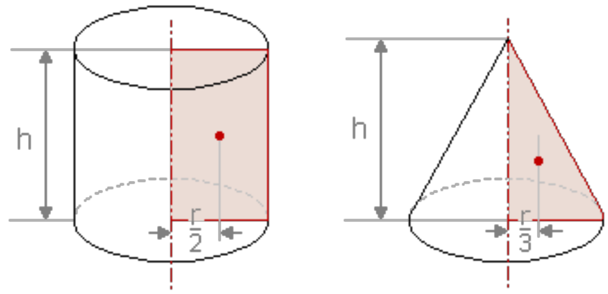


Imagen 3. Centroides de figuras geométricas comunes
Fuente: http://www.vias.org/comp_geometry/img/geom_3d_volume_revol.gif

Ejemplo: calcular el volumen que se genera al rotar el área generada por la intersección de las funciones $y = x^3$ y $y = \sqrt{x}$ al ser rotada alrededor del eje y.

Como la rotación se realiza alrededor del eje y, necesitamos la posición del centroide del área con respecto a x. Del ejemplo 6.5 tenemos:

$$\overline{x} = \frac{12}{25}$$

El área a rotar se obtiene al realizar la integral:

$$A = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^3\right) dx = \sqrt{x^3} - \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{3}{4}\ unidades\ de\ area$$

Aplicando el teorema de Pappus:

$$V = 2\pi A\overline{y} = 2\pi \frac{3}{4}\left(\frac{12}{25}\right) = \frac{72}{100}\pi\ unidades\ de\ volumen$$

4

Unidad 4

Sucesiones y series

Cálculo integral

Autor: Edgar Palacino Antia

Fundación Universitaria del Área Andina
MIEMBRO DE LA RED ILUMNO

Introducción

Las sucesiones y series son herramientas poderosas para modelar fenómenos físicos a través en matemáticas, es necesario aclarar que no es igual a las sumatorias matemáticas, ya que estas son la suma de los términos de una sucesión. A lo largo de la cartilla veremos las propiedades básicas de las sucesiones y series y las operaciones que podemos realizar sobre ellas y las series de Taylor y Maclaurin.

Recomendaciones metodológicas

Se recomienda al estudiante que haga un manejo adecuado del tiempo disponible para estudio y que realice la lectura de esta cartilla y de las lecturas recomendadas de manera detenida y haciendo especial énfasis en los ejemplos que pueda encontrar. También se recomienda la visualización de las videocapsulas y demás recursos que tiene a su disposición el estudiante para asegurar un afianzamiento de su comprensión de los temas expuestos.

Desarrollo temático

Sucesiones y series

Una sucesión es un arreglo ordenado de números reales, sin embargo es poco práctico nombrar a cada uno de los elementos de una sucesión, sin embargo es posible desarrollar una función que determine las características de la sucesión de estudio, lo cual es muy útil cuando se trabaja con sucesiones infinitas.

Las funciones que describen las sucesiones pueden escribirse de manera explícita o empleando una fórmula de recursión, por ejemplo para la sucesión:

$$1, 4, 7, 10, 11, 13, 15, \dots$$

Se puede escribir de manera explícita empleando la fórmula:

$$a_n = 3n - 2, n \geq 1$$

De igual manera la fórmula de recursión es la siguiente:

$$a_n = a_{n-1} + 3, n \geq 2, a_1 = 1$$

Una de las propiedades más importantes para una sucesión es su convergencia.

Convergencia

La convergencia de una sucesión se da cuando los términos generados a través de la función cada vez se aproximan a un número determinado L. Formalmente podemos escribir:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L$$

En caso en que el límite anteriormente enunciado no exista, se dice que la sucesión diverge.

Este límite obedece a las leyes que se aplican a cualquier límite, así que es sencillo determinar su una sucesión diverge o converge.

Ejemplo: determinar si converge o no la sucesión modelada por la función.

$$a_n = \frac{3n^2 + 8}{7n^2 + 3n + 1}$$

Tomando $Lim\ n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 + 8}{7n^2 + 3n + 1}$$

Dividiendo en n^2

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3n^2+8}{n^2}}{\frac{7n^2+3n+1}{n^2}} = \frac{3 + {}^{8}/_{n^2}}{7 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{3}{7}$$

Consecuentemente la sucesión converge al valor de 3/7.

Ejemplo: determinar si converge o no la sucesión modelada por la función.

$$a_n = \frac{n^2}{n + 1}$$

Tomando $Lim\ n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n + 1}$$

Dividiendo en n^2

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2/n^2}{n + {}^{1}/_{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} = \infty$$

Como el límite de la sucesión es∞, consecuentemente no existe y por lo tanto la sucesión diverge.

Series infinitas

Como lo mencionamos anteriormente, la diferencia entre sucesión y serie es que la serie es la suma de los elementos que forma una sucesión. En ocasiones para poder modelar un fenómeno es necesario realizar la suma de los elementos de una sucesión, y si el resultado de esta suma se acerca cada vez más a un valor determinado se considera que la serie converge.

Para poder probar esto tenemos que definir el término sumas parciales, las sumas parciales de una serie es la suma de un número finito de elementos y si estas sumas parciales convergen, también lo hace la serie, formalmente se escribe.

Sea una serie dada por $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$, entonces existe un valor S_n tal que:

$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

Siendo S_n la sumatoria parcial. Si la sucesión es convergente y además existe el límite.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

Siendo S un número real, entonces la serie es convergente y se puede escribir

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

Ejemplo: determinar si la suma parcial converge o no.

$$s_n = \frac{2n}{3n+5}$$

Tomando $Lim\, n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{3n+5}$$

Dividiendo en n

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{3 + {}^{5}/_{n}} = 2/3$$

Como el límite existe y es un numero real afirmamos que la suma parcial existe y por lo tanto también su serie infinita.

De lo anterior surge una propiedad particular.

Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Sin embargo la propiedad inversa no es necesariamente correcta, pues el límite puede ser 0 sin embargo la serie ser divergente.

Pruebas de integral y de comparación

En algunos casos es difícil determinar la convergencia o no de una serie infinita, ya que encontrar el límite puede ser difícil o bien porque algunas series tienen tendencia a crecer de manera muy lenta, sin embargo, podemos emplear las herramientas del cálculo integral para determinar la convergencia o no de una serie infinita.

Prueba de integral

Supongamos una función f que es continua, positiva, decreciente en el intervalo $[1,\infty)$ y supongamos que $f(n) = a_n$. Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ Converge si y solo si la integral impropia $\int_0^{\infty} f(x)\,dx$ converge.

Este teorema es realmente útil pues nos permite emplear todas las técnicas del cálculo integral para saber si una serie infinita converge o no.

Ejemplo: determinar si la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ converge o no.

Para determinar de una manera sencilla si la serie converge aplicamos la prueba de la integral.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n} = \int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$$

Cabe anotar que como la serie inicia en 2, el límite inferior de la integral indefinida también es 2 sin que esto afecte el teorema.

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx = \lim_{t\to\infty} \int_2^{t} \frac{1}{x \ln x} dx$$

Integrando:

$$\lim_{t\to\infty}\int_2^t \frac{1}{x\ln x}\,dx = \lim_{t\to\infty}(\ln\ln x)|_2^t = \infty$$

Como el límite es ∞, entonces la integral impropia diverge y por lo tanto también la serie.

Ejemplo: determinar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$ converge o no.

La función que nos permite determinar si la serie converge o no es.

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

Esta función cumple con las condiciones mencionadas anteriormente, así que podemos emplear la prueba de la integral.

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2+1}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

Evaluando la integral obtenemos:

$$\lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{x^2+1}\,dx = \lim_{t\to\infty}\tan^{-1}x\Big|_1^t = \frac{\pi}{4}$$

Como el límite existe y es un número real, la integral impropia converge y por lo tanto la serie converge.

Pruebas de comparación

Prueba de comparación clásica

La prueba de comparación se basa en el hecho que si una serie cuyos valores son inferiores a otra serie y esta ultima converge, entonces la serie original también debe converger, escrito en términos matemáticos es:

Supongamos que $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son series y todos sus términos son positivos, entonces:

Si $\sum b_n$ es convergente y si $a_n \le b_n$ para todo n, entonces $\sum a_n$ también converge.

Lo anterior también es aplicable en el sentido inverso, es decir si $\sum b_n$ diverge, entonces $\sum a_n$ también diverge.

La habilidad para encontrar series que cumplan con lo anterior es cuestión de práctica.

Ejemplo: determinar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2+4n+3}$ converge.

Para hallar una serie $\sum b_n$ podemos aplicar el hecho que para un valor n el término $2n^2$ comienza a dominar en el denominador, así que la serie $\sum 5/2n^2$ es más grande que la serie que analizamos, así que podemos escribir:

$$\frac{5}{2n^2 + 4n + 3} < \frac{5}{2n^2}$$

Por lo tanto si la serie de la derecha converge, también debe hacerlo la serie de la izquierda.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2n^2} = \frac{5}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Aplicando la prueba de la integral al último término obtenemos:

$$\lim_{t \to \infty} \frac{5}{2} \int_1^t \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t \to \infty} -\frac{5}{2} \left[\frac{1}{x}\right]\Bigg|_1^t = -\frac{5}{2}$$

Por lo tanto dicha integral existe, la integral impropia converge y la serie converge, y por esa razón la serie infinita original debe converger.

Prueba de comparación de límite

Otra prueba de comparación que se puede emplear similar a la anterior es la prueba de comparación de los límites, el cual, con las anteriores consideraciones, dice que si:

$$\lim_{t \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = c$$

Donde c es un número finito mayor a 0, entonces ambas series convergen o divergen.

Esta prueba presupone que sabemos si alguna de las dos series converge o diverge y por inducción la otra también convergirá o divergirá.

Ejemplo: determinar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n-1}$ converge.

En este caso necesitamos comparar con una serie que sepamos de antemano su comportamiento, escogiendo:

$$b_n = \frac{1}{2^n}$$

Entonces:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{t\to\infty} \frac{\frac{1}{2^n-1}}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{t\to\infty} \frac{2^n}{2^n - 1}$$

Dividiendo en 2^n:

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{1 - 1/2^n} = 1$$

Como el límite es > 0 y se sabe que $\frac{1}{2^n}$ es una serie geométrica convergente, entonces la serie $\frac{1}{2^n-1}$ converge.

Prueba de razón

La prueba de razón usa el hecho de comparar dos elementos de la serie y determinar el límite de su coeficiente.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$$

Si $\rho < 1$, entonces la serie converge, la $\rho > 1$ diverge y si $\rho = 1$ la prueba no es concluyente.

Ejemplo: determinar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ Converge.

Aplicando la prueba de la razón tenemos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0$$

Como $\rho = 1$ entonces la serie converge.

Series de potencia

Una serie de potencia es una serie cuyos elementos son funciones de x, un ejemplo puede ser:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n\, x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$$

Donde c_n son los coeficientes de la serie. Para cada x, la serie de potencia se transforma en una serie infinita con las mismas propiedades que cualquier serie, por lo tanto una serie de potencia puede converger para determinado valores de x y divergir para otros.

Otra forma que puede adoptar una serie de potencia es la siguiente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots$$

La cual es una serie de potencia en $(x-a)$ o centrada en a

Entonces el principal problema que surge en las series de potencia es calcular para qué valores de x la serie converge, que generalmente es un conjunto o intervalo, el cual llamamos radio de convergencia.

El radio de convergencia puede ser uno de estos tres casos:

- Un único punto en $\mathrm{x} = 0$.
- Un intervalo abierto o cerrado en ambos extremos o en uno de ellos.
- Todo el intervalo real.

Ejemplo: hallar el radio de convergencia de la siguiente serie de potencia.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(n+1)^2}$$

Para encontrar el radio de convergencia utilizamos alguna de las pruebas que vimos anteriormente para determinar la convergencia o no de la serie y por último determinamos el punto o el intervalo donde la función converge.

Empleando la prueba de la razón:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}\,(x-a)^{n+1}}{\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(x-a)^n} = \rho = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(x-1)^{n+1}}{(n+2)^2}}{\frac{(x-1)^n}{(n+1)^2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} |x-1| \frac{(n+1)^2}{(n+2)^2} = |x-1|$$

La serie converge si $|x-1| < 1$, es decir en el intervalo 0<x<2, incluyendo sus extremos, por lo tanto el radio de convergencia es $[0, 2]$.

Cabe anotar que las series de potencia se ven afectadas por las operaciones algebraicas así como por la diferenciación e integración al igual que cualquier otra función, y que, dependiendo de la operación, su radio de convergencia puede o no verse afectado al momento de operar sobre las series de potencia. Este resultado es especialmente interesante para hallar expresiones algebraicas que permitan modelar una serie de potencia, sin embargo este tema se abordara al momento de introducir el tema de ecuaciones diferenciales.

Series de Taylor y Maclaurin

Las series de Taylor son una poderosa herramienta que nos permite modelar una función conocida en términos de series de potencia, esto es particularmente interesante y útil porque reduce funciones complejas a términos triviales que facilitan su cálculo y aproximación numérica. Se deja a discreción del estudiante el estudio de la deducción de la ecuación de las series de Taylor que emplea la propiedad de derivabilidad de las series de potencia. La fórmula general de las series de Taylor es la siguiente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n$$

Si $a = 0$ entonces se constituye un caso especial que es conocido como series de Maclaurin.

Entre mayor sea la cantidad de términos empleados en la serie de potencia, mayor será la exactitud de la aproximación con respecto a la función original, para $n = 0$ el termino es la función original evaluada en el punto a. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo: encuentre la serie de Taylor para $f(x) = e^x$ centrada en $a = 2$.

Debido a la peculiaridad de la función e sabemos que $f^n(2) = e^2$, aplicando la definición de la series de Taylor.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^2}{n!}(x-2)^n$$

Se puede comprobar que el radio de convergencia es todo número real en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

Ejemplo: encuentre la serie de Maclaurin que modela $\sin x$.

Para hallar la serie de Maclaurin debemos hallar las primeras derivadas de la función en cuestión y evaluarlas en $x = 0$.

$$f(x) = \sin x \;\; f(0) = 0$$

$$f'(x) = \cos x \;\; f'(0) = 1$$

$$f''^{(x)} = -\sin x \;\; f''(0) = 0$$

$$f'''^{(x)} = -\cos x \;\; f'''^{(0)} = -1$$

$$f^4(x) = \sin x \;\; f^4(0) = 0$$

Este patrón se repite de manera sucesiva, así que es susceptible de modelarse por una serie de potencia.

Aplicando la fórmula general tenemos:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(a)}{n!}(x)^n = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots$$

Al aumentar el número de términos de la serie de potencia aumenta la precisión de la aproximación con respecto a la serie original.

Si tomamos el límite a la serie de Maclaurin este será igual a cero, por lo tanto la serie converge para todo valor de x.

Algunos desarrollos en series de Maclaurin de las series más importantes

En la literatura se encuentran tablas de los desarrollos en series de potencia de Maclaurin de las funciones más importantes y sus radios de convergencia, en caso que el radio de convergencia no es indicado, es todo el intervalo real.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^2 + \cdots \qquad -1 < x < 1$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \cdots \quad -1 < x < 1$$

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots - \qquad 1 < x < 1$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

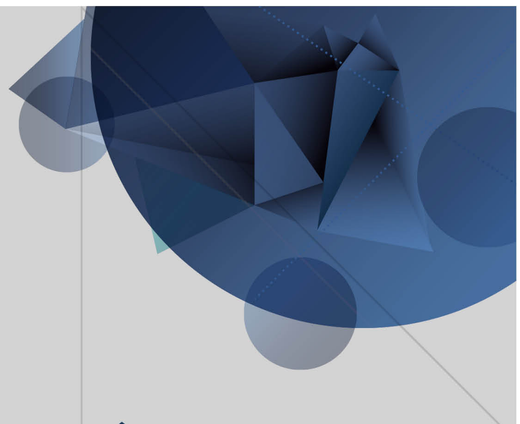
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$(1+x)^p = 1 + \binom{p}{1} x + \binom{p}{2} x^2 + \binom{p}{3} x^3 + \cdots \quad 1 < x < 1$$

4

Unidad 4

Integrales dobles, integrales iteradas, integrales triples



Cálculo integral

Autor: Edgar Palacino Antia

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina
MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

Introducción

El estudio de las integrales múltiples constituyen el culmen y generalización del estudio de las integrales en el cálculo, todos los teoremas y propiedades que se han explicado para las integrales de una serie variable también se aplica para las integrales de varias variables. Estas integrales nos permiten modelar fenómenos aun más complejos que lo que nos permite las integrales de una sola variable y tiene múltiples aplicaciones en el mundo real. Con este tema se concluye el curso de cálculo integral y se dan las últimas herramientas para el estudio del cálculo vectorial y ecuaciones diferenciales.

Recomendaciones metodológicas

Como en las anteriores cartillas, se recomienda al estudiante la lectura detallada y detenida del contenido de esta cartilla y el uso de las herramientas brindadas en la plataforma para el afianzamiento y fortalecimiento del conocimiento adquirido por parte de los estudiantes. También se recomienda elaborar los ejercicios propuestos de repaso con el fin de preparar el examen final del curso.

Desarrollo temático

Integrales dobles, integrales iteradas, integrales triples

Integrales dobles

Las integrales dobles se originan de la inquietud sobre la necesidad de calcular un volumen que se modela con base a dos variables, recordemos que ya hemos hablado sobre el tema de cálculo de volúmenes, sin embargo siempre expresamos las funciones en términos de una sola variable, en este tema abordaremos la posibilidad de integrar funciones expresadas en términos de dos variables y su significancia física, así como las propiedades que poseen dichas integrales y que nos brindaran herramientas para el desarrollo de sus integrales.

Recordemos que el origen de la integral proviene de la aproximación pro sumas de Riemann del área de una región.

$$\int_b^b f(x)\,dx = \lim_{|p|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\overline{x_k})\,\Delta x_k$$

Si pensamos en un área del plano x, y limitados por los puntos a, b, c, d, tomamos un valor diferencial de área y evaluamos la función $f(x, y)$ en ese punto obtendremos la suma doble de Riemann expresada como:

$$\sum_{k=1}^{n} f(\overline{x_k}, \overline{y_k})\,\Delta A_k$$

Tomando el límite cuando el tamaño de la partición P tiende a cero obtenemos:

$$\lim_{|p|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\overline{x_k}, \overline{y_k})\,\Delta A_k = \iint_R f(x, y)\,dA$$

La cual es la integral sobre el área R.

Aun no hemos definido los límites para esta integral doble, ya que estos dependen de la naturaleza de la función doble y del área de integración, primero enunciaremos algunas propiedades de la integral doble y en el tema de integrales iteradas estudiaremos los límites de integración.

Propiedades de la integral doble

A continuación enunciaremos algunas propiedades que ya se definieron para la integral de una sola variable, constituyéndose extensiones y generalizaciones de estas propiedades.

Teorema de integrabilidad

El teorema de integrabilidad para integrales de una sola variable afirma que si la función $f(x)$ esta definida en el intervalo L y es suave sin ninguna discontinuidad en el mismo, entonces la función $f(x)$ es integrable en dicho intervalo. Su extensión a una función de dos variables nos indica que si la función $f(x, y)$ es continua, suave y no presenta discontinuidades en el área de integración A entonces la función $f(x, y)$ es integrable en dicha área. Cabe anotar que, aunque la función $f(x, y)$ posea discontinuidades en el área de integración, aun puede ser integrable en el mismo como en los casos que estudiamos para las funciones monovariables.

Linealidad de la integral doble

Al igual que las integrales ya estudiadas, las integrales dobles poseen la propiedad de linealidad de dos tipos, a saber:

$$\iint_R kf(x,y)\,dA = k\iint_R f(x,y)\,dA$$

$$\iint_R (f(x,y)+g(x,y))\,dA = \iint_R f(x,y)\,dA + \iint_R g(x,y)\,dA$$

Estas propiedades nos facilitan el cálculo de las integrales como ya estudiamos en semanas anteriores.

Aditividad de las regiones de integración

Las integrales dobles pueden evaluarse en dos regiones continuas si no existe alguna singularidad entre ambas, al igual que en las integrales de una sola variable se podía dividir el intervalo de integración en dos.

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \iint_{R_1} f(x,y)\,dA + \iint_{R_2} f(x,y)\,dA$$

Donde $R = R_1 + R_2$

Propiedad de comparación

Si $f(x, y) \leq g(x, y)$ para todo (x, y) en R, entonces:

$$\iint_R f(x, y)\, dA \leq \iint_R g(x, y)\, dA$$

Cabe anotar que al enunciar estas propiedades hemos empleado el término R para describir el área de integración. En la siguiente sección veremos las condiciones que se requieren para calcular los límites de las integrales.

Integrales iteradas

Integrales iteradas sobre un rectángulo

Después de conocer la definición y propiedades de las integrales dobles ahora nos enfrentamos al desafío de determinar la integral que obtenemos al integrar una función de dos variables. El primer paso para afrontar este desafío es definir el límite del área de integración.

La primera aproximación es realizar la integración sobre un área rectangular con límites en los valores de $a < x < b$ y $c < y < d$, realizando todo el proceso de aproximación por rectángulos para la variable y obtenemos:

$$V = \int_c^d A(y)\, dy$$

Sin embargo el área $A(y)$ se puede expresar de la siguiente forma:

$$A(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx$$

Combinando ambas ecuaciones:

$$V = \int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dx\, dy$$

Lo cual se conoce como integral iterada.

Si repetimos el proceso iniciando por la variable x obtendremos una expresión similar:

$$V = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$$

Lo que nos muestra que una integral iterada puede evaluarse en cualquier orden con respecto a las variables, este hecho nos permitirá en ocasiones facilitar algunos cálculos.

Ejemplo: calcular la integral $\int_0^5 \int_0^5 (3x+2y)dxdy$.

Para resolver esta integral iterada comenzamos por la integral interna, en esta integral, como el diferencial es con respecto a x, la variable y se considera constante, entonces:

$$\int_0^5 \int_0^5 (3x+2y)dxdy = \int_0^5 \left(\frac{3}{2}x^2 + 2yx\right)\Big|_0^5 dy = \int_0^5 \left(\frac{75}{2} + 10y\right) dy$$

La integral resultante se integra de la manera usual empleando como variable y:

$$\int_0^5 \left(\frac{75}{2} + 10y\right) dy = \left(\frac{75}{2}y + \frac{10}{2}y^2\right)\Big|_0^5 = \frac{375}{2} + \frac{250}{2} = \frac{625}{2}$$

Integrales sobre regiones no rectangulares

En pocas ocasiones encontraremos que la evaluación de una integral iterada este limitada a un rectángulo, generalmente el caso será que el límite en una de las variables es una función de la otra variable, así que la región de integración se puede expresar de la siguiente forma.

$$A = (a \leq x \leq b, \emptyset_1(x) \leq y \leq \emptyset_2(x))$$

Donde $\emptyset(x)$ es una función que limita en el eje y la región de integración.

Aplicando la fórmula de integral iterada con esto límites obtenemos:

$$V = \int_a^b \int_{\emptyset_1(x)}^{\emptyset_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

Si repetimos el proceso pero definiendo una función $\varphi(y)$ obtenemos su similar.

$$V = \int_{c}^{d} \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)\, dx\, dy$$

Ejemplo: evaluar la integral $\int_0^5 \int_0^{y^2} (3x + 2y)dxdy$

Es la misma integral del ejemplo anterior, lo único que cambia es el límite de la región de integración en el eje x, evaluando la integral interna.

$$\int_0^5 \int_0^{y^2} (3x + 2y)dxdy = \int_0^5 \left(\frac{3}{2}x^2 + 2yx\right)\Big|_0^{y^2} dy$$

$$= \int_0^5 \left(\frac{3}{2}y^4 + 2y^3\right) dy$$

Ahora integrando con respecto a y:

$$= \left(\frac{3}{10}y^5 + \frac{1}{2}y^4\right)\Big|_0^4 = 307.2 + 128 = 435.2$$

Ejemplo: evaluar la integral $\int_0^1 \int_0^{y^2} ye^x dxdy$

Evaluando la integral interna:

$$\int_0^1 \int_0^{y^2} ye^x dxdy = \int_0^1 ye^x|_0^{y^2} dy$$

$$= \int_0^1 (ye^{y^2} - ye^0)\, dy = \int_0^1 (ye^{y^2} - y)\, dy$$

Evaluando la integral externa empleando el método de sustitución para la primera integral.

$$= \left(e^{y^2} - \frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^1 = e - 1 - \frac{1}{2} = e - \frac{3}{2}$$

Integrales dobles en coordenadas polares

Las coordenadas polares son semejantes a las coordenadas cartesianas, con la diferencia que los dos elementos que definen la posición de un punto en este sistema coordenado es el ángulo con respecto al eje horizontal (θ) y la distancia con respecto al origen (r). La fórmula general de la integral doble expresada en coordenadas polares es:

$$\iint_A f(x,y)dA = \iint_A f(r\cos\theta\,, r\sin\theta)r\;dr\;d\theta$$

Al momento de enfrentar un problema y se desee resolver en ecuaciones polares se debe tener en cuenta los nuevos límites de integración para el área.

Ejemplo: determinar el volumen del solido limitado por la superficie $z = e^{x^2+y^2}$ y por la región polar de radio = 1 y ángulo de barrido π/4.

Este ejercicio es sencillo de resolver en coordenadas polares, tanto por el área de integración como por la función que limita al volumen en el eje z, recordando que:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

La integral se transforma en:

$$\iint_A e^{x^2+y^2}\,dA = \iint_A e^{r^2} r\;drd\theta$$

Los límites de integración son $0 \le r \le 1$ y $0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^1 e^{r^2} r\;drd\theta$$

Empleando sustitución realizamos la integral interna:

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}e^{r^2}\Big|_0^1\, d\theta = \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (1-e)\, d\theta$$

Integrando con respecto a θ:

$$= \frac{1}{2}(\theta - e\theta)|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}e\right) = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{8}e$$

Integrales triples

Si realizamos el proceso que empleamos cuando dedujimos la integral doble, pero en esta ocasión para tres variables (x, y, z), obtendremos una expresión para calcular la integral triple sobre un delta de volumen. Esto demuestra que podemos extender el concepto de integral a n variables, aunque a partir de la integral cuádruple pueda no tener sentido físico.

Las integrales triples cumplen con las propiedades enunciadas anteriormente para las integrales de una y dos variables e igual puede permutarse el orden de integración como se estudio en las integrales dobles.

Analizaremos primero el caso de la integración de una función $f(x, y, z)$ en una caja rectangular.

Ejemplo: evaluar la integral $\iiint_B xyz\, dV$.

Donde B es la región limitada por:

$$B = (0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1)$$

La integral corresponde a la función xyz que equivale a un plano inclinado con origen en $(0,0,0)$ y la región de integración a un cubo unitario con origen en el centro del plano. El resultado de la integral puede entenderse como "la densidad" del cubo unitario. Realizando la primera integración con respecto a z.

$$\iiint_B xyz\, dV = \iiint_B xyz\, dzdydx$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 xyz\, dzdydx = \int_0^1 \int_0^1 xy \frac{1}{2} z^2 \Big|_0^1 dxdy = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{2} xy\, dxdy$$

Ahora integrando con respecto a la variable y:

$$\int_0^1 x \frac{1}{4} y^2 \Big|_0^1 dx = \int_0^1 \frac{1}{4} x\, dx$$

Integrando con respecto a x:

$$= \int_0^1 \frac{1}{4} x\, dx = \frac{1}{8} x^2 |_0^1 = \frac{1}{8}$$

Las técnicas de integración anteriormente estudiadas también se pueden emplear en las integrales triples para facilitar los cálculos de integración.

Al igual que las integrales dobles, no siempre encontraremos volúmenes de integración limitado por valores fijos, sino generalmente los encontraremos limitados por funciones de dos variables, y al igual que las integrales dobles, empleamos esas funciones como límites de integración.

Ejemplo: evaluar la integral $\iiint_B xyz\, dV$.

Donde B es la región del plano limitada por el cilindro $z = 2 - x^2$, los planos $x = \frac{1}{2} y$, $z = 0$ y $y = 0$.

La función a integrar es la misma del ejemplo anterior, sin embargo ahora el volumen de integración está limitado por una serie de funciones. La integral resultante queda:

$$\int_0^2 \int_0^{2x} \int_0^{2-x^2} xyz\, dzdydx$$

Operando la integral interna:

$$\int_0^2 \int_0^{2x} xy \left(\frac{1}{2} z^2 |_0^{2-x^2} \right) dydx = \frac{1}{2} \int_0^2 \int_0^{2x} xy(2 - x^2)^2 dydx$$

Distribuyendo el cuadrado y sumando términos obtenemos:

$$\frac{1}{2} \int_0^2 \int_0^{2x} xy(4 - 2x^2 + x^4) dydx = \frac{1}{2} \int_0^2 \int_0^{2x} (4xy - 2x^3 + x^5 y) dydx$$

Integrando con respecto a y:

$$\frac{1}{2}\int_0^2 2xy^2 - 2x^3y + \frac{1}{2}x^5y^2\Big|_0^{2x} \; dx = \frac{1}{2}\int_0^2 8x^3 - 4x^4 + 2x^7 \, dx$$

Integrando con respecto a x:

$$\frac{1}{2}\int_0^2 8x^3 - 4x^4 + 2x^7 \, dx = \frac{1}{2}\left(2x^4 - \frac{4}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^8\right)\Big|_0^2 = \frac{1}{2}\left(32 - \frac{128}{5} + 64\right) = -\frac{32}{10}$$

Aquí el valor de la integral es negativo, sin embargo recordemos que no tiene sentido, así que tomamos el valor absoluto del resultado.

Integrales triples en coordenadas cilíndricas

Al igual que al emplear coordenadas polares se facilita la resolución de integrales dobles, al realizar un cambio de coordenadas al momento de abordar un problema con integrales triples se puede facilitar su resolución, estudiaremos las coordenadas cilíndricas en esta sección y en la siguiente las ecuaciones esféricas.

Las coordenadas cilíndricas son similares en sus parámetros a las coordenadas polares incluyendo el parámetro lineal z que hace que la región polar se proyecte en forma de cilindro, de allí su nombre. La fórmula general de las integrales triples se transforma de la siguiente manera:

$$\iiint\limits_S f(x,y,z)\,dV = \int\limits_{\theta_1}^{\theta_2}\int\limits_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)}\int\limits_{g_1(r,\theta)}^{g_2(r,\theta)} f(r\cos\theta\,, r\sin\theta\,, z) r dz dr d\theta$$

Ejemplo: calcular la masa de un cilindro de dimensiones $r = a$ de radio y altura $z = h$ teniendo en cuenta que su densidad es proporcional a la distancia de cualquier punto a la base del cilindro.

A pesar que este ejercicio se puede resolver en coordenadas cartesianas, es más sencillo resolverlo en coordenadas cilíndricas.

Los límites de integración serán:

$$0 \le \theta \le 2\pi$$

$$0 \le r \le a$$

$$0 \le z \le h$$

Como la función de densidad es proporcional a la distancia de cualquier punto a la base del cilindro solo depende de la variable z. Entonces la integral triple a trabajar es la siguiente:

$$\int_{0}^{2\pi}\int_{0)}^{a}\int_{0}^{h} zrdzdrd\theta$$

Integrando con respecto a z y evaluando:

$$\int_{0}^{2\pi}\int_{0)}^{a}\frac{1}{2}h^2rdrd\theta = \frac{1}{2}h^2\int_{0}^{2\pi}\int_{0)}^{a} rdrd\theta$$

Integrando con respecto a r y evaluando:

$$= \frac{1}{4}h^2a^2\int_{0}^{2\pi} d\theta$$

Por último integrando con respecto a θ:

$$= \frac{1}{4}h^2a^2\pi$$

Integrales triples en coordenadas esféricas

Como ya mencionamos, el cambio de coordenadas puede facilitar la operación sobre algunas integrales triples. Las coordenadas esféricas usan tres parámetros para determinar la posición en un punto del espacio, estos parámetros son el ángulo de elevación sobre el plano, ángulo de apertura con respecto al eje horizontal y el radio del punto con respecto al origen. Las equivalencias entre las coordenadas cartesianas y las coordenadas esféricas son:

$$x = \rho \sin\phi \cos\theta$$

$$y = \rho \sin\phi \sin\theta$$

$$z = \rho \cos\phi$$

La ecuación general de integrales triples se transforma a la siguiente forma:

$$\iiint_S f(x,y,z)\,dV = \iiint_S f(\rho\sin\phi\cos\theta\,,\rho\sin\phi\sin\theta\,,\rho\cos\phi)\rho^2\sin\phi\,d\rho d\theta d\phi$$

Los límites del volumen de integración se determinan dependiendo del ejercicio y es el mayor desafío que tiene la técnica de cambio de coordenadas.

Ejemplo: encontrar la masa de una esfera solida de radio $r = a$ si la densidad es proporcional a la distancia de cualquier punto con respecto al origen del plano coordenado.

Al igual que el ejemplo anterior, definimos una función de densidad:

$$\delta = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \rho$$

Reemplazando en la ecuación general:

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{a} \rho\,\rho^2 \sin\phi\,d\rho d\theta d\phi$$

Integrando con respecto a ρ y evaluando:

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \left.\frac{\rho^4}{4}\right|_0^a \sin\phi\,d\theta d\phi$$

Integrando con respecto a θ y evaluando:

$$= \frac{a^4}{2}\int_0^{\pi} \pi\sin\phi\,d\phi$$

Integrando con respecto a ϕ y evaluando:

$$= \pi\frac{a^4}{2}\cos\phi|_0^{\pi} = \pi a^4$$

Bibliografia

- **Leithold, L. (1998).** El cálculo / Louis Leithold. Oxford University Press.
- **Purcell, E., Varberg, D. & Rigdon, S. (2010).** Cálculo. México: Pearson Educación.
- **Stewart, J. (2008).** Cálculo de una variable. 6ª. Edición. Internacional Thomson Editores, México.
- **Thomas, G. (2010).** Cálculo una variable. 12ª. Edición. Editorial Pearson Educación. México.

Esta obra se terminó de editar en el mes de noviembre
Tipografá Myriad Pro 12 puntos
Bogotá D.C,-Colombia.

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina

MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO