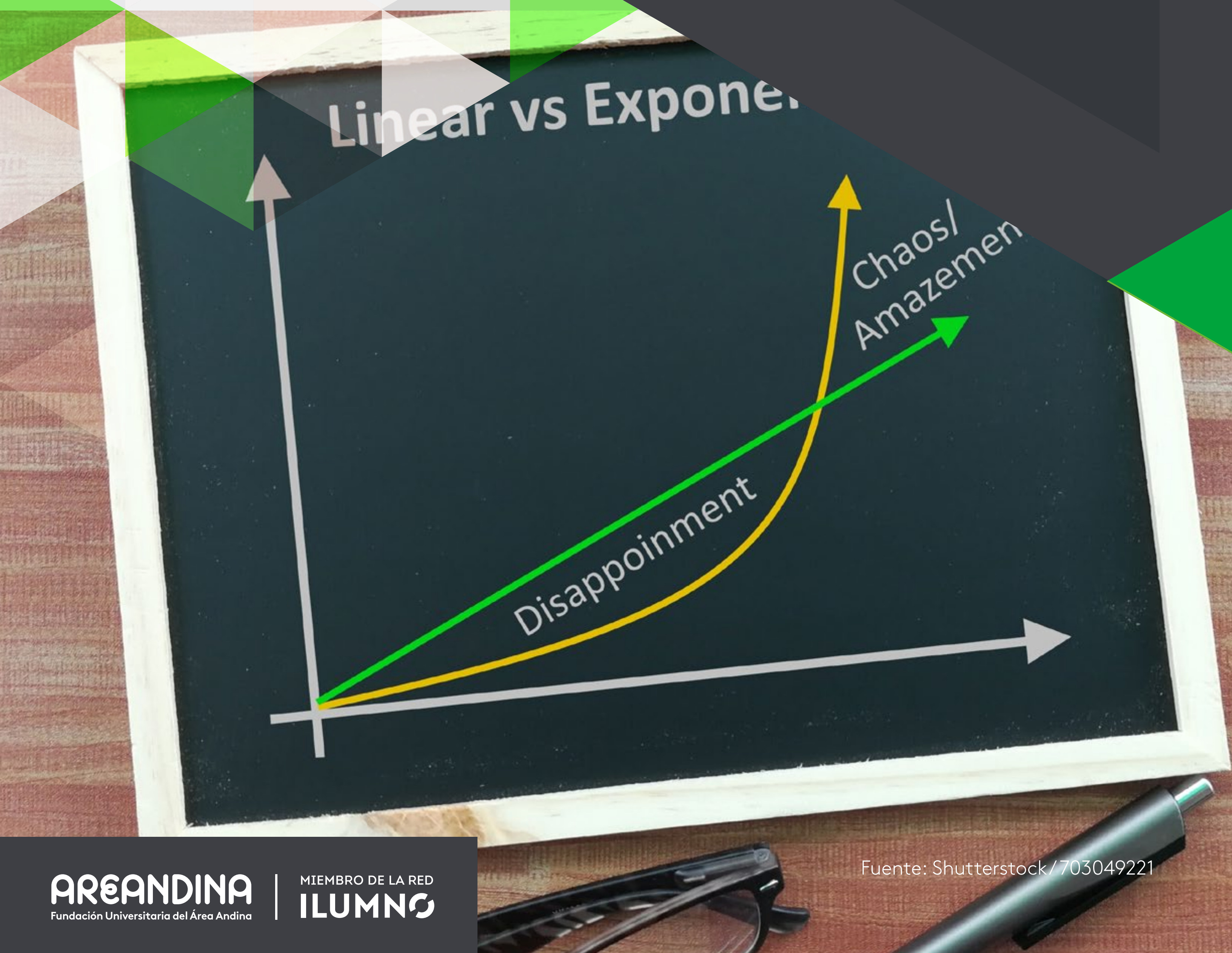
ÁNALISIS NÚMERICO

Oscar Tarazona
Bladimir Vega

EJE 3

Pongamos en práctica



Fuente: Shutterstock/703049221

AREANDINA
Fundación Universitaria del Área Andina
MIEMBRO DE LA RED
ILUMNO

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

En un curso de cálculo de funciones, un problema elemental consiste en obtener una curva sobre un plano, con sólo reemplazar valores de la variable independiente en la función que describe matemáticamente dicha curva. Esto constituye la naturaleza de muchos problemas del cálculo y la física donde intervienen valores iniciales. Sin embargo, en otros problemas relacionados como, por ejemplo, en el campo de la ingeniería el problema es inverso, se debe encontrar una función matemática que describe un determinado problema conociendo algunos parámetros iniciales, en la mayoría de los casos, con sólo dos basta. Este proceso es más común de lo que se piensa, ya que un sin número de situaciones que observamos en la realidad, siguen patrones dinámicos de ocurrencia y, por tanto, se necesitan mecanismos matemáticos para su interpretación. La interpolación lineal y el ajuste de curvas, que serán los temas a desarrollar en el presente eje del módulo, permiten el análisis de dichos fenómenos de manera más exacta y plausible. En este orden de ideas la pregunta orientadora que nos guiará en este proceso es: *¿Cómo permiten los diferentes métodos de interpolación y ajustes de curvas, el análisis de situaciones que modelan diferentes problemas relacionados con el análisis numérico?*

Interpolación polinomial y ajuste de curvas

Concepto de interpolación

Para empezar nuestra exposición, diremos que una función de variable real, *"interpola uno o dos puntos"* cuando dichos puntos evaluados en la función, tienen una imagen asociada, de acuerdo a la teoría de funciones. En otras palabras, la acción de la función de interpolar uno o más puntos matemáticos, es pasar por ellos.

Ahora bien, cuando decidimos realizar una interpolación, además de encontrar la función asociada a estos puntos o valores iniciales, se desea observar si a partir de dicha función podemos hacer predicciones exactas sobre el comportamiento del fenómeno que describe la función en cuestión.

El método más simple de interpolación es la interpolación lineal cuando sólo se toman dos puntos, cuando se toman tres puntos, se recurre a la interpolación cuadrática. Otros tipos de interpolación son la de Lagrange y la interpolación por diferencias divididas de Newton.

Definición: sean las parejas de puntos dados por: : $(x_1, y_1),(x_2, y_2),...,(x_n, y_n)$ con valores diferentes de x. Luego, existe un polinomio único $P(x)$ cuyo grado es n-1 tal que $P(x_i)=y_i$ *para* $i=1,2,...n$

Interpolación lineal

Partiendo de la definición anterior, la interpolación lineal nos permite determinar el conjunto de valores que toma una función en un determinado intervalo dados dos puntos o valores iniciales.

Para hallar dicha función, basta con aplicar de forma correcta la expresión:

$$f(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

Es fácil que el estudiante observe esta expresión matemática en la gráfica que se muestra a continuación.

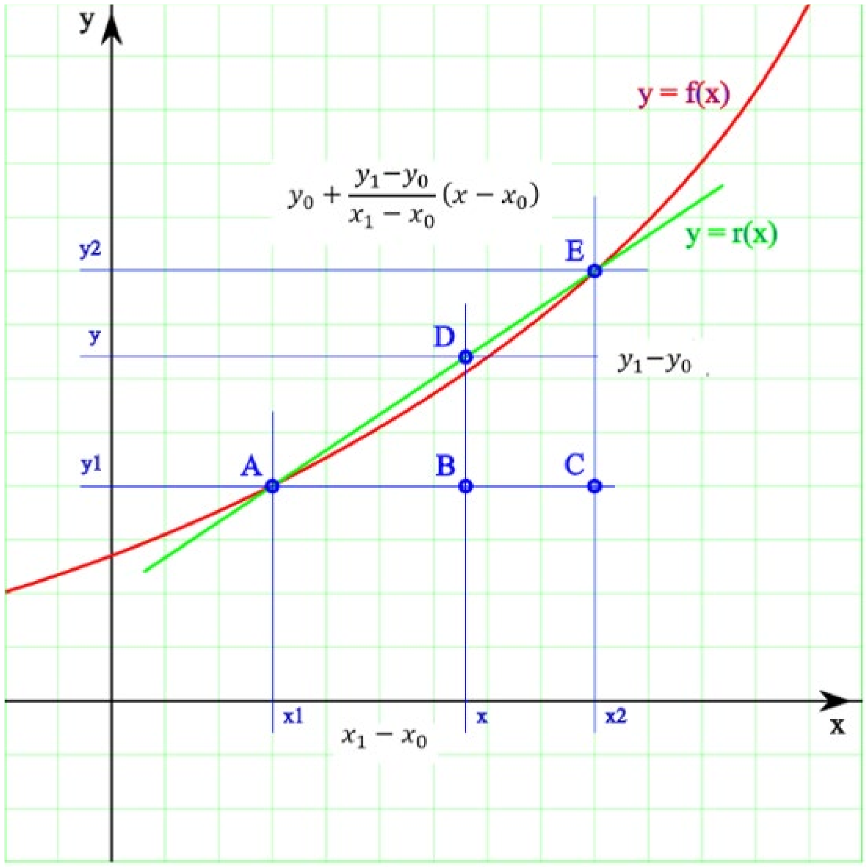


Figura 1. Representación de una función lineal de variable real
Fuente: https://bit.ly/2ttEnxN

Ejemplo

Determinemos la función lineal de interpolación que pasa por los puntos A (-2,0) y B (5,3). Una vez hecho esto, interpolar para el valor de A=1 y B=6.

Definimos los putos A (x_0, y_0) = (-2, 0) y B (x_1, y_1) = (5, 3). Reemplazando estos puntos en la expresión de arriba se obtiene:

$$f(x) = 0 + \frac{3-0}{5-(-2)}(x-(-2))$$

$$f(x) = \frac{3}{5+2}(x+2)$$

$$f(x) = \frac{3}{7}(x+2)$$

En la siguiente figura se puede apreciar la gráfica de la función encontrada:

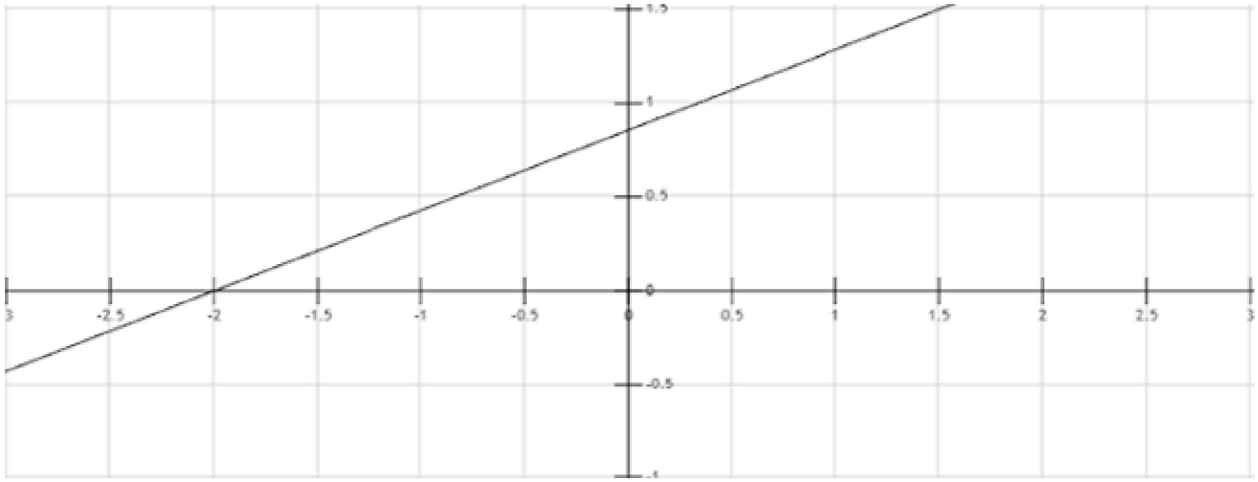


Figura 2: Gráfica de la función
Fuente: propia

Una vez hemos hallado la función de interpolación, procedemos a encontrar los valores de interpolación y extrapolación, esto es:

$$f(1) = \frac{3}{7}(1+2) = f(1) = \frac{3}{7}(3) = f(1) = \frac{9}{7}$$

$$f(6) = \frac{3}{7}(6+2) = f(6) = \frac{3}{7}(8) = f(6) = \frac{24}{7}$$

Como el estudiante puede observar, la interpolación lineal es relativamente fácil ya que se cuenta con una expresión que permite la construcción de la función de interpolación.

Interpolación cuadrática

Si ahora en el problema se tienen tres parejas ordenadas, se necesita un polinomio de segundo orden. Es bien sabido que la gráfica de estos determinados polinomios es una parábola.

Como se recordará de los cursos de algebra lineal, un polinomio es descrito de la forma:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

Para el caso de la interpolación cuadrática, se desea encontrar un polinomio de la forma:

$$f_2(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + \ b_2(x - x_0)(x - x_1)$$

En donde se puede demostrar que la función anterior es de la forma simplificada:

$$f_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

Para determinar los coeficientes a_0, a_1 y a_2 se utilizan las expresiones:

$$a_0 = b_0 + b_1x_0 + b_2x_0x_1$$

$$a_1 = b_1 - b_2x_0 - b_2x_1$$

$$a_2 = b_2$$

Debe tener mucho cuidado en la aplicación de estas fórmulas a la hora de encontrar cada coeficiente.

Los valores de b_0, b_1 y b_2 se hallan respectivamente concluyendo que:

$$b_0 = f(x_0) \qquad b_1 = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \qquad b_2 = \frac{\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} - \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}{x_1-x_0}$$

Ejemplo

De cierta función cuadrática sabemos las siguientes coordenadas: (3, 7), (5, 12), (7,9). Encontraremos un polinomio $f(x)=ax^2+bx+c$ que contenga a dichas coordenadas.

Lo primero que hacemos es definir cada punto, es decir:

$$(3,7) = (x_1y_1)$$

$$(5,12) = (x_2y_2)$$

$$(7,9) = (x_3y_3)$$

Recordando que:

$f(x) = a + b(x - x_1) + c(x - x_1)(x - x_2)$ reemplazamos el valor de x_1 y x_2

$f(x) = a + b(x - 3) + c(x - 3)(x - 5)$

Ahora reemplazamos la imagen de x_1 que es 7.

$7 = a + b(3 - 3) + c(3 - 3)(3 - 5)$

Resolviendo se tiene que:

$a=7$

Procediendo de la misma forma se tiene:

$$12 = 7 + b(5-3) + c(5-3)(5-5)$$

$$12 = 7 + b(2) + c(2)(0)$$

$12 = 7 + 2b$ donde:

$$b = \frac{5}{2}$$

Conociendo el valor de a y b es fácil encontrar con el mismo procedimiento el valor de c.

$$9 = 7 + \frac{5}{2}(7-3) + c(7-3)(7-5)$$

$9 = 7 + 10 + 8c$ de donde

$$c = -1$$

Por último, nuestro polinomio será:

$f(x) = 7 + \frac{5}{2}(x-3) - 1(x-3)(x-5)$ y se resuelve para x

$f(x) = 7 + \frac{5}{2}x - \frac{15}{2} - x^2 + 5x + 3x - 15$ y finalmente $f(x) = -x^2 - \frac{21}{2}x - \frac{31}{2}$

El estudiante puede comprobar dichas operaciones algebraicas como ejercicio práctico.

Visitar página

Con el fin de profundizar en los conceptos vistos hasta el momento, le invitamos a revisar la siguiente lectura, visitando la página web:

Blog de métodos numéricos U456

Blogdiario.com

Interpolación de Lagrange

Cuando se tienen más de tres puntos, es decir, n puntos dados por $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\ldots,(x_n,y_n)$, la interpolación cuadrática pierde precisión en la búsqueda de la función de interpolación. Cuando esto sucede, se recurre a la interpolación de Lagrange. Propuesta por el matemático, físico y astrónomo italiano y nacionalizado Francés Joseph-Louis de Lagrange, la interpolación de Lagrange es un método que permite encontrar un polinomio asociado a un conjunto de n datos obtenidos, por ejemplo, de forma experimental. La forma para hallar dicho polinomio es de la forma:

$$P_2(x) = y_1\frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + y_2\frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + y_3\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

Y en general:

$$L_i(x) = \frac{(x-x_2)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}$$

El procedimiento para hallar el polinomio de interpolación de Lagrange es el mismo que para el polinomio cuadrático.

Ejemplo

Suponga que, en cierto experimento sobre la medición de la tensión de esfuerzo de un cable para fibra óptica, se encontraron los siguientes valores, los cuales fueron tabulados en la siguiente tabla:

Variable x	1	-3	5	7
Variable y	-2	1	2	-3

$$L_0(x) = \frac{(x+3)(x-5)(x-7)}{(1+3)(1-5)(1-7)} = \frac{(x+3)(x-5)(x-7)}{96}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-1)(x-5)(x-7)}{(-4)(-8)(-10)} = \frac{(x-1)(x-5)(x-7)}{-320}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-1)(x+3)(x-7)}{(5)(8)(-2)} = \frac{(x-1)(x+3)(x-7)}{-80}$$

$$L_3(x) = \frac{(x\pm 1)(x+3)(x-5)}{(6)(10)(2)} = \frac{(x-1)(x+3)(x-5)}{120}$$

Tomando estas expresiones y reemplazándolas en el polinomio de Lagrange, tenemos:

$$f(x) = -2\frac{(x+3)(x-5)(x-7)}{96} + \frac{(x-1)(x-5)(x-7)}{-320} + 2\frac{(x-1)(x+3)(x-7)}{-80} - 3\frac{(x-1)(x+3)(x-5)}{120}$$

O bien simplificando:

$$f(x) = -\frac{(x+3)(x-5)(x-7)}{48} - \frac{(x-1)(x-5)(x-7)}{320} - \frac{(x-1)(x+3)(x-7)}{40} - \frac{(x-1)(x+3)(x-5)}{40}$$

Cuando se destruyen paréntesis y se realizan las operaciones indicadas, el estudiante puede demostrar que el polinomio de interpolación de Lagrange buscado es:

$$f(x) = -0{,}07x^3 + 0{,}40x^2 + 0{,}62x - 3.00$$

Vemos que la interpolación de Lagrange permite encontrar un polinomio para analizar el comportamiento de la tensión del cable en función del esfuerzo.

Interpolación por diferencias divididas de Newton

Este método de interpolación de una función es considerado el más fácil de aplicar. En él, se necesita interpolar el conjunto de puntos $(x_1, f(x_1)),\ldots(x_n, f(x_n))$ que provienen de la función f(x) la cual se puede encontrar aplicando la siguiente fórmula alternativa para hallar el polinomio de interpolación:

$$P(x) = f[x_1] + f[x_1\,x_2](x-x_1)$$

$$+f[x_1\,x_2\,x_3](x-x_1)(x-x_2)$$

$$+f[x_1\,x_2\,x_3\;\;x_4](x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$

Y así sucesivamente teniendo en cuenta que también se deben construir las parejas: $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), (x_3, f(x_3))\ldots(x_n, f(x_n))$. A continuación, se deben realizar las diferencias divididas cuyas expresiones se presentan, se aclara que el estudiante debe prestar mucha atención a la forma de cómo se encuentran cada una de estas igualdades:

$$f[x_k] = f(x_k)$$

$$f[x_k\;\;x_{k+1}] = \frac{f[x_{k+1}] - f[x_k]}{x_{k+1} - x_k}$$

$$f[x_k\;\;x_{k+1}\;\;x_{k+2}] = \frac{f[x_{k+1}\,x_{k+2}] - f[x_k\;\;\;x_{k+1}]}{x_{k+2} - x_k}$$

$$f[x_k\;\;x_{k+1}\;\;x_{k+2}\,x_{k+3}] = \frac{f[x_{k+1}\,x_{k+2}\;\;x_{k+3}] - f[x_k\;\;\;x_{k+1}\;\;x_{k+2}]}{x_{k+3} - x_k}$$

Ejemplo

Considerando la siguiente tabla de valores para x y y, encontrar el polinomio de interpolación por diferencias divididas de Newton.

x_k	2	0	-2
y_k	15	-1	-17

De la definición de interpolación sabemos que existen n-1 parejas ordenadas o puntos. Luego el polinomio a encontrar tiene la forma.

$$f(x) = f[x_1] + f[x_1\, x_2](x - x_1) + f[x_1\, x_2\, x_3](x - x_1)(x - x_2) + f[x_1\, x_2\, x_3\ \ x_4](x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

Como primer paso debemos construir la tabla de diferencias divididas de la siguiente forma:

x_k	y_k	$f\,[x_k\ \ x_{k}+1]$	$f\,[x_k\, x_k+2]$
2	15		
0	-1	8	
-2	-17	8	0

Observando los valores de la diagonal [15, 8, 0], vemos que guardan correspondencia con el conjunto de valores de la fórmula. Con estos valores podemos escribir entonces los polinomios de interpolación:

$$f_0(x) = 15$$

$$f_1(x) = 8(x - 2) + f_0(x) = 8x - 1$$

Y de manera general:

$f(x) = 15 + 8(x - 2) = 15 + 8x - 8$

$f(x) = 8x - 1$ el cuál es el polinomio buscado.

Lectura recomendada

Con el fin de profundizar en los conceptos vistos hasta el momento, le invitamos a revisar la lectura:

Algunos métodos para obtener polinomios de interpolación

Casallas y Gordillo

Ajuste de curvas por mínimos cuadrados

El ajuste de curvas por mínimos cuadrados es una técnica de suma importancia en la optimización de procesos relacionados con la ingeniería y las matemáticas avanzadas. Busca minimizar las sumatorias de los cuadrados de las diferencias en las ordenadas originados en la función con los valores en los datos.

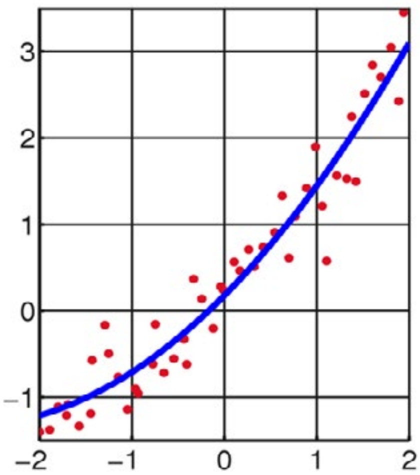


Figura 3. Ajuste por mínimos cuadrados
Fuente: https://bit.ly/2Ishxer

El ajuste por mínimos cuadrados se realiza mediante la búsqueda de una función dentro de una familia de funciones, y cuya principal característica sea la de ajustar mejor el comportamiento de los datos que surgen fruto de la medición de ocurrencias de fenómenos físicos, matemáticos, geométricos, etc. Esta función siempre es una función lineal cuya forma es: $y(x) = mx + b$.

En la aplicación del método lo importante es encontrar el valor de la pendiente m y el punto de intersección b. Para ello se utilizan las expresiones siguientes que el estudiante puede memorizar en su interpretación matemática:

$$m = \frac{\sum xy - \frac{(\sum x)(\sum y)}{n}}{\sum_x 2 - \frac{(\sum x)^2}{n}} \qquad b = \underline{y} - m\underline{x}$$

Instrucción

Le invito a la página principal del eje para revisar la infografía.

Ejemplo

Consideremos el siguiente ejemplo publicado en Varsity Tutors (s.f.).

De la tabla mostrada a continuación determinar la curva ajustada por mínimos cuadrados.

x	8	2	11	6	5	4	12	9	6	1
y	3	10	3	6	8	12	1	4	9	14

Utilizando Geogebra se grafica cada uno de estos puntos en un sólo plano cartesiano obteniendo la siguiente distribución de puntos.

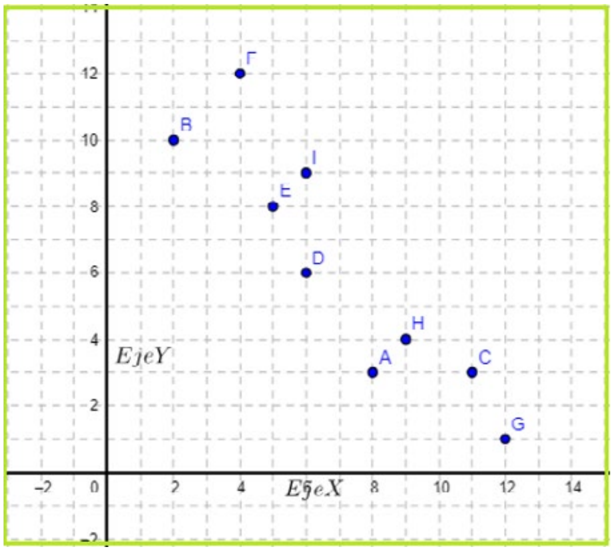


Figura 4. Distribución de puntos de la tabla
Fuente: propia

Para realizar estos procesos de la mejor forma, iremos tabulando cada uno de los elementos matemáticos que necesitamos para hallar m y b, de la siguiente forma:

x	8	2	11	6	5	4	12	9	6	1	$\sum x=64$
y	3	10	3	6	8	12	1	4	9	14	$\sum y=70$

xy	24	20	33	36	40	48	12	36	54	14	$\sum xy=317$
X^2	64	4	121	36	25	16	144	81	36	1	$\sum_x 2=528$

Apliquemos la formula $m=\frac{\sum xy-\frac{(\sum x)(\sum y)}{n}}{\sum_x 2-\frac{(\sum x)^2}{n}}$ para encontrar la pendiente de lo que será la función ajustada del conjunto de datos.

$$m=\frac{\sum xy-\frac{(\sum x)(\sum y)}{n}}{\sum_x 2-\frac{(\sum x)^2}{n}}=\frac{317-\frac{(64)70}{10}}{528-\frac{(64)^2}{10}}=\frac{317-448}{528-409{,}6}=-1{,}10$$

Por otro lado, es fácil que el estudiante compruebe que el valor medio de x es:

$\underline{x} = 6{,}4$ y la media de y es: $\underline{y} = 7$

Por tanto, todo se resume ahora a encontrar el punto de intersección b dado por:

$b = \underline{y} - m\underline{x}$

Es decir:

$b = 7 - (-1.10 * 6.4)$

$b = 7 + 7.04$

$b = 14.04$

Luego la función lineal ajustada $y(x) = -1.10x + 14.04$

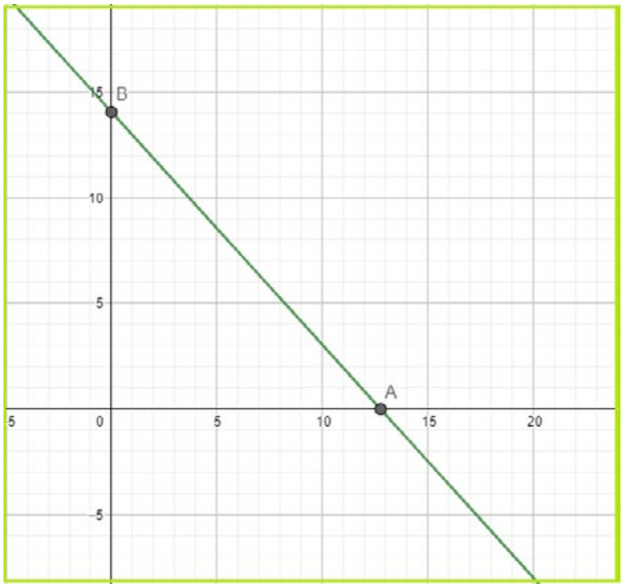


Figura 5. Línea ajustada
Fuente: propia

Instrucción

En este punto le invitamos a la página principal del eje para consultar los siguientes recursos:

- Video

Criterios de mínimos cuadrados

https://www.youtube.com/watch?v=Bz6vE2WSqHI

Actividad práctica: el ajuste por mínimos cuadrados supone entonces encontrar una función lineal que permite observar el mejor comportamiento creciente o decreciente de un conjunto de puntos.

- Videorresúmen.
- Caso simulado.
- Actividad de evaluación.

BIBLIOGRAFÍA

Burden, R., Faires, J. y Solorio, P. (2011). *Análisis numérico*. México, México: Cengage Learning.

Chapra, S. y Canale, R. (2006). *Métodos numéricos para ingenieros*. México, México: McGraw-Hill

Robles, J., Gómez, M. y González, J. (201). *Análisis numérico*. México, México: McGraw-Hill

Sauer, T. (2013). *Análisis numérico*. México, México: Editorial Pearson

Venegas, L. (2011). *Métodos numéricos aplicados a la ingeniería*. Lima, Perú: Macro E.I.R.L