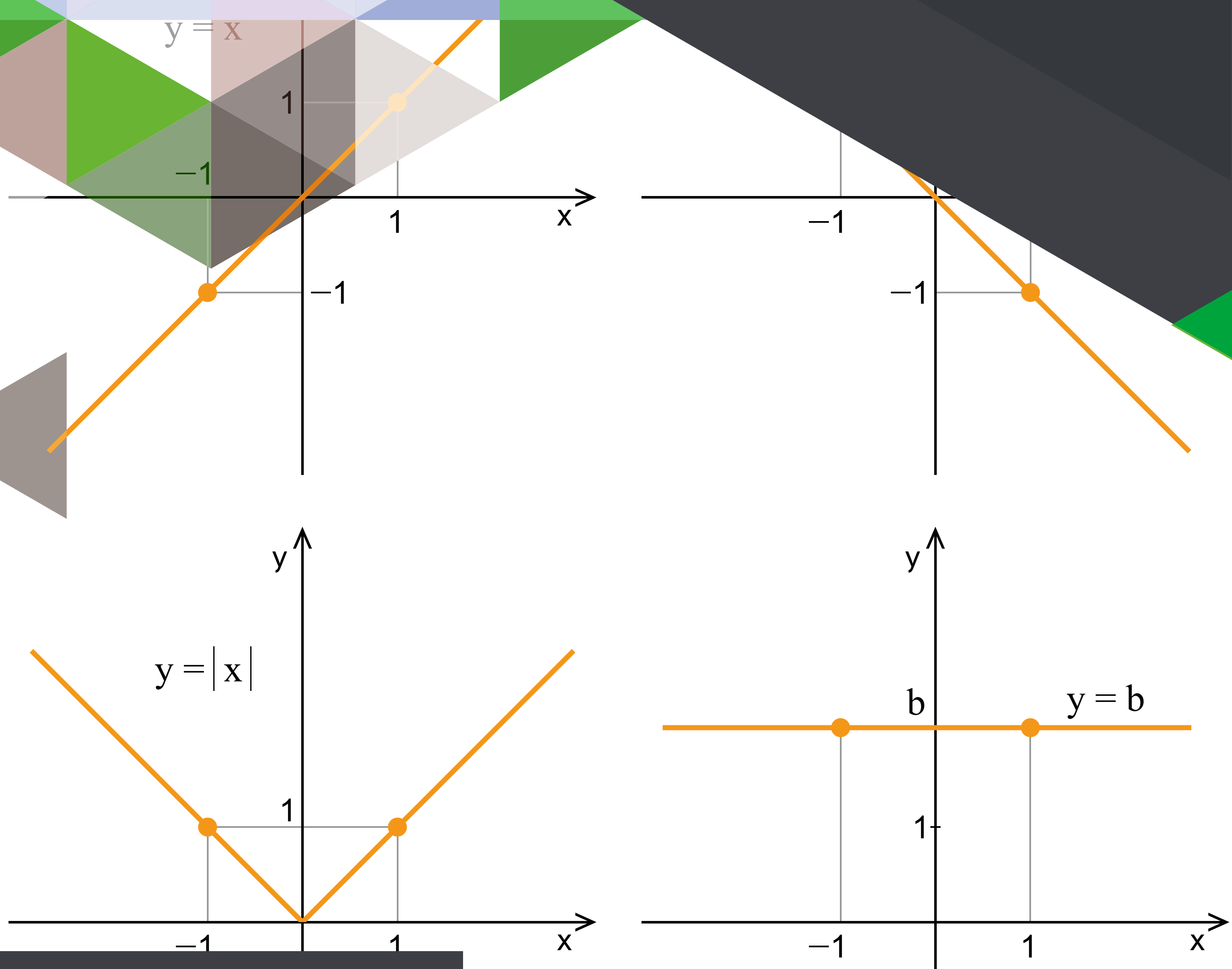
ÁNALISIS NÚMERICO

Oscar Tarazona
Bladimir Vega

EJE 2

Analicemos la situación



Fuente: Shutterstock/556970092

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina
MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Un sistema de **ecuaciones** lineales o no lineales, son un **conjunto de ecuaciones independientes**, donde intervienen n incógnitas. Estos sistemas de ecuaciones lineales aparecen muchas veces, como ya se ha mencionado antes, en la resolución de diferentes problemas relacionados con la física y la matemática avanzada en donde la dinámica de un sistema a analizar, depende al mismo tiempo de diferentes **variables** que guardan alguna relación matemática y cuya interpretación sólo es posible si se resuelve el sistema de ecuaciones que lo describe de forma simultánea. Entre los **métodos** de resolución de sistemas de ecuaciones, se tienen los métodos directos e indirectos. Entre los métodos directos se tiene el método de Gauss, el método de Gauss-Jordan y el método de factorización LU. Entre los métodos indirectos se tienen el método de Jacobi y el método de Gauss-Seidel entre los más importantes. En este orden de ideas y para cumplir con el desarrollo de estas temáticas es preciso ir en dirección de nuestra pregunta orientadora *¿Qué métodos del análisis numérico permiten la solución aproximada de sistemas de ecuaciones lineales y no lineales?*

Ecuaciones

Igualdad entre dos expresiones.

Conjunto de ecuaciones independientes

Conjunto de ecuaciones con igual número de variables.

Variables

Expresión simbólica representativa de un elemento no especificado comprendido en un conjunto

Métodos

Proceso ordenado y sistemático realizado para llegar a un resultado o fin determinado.

Instrucción

Lo invito a la página principal del eje para revisar la línea de tiempo en la que se presenta la evolución de los métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales.

Sistema de ecuaciones lineales y no lineales

Métodos directos para sistemas lineales

Estos métodos tienen como principal característica la eliminación de las incógnitas que aparecen en el sistema.

Eliminación Gaussiana

El método de eliminación gaussiana se aplica para resolver sistemas de ecuaciones lineales de la forma:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n$$

con $\boldsymbol{a}$ y b constantes llamadas coeficiente y término independiente respectivamente.

En general el método de Gauss se puede aplicar para sistemas pequeños, entendiendo éstos como sistemas 2x2. Si este fuera el caso, la eliminación gaussiana recurre a sub-métodos mucho más fácil de aplicar, que, por no ser el objeto del curso, no se entraran a discutir de manera profunda, sino que sólo se mencionaran a saber:

Método Grafico

Cosiste en graficar cada una de las ecuaciones del sistema en un mismo plano cartesiano. El punto de intersección de las dos curvas, es la solución del sistema.

Ejemplo

Al graficar el siguiente sistema de ecuaciones en un mismo plano obtenemos:

$$\{3x - y = 12 \;\; 2x + y = -2$$

Despejando la y se tiene:

$$y = 3x - 12$$

$$y = \; -2x - 2$$

Y al graficar se obtiene la solución del sistema (2, -6).

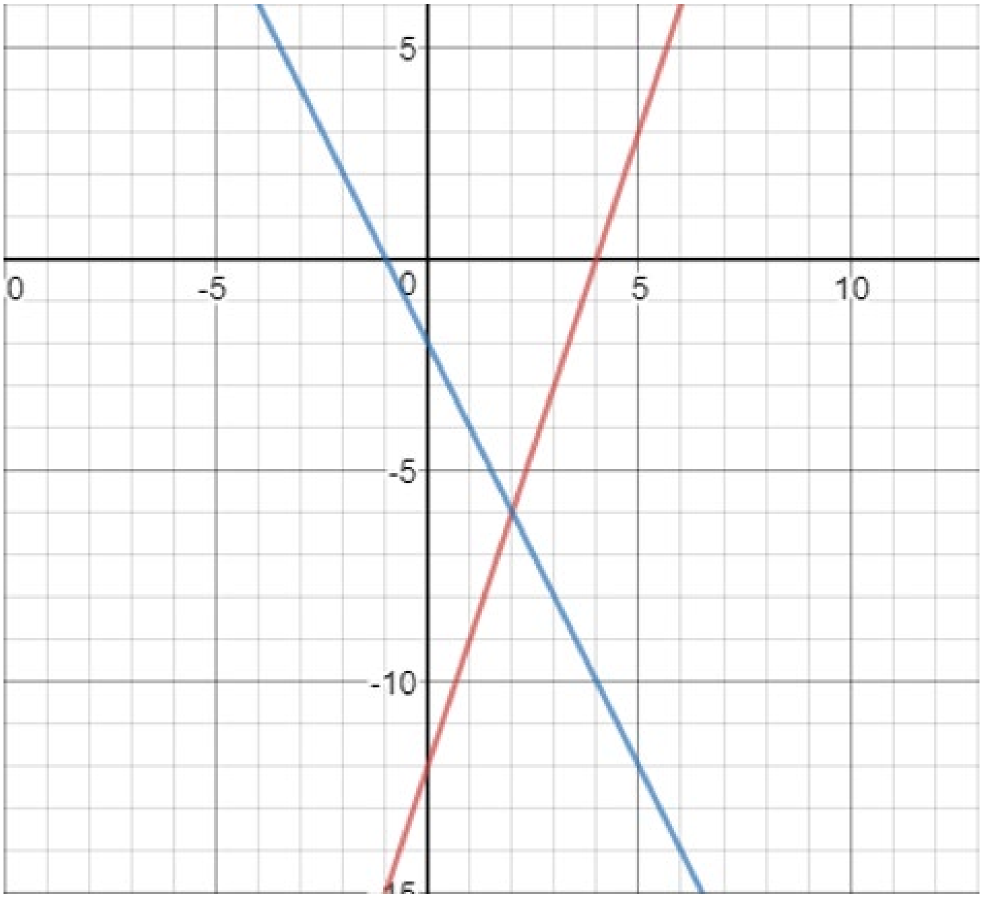


Figura 1. Solución gráfica del sistema 2x2
Fuente: propia

Determinantes

Este método consiste en expresar el sistema de ecuaciones como un arreglo "matricial", teniendo en cuenta que el determinante es un número y no un vector como si lo puede ser una matriz. El determinante de un sistema se puede construir aplicando la "formula":

$$D = [a_{11}\ a_{12}\ a_{21}\ a_{22}\ ]$$

Determinante

Número asociado a una matriz que indica que ésta, representa la solución de sistema de ecuaciones lineales válido.

Ejemplo

Se solucionará el sistema anterior por el método de determinantes.

El sistema está dado por:

$$\{3x - y = 12 \;\; 2x + y = -2$$

Luego:

$$x = \frac{[12 \;\; -1 \;\; -2 \; 1\,]}{[3 \;\; -1 \; 2 \; 1\,]} = \frac{12 * 1 - (-2)(-1)}{3 * 1 - 2 * (-1)} = \frac{12 - 2}{3 - (-2)} = \frac{10}{5}$$

$$x = 2$$

$$y = \frac{[3 \; 12 \; 2 \;\; -2\,]}{[3 \;\; -1 \; 2 \; 1\,]} = \frac{(-2) * 3 - (2)(12)}{3 * 1 - 2 * (-1)} = \frac{-6 - 24}{3 - (-2)} = \frac{-30}{5}$$

$$y = -6$$

La cual es la misma solución que se encontró con el método gráfico (2, -6).

Regla de Cramer

Este método es útil cuando se desea resolver sistemas de ecuaciones lineales 3x3. Para ello, basta con encontrar las siguientes expresiones y reemplazarlas paso a paso en la estructura de la regla.

Si se tiene el sistema:

$$\{ax + by + cz = j \;\; dx + ey + fz = k \;\; gx + hy \; + iz = l$$

El determinante es calculado siguiendo la expresión:

$$D = \; (a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2) - (a_2 b_1 c_3 + a_1 b_3 c_2 + a_3 b_2 c_1)$$

Y la solución para cada variable estaría dada por los siguientes coeficientes de determinantes:

$$x = \frac{[j \; b \; c \; k \; e \; f \; l \; h \; i\,]}{[a \; b \; c \; d \; e \; f \; g \; h \; i\,]} \qquad y = \frac{[a \; j \; c \; d \; k \; f \; g \; l \; i\,]}{[a \; b \; c \; d \; e \; f \; g \; h \; i\,]} \qquad z = \frac{[a \; b \; j \; d \; e \; k \; g \; h \; l\,]}{[a \; b \; c \; d \; e \; f \; g \; h \; i\,]}$$

Ejemplo

Se dará solución el sistema 3x3 dado por:

$$\{3x + 2y + z = 2 \;\; -2x + y - 7z = 0 \; 3x - y + 8z = 2$$

El determinante de la matriz es entonces:

$$D = (3 * 1 * 8) + (2 * -7 * 3) + (-2 * -1 * 1) - (-1 * 1 * 3) - (-2 * -2 * 8) - (-3 * -7 * -1)$$

$$D = -8$$

Luego aplicando las expresiones para hallar x, y y z se tiene:

$$x = \frac{[2\;2\;1\;0\;1\;-7\;2\;-1\;8\;]}{-8} = \frac{-28}{-8} = 3{,}5 \qquad y = \frac{[3\;2\;1\;-2\;0\;-7\;3\;2\;8\;]}{-8} = \frac{28}{-8} = -3{,}5$$

$$z = \frac{[3\;2\;2\;\;-2\;1\;0\;3\;\;-1\;2\;]}{-8} = \frac{12}{-8} = -1{,}5$$

Por tanto, la solución del sistema sería: (3.5, -3.5, -1.5).

Eliminación de incógnitas

El proceso clave de este método es la combinación del sistema de ecuaciones y consiste básicamente, como su nombre lo indica, en eliminar las incógnitas de cada ecuación.

Para ello, el método presenta la solución mediante las siguientes expresiones:

$$La\ solución\ para\ x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

$$y\ la\ solución\ para\ x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

Para el sistema dado por:

$$\{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = \; b_1 \; a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = \; b_2$$

Ejemplo

Solucionar el sistema:

$$\{3x - y = 12 \;\; 2x + y = -2$$

$$\text{Por tanto } x_1 = \frac{(1)(12)-(-1)(-2)}{(3)(1)-(-1)(2)} = \frac{10}{5} = 2$$

$$\text{Y para } x_2 = \frac{(3)(-2)-(2)(12)}{(3)(1)-(-1)(2)} = \frac{-30}{5} = -6$$

Resultados que concuerdan con los hallados en los ejemplos de método gráfico y determinantes.

Video

Ahora, para profundizar en estos métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales, los invito a la página principal del eje para observar el video:

Eliminación gaussiana

https://www.youtube.com/watch?v=6yayFt5xL28

Factorización LU

La factorización LU resume de cierta manera la eliminación gaussiana. Como en toda factorización, el proceso empleado por LU permite expresar una matriz como el producto de una matriz triangular inferior con otra superior. Es decir, lo que se desea, en palabras sencillas, es trabajar los sistemas de ecuaciones lineales que hemos tratado hasta aquí en forma de matrices, y aplicar las operaciones relacionadas con ellas. El concepto de vector cobra vital importancia entonces.

Factorización

Proceso matemático de descomponer una expresión algebraica en el producto de dos factores.

Matriz L

Arreglo bidimensional de números dispuestos en filas y columnas.

Definición: sea la matriz L de mxn una matriz triangular, si y sólo si, lij = 0 para todo i<j. Y sea U una matriz de mxn una matriz triangular superior si y sólo si uij = 0 para todo i>j.

De la definición anterior se sigue que, si A es una matriz mxn, esta se puede escribir como:

A = LU

Y escribimos Ax = (LU)x = L(Ux)

El cual puede ser solucionado tomando para ello: Ax = b;

Para aplicar lo expuesto hasta aquí, se dará la solución de un ejemplo.

Ejemplo

Sea la matriz A= [4 -2 1 20 -7 12 -8 13 17]

Esta matriz se puede expresar como un producto de dos matrices LU, es decir:

LU= [1 0 0 5 1 0 -2 3 1][4 -2 1 0 3 7 0 0 -2]

En este producto de matrices, se debe encontrar x del sistema formado por:

Ax= [11 70 17]=b

¡Atención!

Para resolver el problema, considere $y= (y_{-1}, y_{-2}, y_{-3})$ como un vector columna el cual contiene tres incógnitas y escribamos:

$Ly=b=$ [1 0 0 5 1 0 -2 3 1] $y=$ [11 70 17]

En forma de sistema de ecuaciones lineales, este producto de matrices se puede escribir de la forma:

$$\{y_1 = 11\ 5y_1 + \ y_2 = 70\ -2y_1 + \ 3y_2 + y_3 = 17$$

De la primera ecuación se tiene ya el valor de $y_1 = 11$.

Ahora se multiplica la segunda ecuación por -3 y se suma con la tercera ecuación, es decir:

$$-3(5)y_1 - 3\ y_2 = -3(70) = \ -15y_1 - 3\ y_2 = -210$$

$-2y_1 + \ 3y_2 + y_3 = 17$ donde:

$$y_3 = \ -6$$

Y finalmente, reemplazando los valores de y_1 y y_3 en la ecuación dos, obtenemos el valor y_2, es decir y_2=15.

El estudiante puede comprobar este resultado, realizando un procedimiento similar con el sistema matricial Ux = y:

$$[4\ -2\ 1\ 0\ 3\ 7\ 0\ 0\ -2\ ]x = \ [11\ 15\ -6\ ]$$

Se puede comprobar que los valores de la variable x son:

$$x_1 = \ 1 \qquad x_2 = \ -2 \quad x_3 = \ 3$$

Lectura recomendada

Con el fin de profundizar en la aplicación de la factorización LU, le invito a la página principal del eje para realizar la lectura:

Factorización LU

Alexis Vera Pérez

Métodos indirectos para sistemas lineales

Para finalizar esta sección sobre solución de ecuaciones lineales, se presentan dos métodos iterativos que proporcionan la solución a estos sistemas de una manera diferente.

Método de Jacobi

En palabras sencillas, este método propone una solución a partir del concepto de convergencia, es decir, la solución del sistema se encuentra mediante aproximaciones de la variable en cuestión. Por lo general, se aplica para sistemas de ecuaciones simples como por ejemplo sistemas 2x2 que podemos expresar matricialmente como $Ax=b$. Como una regla general, para la aplicación del método de Jacobi, se pueden seguir los siguientes pasos:

a. Se expresa el sistema en un sistema matricial.

b. Se escoge un valor inicial x0 llamado valor de aproximación.

c. Se aplica un proceso de iteración sobre la variable en cuestión.

Ejemplo

Supongamos que tenemos un sistema de ecuaciones el cual podemos expresar de forma matricial: $A=B+C$ donde B es una matriz diagonal y C es obtenida al sumar la matriz L y U.

La solución para x debe seguir la forma:

$$x = B^{-1}(b - Cx)$$

Y las iteraciones siguientes la forma:

$$x^{(j+1)} = B^{-1}(b - Cx^{(j)})$$

Se considera un sistema de ecuaciones lineal cuya forma matricial es:

A= [2 4 3 8], b=[7 9] se contempla una estimación inicial x_0= [1 1]

Entonces aplicando la expresión anterior encontrar x, se tiene en primera instancia:

$B^{-1} - [\frac{1}{2} \quad 0\ 0 \quad \frac{1}{8}]$ $\qquad L - [0\ 0\ 3\ 0]$ $\qquad U - [0\ 4\ 0\ 0]$

Ahora se determina la matriz T definida como: $T = -B^{-1}C$

$T = -B^{-1}C = -B^{-1}(L+U) = [\frac{1}{2} \quad 0\ 0 \quad \frac{1}{8}] * \{[0\ 0\ 3\ 0] + [0\ 4\ 0\ 0]\}$

Donde el estudiante puede comprobar que:

$T = [0\ -0{,}5\ -0{,}375\ 0]$

Ahora se determina C de la siguiente forma:

$C = B^{-1}b = [\frac{1}{2} \quad 0\ 0 \quad \frac{1}{8}][7\ 9] = [3{,}5\ 1{,}125]$

Entonces, para la primera iteración se tiene que:

$x^{(1)} = [0\ -0{,}5\ -0{,}375\ 0][1\ 1] + [3{,}5\ 1{,}125]$ donde se demuestra que:

$x^{(1)} - [3\ 0{,}75]$

Iteración

Repetición de determinada acción matemática.

Mediante la segunda iteración se obtiene:

$x^{(2)} = [0\ -0{,}5\ -0{,}375\ 0][3\ 0{,}75] + [3{,}5\ 1{,}125]$

$x^{(2)} = [2\ 0.84]$

Las iteraciones deben repetirse hasta lograr una convergencia en los valores de X de modo tal que, estos sean lo suficientemente pequeños como para satisfacer el sistema de ecuaciones.

Método de Gauss-Seidel

El método de Gauss-Seidel, al igual que el método de Jacobi, supone un proceso iterativo. Se precisa que es el más usado a la hora de encontrar la solución de un sistema de n ecuaciones las cuales pueden ser representadas en la forma:

$Ax=b$

Considere que se tiene el sistema de nxn:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n$$

Se simplifica el sistema a uno de 3x3:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

Por el método de Gauss-Seidel se pueden encontrar los valores de X si en la primera ecuación despejo x_1 supongo, como valores iniciales de ésta, $x_2 = x_3 = 0$. Si esto es así, entonces obtengo de la ecuación uno:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_n = b_1$$

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_n}{a_{11}}$$

De donde se tiene que:

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}}$$

Si ahora hacemos lo mismo para la segunda ecuación con este valor de x_1 y el valor de $x_3 = 0$, se obtiene el valor para x_2 y mediante el mismo proceso en la tercera ecuación se obtiene el valor para x_3.

Instrucción

Revise el caso simulado en la página principal del eje.

Ejemplo

Considere el sistema de ecuaciones lineales dado por:

$$\{10x_1 - x_2 = 9 \ -x_1 + x_2 - 2x_3 = 7 \ -2x_2 + 10x_3 = 6$$

Por tanto, para x2 = 0 en la primera ecuación se obtiene, después de despejar x1,

$$x_1 = \frac{9 + x_2}{10}$$

$$x_1 = \frac{9}{10} = 0.9$$

Y con este valor y con x_3 =0, se tiene para la segunda ecuación:

$$x_2 = 7 + x_1 + \ 2x_3$$

$$x_2 = 7 + 0{,}9 + 0$$

$$x_2 = 7{,}9$$

Y finalmente para la tercera ecuación se tiene:

$$x_3 = \frac{6 + 2x_2}{10}$$

$$x_3 = 2{,}18$$

Ahora se debe repetir el método con $x_1 = 0{,}9 \quad x_2 = 7{,}9 \quad x_3 = 2{,}18$

Hasta encontrar por convergencia de los valores, los más apropiados que satisfacen el sistema de ecuaciones.

Instrucción

Ahora le invito a la página principal del eje para consultar los siguientes recursos:

- Con el fin de profundizar en la aplicación de los métodos tratados anteriormente, le invito a realizar la lectura:

  Métodos iterativos para resolver sistemas lineales

  Departamento de Matemáticas, CCIR/ITESM

- Videorresúmen.
- Prácticas.
- Actividad evaluativa.

Convergencia

Propiedad matemática de dos o más funciones que confluyen en un mismo punto.

BIBLIOGRAFÍA

Burden, R., Faires, J. y Solorio, P. (2011). *Análisis numérico*. México, México: Cengage Learning.

Sauer, T. (2013). *Análisis numérico. México,* México: Editorial Pearson

Robles, J., Gómez, M. y González, J. (201). *Análisis numérico*. México, México: McGraw-Hill

Venegas, L. (2011). *Métodos numéricos aplicados a la ingeniería*. Lima, Perú: Macro E.I.R.L

Chapra, S. y Canale, R. (2006). *Métodos numéricos para ingenieros*. México, México: McGraw-Hill