NOCIONES DE MATEMÁTICAS FINANCIERAS

PEDRO PABLO CÁRDENAS ALZATE

Profesor Facultad de Ingeniería y Ciencias Básicas

Fundación Universitaria del Área Andina

Profesor Universidad Tecnológica de Pereira

LUZ MARÍA ROJAS DUQUE

Directora Departamento de Ciencias Básicas

Fundación Universitaria del Área Andina

Profesor Universidad Tecnológica de Pereira

JOSE GERARDO CARDONA TORO

Profesor Facultad de Ingeniería y Ciencias Básicas

Fundación Universitaria del Área Andina

Profesor Universidad Tecnológica de Pereira

Facultad de Ingeniería y Ciencias Básicas

Fundación Universitaria del Área Andina

Seccional Pereira

2011

TITULO:**NOCIONES DE MATEMÁTICAS FINANCIERAS**

Autores:

Pedro Pablo Cárdenas Alzate

Luz María Rojas Duque

José Gerardo Cardona Toro

Primera Edición

300 ejemplares

Diciembre de 2011

Diagramación: Pedro Pablo Cárdenas Alzate

Diseño de portada: Isabel C. Hernández

ISBN: 978-958-57046-2-6

Pereira - Colombia

Cárdenas Alzate, Pedro Pablo

Nociones de Matemáticas Financieras/Pedro Pablo Cárdenas Alzate, Luz María Rojas Duque, José Gerardo Cardona Toro – Pereira: Fundación Universitaria del Área Andina, 2011

94P.

ISBN: 513-958-57046-2-6

CDD 513.93 ed.21

MATEMÁTICAS FINANCIERAS.2. TASAS DE INTERES.

Catalogación de la publicación - Fundación Universitaria del Área Andina "Biblioteca Otto Morales Benítez"

Índice general

Prólogo

Las Matemáticas Financieras son una rama de las matemáticas aplicadas las cuales estudian el valor de nuestro dinero en el tiempo. La disciplina a través de una serie de modelos matemáticos sirve de apoyo a las personas, administradores y comerciantes en la toma de sus propias decisiones al momento de escoger la mejor alternativa para realizar alguna inversión.

El presente texto ofrece a los estudiantes de Administración de Negocios Internacionales y Mercadeo de la Fundación Universitaria del Área Andina y/o profesionales con orientación a negocios y finanzas, los fundamentos básicos de las matemáticas financieras que servirán de guía en los cursos que requieran su estudio.

Al escribir esta obra, procuramos especialmente presentar un orden en el desarrollo de los temas que faciliten al lector la comprensión de los mismos. De igual manera, ofrecemos una serie de ejemplos y ejercicios para que sean fijadas las ideas expuestas en la teoría. Hemos tenido muy presente que los problemas propuestos sean cuestiones que interesen al estudiante y sirvan de motivación para profundizar en los temas estudiados respectivamente.

La descripción clara de cada capítulo hace que el estudiante se adquiera interés por los temas posteriores e indague en otros textos la profundización de los mismos, esto con el fin de que queden claras las ideas que se exponen en esta obra.

Como siempre es nuestra responsabilidad los errores que el lector pueda encontrar en este texto y agradecemos inmensamente nos hagan llegar las sugerencias.

Sin otro particular, los autores

Pedro Pablo Cárdenas Alzate
Luz María Rojas Duque
José Gerardo Cardona Toro
Facultad de Ingeniería y Ciencias Básicas
Fundación Universitaria del Área Andina
Seccional Pereira
2011
®

Agradecimientos

Los autores agradecen a todas aquellas personas e instituciones que cooperaron para que este libro fuera terminado y publicado. Aun corriendo el riesgo de cometer alguna omisión importante, los principales destinatarios de estos agradecimientos son los siguientes:

1. Todos los estudiantes que han utilizado algún material de este libro, a lo largo de varios años. El nivel de aprendizaje alcanzado por cada uno de ellos, ha sido uno de los principales incentivos para llevar adelante esta tarea. Algunos de ellos ya profesionales con experiencia han sido insistentes demandantes de que este libro vea la luz.

2. Los profesores del curso de Matemáticas Financieras, Elementos para la Toma de Decisiones y Tópicos Financieros de los distintos planes de estudios de la carrera de Administración de Negocios Internacionales de la Fundación Universitaria del Área Andina seccional Pereira. Cada uno de ellos aportó alguna idea interesante para preparar ejemplos y ejercicios.

3. Agradecimientos sinceros al rector de la Fundación Universitaria del Área Andina seccional Pereira Doctor Juan Alejandro Duque Salazar, al Vicerrector Académico Doctor José Uriel Giraldo Gallón por brindarnos el apoyo para la publicación de esta obra.

Los autores

CAPÍTULO 1

CONCEPTOS BÁSICOS

1.1. DEFINICIONES PREVIAS

Se inicia este capítulo con una serie de definiciones necesarias las cuales permitirán que el lector se adentre al mundo de las finanzas.

1.1.1. Matemáticas en Finanzas

Se puede definir las matemáticas financieras como un conjunto de herramientas matemáticas que permiten analizar cuantitativamente la viabilidad y/o factibilidad económica y financiera de los proyectos de inversión. También puede decirse que analiza el valor del dinero en un tiempo t.

1.1.2. Interés

Se define el interés como la cantidad que se paga o se cobra por el uso del dinero. Por ejemplo, cuando se toma prestado dinero, se debe pagar por su uso; en dicho pago debe estar incluido tanto la pérdida del valor del dinero como también la renta por su uso.

De igual manera, si en vez de un crédito lo que se hace es prestar dinero, es decir, invertir, entonces se querrá recibir aparte de lo invertido, un monto a través del cual se recupere el valor que ha perdido el dinero en el tiempo y una renta por el préstamo de este.

1.1.3. Tasa de interés

No es más que el porcentaje al que está invertido un capital en una unidad de un tiempo t, determinando lo que se refiere como *el precio del dinero en el mercado financiero*.

La tasa de interés (expresada en porcentajes) representa un balance entre el riesgo y la posible ganancia (oportunidad) de la utilización de una suma de dinero en una situación y tiempo determinado. En este sentido, la tasa de interés es el precio del dinero, el cual se debe pagar o cobrar por tomarlo prestado o cederlo en préstamo en una situación determinada.

1.1.4. Porcentajes

El término de porcentaje o *por ciento* representado por el símbolo % no es otra cosa que el equivalente al *centésimo*, es decir, por ejemplo $50\,\% = 0.50 = (50/100)$, que es la forma correcta de trabajar con las fórmulas.

EJEMPLO 1.

Cuando se dice que una cierta inversión en la bolsa de valores produce rentabilidad del 45 %, esto significa que dicha inversión produce $45 anuales por cada $100 invertidos.

1.1.5. Interés simple

Si cierta operación es a interés simple, entonces el interés es calculado sobre el capital original para el periodo completo de la transacción y los interés son pagados al prestamista, sin que estos se reinviertan.

Esto se puede expresar como el tiempo del periodo que se reconoce al prestamista respecto a los intereses, comenzando a partir de allí una nueva liquidación solo sobre el monto original, sin que los intereses se capitalicen para generar nuevos sobre ellos nuevos intereses.

1.1.6. Capitalización de los intereses

Si al final del periodo de inversión en vez de devolver los intereses devengados al prestamista, estos se suman al capital original, para a partir de ahí, calcular un nuevo interés, se dice que estos se capitalizan.

1.1.7. Interés compuesto

Si cierta operación es a interés compuesto, entonces el interés es calculado sobre el capital para un periodo reinvirtiéndose los intereses, es decir, al cabo del periodo los intereses se capitalicen para calcular sobre dicho monto los nuevos intereses.

1.1.8. Proyecto de inversión

Se definen como oportunidades de desembolsos de dinero del cual se espera obtener rendimientos (flujos de efectivo o retornos) de acuerdo a unas condiciones particulares de riesgo. Los rendimientos deben permitir recuperar las inversiones, cubrir los gastos operacionales y además obtener una rentabilidad de acuerdo al nivel de riesgo.

1.1.9. Riesgo

El riesgo se describe como la posibilidad de que un resultado esperado no se produzca. Se debe tener en cuenta que cuanto más alto sea el nivel de riesgo, tanto mayor será la tasa de rendimiento y viceversa.

1.1.10. Factibilidad Económica

Término financiero que trata con la determinación de la bondad de invertir o no los recursos económicos en una alternativa de inversión *vs* proyecto, sin importar el origen de estos.

1.1.11. Factibilidad financiera

Se refiere con la determinación de si el retorno es atractivo o no para los dueños del activo (dinero), para el inversionista. Es decir, lo que interesa es determinar si la inversión efectuada exclusivamente por el dueño, obtiene la rentabilidad esperada por el.

1.1.12. Valor económico agregado

Si la rentabilidad de una inversión supera el costo de capital promedio ponderado[1] entonces podemos afirmar que se generará valor económico para los propietarios de la empresa. Solo en este caso se puede decir que los inversionistas están cumpliendo sus expectativas y alcanzando sus objetivos financieros.

1.1.13. Inflación

Se puede definir como el aumento generalizado del nivel de precios de bienes y servicios en una economía. Esto significa que, en una economía con inflación, la cantidad de productos que se pueden comprar con una cantidad determinada de dinero hoy es mayor a cantidad de productos que se podría comprar dentro de un tiempo.

El término contrario a la inflación es la **deflación**, que es la disminución generalizada del nivel de los precios de los bienes y servicios en una economía.

EJEMPLO 2.

Si por ejemplo, el precio de índices del consumidor se incrementa de 100 a 110 en 12 meses (1 año), decimos entonces que la inflación es del 10 % anual.

En este ejemplo, podemos calcular la inflación utilizando la fórmula:

$$Infl = \left(\frac{IPC_1 - IPC}{IPC}\right) \times 100$$

donde,

[1]Es la tasa de descuento que debe utilizarse para descontar los flujos de fondos operativos para valuar una empresa utilizando el descuento de flujos de fondos.

- $Infl$: Es la inflación.
- IPC: Es el índice de precios al inicio de cierto período.
- IPC_1: Es el índice de precios al final de cierto período.

1.1.14. Devaluación

La devaluación es la pérdida del valor del dinero con respecto a otra moneda. La devaluación puede ser causada por muchos factores, entre ellos la falta de demanda de la moneda o una mayor demanda de la moneda con la cual se le compara. El término contrario a la devaluación es la **reevaluación**, es decir es la valorización de una moneda con respecto a otra.

A continuación se muestran algunos términos básicos que se manejan en la matemática financiera.

- C: Cierta cantidad de dinero.
- S: Es el monto o valor acumulado de C.
- VP: Capital principal; valor presente, expresado en valores monetarios.
- VF: Capital más interés; valor futuro expresado en valores monetarias.
- j: Tasa nominal o la tasa de interés anual .
- t: Número de años (tiempo).
- m: Número de capitalizaciones por año.
- n: Número de períodos de composición.
- i: Tasa de interés efectiva.
- i_{EA} : Tasa de interés efectiva anual .

- I: Interés .
- VPN: Valor Presente Neto.
- TIR: Tasa Interna de Retorno.
- A: Anualidad o cuota uniforme.
- VPA: Valor presente de una anualidad.
- VFA: Valor futuro de una anualidad.
- i_a: Tasa de interés anticipada.
- i_v: Tasa de interés vencida.

EJERCICIOS DE REPASO

1. Un inversionista recibió un pagaré por valor de \$120.000 a un interés del 8 % el 15 de Abril con vencimiento a 120 días. El 22 de Noviembre del mismo año lo ofrece a otro inversionista el cual desea ganar el 15 %. ¿Cuánto recibe por el pagaré el primer inversionista?.

2. Una persona debe \$20.000 con vencimiento a 4 meses y \$16.000 con vencimiento a 9 meses. Propone pagar su deuda mediante dos pagos iguales con vencimiento a 3 meses y un año, respectivamente. Determinar el valor de los pagos.

3. Cierta maquinaria tiene un costo de \$4500 y la cual tiene un promedio de vida estimado en \$20000 horas de operación y un valor de salvamento de \$600000. Las horas de uso durante los primeros 5 años fueron: $1800, 2300, 2500$ y 2400. Realizar una tabla en la cual se muestre el valor en libros al final de uno de los 5 años.

4. Una persona tiene gastos por un valor de \$256000 en gasolina con precio de \$2400 por galón. Hallar el costo de la misma cantidad de gasolina a \$2400 por galón.

5. Calcular la inflación durante el año 2008 utilizando datos reales.

6. Una factura por una valor de \$3000 está fechada el 2 de junio y en ella se estipula lo siguiente: Un descuento del 10 % por pago en 15 días o un descuento del 3 % por el pago en 28 días. Hallar la suma cancelada si la liquidación fue hecha en las siguientes fechas:

   - El 10 de junio.
   - El 27 de junio.

7. Calcular los siguientes porcentajes:

   - 20 de 10.
   - \$1200 de \$800.
   - 0.25 de 2.

8. Hallar el precio de depreciación anual y elaborar una tabla que muestre el cambio anual del valor en libros de:

   - Una máquina cuyo costo fue de \$2450 y la cual se depreció en 4 años alcanzando un salvamento de \$150.
   - Una máquina cuyo costo fue de \$15000 y se depreció en 9 años, alcanzando un valor de salvamento de \$4500.

9. Si α es 35 % menor que β. ¿En qué porcentaje de α excede β a α ?.

10. Tres firmas de abogados (competidores) tienen el mismo precio para determinado proceso. Una de ella ofrece descuentos a los clientes del 30 % y el 20 %; la otra firma ofrece descuentos del 22 %, 10 % y 12 %. ¿Qué descuentos son más ventajosos para los clientes y por qué?

11. Un abogado recupera el 80 % de una demanda por un valor de \$450.000 y por el concepto de honorarios cobra el 20 % de la suma total recuperada. ¿Qué cantidad recibirá el demandante?

12. Demostrar que una utilidad del 60 % sobre el precio total de venta V de un artículo, es igual a una utilidad del 66 % sobre su costo C.

13. Una persona siempre consume tres porciones de azúcar con cada taza de café. El precio del azúcar es α y el de café β y dispone de una renta de $\$M$. ¿Cuánto podrían comprar de cada bien?

CAPÍTULO 2

EL INTERÉS SIMPLE

2.1. INTRODUCCIÓN

Si se considera el dinero como un bien, es de esperarse en una economía que el costo que se paga por su uso sufra ganancias y pérdidas, como cualquier mercancía. De esta forma el costo de nuestro dinero dependerá de las condiciones de oferta y demanda del mercado y otras variables como por ejemplo la inflación, devaluación y revaluación.

Existe una frase popular y muy utilizada por las personas del común; ella se utiliza para significar que el poseedor del dinero espera que se le recompense por no utilizar el dinero y ponerlo a disposición de otro, por un tiempo determinado t.

De esta forma, para las personas no es igual recibir una misma cifra de dinero hoy que un tiempo después; es decir, no se puede decir que dichos valores sean equivalentes. Dos cifras de dinero son equivalentes cuando a una persona le es indiferente recibir una suma de dinero hoy (VP) y recibir otra suma diferente (VF) al cabo de un periodo. El interés es el monto de dinero que permite hacer equivalente una cifra pasada, con una cifra futura, es decir, el interés permite hacer equivalente cifras de dinero en el tiempo.

El término interés es de uso amplio en la vida de las finanzas, ello ha conducido a que tenga múltiples definiciones, entre las que se encuentran:

- El valor del dinero en el tiempo.
- Valor recibido o entregado por el uso del dinero.
- Utilidad o ganancia que genera un capital.
- Precio que se paga por el uso del dinero.
- Rendimiento de una inversión.

DEFINICION 1. *Puede definirse el interés simple como el canon de arrendamiento que se paga por hacer uso de un monto de dinero llamado capital, durante un periodo de tiempo determinado. Decimos que el interés es simple cuando se paga dicho canon de arrendamiento al momento de liquidarse, es decir al final del periodo.*

Existe una fórmula para calcular el interés simple; como este es el resultado de calcular el capital por la tasa periódica de interés por el número de periodos, entonces se tiene:

$$I = VP * i * n \tag{2.1}$$

donde VP es el capital, i es la tasa de interés y n el número de periodos.

2.2. CLASES DE INTERES SIMPLE

Existen dos clases de interés simple: Interés ordinario e interés exacto. El uso de uno o del otro depende en realidad de las costumbres donde se esté aplicando, dependiendo uno del otro con la base de días que se quiera utilizar.

El interés ordinario es aquel donde tomamos como base para realizar su cálculo 360 días; el interés exacto es aquel que toma como base 365 días.

EJEMPLO 3.

Hallar el interés exacto y ordinario sobre \$2000 al 5 % durante 50 días.

En este caso[1] $C = 2000$ e $i = 0.05$, por lo tanto, el interés simple exacto se determina como sigue: como $t = \frac{50}{365} = \frac{10}{73}$, entonces:

$$I = 2000(0.05)\left(\tfrac{10}{73}\right) = \tfrac{1000}{73} = \$13.70$$

y para el interés simple ordinario se tiene que $t = \frac{50}{360} = \frac{5}{36}$, entonces:

$$I = 2000(0.05)\left(\tfrac{5}{36}\right) = \tfrac{125}{9} = \$13.89$$

2.3. VALOR DE UNA DEUDA

El valor presente de una deuda, en una fecha anterior a la de su vencimiento, se denomina como *valor presente* de la deuda en dicha fecha. De la ecuación $S = C(1 + it)$ se tiene lo siguiente:

$$C = \frac{S}{1 + it} \tag{2.2}$$

[1] C es una cierta cantidad de dinero en una fecha dada.

que es el valor a la tasa de interés simple i del monto S con un vencimiento de t años.

EJEMPLO 4.

Un pagaré de \$1200 está firmado el primero de abril con un vencimiento en ocho meses y con un interés de 5 % es vendido a Fernando Gómez el 14 de julio con un rendimiento en la inversión de 6 %. ¿Cuánto paga Fernando por dicho documento?.

Vemos acá que la fecha de vencimiento de dicho documento es el primero de diciembre y su valor al vencimiento es:

$$1200\left[1+(0.05)(\tfrac{2}{3})\right]=1240$$

Se necesita ahora encontrar el valor presente de \$1240 con un vencimiento en 140 días al 6 % de interés simple. Así, aplicando la ecuación (2.2) se tiene que:

$$C=\frac{S}{1+it}=\frac{1240}{1+(0.06)\left(\frac{7}{18}\right)}=\frac{3720}{3.07}=\$1211.73$$

EJERCICIOS DE REPASO

1. Hallar el interés simple y el monto total de:
   - Al 5 % durante 1 año.
   - Al 10 % durante 12 meses.
   - Al 6.5 % durante 1 año y medio.
2. ¿A qué tasa de interés simple el monto de $250000 será 4500 en un año?
3. ¿En qué tiempo se triplica una cantidad de dinero al 6 % de interés simple?
4. Determinar en forma aproximada el tiempo transcurrido entre el 20 de Noviembre de 2006 y el 5 de Enero de 2007.
5. Un pagaré a 12 meses por un valor de $45000 al 8 % es suscrito el día de hoy. Hallar su valor dentro de 5 meses, suponiendo inicialmente un rendimiento de 5 %.
6. Una persona debe $35000 para pagar en 14 meses con intereses al 4 %. Conviene pagar $5000 al final de 7 meses. ¿Qué cantidad tendrá que pagar al final de los 14 meses para liquidar el resto de la deuda suponiendo un rendimiento del 6 %?
7. Una deuda por $80900 debe liquidarse el 30 de octubre de 2011. Si el deudor quisiera adelantar su pago liquidándola el 30 de junio de 2011, encuentre la cantidad que deberá pagarse en esa fecha si la tasa de interés que se aplica es del 2.5 % mensual simple. Considere tiempo aproximado e interés exacto en sus cálculos.
8. Hallar la fecha en que se firmó un pagaré que vence el 15 de septiembre de 2011 de una operación crediticia por valor de $5000000, cargándose el 2 % mensual

de interés simple, si los intereses adicionales a la cantidad original que se pagan son por \$50000? Considere interés real con tiempo exacto.

9. Una persona deposita \$2500000 en un banco que paga el 23 % de interés simple anual. ¿Cuánto podrá acumular (incluyendo los intereses devengados) si retira su dinero 9 meses después de haberlo depositado?

10. Una corporación bancaria desea ganar el 10 % de interés simple por el descuento de documentos. ¿Qué tasa de descuento debe utilizar si el período del descuento es a 3 meses o 7 meses?

11. Una empresa de computadoras pronostica que una computadora costará dentro de 4 años \$500000. Si se considera una tasa inflacionaria del 14 % semestral capitalizable anualmente, ¿ cuánto costaría la computadora hoy?

12. En el ejercicio anterior, ¿ cuánto costará la computadora dentro de 6 años?

13. Hallar a cuánto crece el interés simple producido por un capital de \$280000 invertido durante 6 años a una tasa anual del 5 %.

14. Una persona tiene un capital de \$4500000 invertido a una tasa de interés del 6 % durante un cierto tiempo, ha supuesto unos intereses de \$20000. ¿Cuánto tiempo ha estado invertido?

15. Una empresa de maquinaria toma prestados \$500000000 el 5 de Febrero del 2011 con el compromiso de cancelar la totalidad de la deuda después de cinco meses al 15 % mensual simple. Sin embargo, la empresa efectúa el pago el 5 de Agosto. Si el contrato estipulaba una tasa del 3 % mensual sobre el saldo en mora, ¿ cual es el valor de los intereses corrientes al vencimiento?, ¿cual es el valor de los intereses de mora?

16. Una persona pide a una entidad bancaria un préstamo por un valor de 7500000 por un período de 9 meses a una tasa de interés del 4 %. Cuando han pasado

tres meses paga un valor de \$400000 y al término de seis meses desea pagar el saldo total. ¿ Cuánto tendrá que pagar de interés simple?

17. Una computadora se vende por un valor de \$3200000 de contado o mediante 800000 iniciales y luego el resto por un mes. Determinar la tasa de interés cargada.

18. Una persona recibe \$550000 como premio de un bono ganado y decide invertirlos de la siguiente manera: El 40 % durante 5 trimestres en una institución financiera que le ofrece el 21 % de interés simple anual y el resto durante 1 año y dos meses en un banco que le da el 25 % anual simple. Determine el total de intereses que percibirá y el capital que tendrá al final de las inversiones.

19. Pedro recibe una asignación de \$3400000 y decide hacer la siguiente secuencia de inversiones:

    a) Coloca la mitad del capital en un plazo fijo durante tres meses al 5 % trimestral y la otra mitad en una cuenta de ahorros por el mismo tiempo que da el 0.90 % mensual.

    b) Retira los intereses de las dos colocaciones y todo el capital lo invierte en otro plazo fijo por 180 días al 3.5 % trimestral.

    ¿Cuánto tendrá Pedro al final de este último período?

CAPÍTULO 3

INTERÉS COMPUESTO

3.1. INTERÉS COMPUESTO - DEFINICIÓN

Cuando se realizan transacciones las cuales abarcan un período de tiempo largo, el interés puede manejarse de dos formas diferentes:

1. El interés vencido se paga mediante cheque o cupones. El capital que produce los intereses permanece sin cambio durante el plazo de la transacción, así se estará tratando con interés simple.
2. El interés vencido es agregado al capital, en este caso decimos que el interés es *capitalizable* y en consecuencia también gana interés. La suma vencida al final de la trasacción es conocida como *monto compuesto*. A la diferencia entre el monto compuesto y el capital original se le conoce como *interés compuesto*.

EJEMPLO 5.

Hallar el interés compuesto sobre \$1000 por tres años, si el interés de 5 % es convertible anualmente en capital.

El capital original es de \$1000. El interés por un año es $1000(0.05) = \$50$. El capital al final del primer año es $1000 + 50 = \$1050$. El interés sobre el nuevo capital por un año es $1050(0.05) = \$52.50$. El capital al final del segundo año es $1050 + 52.50 = \$1102.50$. El interés sobre el nuevo capital por un año es $1102.50(0.05) = \$55.12$. El capital al final del tercer año es $1102.50 + 55.12 = \$1157.62$. El interés compuesto es $1157.62 - 1000 = \$157.62$.

En los problemas que implican el interés compuesto son importantes los siguientes conceptos:

- El capital original.
- La tasa de interés por período.
- El número de períodos de conversión durante todo el plazo de la transacción.

3.2. MONTO COMPUESTO

Sea un capital C invertido a la tasa i por período de conversión y desígnese con S al monto compuesto de C al final de n períodos de conversión. Ya que C produce Ci de interés en el primer período de conversión, al final de dicho período produce a $C + Ci = C(1 + i)$. La sucesión de montos será entonces:

$$C(1+i),\ C(1+i)^2,\ C(1+i)^3,\ \ldots$$

Esta expresión forma una progresión geométrica cuyo n-ésimo término es

$$S = C(1+i)^n \tag{3.1}$$

El factor $(1+i)^n$ es el monto compuesto de 1 a la tasa i por período, por n períodos de conversión y será conocido como el *monto compuesto de 1.*

EJEMPLO 6.

Si se invierte \$1000 durante $8\frac{1}{2}$ años al 7 % convertible trimestralmente, se tiene que $C = 1000$, $i = 0.0175$, $n = 34$ y entonces:

$$S = C(1+i)^n = 1000(1{,}0175)^{34} = \$1803.72$$

El interés compuesto es $1803.72 - 1000 = \$803.72$.

3.3. TASAS NOMINAL Y EFECTIVA

Se dice que dos tasas anuales de interés con diferentes períodos de conversión son *equivalentes* si producen el mismo interés compuesto al final de un año.

Cuando el interés en convertible más de una vez en un año, la tasa anual dada se conoce como *tasa nominal anual* o simplemente tasa nominal. La tasa de interés efectivamente ganada en un año se conoce como *tasa efectiva anual* o simplemente tasa efectiva.

3.4. EL VALOR PRESENTE

A la tasa i, por período de conversión, de un monto S con vencimiento en n períodos de conversión es la suma C tal que invertida ahora a la tasa dada de interés alcanzará el monto S después de n períodos de conversión.

$$S = C(1+i)^n$$

de donde,

$$C = S(1+i)^n \tag{3.2}$$

Desde la ecuación $a = v^n = (1+i)^{-n}$ se dan valores para el *factor de descuento* $(1+i)^{-n}$, para diferentes tasas y plazos. Cuando no es aplicable la ecuación

$$a = v^n = (1+i)^{-n}$$

deben utilizarse logaritmos.

EJEMPLO 7.

Hallar el valor presente de \$2000, pagaderos en seis años, suponiendo un rendimiento a la tasa 5 % convertible semestralmente.

Acá se ve que $S = 2000$, $i = 0,025$, $n = 12$. De la ecuación (3.2) se tiene:

$$\begin{aligned} C &= S(1+i)^{-n} \\ &= 2000(1,025)^{-12} \\ &= 2000(0,743556) \\ &= \$1487.11 \end{aligned}$$

EJEMPLO 8.

Hallar el valor al 15 de febrero de 1965 pagaderos el 15 de mayo de 1970, suponiendo un rendimiento al 4,4 % convertible trimestralmente.

Acá, $S = 500$, $i = 0.044$, $n = 21$, por tanto:

$$\begin{aligned} C &= 500(1.011)^{-21} \\ log\ C &= log\ 500 - 21\ log\ 1.011 \\ log\ C &= 2.698970 - 0.099775 \\ log\ C &= 2.599195 \\ C &= \$397.37 \end{aligned}$$

Para hallar el valor presente de un pagaré con intereses, hallar:

(a) el monto de la deuda la vencimiento,

(b) el valor presente del monto encontrado en (a).

Suponiendo una tasa de rendimiento efectivo de 4 %, hallar el valor presente de una deuda de \$2500 contratada con intereses al 6 % convertible trimestralmente, pagadera en 8 años.

(a) El valor al vencimiento

$$\begin{aligned} S &= 2500(1.015)^{32} \\ &= 2500(1.610324) \\ &= \$4025.81 \end{aligned}$$

(b) El valor presente de \$4025.81 pagadero en 8 años, al 4 % efectivo es

$$\begin{aligned} C &= 4025.81(1.04)^{-8} \\ &= 4025.81(0.730690) \\ &= \$2941.62 \end{aligned}$$

3.5. VALOR PRESENTE PARA EL CASO DE UN PERIODO DE CONVERSIÓN FRACCIONARIO

Cuando el tiempo es una parte fraccionaria del período de conversión el valor presente puede ser encontrado en forma similar al caso de interés compuesto, mediante la regla teórica y la regla práctica.

Hallar el valor presente de \$3000 pagaderos en 8 años 10 meses suponiendo un rendimiento de 4 % convertible trimestralmente.

Acá, $S = 3000$, $i = 0.01$, $n = \frac{106}{3}$, por lo tanto

$$C = 3000(1.01)^{-\frac{106}{3}}$$

Regla teórica.

$$\begin{aligned} C &= 3000(1.01)^{-\frac{106}{3}} \\ &= 3000(1.01)^{-35}(1.01)^{-\frac{1}{3}} \\ &= 3000(0.705914)(0.996689) \\ &= \$2110.73 \end{aligned}$$

Regla práctica. En este caso $n = \frac{106}{3} = 35\frac{1}{3}$; se descuenta S por 36 períodos (el número mayor entero de períodos de conversión más próximo al plazo dado) y se le suma interés simple por $36 - 35\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ de período de conversión, es decir por dos meses; por tanto,

$$\begin{aligned} C &= 3000(1.01)^{-36}\left(1 + \frac{0.04}{6}\right) \\ &= 3000(0.698925)\left(\frac{3.02}{3}\right) \\ &= \$2110.75 \end{aligned}$$

3.6. ECUACIONES DE VALOR

Una ecuación de valor se obtiene igualando una fecha de comparación o fecha focal, la suma de un conjunto de obligaciones con otro conjunto de obligaciones. Cabe notar que cuando se trata con interés simple, dos conjuntos de obligaciones que son equivalentes en una cierta fecha pueden no serlo en otra distinta.

Cuando se trata con interés compuesto, dos conjuntos de obligaciones que son equivalentes en una fecha también lo son en cualquier otra.

EJEMPLO 9.

M debe a N \$1000 pagaderos en dos años y \$3000 pagaderos en 5 años. Acuerdan que M liquide sus deudas mediante un pago único la final de 3 años sobre la base de un rendimiento de 6 % convertible semestralmente.

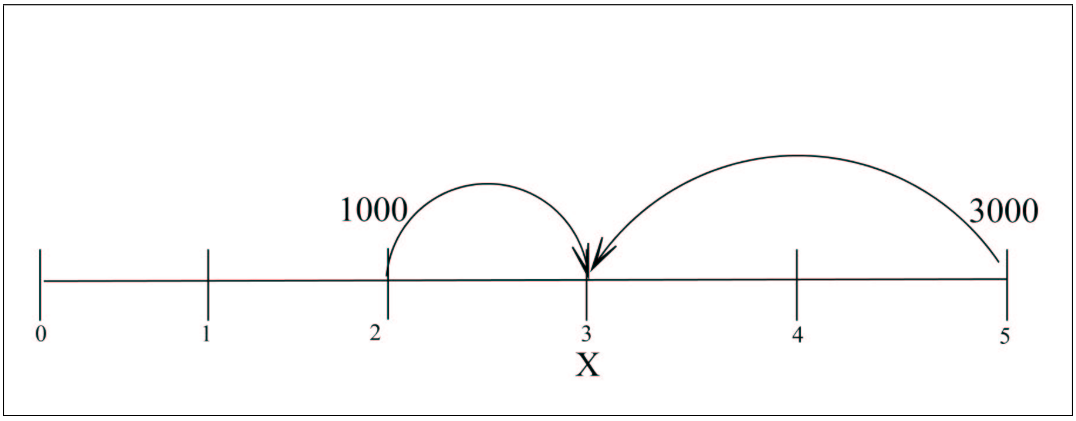

Figura 3.1: Pago requerido

Sea X el pago requerido. si tomanos el final del tercer año como fecha focal, entonces la deuda de \$1000 está vencida en un año y su valor de $1000(1.03)^2$; la deuda de \$3000 vence en dos años y su valor es $3000(1.03)^{-4}$, mientras que el valor del pago X es X en la fecha focal. Igualando la suma de dos valores de las deudas con el valor del pago único, en la fecha focal se tiene:

$(a)\ X = 1000(1.03)^2 + 3000(1.03)^{-10}$

Si se toma la fecha inicial como fecha focal, entonces la ecuación de valor es:

$(b)\ X(1.03)^{-6} = 1000(1.03)^2 + 3000(1.03)^{-10}$

Tomando el final del quinto año como fecha focal, la ecuación de valor es:

$(c)\ X(1.03)^{-6} = 1000(1.03)^6 + 3000$

Se puede observar que las tres ecuaciones de valor son equivalentes; por ejemplo, (b) puede ser obtenida de (a) multiplicando esta última por $(1.03)^{-6}$; y (c) puede ser obtenida de (b) multiplicando ésta por $(1.03)^{10}$. Sin embargo, si se toma 100 años después como fecha focal, la ecuación de valor correspondiente puede ser obtenida de (b) multiplicando ésta por $(1.03)^{200}$. De todas las ecuaciones que puedan formarse, (a) es visiblemente la más simple para determinar X; aplicándolas se obtiene:

$$\begin{aligned} X &= 1000(1.03)^2 + 3000(1.03)^{-4} \\ &= 1000(1.060900) + 3000(0.888487) \\ &= \$3726.36 \end{aligned}$$

EJEMPLO 10.

Una persona debe \$1000 pagaderos en 1 año y \$3000 pagaderos en cuatro años. Acuerda con la entidad crediticia pagar \$2000 al instante y el resto en 2 años. ¿Cuánto tendrá que pagar al final del segundo año suponiendo tener un rendimiento de 5 % convertible semestralmente?

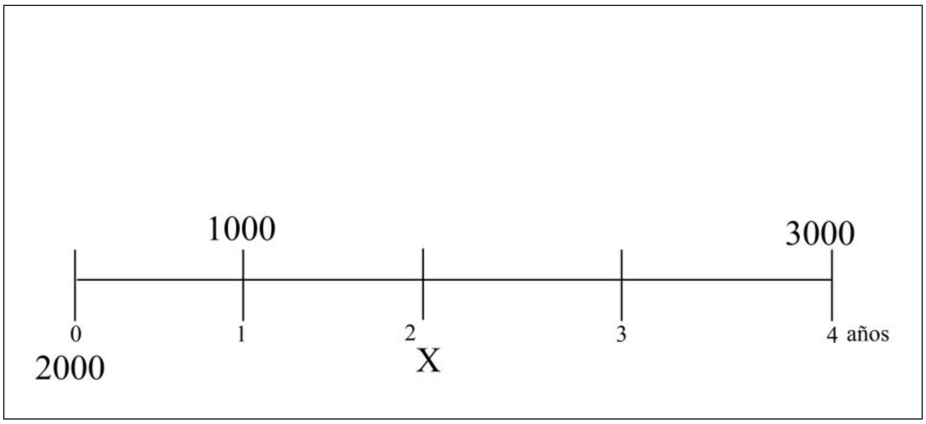

Figura 3.2: Pago requerido

Póngase con X el pago requerido. Tomando como fecha focal al final del segundo año, la deuda de \$1000 está vencida 1 año y su valor es $1000(1.025)^2$, mientras que la deuda de \$3000 vence en 2 años y su valor es $3000(1.025)^{-4}$. Análogamente, el pago de \$2000 está vencido dos años en la fecha focal y su valor es de $2000(1.025)^4$, mientras que el pago X vale X. Igualando la suma del valor de los dos pagos y de las dos deudas, se tiene:

$$2000(1.025)^4 + X = 1000(1.025)^2 + 3000(1.025)^{-4}$$

y por tanto,

$$\begin{aligned} X &= 1000(1.025)^2 + 3000(1.025)^{-4} - 2000(1.025)^4 \\ &= 1050.62 + 2717.85 - 2207.63 = \$1560.84 \end{aligned}$$

3.7. TIEMPO EQUIVALENTE

La fecha en la cual un conjunto de obligaciones, con vencimiento de fechas diferentes, puede ser liquidado mediante un pago único igual a la suma de las distintas deudas, se conoce como *fecha de vencimiento promedio* de las deudas. El tiempo por transcurrir hasta dicha fecha se conoce como *tiempo equivalente.*

EJEMPLO 11.

¿Cuál es el tiempo equivalente para el pago de una deudas de \$1000 con vencimiento en 1 año, \$3000 con vencimiento en 2 años suponiendo un rendimiento de 4 % convertible trimestralmente?

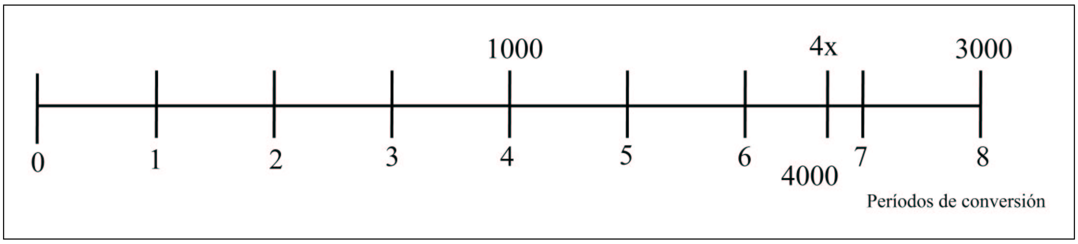

Figura 3.3: Pago requerido

Desígnese con x (años) el tiempo equivalente. Tomando el día de hoy como fecha focal, la ecuación de valor es:

$$4000(1.01)^{-4x} = 1000(1.01)^{-4} + 3000(1.01)^{-8}$$

entonces,

$$(1.01)^{-4x} = \frac{1000(1.01)^{-4} + 3000(1.01)^{-8}}{4000} = \frac{3731.43}{4000} = 0.9328575$$

Interpolando con los valores generados por la ecuación

$$a = v^n = (1+i)^{-n}$$

se tiene:

$$1\left[\begin{matrix}\left[\begin{matrix}6\\4x\end{matrix}\right]\\7\end{matrix}\right.\ 4x-6$$

$$-0.00933\left[\begin{matrix}\left[\begin{matrix}\mathbf{0.94205}\\\mathbf{0.93286}\end{matrix}\right]\\\mathbf{0.93272}\end{matrix}\right.\ -0.00919$$

$$\frac{4x-6}{1} = \frac{0.00919}{0.00933} = 0,985 \;\text{ y }\; x = 1.746 \text{ o sea, } 1.75 \text{ años}$$

El lector demostrará que $x \backsimeq 1.746$ años, si se usan logaritmos.

Frecuentemente se usa la siguiente regla práctica para hallar el tiempo equivalente:

(i) Multiplíquese cada deuda por el tiempo en (años) que falta hasta el vencimiento.

(ii) Súmense los productos obtenidos y divídanse entre la suma de las deudas.

EJEMPLO 12.

Aplicando la regla práctica al ejemplo 6, se tiene:

$$x = \frac{1000(1) + 3000(2)}{4000} = \frac{7000}{4000} = 1.75 \text{ años}$$

EJERCICIOS DE REPASO

1. Cierta cantidad de dinero es invertida a una tasa de interés del 7 % convertible en períodos trimestrales en las fechas del 10 de octubre de 2010 al 10 de enero de 2011. Hallar la tasa de interés i por período de conversión y el número de períodos n.

2. Hallar la tasa de interés i equivalente a $j = 0.0550$ convertible trimestralmente.

3. Hallar la tasa nominal convertible mensualmente a la cual el monto de \$45000 es a \$75000 en 3 años.

4. Determiar el monto acumulado de \$500000 que se depositan en una cuenta de valores que paga 19 % anual convertible mensualmente:

   a) Al cabo de un año.

   b) Al cabo de dos años.

5. ¿ Cuánto dinero debe pagarse a una entidad bancaria que hizo un préstamo de \$4500000 si se reembolsa al año capital e interés y la tasa aplicada es de 0.50 anual convertible trimestralmente?.

6. ¿ Qué cantidad de dinero recibe una empresa de maquinaria en calidad de préstamo si ha firmado un vale por \$950000 que incluye capital e intereses a 18 % convertible semestralmente, y tiene vencimiento en 22 meses?.

7. Por la venta de un automovil, una consignataria recibe un pagaré por \$2500000 con vencimiento a 1 año que devenga intereses a razón de 5 % anual convertible semestralmente. ¿Qué cantidad recibirá la consignataria si al cabo de seis meses descuenta el documento en su banco y éste le cobra 12 % de interés anual?.

8. ¿Qué tasa de interés nominal ha ganado un capital de una persona por valor de \$2000000 que se ha incrementado a \$5000000 en 3 años, si dicho interés se capitaliza:

   a) Mensualmente.

   b) Trimestralmente.

9. Pedro depositó \$10000000 en una cuenta bancaria hace 2 años y 5 meses. Actualmente tiene \$12000000, y desea saber cuál es la tasa de interés que ha ganado si la capitalización es trimestral.

10. Un comerciante compra maquinaria por un valor de \$15000000. El paga inicialmente \$5000000 y \$5000000 al término del tercer mes. Supongamos un rendimiento de 4 % convertible trimestralmente, ¿cuál será el importe del pago final que tendrá que hacer al término de 7 meses?.

11. ¿A qué tasa efectiva, un pago único por valor de \$350000 hoy, es equivalente a dos pagos de \$760000 cada uno con vencimiento en dos y tres años?.

12. Un documento con fecha del 1 de marzo de 2009, estipula un pago por un valor de \$450000 con intereses del 4.5 % convertible trimestralmente 3 años más tarde. Hallar el importe de la venta del documento el 1 de marzo de 2012 suponiendo un rendimiento del 5 % convertible semestralmente.

CAPÍTULO 4

ANUALIDADES

4.1. ANUALIDADES ORDINARIAS

Una anualidad es una serie de pagos iguales efectuados a intervalos iguales de tiempo. Ejemplos de anualidades son abonos semanales, pagos de renta mensuales, dividendos trimestrales sobre acciones, pagos semestrales de interés sobre bonos, primas anuales en pólizas de seguros de vida, etc.

El tiempo transcurrido entre cada pago sucesivo de la anualidad se conoce como *intervalo de pago.* El tiempo contado desde el principio del primer intervalo de pago hasta el final del último intervalo de pago se conoce como *plazo* de la anualidad. La suma de todos los pagos hechos en un año se conoce como *renta anual*, por lo tanto, una renta anual de \$28000 pagaderos trimestralmente significa el pago de \$280 cada tres meses.

Una *anualidad cierta* es una anualidad en la cual los pagos principian y terminan en fechas fijas. Una *anualidad contingente* es aquella en la cual el plazo depende de algún suceso cuya realización no puede fijarse. Una serie predeterminada de pagos periódicos forman una anualidad cierta, ya que los pagos periódicos de primas en el seguro de vida terminan al ocurrir la muerte del asegurado, éstos forman una anualidad contingente.

Una *anualidad cierta ordinaria* es aquella en la cual los pagos son efectuados al final de cada intervalo de pago, es decir, que el primer pago se hace al final del primer intervalo de pago, el segundo intervalo de pago y, así sucesivamente. Diremos que todas las anualidades serán ciertas ordinarias. Sin embargo, consideraremos únicamente el caso simple, esto es, anualidades en las cuales el intervalo de pago y el período de interés coinciden.

4.2. MONTO Y VALOR PRESENTE DE UNA ANUALIDAD

Consideremos una anualidad ordinaria de \$1000 anuales, durante 4 años, al 5 %.

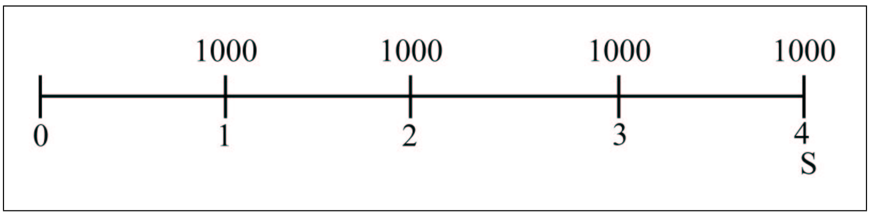

Figura 4.1: Períodos de intereses

El *monto* S de la anualidad es la suma de los montos compuestos de los distintos pagos, cada uno acumulado hasta el término del plazo. Puesto que el primer pago gana intereses 3 años, se llega a:

$$S = 1000(1.05)^3 + 1000(1.05)^2 + 1000(1.05) + 1000$$

o, invirtiendo el orden,

$$S = 1000 + 1000(1.05) + 1000(1.05)^2 + 1000(1.05)^3$$

Por lo cual,

[(*i*)]

$$\begin{aligned} S &= 1000\left[1 + (1.05) + (1.05)^2 + (1.05)^3\right] \\ &= 1000\,[1 + 1.05 + 1.1025 + 1.15762] \\ &= 1000(4.310125) \\ &= \$4310.12 \end{aligned}$$

Puesto que en (i) la suma dentro de los paréntesis rectangulares corresponde a la suma de la progresión geométrica $s = \frac{a-ar^n}{1-r}$ cuando $r < 1$ y $s = \frac{ar^n-a}{r-1}$ cuando $r > 1$, con término inicial 1 y con razón $1.05 > 1$, se puede escribir:

$$\begin{aligned} S &= 1000\frac{(1.05)^4 - 1}{(1.05) - 1} \\ &= 1000\frac{1.21550625 - 1}{0.05} \\ &= 1000\frac{0.21550625}{0.05} \\ &= 1000(4.310125) \\ &= \$4310.12 \end{aligned}$$

El *valor presente* A de una anualidad es la suma de los valores presentes de los distintos pagos, cada uno descontado al principio del plazo, por tanto:

$$\begin{aligned} A &= 1000(1.05)^{-1} + 1000(1.05)^{-2} + 1000(1.05)^{-3} + 1000(1.05)^{-4} \\ &= 1000\left[(1.05)^{-1} + (1.05)^{-2} + (1.05)^{-3} + (1.05)^{-4}\right] \\ &= 1000\frac{(1.05)^{-1} - (1.05)^{-5}}{1 - (1.05)^{-1}} \\ &= 1000\frac{1 - (1.05)^{-4}}{(1.05) - 1} \\ &= 1000\frac{1 - 0.82270247}{0.05} \\ &= \$3545.95 \end{aligned}$$

Es conveniente que el lector represente cada anualidad en una línea de tiempo tomando como unidad de medida el *período de interés*. No es necesario marcar todos los períodos de interés; sin embargo, el principio del plazo (representado por 0 en la escala), el término del plazo (n, en la escala) y algunos de los períodos de interés, deben mostrarse. (El hecho que el intervalo de pago coincida con el período de interés, es únicamente requisito de anualidades ciertas ordinarias).

4.3. FORMULAS DE LAS ANUALIDADES

Sean $R =$ el pago periódico de una anualidad, $i = \frac{j}{m} =$ la tasa de interés por período de interés, $n =$ el número de intervalos de pago $=$ el número de períodos de interés, $S =$ el monto de la anualidad, $A =$ el valor presente de la anualidad.

Las fórmulas básicas de anualidades son:

$$S = R \cdot s_{n^i} = R\frac{(1+i)^n - 1}{i} \tag{4.1}$$

y

$$A = R \cdot a_{n^i} = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \tag{4.2}$$

Donde $s_{n^i} = \frac{(1+i)^n-1}{n}$ es el monto de una anualidad de 1 por intervalo de pago durante n intervalos y,

$$a_{n^i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

es el valor presente de una anualidad de 1 por intervalo de pago durante n intervalos. El símbolo s_{n^i} se lee como " s sub n a la i". Para determinadas i y n se generan valores con la siguiente ecuación $s_{n^i} = \frac{(1+i)^n-1}{i}$. El símbolo a_{n^i} se lee "a sub n a la i". Para determinadas i y n se generan valores con la siguiente ecuación:

$$a_{n^i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

EJEMPLO 13.

Hallar el monto y el valor presente de una anualidad de \$150 mensuales durante 3 años 6 meses al 6 % convertibles mensualmente

$R = 150$, $i = 0.005$, $n = 42$; de (4.1) y(4.2) se tiene:

$$S = R \cdot s_{n^i} = 150 s_{42^{0.005}} = 150(46.606554) = \$6990.98$$

y

$$A = R \cdot a_{n^i} = 150 a_{42^{0.005}} = 150(37.79830) = \$5669.74$$

Cuando la tasa o el tiempo dado no corresponden a los valores generados por

$$s_{n^i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

y por

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

los cálculos pueden hacerse utilizando logaritmos.

EJEMPLO 14.

Hallar el monto y el valor presente de una anualidad de \$2275 cada 6 meses durante 8 años y 6 meses al 5,4 % convertible semestralmente.

$$R = 2275,\ i = 0.027,\ n = 17 \text{ ; con lo cual}$$

$$\begin{aligned} S &= 2275 s_{\overline{17}|0.027} \\ &= 2275\frac{(0.027)^{17}-1}{0.027} \end{aligned}$$

Calculamos primero $N = (0,027)^{17}$ con logaritmos:

$$\begin{aligned} log\ N &= 17\ log\ (1.027) \\ log\ N &= 17(0.0115704) \\ log\ N &= 0.196697 \\ N &= 1.5729 \end{aligned}$$

Por tanto:

$$S = 2275\frac{0.5729}{0.027}$$

$$\begin{aligned} log\ 2275 &= 3.356981 \\ log\ 0,5729 &= 9.758079 - 10 \\ colog\ 0,027 &= 1.568636 \\ \hline log\ S &= 4.683696 \\ S &= \$48.272 \end{aligned}$$

y S es el monto requerido.

$$A = 2275 a_{17^{0.027}} = 2275 \frac{1-(1.027)^{-27}}{0.027}$$

Primero se calcula $N = (1.027)^{-27}$ con logaritmos:

$$\begin{aligned} log\ N &= -17\ log\ 1.027 \\ log\ N &= 0 - 0.0196697 \\ log\ N &= 0.0196697 - 10 \\ N &= 0.63578 \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} A &= 2275 \frac{0.36422}{0.027} \\ log\ 2275 &= 3.356981 \\ log\ 0.36422 &= 9.561364 - 10 \\ colog\ 0.027 &= 1.568636 \\ & \quad \overline{} \\ log\ A &= 4.486981 \\ A &= \$30.689 \end{aligned}$$

y A es el valor presente requerido.

Las dificultades con las anualidades provienen principalmente de no tener en cuenta los siguientes hechos al aplicar las fórmulas:

(i) La fórmula (4.1) nos da el monto de la anualidad justamente después que el último pago ha sido efectuado.

(*ii*) La fórmula (4.2) nos da el valor de la anualidad un período antes de hacer el primer pago.

4.4. PAGO PERIODICO

Resolviendo para R las fórmulas (4.1) y (4.2), se tiene que

$$R = S\frac{1}{s_{n^i}} \tag{4.3}$$

y

$$R = A\frac{1}{a_{n^i}} \tag{4.4}$$

es el pago periódico o la renta periódica de una anualidad cuyo monto (4.3) o valor presente (4.4) es conocido. Para determinados i y n, se generan valores mediante la ecuación $\frac{1}{s_{n^i}} = \frac{i}{(1+i)^n-1}$ para el valor de $\frac{1}{s_{n^i}}$. No se incluyen valores de $\frac{1}{a_{n^i}}$ ya que

$$\frac{1}{a_{n^i}} = \frac{1}{s_{n^i}} + i \tag{4.5}$$

EJEMPLO 15.

De los valores generados por $\frac{1}{s_{n^i}} = \frac{i}{(1+i)^n-1}$ se tiene, $\frac{1}{s_{20^{0.02}}} = 0.04115672$. Por tanto:

$$\frac{1}{a_{20^{0.02}}} = \frac{1}{s_{20^{0.02}}} + 0.02 = 0.04115672 + 0.02 = 0.06115672$$

EJEMPLO 16.

¿ Cuál tiene que ser el importe de cada uno de los depósitos semestrales que deberán hacerse en una cuenta de ahorros que paga el $3\frac{1}{2}\,\%$ convertible semestralmente, durante 10 años para que el monto sea de \$25.000, precisamente después del último depósito?

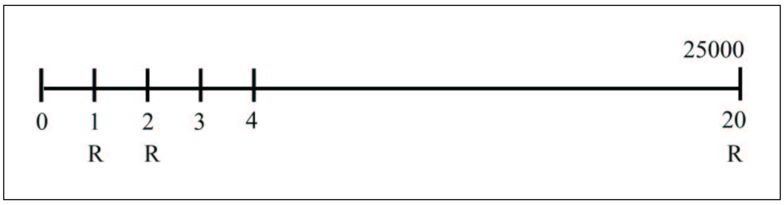

Figura 4.2: Períodos de intereses

Acá $S = 25.000$, $i = 0.0175$, $n = 20$; de (4.3) se tiene que:

$$R = S\frac{1}{s_{n^i}} = 25.000\frac{1}{s_{20^{0.0175}}} = 25.000(0.0421912) = \$1054.78$$

EJEMPLO 17.

Tres meses antes de ingresar al colegio un estudiante recibe \$10.000, los cuales son invertidos al 4 % convertible trimestralmente.

¿ Cuál es el importe de cada uno de los retiros trimestrales que podrá hacer durante cuatro años, iniciando el primero, trascurridos tres meses?

Figura 4.3: Períodos de intereses

Puede verse que $A = 10.000$, $i = 0.01$, $n = 16$; así se tiene:

$$\begin{aligned} R &= A\frac{1}{a_{n^i}} \\ &= 10.000\frac{1}{s_{16^{0.01}}} \\ &= 10.000(0.0579446 + 0.01) \\ &= 10.000(0.0679446) \\ &= \$679.45 \end{aligned}$$

4.5. PLAZO

Las fórmulas (4.3) y (4.4) pueden ser resueltas aproximadamente para n, ya sea interpolando los valores generados por las ecuaciones $s_{n^i} = \frac{(1+i)^n-1}{i}$; $a_{n^i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ o utilizando logatrimos.

EJEMPLO 18.

Cierta persona obtiene un crédito por un valor de \$3750, pactando un plan de pagos en el cual cancela capital e intereses al 6 % convertible semestralmente mediante pagos semestrales de \$225 cada uno haciendo el primero en seis meses. ¿ Cuántos pagos deberá hacer esta persona?.

Puede ver que $A = 3750$, $R = 225$, $i = 0.03$; y así:

$$3750 = 225a_{n^{0.03}} \text{ y } a_{n^{0.03}} = \frac{3750}{225} = 16.6667$$

Para $i = 0.03$ se tiene:

$$a_{23^{0.03}} = 16.44361 \quad \text{y} \quad a_{24^{0.03}} = 16.93554$$

O sea una anualidad de 23 pagos tiene un valor presente ligeramente menor de \$3750, mientras que una de 24 pagos tiene un valor presente de algo más de \$3750. En este caso nada se ganará intentando obtener n con más exactitud, ya que a la persona en mención se le presentará alguna solución con las dos alternativas siguientes:

(i) Aumentar el 23 % pago en una cierta cantidad.

(ii) Otra opción es realizar 23 pagos de \$225 cada uno, y 6 meses después un pago final mejor a \$225.

En la práctica, se utiliza con más frecuencia la segunda alternativa.

EJEMPLO 19.

Hallar el pago final que tendrá que hacerse con la alternativa (ii) en el ejemplo 4.

Con la alternativa (ii), la persona saldará su deuda haciendo 23 pagos semestrales de \$225 cada uno y el 24 % de X, 6 meses más tarde, tomando como fecha focal el principio del plazo, se tiene:

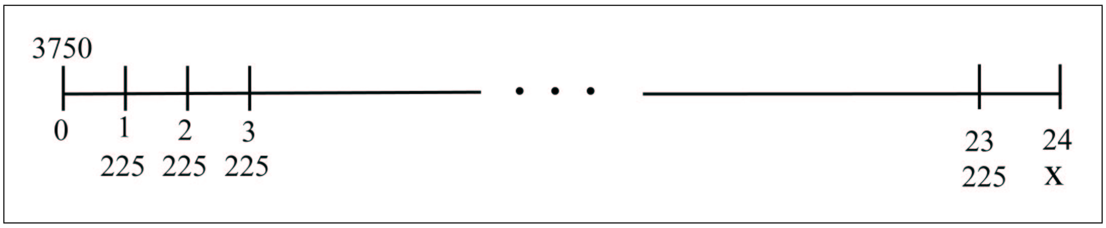

Figura 4.4: Períodos de intereses

$$225a_{\overline{23}|0.03} + X(1.03)^{-24} = 3750$$

de donde,

$$\begin{aligned} X &= (3750 - 225a_{23^{0.03}})(1.03)^{24} \\ &= (3750 - 3699.81)(2.0328) \\ &= \$102.03 \end{aligned}$$

EJEMPLO 20.

Una entidad bancaria realiza la apertura de un fondo de \$5000 mediante consignaciones de \$250 cada 3 meses. Si en fondo gana 4 % convertible trimestrales. Hallar el número de depósitos de \$250 que tendrán que hacerse y el importe del depósito que será necesario hacer 3 meses más tarde.

Según los datos se tiene $S = 5000$, $R = 250$, $i = 0.01$; por tanto,

$$250s_{n^{0.01}} = 5000 \text{ y } s_{n^{0.01}} = 20$$

así se encuentra que $i = 0.01$

$$s_{18^{0.01}} = 19.61475 \text{ y } s_{19^{0.01}} = 20.81090$$

O sea que se harán 18 depósitos de \$250 cada uno y un depósito final de X tres meses depués.

Para hallar el depósito final se toma como fecha focal el final del 19 % período de interés.

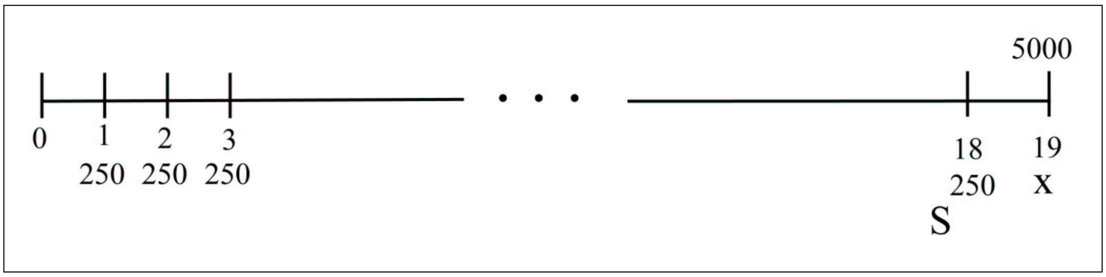

Figura 4.5: Períodos de intereses

Primera solución.

Desígnese con S el monto de los 18 depósitos regulares justamente después de haberse hecho el último. Se tiene que,

$$X + S(1.01) = X + 250s_{18^{0.01}}(1.01) = 5000$$

$$\begin{aligned} X &= 5000 - 250s_{18^{0.01}}(1.01) \\ X &= 5000 - 250(19.61475)(1.01) \\ X &= \$47.28 \end{aligned}$$

Segunda solución.

De la siguiente ecuación obtenemos:

$$s_{(n+1)^{i}} - 1$$

$$250s_{18^{0.01}}(1.01) \quad = \quad 250(s_{19^{0.01}} - 1)$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} X &= 5000 - 250(s_{\overline{19}|0.01} - 1) \\ &= 5000 - 250(20.81090 - 1) \\ &= 5000 - 4952.72 \\ &= \$47.28 \end{aligned}$$

4.6. APROXIMACION DE LA TASA DE INTERES

Considérese nuevamente el problema.

EJEMPLO 21.

Un televisor puede ser comprado con \$449.50 al contado o \$49.50 de cuota inicial y \$27.50 mensuales durante 18 meses.

- ¿Qué tasa nominal de interés se está cargando?
- ¿Qué tasa efectiva de interés se está cargando?

(a) $A = 449.50 - 49.50 = 400$, $R = 27.50$, $n = 18$; con lo cual

$$27.50 a_{\overline{18}|i} = 400 \ \text{ y } a_{\overline{18}|i} = \frac{400}{27.50} = 14.5455$$

Para $n = 18$ se tiene:

$$a_{\overline{18}|0.02} = 14.9920 \text{ y } a_{\overline{18}|0.025} = 14.3534$$

O sea que i está entre $2\,\%$ y $2\frac{1}{2}\,\%$ y la tasa nominal j está entre $24\,\%$ y $30\,\%$ convertible mensualmente.

Para un resultado más preciso, se puede interpolar los valores dados por la ecuación $a_{n^i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$; en consecuencia,

$$0.005\left[\begin{array}{l} \left.\begin{array}{c}0.002\\ i\end{array}\right] x \\ 0.025\end{array}\right.$$

$$-0.6386\left[\begin{array}{l} \left.\begin{array}{c}14.9920\\ 14.5455\end{array}\right] -0.4465 \\ 14.3534\end{array}\right.$$

$$\frac{x}{0.005} = \frac{-0.4465}{-0.6386,}, \; x = \frac{0.4465}{0.6386}(0.005) = 0.00350$$

$$i = 0.02 + x = 0.02350$$

y $j = 12 \cdot i = 28.20\,\%$ es la tasa nominal convertible mensualmente.

(b) Desígnese con i la tasa efectiva; entonces se tiene:

$$1 + i = (1.0235)^{12} = 1.3215$$

por tanto, $i = 32.15\,\%$.

EJERCICIOS DE REPASO

1. En los últimos cinco años, una persona ha depositado un valor de \$5750000 cada fin de año en una cuenta de ahorros, la cual paga un interés de 2.5 % anual. ¿ Cuánto había en la cuenta inmediatamente después de haber hecho el octavo pago?.

2. ¿Cuál es el valor de contado de un computador comprado con el siguiente plan: \$200000 de cuota inicial; \$160000 mensuales durante 1 años 6 meses con un último pago de \$25000, si se carga el 8 % con capitalización mensual?.

3. Al agotarse cierta mercancía habrá activos recuperables por un valor de \$3500000. Hallar el valor presente, incluidas las utilidades, si estas representan el 25 % de la producción.

4. Una persona deposita \$20000 semanales empezando dentro de una semana al 38 % capitalizable mensualmente. ¿ Cuanto tendrá en 4 semanas ?.

5. ¿ Cuál es el valor presente de una renta de \$45500 depositada a principio de cada mes, durante 10 años en una cuenta de ahorros que gana el 15 %, convertible mensualmente?.

6. Una compañía adquiere maquinaria; los estudios de ingeniería muestran que los trabajos preparatorios demoraran 3 años. Se estima que la maquinaria rendirá una ganancia anual de \$240000. Suponiendo que la tasa comercial es del 10 % y que maquinaria se agotará después de 13 años continuos de trabajo, hallar el valor futuro de la renta que espera obtenerse.

7. Para liquidar cierta deuda con intereses del %4 convertible mensualmente; una persona desea hacer pagos de \$45000 al final de cada mes por los 10 meses y

un pago final por un valor de \$90500 un mes después. ¿ Cuál es el importe de la deuda?.

8. Una empresa recibe dos ofertas de cierta maquinaria, ambas de igual rendimiento. La primera oferta es por un valor de \$4550000 y las maquinas tiene una vida útil de 4 años; la segunda oferta es de \$650000 por maquinas que tienen una vida útil de 6 años. Si el precio del dinero es el 3.7 % efectivo, ¿cuál oferta es la más conveniente?.

9. Una compañía de valores contrae una deuda con una entidad bancaria por una valor de \$5000000 pagaderos en 5 años trimestralmente a una tasa efectiva anual del 17 %. Al finalizar el tercer año, luego de haber efectuado el pago correspondiente a dicho trimestre se tiene:

    a) ¿ Cuánto tendría que pagar en ese momento para liquidar el total de la deuda?.

    b) ¿ Cuánto tendría que pagarle a la entidad bancaria en ese momento para que a futuro sus cuotas de pago trimestrales asciendan sólo a 550000 ?.

    c) ¿ Afecta que al calcular el valor actual de una deuda consideren una tasa efectiva anual menor?.

10. A una persona se le asigna una beca de estudio que le otorga un valor de \$780000 mensuales y que comenzará a recibir dentro de 5 meses y medio. Calcular el valor actual de la beca si el interés es del 13 % capitalizable trimestralmente y la beca tiene una duración de 4 años.

11. Una compañía de computadores espera pagar \$650000 cada 6 meses de forma indefinida, como dividendo sobre sus acciones. Suponiendo un rendimiento del 8 % convertible semestralmente. ¿Cuánto se debería pagar por cada acción?.

12. Una persona debe cancelar \$506000 a 3 meses, con el 7 % de interés. Si el paga tiene como cláusula penal por de mora, se cobre el 15 % por el tiempo que

exceda al plazo fijado. ¿ Qué cantidad paga el deudor, dos meses después del vencimiento?.

13. Una persona, en el momento de nacer su hijo depositó 150000 en una cuenta que abona el 5.7 %; dicha cantidad la consigna cada que el hijo cumple años. Al cumplir 16 años, aumento sus consignaciones a 300000. Calcular la suma que tendrá a disposición cuando sea mayor de edad.

14. Una ciudad emite obligaciones a 8 años de plazo por un valor de 5000000 que devengan el 15 % de interés. ¿ Qué depósitos anuales debe hacer en un fondo que abona el 4 % y que egreso anual tendrá la ciudad hasta el pago de la deuda?.

15. ¿ Cuál debe ser el importe de cada uno de 10 depósitos mensuales anticipados que se colocan en un fondo de inversión el cual rinde el 20.4 % convertible mensualmente con el objeto de amortizar una deuda por un valor de \$2505000 que vence exactamente en un año?.

16. Calcular el valor de contado de una propiedad raíz vendida en las siguientes condiciones: \$2000000 de contado; \$100000 por mensualidades vencidas durante un año y 6 meses y un último pago de \$200500 un mes después de pagada la última mensualidad. Para el cálculo, utilizar el 10 % con capitalización mensual.

17. Suponga que una persona trabajará durante 40 años, su cotización en el fondo de pensiones será de 2000000 mensuales, si el fondo le ofrece una rentabilidad mensual de 0.8 %, ¿ cuál será el monto que tendrá su fondo al momento de su jubilación?.

CAPÍTULO 5

INTRODUCCIÓN A LOS SEGUROS DE VIDA

5.1. POLIZA DE SEGURO DE VIDA

Una poliza de seguro de vida es un contrato entre una compañía de seguros y una persona (que se denominará el asegurado). En este contrato:

(a) El asegurado acuerda hacer uno o más pagos (pagos de primas) a la compañía,

(b) La compañía promete pagar, al recibo de pruebas de la muerte del asegurado, una suma fija, a una o más personas (que se denominarán beneficiarios) designados por el asegurado.

Los principales tipos de seguro de vida son:

(i) *Seguro de vida entera* en la cual, la compañía promete pagar el valor nominal de la póliza al beneficiario a la muerte del asegurado, cuando sea que ésta ocurra.

(ii) *Seguro temporal a n-años* en el cual, la compañía promete pagar el valor nominal de la póliza al beneficiario, a la muerte del asegurado, únicamente si el asegurado muere dentro de los n años siguientes a la emisión de la póliza.

(iii) *Seguro total a n-años* en el cual, la compañía promete pagar el valor nominal de la póliza al beneficiario, a la muerte del asegurado, si el asegurado muere dentro de los n años siguientes a la emisión de la póliza y pagar el valor nominal de la póliza al asegurado al término de n años, si sobrevive el período.

En la práctica de los beneficios se pagan tan pronto se demuestre la muerte del asegurado, sin embargo, para simplificar los cálculos necesarios supondremos que los beneficios de cualquier póliza serán pagados a final del año póliza en el que el asegurado muere. Como en el caso de las anualidades contingentes, únicamente considérese aquí primas netas.

5.2. SEGURO DE VIDA ENTERA

Desígnese con A_x la prima neta única de una póliza de seguro de vida entera de l, emitida para una persona de cierta edad x. El problema de hallar A_x puede reducirse al problema de hallar la cantidad con la que cada uno de las l_x personas, todas de edad x, deben contribuir para constituir un fondo suficiente que permita a la compañía pagar al beneficiario de cada asegurado, la cantidad de l al final del año en que el asegurado muere. La contribución total al fondo es l_xA_x. Durante el primer año, d_x de los asegurados morirán de acuerdo con la tabla de mortalidad y debe pagarse d_x de beneficio al final del año. El valor presente de todos estos beneficios está dado por:

$$(1+i)^{-1}d_x = vd_x$$

Durante el segundo año, d_{x+1} personas morirán y el valor presente de los beneficios pagaderos al final del año es $v^2 d_{x+1}$, y así sucesivamente. Por tanto:

$$\begin{aligned} l_x A_x &= vd_x + v^2 d_{x+1} + v^3 d_{x+2} + \cdots \\ A_x &= \frac{vd_x + v^2 d_{x+1} + v^3 d_{x+2} + \cdots}{l_x} \end{aligned}$$

Multiplicando numerador y denominador por v^x, se tiene:

$$A_x = \frac{v^{x+1}d_x + v^{x+2}d_{x+1} + v^{x+3}d_{x+2} + \cdots + v^{100}d_{99}}{v^x l_x}$$

En términos de los valores conmutativos

$$D_x = v^x l_x,\ C_x = v^{x+1}d_x,\ M_x = C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \cdots + C_{99}$$

se obtiene:

$$A_x = \frac{C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \cdots + C_{99}}{D_x}$$

y finalmente,

$$A_x = \frac{M_x}{D_x} \tag{5.1}$$

los valores de M_x al $2\frac{1}{2}\,\%$ se darán para la solución de los ejemplos.

EJEMPLO 22.

Hallar la prima neta única de una póliza de seguro de vida entera de \$1000, expedida para una persona de 22 años de edad.

Utilizando (5.1) y $M_x = 193.897$ se tiene:

$$1000A_{22} = 1000\frac{M_{22}}{D_{22}} = 1000\frac{193.897}{549.956} = \$352.57$$

Rara vez se venden pólizas de seguro a prima única. En su lugar se pagan primas iguales al principio de cada año, ya sea, (a) durante toda la duración de la póliza, o (b) durante los primero m años de vida de la póliza. Para el seguro de vida entera estos tipos de pagos anuales de primas indican con la denominación de, (a) seguro *ordinario* de vida, o (b) seguro de vida *pagos limitados a* n *años*.

Sea P_x la prima neta anual de una póliza de seguro oridinario de vida de (5.1) emitida para una persona de edad x. Puesto que los pagos de primas forman una anualidad vitalicia anticipada de P_x por año, de la ecuación $\ddot{a} = \frac{N_x}{D_x}$ se llega a:

$$P_x\ddot{a}_x = A_x$$

por lo cual

$$P_x = \frac{A_z}{\ddot{a}_x} = \frac{\frac{M_x}{D_x}}{\frac{N_x}{D_X}}$$

y

$$P_x = \frac{M_x}{N_x} \tag{5.2}$$

EJEMPLO 23.

Hallar la prima neta anual de una póliza de seguro ordinario de vida de \$1000 para una persona de 22 años de edad.

Utiliza (5.2), y $M_x = 193.897$ y $N_x = 14.598.430$

$$1000P_{22} = 1000\frac{M_{22}}{N_{22}} = 1000\frac{193.897}{14.598.430} = 13.28$$

Desígnese con ${}_mP_x$ la prima neta actual de una póliza de seguro de vida pagos limitados a n años de (5.1) para una persona de edad x. Puesto que los pagos forman una anualidad contigente temporal anticipada a m años, $\ddot{a}_{x^m} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$ se tiene:

$$ {}_mP_x \ddot{a}_{x:\overline{m}|} = A_x $$

por lo cual

$$ {}_mP_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}} = \frac{\frac{M_x}{D_X}}{\frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}} $$

y

$$ {}_mP_x = \frac{M_x}{N_x - N_{x+n}} \tag{5.3} $$

EJEMPLO 24.

Hallar la prima neta actual de una póliza de seguro de vida pagos limitados a 10 años de \$1000 para una persona de 22 años de edad.

Utilizando (5.3), M_x y N_x del ejemplo anterior y $N_{22} = 9.724.962$

$$ 1000_{10}P_{22} = 1000\frac{M_{22}}{N_{22} - N_{32}} = 1000\frac{193.897}{14.598.430 - 9.724.962} = \$39.79 $$

5.3. SEGURO TEMPORAL

Desígnese con $l_x A^1_{x:n}$ la primera neta única de una póliza de seguro temporal a n años de (5.1), para una persona de edad x. Procediendo de la misma forma que para el caso de A_x, se encuentra que:

$$ l_x A^l_{x:\overline{n}|} = vd_x + v^2 d_{x+1} + v^3 d_{x+2} + \cdots + v^n d_{x+n-1} $$

ya que el último beneficio se paga al término de n años. Por lo tanto:

$$
\begin{aligned}
A^{1}_{x:\overline{n}|} &= \frac{v^{x+1}d_x + v^{x+2}d_{x+1} + v^{x+3}d_{x+2} + \cdots + v^{x+n}d_{x+n-1}}{v^x l_x} \\
&= \frac{C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \cdots + C_{x+n-1}}{D_x} \\
&= \frac{C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \cdots + C_{99}}{D_x} - \frac{C_{x+n} + C_{x+n+1} + C_{x+n+2} + \cdots + C_{99}}{D_x}
\end{aligned}
$$

y

$$A^{1}_{x:\overline{n}|:} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} \tag{5.4}$$

EJEMPLO 25.

Hallar la prima neta única de una póliza de seguro a 10 años, de \$1000, para una persona de 30 años.

Utilizando (5.4), $M_x = 182.403$, $M_{40} = 165.360$, $D_{30} = 440.801$

$$1000A^{1}_{30:\overline{10}|} = \frac{M_{30} - M_{40}}{D_{30}} = 1000\frac{182.403 - 165.360}{440.801} = \$38.66$$

Sea $P^{1}_{x:\overline{n}|}$ la prima neta actual para una póliza de seguro temporal a n años de (5.1), para una persona de edad x. Puesto que las primas anuales forman una unidad contingente temporal anticipada a n años, así se tiene:

$$P^{1}_{x::\overline{n}|} \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|:} = A^{1}_{x:\overline{n}|}$$

$$P^{1}_{x:\overline{n}|} = \frac{A^{1}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$$

y finalmente

$$P^{1}_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} \tag{5.5}$$

EJEMPLO 26.

Hallar la prima neta actual de una póliza de seguro temporal a 10 años de \$1000, para una persona de 30 años.

Utilizando (5.5), las mismas condiciones M_{30}, M_{40} del ejemplo 4 y $N_{30} = 10.594.280$, $N_{40} = 6.708.573$:

$$1000P^1_{30:\overline{10}|} = 1000\frac{M_{30} - M_{40}}{N_{30} - N_{40}} = 1000\frac{182.403 - 165.360}{10.594.280 - 6.708.573} = \$4.39$$

Sea ${}_mP^1_{x:\overline{n}|}$ la prima neta actual para una póliza de seguro temporal a n años de (5.1), para una persona de edad x. Para ser pagada durante un período de $m < n$ años, esto es, una póliza temporal de n años con pagos limitados a m años de (5.1), para una persona de edad x es decir,

$$ {}_mP^l_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} \tag{5.6}$$

EJEMPLO 27.

Hallar la prima anual de una póliza de seguro temporal a 20 años, con pagos limitados a 15 años, de \$1000, para una persona de 30 años de edad.

Utilizando (5.6) con $m = 15$ y $n = 20$

$$1000{}_{15}P^1_{30:\overline{20}|} = 1000\frac{M_{30} - M_{50}}{N_{30} - N_{45}} = 1000\frac{182.403 - 142.035}{10.594.280 - 5.161.996} = \$7.43$$

5.4. SEGURO TOTAL

Una póliza de seguro total a n años combina los beneficios de un seguro temporal a n años y un total puro al término de m años. Sea $A_{x:\overline{n}|}$ la prima neta única de una póliza de seguro total a n años de (5.1), para una persona de edad x, así:

$$A_{x:\overline{n}|} = A^1_{x:\overline{n}|} +_n E_x = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} + \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

y

$$A_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x} \tag{5.7}$$

Ejemplo 7.

Hallar la prima neta única de una póliza de seguro total a 25 años, por \$1000, para una persona de 40 años de edad.

Utilizando (5.7) se llega a:

$$1000A_{40:\overline{25}|} = 1000\frac{M_{40} - M_{65} + D_{65}}{D_{40}} = 1000\frac{165.360 - 87.500 + 116.086}{328.984} = \$589.54$$

Sea ${}_mP_{x:\overline{n}|}$ la prima neta actual de una póliza de seguro total a n años de (5.1), para una persona de edad x, entonces:

$$P_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+1}} \tag{5.8}$$

EJEMPLO 28.

Hallar la prima neta actual de una póliza de seguro total a 25 años por \$1000, para una persona de 40 años de edad.

Utilizando (5.8) se tiene:

$$1000_mP_{40:\overline{25}|} = 1000\frac{M_{40} - M_{65} + D_{65}}{N_{40} - N_{65}} = 1000\frac{193.948}{6.707.573 - 1.172.130} = \$35.03$$

Sea ${}_mP_{x:\overline{n}|}$ la prima neta actual de una póliza de seguro total a n años con pagos limitados a m años, para una persona de edad x, entonces:

$$
{}_{m}P_{x:\overline{n|}} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+m}} \tag{5.9}
$$

EJEMPLO 29.

Hallar la prima neta actual de una póliza de seguro dotal a 25 años con pagos limitados a 20 años, por \$1000, para una persona de 40 años de edad.

Utilizando (5.9), con $m = 20$ y $n = 25$,

$$
1000{}_{20}P_{40:\overline{25|}} = 1000\frac{M_{40} - M_{65} + D_{65}}{N_{40} - N_{60}} = 1000\frac{193.948}{6.708.573 - 1.865.614} = \$40.05
$$

5.5. PRIMA NATURAL

La prima neta única de un seguro temporal a 1 año, a la edad x, se conoce como *prima natural* a dicha edad. De (5.5) se tiene que la prima natural para un póliza de 1, a la edad x es:

$$
P^1_{x:\overline{n|}} = \frac{M_x - M_{x+1}}{N_x - N_{x+1}} = \frac{M_x - M_{x+1}}{D_x} \tag{5.10}
$$

EJEMPLO 30.

Hallar la prima natural de una póliza de \$1000 a los, (a) 22 años de edad, (b) 23, (c)75.

Utilizando (5.10) se obtiene:

(a) $1000P^1_{22:\overline{1|}} = 1000\frac{M_{22}-M_{23}}{D_{22}} = 1000\frac{193.897-192.507}{549.956} = \$2.53$

(b) $1000P^1_{23:\overline{1|}} = 1000\frac{M_{23}-M_{24}}{D_{23}} = 1000\frac{192.507-191.108}{535.153} = \$2.61$

$(c) \quad 1000P^{1}_{75:\overline{1}|} = 1000\frac{M_{75}-M_{76}}{D_{75}} = 1000\frac{41.670-37.382}{49.588} = \$86.47$

5.6. RESERVAS

Considérese una póliza de seguro ordinario de vida de $1000 para una persona de 22 años de edad. En la tabla que sigue se compara la prima neta anual de esta póliza (véase el ejemplo 2 de seguro de vida) con la prima natural a diferentes edades del seguro (veáse el ejemplo 10 de seguro de vida).

Edad	**Prima neta anual a los 22 años**	**Prima Natural**
22	13.28	2,53
23	13.28	2,61
40	13.28	6,03
51	13.28	12,95
52	13.28	13,95
75	13.28	86,47
85	13.28	189,38

Se ve que los primeros años de la póliza el asegurado paga a la compañía más que el costo anual del seguro, $13.28-2.53 = \$10.75$ el primer año y $13.28-2.61 = \$10.67$ el segundo año. Cada sobrante de la prima anual sobre el costo del seguro en el año es colocada por la compañía en un *fondo de reserva*, el cual gana intereses a la misma tasa que se utilizó al calcular la prima. A los 52 años de edad el costo de un año de seguro por primera vez excede el pago anual de la prima.

Principiando a los 52 años de edad y continuando cada año en adelante mientras la póliza se encuentre en vigor, la compañía toma del fondo de reserva la cantidad necesaria para cubrir la diferencia, entre $13.95 - 13.28 = \$0.067$ a los 52 años y $86.47 - 13.280 = \$73.19$ a los 75 años. El fondo de reserva para cada póliza crece durante toda la vida de la póliza. De acuerdo con la tabla CSO utilizada, la reserva a los 99 años de edad deberá ser $1000v = \$975.61$, esto es, la prima neta única de una póliza de vida entera por \$1000 a los 99 años.

El fondo de reserva al final de cualquier año póliza se conoce como *reserva terminal* del año póliza. La reserva termina menos un cargo nominal para gastos se conoce como *valor de rescate de la póliza.* La reserva terminal pertenece al asegurado mientras la póliza está en vigor. El asegurado en cualquier momento puede solicitar como préstamo el valor de rescate de una póliza sin más garantía.

Tambien pueden cancelar su póliza y tomar el valor de rescate en efectivo o aplicarlo a la compra de otra póliza de seguro.

La reserva terminal al final de cualquier año póliza, puede ser calculada con la ecuación de valor tomado al final del año póliza como fecha focal:

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Reserva terminal al}\\ \text{final del } r\text{-ésimo año de póliza}\end{array}\right\}+\left\{\begin{array}{c}\text{Valor presente de}\\ \text{todas las primas futura}\end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{c}\text{Valor presente de}\\ \text{todos los beneficios futuros}\end{array}\right\} \tag{5.11}$$

Por ejemplo, sea ${}_rV$ la reserva terminal al final del r-ésimo año de una póliza de seguro ordinario de vida de 1, para una persona de edad x. Después de r años póliza, el valor presente de todas las primas futuras será el valor presente de $P_x \cdot \ddot{a}_{x+r}$ de una anualidad vitalicia anticipada de P_x por año, a la edad $x + r$ y el valor de los beneficios futuros será la prima única A_{x+r} de una póliza de seguro de vida entera de 1, a la edad $x + r$. Por lo cual

$${}_rV + P_x \cdot \ddot{a}_{x+r} = A_{x+r}$$

y

$${}_rV = A_{x+r} - P_x \cdot \ddot{a}_{x+r} = \frac{M_{x+r}}{D_{x+r}} - \frac{M_x}{N_x} \cdot \frac{N_{x+r}}{D_{x+r}}$$

EJEMPLO 31.

Hallar la reserva terminal al final de 10_0, año póliza de seguro ordinario de vida de \$1000, para una persona de 22 años de edad.

Del ejemplo 2 de seguros de vida, se tiene que la prima neta anual a los 22 años de edad es \$13.28. Al final del 10_0, año póliza, el valor presente de las primas faltantes es de $13.28\ddot{a}_{32}$ y el valor de los beneficios a futuros es de 1000 A_{32}. Por tanto:

$$\begin{aligned} 1000\,{}_{10}V &= 1000A_{32} - 13.28\,\ddot{a}_{32} = 1000\frac{M_{32}}{D_{32}} - 13.28\frac{N_{32}}{D_{32}} \\ &= \frac{1000M_{32} - 13.28N_{32}}{D_{32}} = \frac{50.165.505}{416.507} = \$120.44 \end{aligned}$$

EJERCICIOS DE REPASO

1. Hallar la prima neta anual de una póliza de seguros ordinarios de vida por un valor de \$2500000 para una persona que tiene una edad de 42 años.

2. Hallar la prima natural de una póliza de seguros por un valor de \$1200000 expedida a los 50 años de edad y a los 55 años de edad.

3. Una persona de 45 años de edad, compra una póliza por la cual el se muere antes de los 70 años, se le paga al primer beneficiario \$1000000 y si permanece vivo recibirá una renta por siempre (vitalicia) de \$250000 anuales, haciéndose el primer pago a los 60 años. Hallar la prima neta anual si se estipulan 25 pagos.

4. A los 30 años de edad, una persona tomó una póliza de seguros de vida pagos limitados a 25 años, por una valor de \$2450000. Al cabo de 30 años, el desea convertir su seguro a un total a 17 años. Suponiendo que el total de la reserva terminal será utilizado, hallar la suma asegurada de la póliza de seguro total que recibiría.

5. Calcular la prima neta de una póliza de seguros temporal a 15 años de \$1500000 para una persona de una edad de 34 años.

CAPÍTULO 6

GRADIENTE ARITMÉTICO Y GEOMÉTRICO

6.1. MOTIVACIÓN

Puede definirse el *gradiente* como una serie de flujos de caja periódicos los cuales poseen una ley de formación refiriéndose a que estos flujos se pueden incrementar o disminuir con base al flujo de caja anterior, en una cantidad constante en un determinado valor o en un porcentaje.

Para que dicha serie de flujos pueda considerarse un gradiente, se debe cumplir lo siguiente:

- Los flujos de caja deben tener una ley de formación.
- Los flujos de caja deben ser periódicos.

- Los flujos de caja deben tener un valor presente y futuro equivalente.

- La cantidad de periodos deben ser iguales a la cantidad de flujos de caja.

Debe hacerse notar que si los flujos de caja son crecientes (o crecen) en una cantidad fija periódicamente, se dará entonces un *gradiente lineal creciente vencido*. Ahora, si los flujos de caja ocurren al comienzo de cada período, se está hablando de un *gradiente lineal creciente anticipado*. Si el primer flujo se aplaza en un tiempo t, se presenta entonces un *gradiente lineal creciente diferido*. Las combinaciones anteriores también se presentan para el gradiente lineal decreciente.

Si los flujos de caja aumentan en cada período en cierto porcentaje y se realizan al final de cada período, se tiene entonces un *gradiente geométrico* creciente vencido, y si los flujos ocurren al inicio de cada período, se tiene un gradiente geométrico creciente anticipado. Se tendrá un gradiente geométrico creciente diferido, si los flujos se presentan en períodos posteriores a la fecha de realizada la operación financiera.

Resumiendo, cuando un proyecto de inversión genera flujos de caja (efectivo) los cuales crecen o decrecen una cierta cantidad constante cada período, como por ejemplo, los gastos de manutención de equipos o maquinaria, estos se pueden incrementar una cierta cantidad constante cada período. También es posible que dicho proyecto genere flujos que se incrementen un cierto porcentaje que es constante por cada período. En este caso se puede entender de forma sencilla cuando se supone que los flujos por el efecto de la inflación[1] crecen un cierto porcentaje constante por período. A esta razón de crecimiento que es constante se le conoce con el nombre de *Gradiente*.

[1]Recordemos que inflación es el aumento generalizado y sostenido de los precios de bienes y servicios en un país.

6.2. GRADIENTE ARITMÉTICO

El gradiente aritmético que se denominará como G también llamado uniforme es una serie de flujos de caja que crece o decrece siempre de manera uniforme; esto significa que el flujo de caja, ya sea ingreso o desembolso, cambia en la misma cantidad anualmente (cada año). La cantidad de aumento o disminución es lo que se llama gradiente.

El valor de G[2] que puede ser positivo o negativo; si no se toma en cuenta el pago base, podríamos construir un diagrama generalizado de flujo de caja de gradiente creciente como se muestra a continuación:

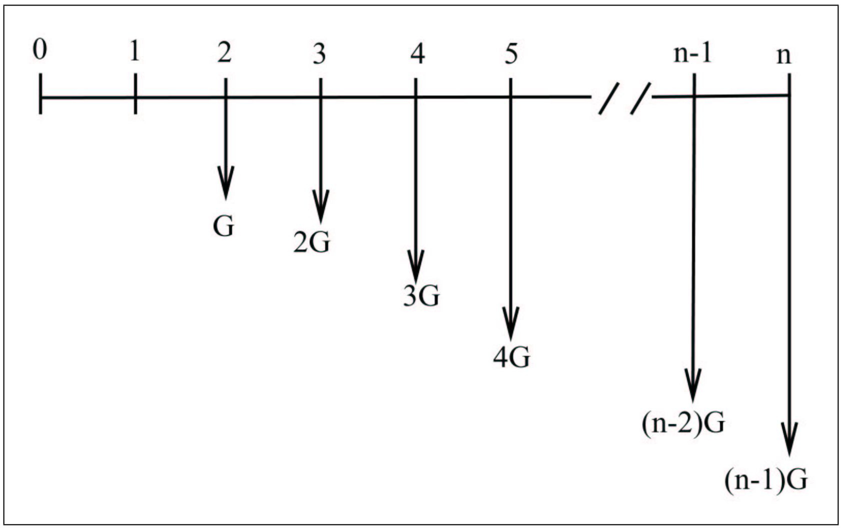

Figura 6.1: Gradiente uniforme

A continuación se muestra la fórmula del presente del gradiente aritmético:

$$P = G\left[\frac{1}{(i+1)^2} + \frac{2}{(i+1)^3} + \frac{3}{(i+1)^4} + \cdots + \frac{(n-2)}{(i+1)^{n-1}} + \frac{(n-1)}{(i+1)^n}\right] \tag{6.1}$$

[2] G es el cambio aritmético (uniforme) en la magnitud de las entradas o en los ingresos para un período de tiempo.

Ahora, multiplicando la ecuación (6.1) a ambos lados por el término $(i+1)$ se llega:

$$(i+1)P = G\left[\frac{1}{(i+1)} + \frac{2}{(i+1)^2} + \frac{3}{(i+1)^3} + \cdots + \frac{(n-2)}{(i+1)^{n-2}} + \frac{(n-1)}{(i+1)^{n-1}}\right] \quad (6.2)$$

A continuación se realiza la resta de (6.2) y (6.1) llegando a:

$$(i+1)P - P = G\left[\frac{1}{(i+1)} + \frac{2-1}{(i+1)^2} + \frac{3-2}{(i+1)^3} + \cdots + \frac{(n-1)-(n-2)}{(i+1)^{n-1}} - \frac{(n-1)}{(i+1)^n}\right] \quad (6.3)$$

o lo que es lo mismo,

$$Pi - P + P = G\left[\frac{1}{(i+1)} + \frac{1}{(i+1)^2} + \frac{1}{(i+1)^3} + \cdots + \frac{1}{(i+1)^{n-1}} + \frac{1-n}{(i+1)^n}\right] \quad (6.4)$$

donde al despejar P queda:

$$P = \frac{G}{i}\left[\frac{1}{(i+1)} + \frac{1}{(i+1)^2} + \frac{1}{(i+1)^3} + \cdots + \frac{1}{(i+1)^{n-1}} + \frac{1}{(i+1)^n}\right] - \frac{G}{i}\left[\frac{n}{(i+1)^n}\right] \quad (6.5)$$

Se invita al lector obtener la siguiente fórmula la cual representa el valor presente de un gradiente aritmético conocido:

$$P = G\left(\frac{1}{i}\right)\left(\frac{(i+1)^n - 1}{i} - n\right)\left(\frac{1}{(i+1)^n}\right)$$

Ahora, como $P = \dfrac{F}{(i+1)^n}$, reempla en la última ecuación obteniendo:

$$\frac{F}{(i+1)^n} = G\left(\frac{1}{i}\right)\left(\frac{(i+1)^n - 1}{i} - n\right)\left(\frac{1}{(i+1)^n}\right) \quad (6.6)$$

Despejando F, se tiene una ecuación del valor futuro equivalente de un gradiente aritmético conocido:

$$F = G\left(\frac{1}{i}\right)\left(\frac{(i+1)^n - 1}{i} - n\right)$$

Ahora, como

$$F = A\left(\frac{(i+1)^n - 1}{i}\right)$$

Reemplazando (verifique!) y despejando A se llega:

$$A = G\left(\frac{1}{i}\right)\left[\frac{(i+1)^n - 1}{i}\left(\frac{i}{(i+1)^n - 1}\right) - n\left(\frac{i}{(i+1)^n - 1}\right)\right]$$

o lo que es igual,

$$A = G\left(\frac{1}{i}\right)\left[1 - \frac{ni}{(i+1)^n - 1}\right]$$

Donde la anualidad A dado un gradiente G está dado por:

$$A = G\left[\frac{1}{i} - \frac{n}{(i+1)^n - 1}\right]$$

EJEMPLO 32.

Una persona posee una deuda por un valor de \$60000000 y una entidad bancaria se la financiará en 36 cuotas mensuales la cuales se aumentarán mensualmente en \$30000. Si la tasa de interés mensual es del 2.8 %, hallar el valor de la primera cuota que pagará la persona.

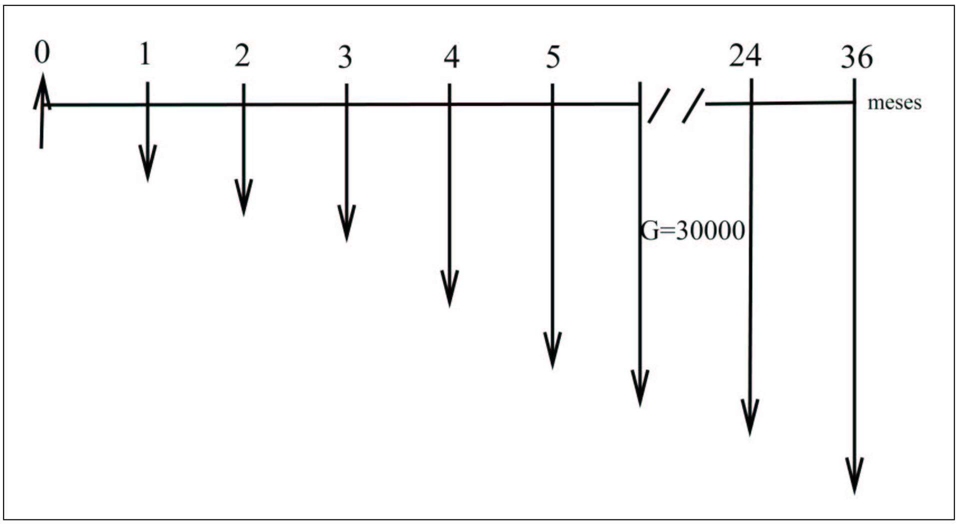

Figura 6.2: Gradiente uniforme

Con base a las fómulas expuestas anteriormente:

$$60000 = A\left[\frac{1-(1+0.028)^{-36}}{0.028}\right] + \frac{30000}{0.028}\left[\frac{1-(1+0.028)^{-36}}{0.028} - 36\,(1+0.028)^{-36}\right]$$

Resolviendo y simplificando (verifique!) se llega a:

$$60000 = 22.4986\,A + 9.832693192$$

Despejando A se llega finalmente:

$$A = \frac{50167306.88}{22.4986} = \$2229796.83$$

Así, la cuota número 24 se determina como sigue:

$$C_{24} = 2229796.83 + (24-1)(30000) = \$2919796.83$$

6.2.1. Gradiente creciente

Se busca ahora determinar el valor futuro de una serie de flujos de caja periódicos los cuales aumentarán en un valor constante cada periodo. Entonces, el valor futuro se ubicará en el periodo de tiempo en el cual se encuentre el último flujo de caja se determina con la serie gradiente aritmética y se calculará con la fórmula:

$$F_{TG} = F_A + F_G$$

donde:

- F_A es el valor futuro de la base o de la anualidad.
- F_G es el valor futuro del gradiente.

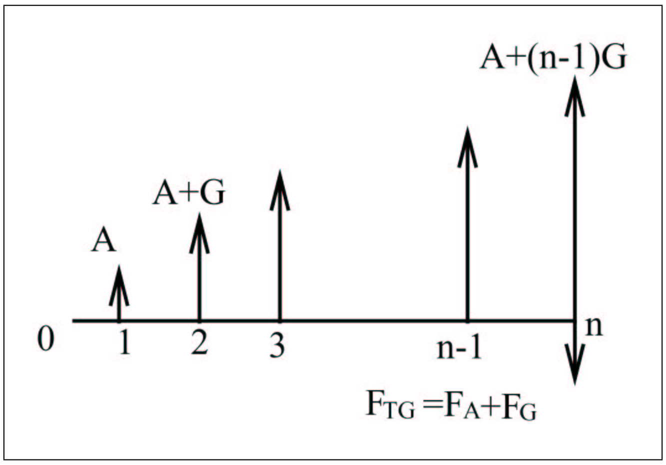

Figura 6.3: Valor futuro

Entonces, el valor futuro total de la serie gradiente artimética creciente se calculará con base a la siguiente ecuación:

$$F_{TG} = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] + \frac{G}{i}\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} - n\right] \tag{6.7}$$

donde se tiene que:

- F_{TG} es el valor futuro de la serie gradiente.
- A es el valor de la anualidad o igual de la base.
- i es la tasa de interés.
- n es el número de flujos de caja.
- G es la variación constante o lo que es lo mismo, el gradiente.

EJEMPLO 33.

Una maquinaria al final de dos años posee un valor de \$30000000 y la cual se comprará realizando depósitos mensuales durante los dos años que aumentan mensualmente en un valor de \$50000, donde la entidad prestadora reconocerá el 25 % mensual. ¿ Cual será el primer depósito?

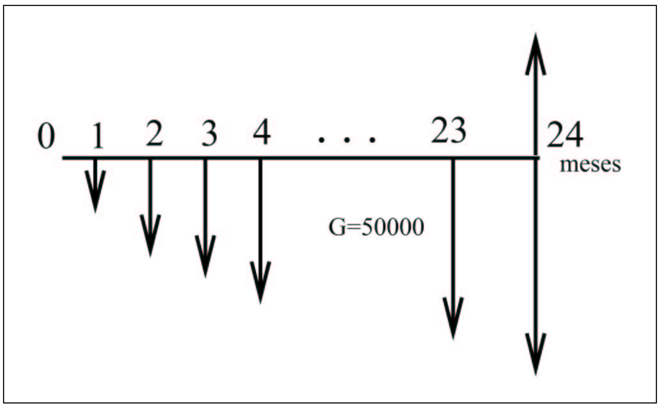

Figura 6.4: Valor futuro

Acá el valor futuro total de la serie gradiente aritmética se determinará con la fórmula (6.7), en efecto,

$$30000000 = A\left[\frac{(1+0.025)^{24}-1}{0.025}\right] + \frac{50000}{0.025}\left[\frac{(1+0.025)^{24}-1}{0.025} - 24\right]$$

$$30000000 = 32.35A + 16698075.97$$

donde despejando A se tiene:

$$A = \frac{13301924.03}{32.35} = \$411199.99$$

6.2.2. Gradiente decreciente

Se define como un valor localizado en el presente igual a una serie de flujos de caja periódicos que disminuyen cada uno con base al anterior y siempre en una cantidad constante que se llamará G.

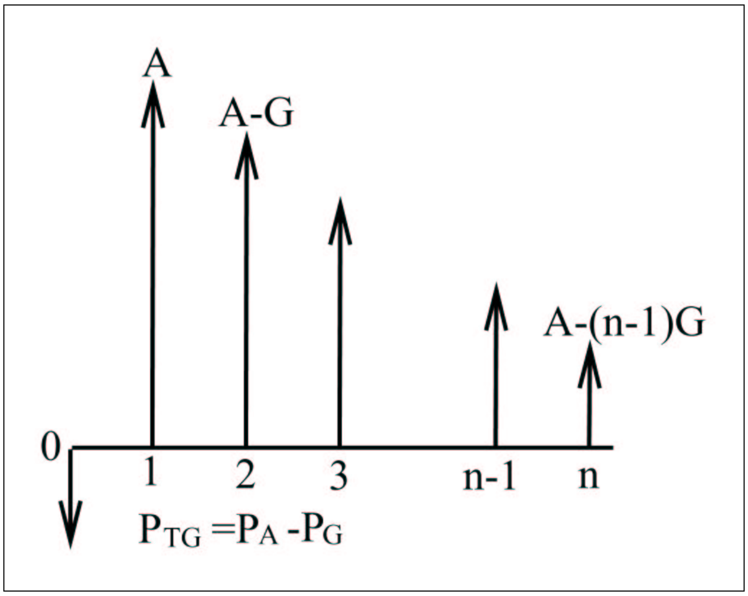

Figura 6.5: Valor presente

El valor A es la base de la serie gradiente lineal decreciente y este se comporta como una anualidad la cual se encuentra localizada un periodo después del cero de la serie gradiente aritmética y en este cero se ubica el valor presente total de la serie gradiente aritmética el cual se halla utilizando la fórmula:

$$P_{TG} = P_A - P_G$$

donde:

- P_A es el presente de la anualidad o la base.
- P_G es el presente del gradiente.

Este gradiente G está localizado dos periodos después de donde se localiza el cero de la serie gradiente aritmética.

El valor presente total de la serie gradiente se hallará mediante la fórmula:

$$P_{TG} = A\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] - \frac{G}{i}\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} - n(1+i)^{-n}\right] \tag{6.8}$$

donde:

- P_{TG} es el valor presente de la serie gradiente.
- A es el valor de la anualidad.
- i es la tasa de interés.
- n es el número de flujos de caja.
- G es la variación constante o igual al gradiente.

Para calcular el valor de cualquier flujo de caja en una serie gradiente decreciente se utiliza la siguiente fórmula:

$$C_n = A - (n-1)G \tag{6.9}$$

donde:

- C_n es el valor de la cuota n de la serie gradiente.

- A es el valor de la base.

- n es el número del flujo de caja.

- G es la variación constante o gradiente.

6.3. GRADIENTE GEOMÉTRICO

En muchas ocasiones los flujos de caja cambian respecto a los porcentajes constantes en períodos consecutivos de pago, en lugar de aumentos constantes de dinero. A este tipo de movimiento de flujo de caja se le denomina serie de flujos de tipo gradiente geométrico también conocido como series en escalera. Se tiene entonces que a los porcentajes constantes es a lo que se le conoce como *gradiente geométrico*, lo que podemos ver en la siguiente gráfica, donde A representa la cantidad de dinero en el primer año y j representa al incremento porcentual.

6.3.1. Gradiente geométrico creciente: Valor presente

Este valor se ubica en el presente y equivale a una serie de flujos de caja periódicos que aumenta cada uno con base al anterior siempre en un porcentaje que será fijo y que se denominará j.

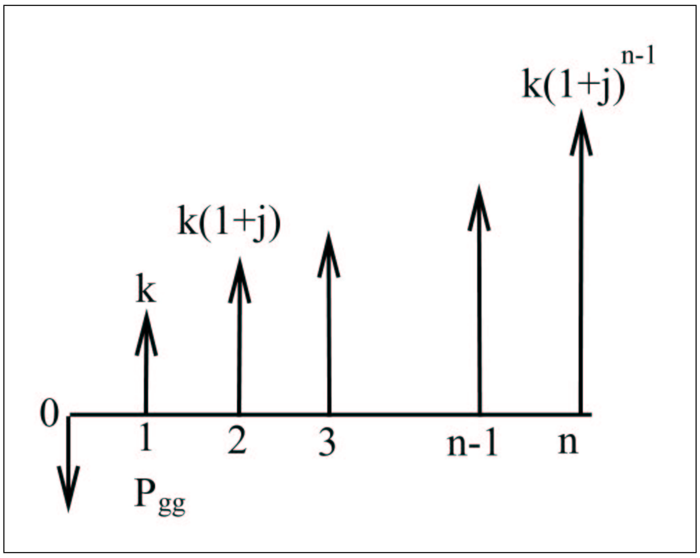

Figura 6.6: Valor presente

Acá, si $i \neq j$, entonces el valor presente de una serie geométrica se podrá determinar utilizando la siguiente fórmula:

$$P_{gg} = k\left[\frac{1-\left(\dfrac{1+j}{1+i}\right)^{n}}{i-j}\right] \tag{6.10}$$

donde se puede usar la siguiente ecuación para el cálculo del primer pago:

$$k = \frac{P_{gg}(i-j)}{1-\left(\dfrac{1+j}{1+i}\right)^{n}} \tag{6.11}$$

Si $i = j$, entonces el valor presente se determinará usando:

$$P_{gg} = \frac{nk}{1+i} \tag{6.12}$$

La cuota de una serie gradiente geométrica creciente se hallará utilizando:

$$C_n = k(1+j)^{n-1} \tag{6.13}$$

EJEMPLO 34.

Cierta deduda se está pagando (cancelando) en 2 años (24 cuotas) mensuales las cuales aumentan en un 10 % mensual. Si el valor de la primera cuota es por un valor de \$850000 y se cobra además una tasa de interés del 3 % mensual, hallar el valor de la cuota 18.

Acá, como $i \neq j$, entonces utilizando la fórmula para P_{gg} se obtiene:

$$P_{gg} = 850000 \left[\frac{1 - \left(\frac{1+0.10}{1+0.03} \right)^{24}}{0.03 - 0.10} \right] = 46694334.68$$

Así, la cuota 18 será:

$$C_{18} = 850000\,(1+0.10)^{17} = 4296299.74$$

6.4. GRADIENTE GEOMÉTRICO DECRECIENTE

A un gradiente geométrico decreciente lo conforma una serie de flujos de caja que decrecen periódicamente en un porcentaje constante.

6.4.1. Gradiente geométrico decreciente: Valor presente

En un valor ubicado un período antes a la fecha del primer flujo que conforma el gradiente, que es equivalente a una serie de flujos de caja que decrecen periódicamente en un porcentaje fijo que se llamará j.

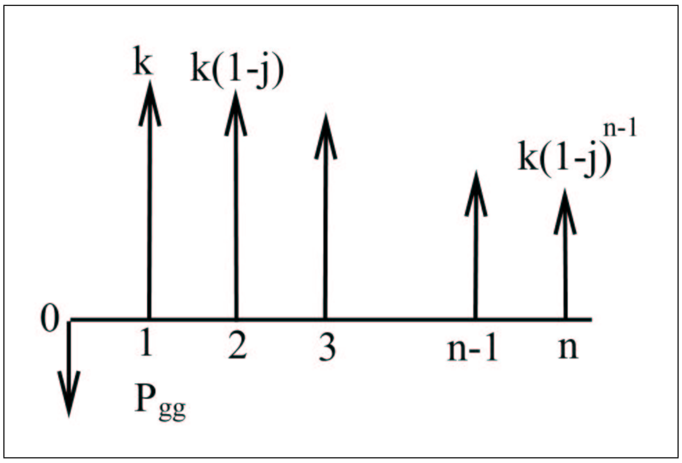

Figura 6.7: Valor presente

Si $i \neq j$, el valor presente de la serie gradiente geométrica decreciente se calculará utilizando la siguiente ecuación:

$$P_{gg} = k \left[\frac{1 - \left(\frac{1-j}{1+i} \right)^n}{i+j} \right] \tag{6.14}$$

El flujo de caja se calcula mediante la ecuación:

$$k = \frac{P_{gg}(i+j)}{1 - \left(\frac{1-j}{1+i} \right)^n} \tag{6.15}$$

Si $i = j$, el valor presente gradiente de la serie geométrica se calcula con:

$$P_{gg} = \frac{nk}{1+i} \tag{6.16}$$

Finalmente, la cuota de una serie geométrica decreciente se determinará como sigue:

$$C_n = k(1-j)^{n-1} \tag{6.17}$$

EJERCICIOS DE REPASO

1. Hallar el valor (valor neto o de contado) de un artículo comprado con el siguiente plan: Una cuota inicial por un valor de \$160000 y 20 cuotas mensuales; \$15700 es el valor de la primera, \$14700 la segunda, \$15800 la tercera y así sucesivamente, sabiendo que la tasa de interés sobre saldo es del 30 %.

2. Una serie de pagos mensuales se inicia el dia de hoy con un pago por un valor de \$59700 y aumentará en una cantidad fija hasta llegar a un valor de \$13000 dentro de 10 meses; a partir de allí disminuirá en otra suma fija de dinero hasta llegar a \$5400 nueve meses más tarde. Para una tasa de interés del 32 % anual, hallar el valor presente de esta serie.

3. Determinar el valor neto de un activo, si financiado se adquiere de la siguiente manera: una cuota inicial por un valor de \$459000, 15 cuotas mensuales iguales de \$45000 cada una, y luego cuotas trimestrales de \$153000 la primera, \$162000 la segunda, \$175000 la tercera y así sucesivamente hasta finales del quinto año; finalmente, 5 meses después de la última de estas cuotas trimestrales, un pago equivalente al 15 % del valor de contado. La tasa de interés es del 36 % anual.

4. Un empleado de cierta compañía decide ahorrar la cuarta parte de su sueldo mensual en una cuenta de ahorros que paga un interés del 25 %. El empleado tiene en la actualidad un salario de \$550.340 mensuales y le será aumentado en el 15 % cada año. Hallar la cantidad que tendrá ahorrada al cabo de 10 años.

5. Un ingeniero se vincula a una empresa una vez terminó sus estudios universitarios donde empieza devengando un salario de \$1250000 mensuales el primer año; la empresa le garantiza un aumento anual del 4 % y este empleado decide ahorrar cada mes la quinta parte de su salario mensual en un banco que

promete pagarle el 2 % mensual durante los cuatro primeros años y el 2.5 % mensual de allí en adelante, ¿cuánto tendrá ahorrado este profesional al cabo de 5 años?.

6. Una multinacional tiene costos fijos de $50000000 mensuales y costos variables de $250 por unidad. Durante los primeros 7 meses no hay producción porque este tiempo se dedicará a pruebas y ajustes tanto de la maquinaria como del personal. En el octavo mes se iniciará la producción con 300 unidades y cada mes la producción aumentará en 200 unidades hasta llegar al tope de 3400 al mes. Si se espera vender la fábrica al final de 3 años, calcular el costo total de la producción en estos 3 años en pesos de hoy, suponga una tasa del 3 % efectivo mensual.

7. Cierta maquinaria produce una utilidad de $2000000 de pesos durante el primer año, sin embargo, la utilidad de la máquina disminuye un valor de $35,000 cada año debido a desajustes de la misma por su uso. Calcular en pesos de hoy el total de las ganancias suponiendo que la máquina va a trabajar por 7 años. La tasa de interés es del 30 % efectiva anual.

8. Un banco presta al señor Pedro un total de $45000000, con un interés del 24 % NMV. El señor Pedro tiene un plazo de 12años para amortizar la deuda, mediante pagos mensuales. Suponiendo que la primera cuota es de $100000 y vence al final del primer mes, ¿cuál debe ser el porcentaje de reajuste mensual de la cuota para cancelar la deuda?.

9. ¿Cuánto se debe consignar hoy en una entidad financiera que paga un interés del 3 % mensual, para atender una serie de gastos si empezando dentro de dos meses y con un valor de $54000 se incrementa mes a mes en la misma cantidad?.

10. Una bicicleta de contado cuesta $800000; si se toma a plazos exigen de cuota inicial $160000 y el resto para ser cancelados con 9 cuotas mensuales de tal

manera que cada cuota decrezca en \$30000 respecto de la anterior. Si el interés de financiación es del 2 % mensual, encontrar el valor de la última cuota.

11. Si se deposita hoy \$15450000 en una entidad bancaria que reconoce el 3.5 % mensual durante cuantos meses se podrán hacer retiros de fin de mes de tal manera que cada retiro sea el 4 % mayor que el retiro anterior, si se sabe que el valor del primero retiro es de \$345000.

12.) Hallar el valor neto de un artículo que financiado puede adquirirse de la siguiente manera: Una cuota inicial equivalente al 30 % del valor de contado y el resto a 12 meses con cuotas que aumenten cada mes en el 1.6 %; sabiendo que la primera será de \$55000 y la tasa de interés será del 28 % nominal mensual.

CAPÍTULO 7

APENDICE: Función exponencial y logarítmica

Las funciones trascendentes juegan un papel importante dentro de las matemáticas y sus aplicaciones. Este tipo de funciones se denominan así ya que ellas trascienden lo algebraico, es decir, son funciones que no poseen estructura meramente algebraica.

Las funciones exponenciales y logarítmicas serán tratadas a continuación ya que ellas son parte fundamental en las matemáticas financieras.

7.1. LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

En cursos anteriores se estudiaron las funciones de la forma a^x donde $a \neq 0$ y x es un número real. Así, se puede definir la función exponencial de base a como sigue:

DEFINICION 2. *Sea a es un número real positivo y sea x un real cualesquiera.*

A la función $E(x) = a^x,\ a > 0$ se le denomina función exponencial de base a.

Recuérdese que el dominio de la función $E(x)$ es el conjunto de los número reales y su recorrido son todos los valores para los cuales $E(x) > 0$.

EJEMPLO 35.

Sea la función $E(x) = 5^x$. Se puede ver que es una función exponencial de base 5 cuyo dominio es $\mathbb{R}$ y recorrido todos los $E(x) > 0$.

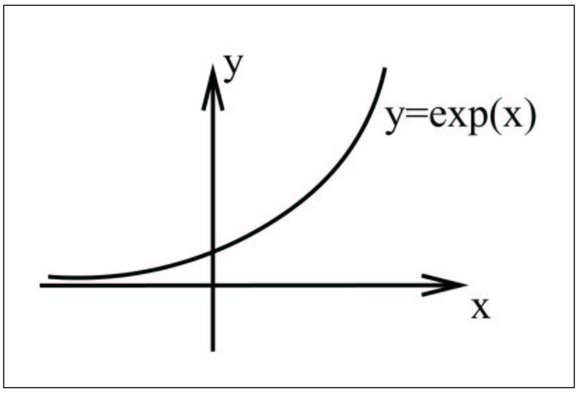

Figura 7.1: Función exponencial

TEOREMA 1. *Sea la función $E(x) = a^x$, entonces se tiene que:*

1. $E(x + y) = E(x)E(y)$.
2. $E(0) = 1$.
3. *La función es única.*

Demostración. 1. Se sabe que la función exponencial está definida para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces:

$$\begin{aligned} E(x + y) &= a^{x+y} \\ &= a^x a^y \\ &= E(x)E(y) \end{aligned}$$

así, se llega a que $E(x+y) = E(x)E(y)$.

2. $E(0) = E(x+(-x)) = E(x)E(-x) = a^x a^{-x} = a^{x+(-x)} = a^0 = 1$.

3. La demostración de unicidad de la función exponencial se deja al lector.

✠

7.2. LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA

Como se dijo en el teorema anterior, la función exponencial es unívoca y por lo tanto podemos definir la función inversa. Así, se llega a la definición:

DEFINICION 3. *La relación $x = a^y$, $a > 0, a \neq 1, x > 0$ define de forma implícita a una función llamada función logarítmica de base **a** la cual se denota por*

$$y = \log_a x,\ \ x > 0$$

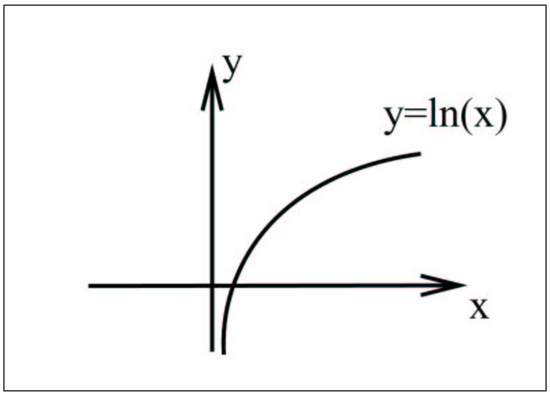

Figura 7.2: Función logarítmica

Con base a la anterior definición, las expresiones

$$x = a^y \qquad \text{y} \qquad y = \log_a x$$

son iguales.

A cada valor de la variable x le corresponde una valor llamado *Logaritmo en base a de x*, escrito $\log_a x$.

EJEMPLO 36.

1. $\log_2 8 = 3$, ya que $2^3 = 8$.

2. $\log_{10} 100 = 2$, ya que $10^2 = 100$.

TEOREMA 2. *Si* $y = \log_a x$ *con* $a > 0, a \neq 1$ *es la función logarítmica de base a y sean* w, z *números reales positivos, entonces:*

1. $\log_a (wz) = \log_a w + \log_a z$.

2. $\log_a (w/z) = \log_a w - \log_a z$.

3. $\log_a w^z = z \log_a w$.

Demostración. Se demostrarás la primera propiedad, las demás quedan como ejercicio para el lector.

Sean

$$\alpha = \log_a w \tag{7.1}$$

$$\beta = \log_a z \tag{7.2}$$

Por la definición de logaritmo se obtiene:

$$w = a^{\alpha}$$

$$z = a^{\beta}$$

Si se multiplica ambos miembros entre si:

$$wz = a^{\alpha} a^{\beta} = a^{\alpha+\beta}$$

Nuevamente por la definición de logaritmo se llega a:

$$\alpha + \beta = \log_a (wz) \tag{7.3}$$

Finalmente, reemplazando (7.1) y (7.2) en (7.3) se obtiene:

$$\log_a (wz) = \log_a w + \log_a z$$

✠

Muchas expresiones algebraicas que contengan potencias enteras y/o racionales pueden ser simplificadas a expresiones más simples equivalentes. Esto es muy importante a la hora de derivar este tipo de funciones, ya que los calculos se complican mucho más. La utilización de las propiedades de los logarítmos ayuda a resolver este problema y muchos más. Como una ilustración, veamos el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 37.

Transformar la siguiente expresión a una que no contenga exponentes fraccionarios.

$$\log_a \frac{\left[\sqrt{x^2-1}(x-5)\right]}{(x^3-1)^{1/5}}$$

***Solución*.**

Utilizando las propiedades del logaritmo se tiene:

$$\begin{aligned}
\log_a \frac{\left[\sqrt{x^2-1}(x-5)\right]}{(x^3-1)^{1/5}} &= \log_a \left[\sqrt{x^2-1}(x-5)\right] - \log_a (x^3-1)^{1/5} \\
&= \log_a \sqrt{x^2-1} + \log_a (x-5) - \log_a (x^3-1)^{1/5} \\
&= \tfrac{1}{2} \log_a (x^2-1) + \log_a (x-5) - \tfrac{1}{5} \log_a (x^3-1)
\end{aligned}$$

TEOREMA 3. *Si* $a > 0$, $a \neq 1$, *entonces:*

1. $\log_a a = 1$.

2. $\log_a 1 = 0$.

7.2.1. Logarítmos naturales

Se presenta a continuación un caso especial de la función logarítmica, llamada la *función logarítmo natural* o logarítmo en base e.[1]

La función logarítmo natural está definida por:

$$\{(x, y): \quad y = \log_e x = \ln x\}$$

Es importante conocer que el número e o número de Euler se define de la siguiente manera:

DEFINICION 4.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots = e \approx 2.71828\cdots$$

El logarítmo natural posee una relación con los logarítmos en otras bases, lo cual se ve en el siguiente teorema:

TEOREMA 4. *Si* $a > 0$, $a \neq 1$, *entonces:*

$$\log_a x = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

o lo que es equivalente,

$$\log_a x = \frac{\log_e x}{\log_e a}$$

[1]Número de Euler, en honor al matemático Euler.

Demostración. Sea $y = \log_a x$. De la definición de logaritmo se llega:

$$a^y = x$$

Como la función logaritmo natural es única (unívoca)

$$\ln(a^y) = \ln(x)$$

o lo que es lo mismo:

$$y \ln(a) = \ln(x)$$

Despejando la variable y:

$$y = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

y como $y = \log_a x$ se llega finalmente:

$$\log_a x = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

✠

7.3. DERIVACIÓN DE LAS FUNCIONES EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICA

Si U es una función diferenciable de la variable x, entonces:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(e^U\right) = e^U \, \frac{dU}{dx}} \tag{7.4}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(a^U\right) = a^U \,\ln(a)\,\frac{dU}{dx}} \tag{7.5}$$

Demostración. Se demostrará la fórmula (7.4); la fórmula (7.5) queda como ejercicio al lector.

Se sabe que la función $y = e^U$ es equivalente a la función $U = \ln(y)$. Derivando implícitamente esta última función:

$$\frac{dU}{dx} = \frac{d}{dx}(\ln y)$$

o lo que es lo mismo,

$$\frac{dU}{dx} = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}$$

Despejando $\dfrac{dy}{dx}$ se llega a:

$$\frac{dy}{dx} = y\frac{dU}{dx}$$

Como $y = e^U$, entonces se obtiene la ecuación

$$\frac{d}{dx}\left(e^U\right) = e^U \,\frac{dU}{dx}$$

que era lo que se pedía demostrar. ✠

EJEMPLO 38.

Derivar la siguiente función:

$$y = e^{2x^2-3x+1}$$

Solución.

$$\frac{d}{dx}\left(e^{2x^2-3x+1}\right) = \left[e^{2x^2-3x+1}\right]\frac{d}{dx}\left(2x^2-3x+1\right)$$

aplicando las reglas usuales de derivación se obtiene:

$$\frac{d}{dx}\left(e^{2x^2-3x+1}\right) = e^{2x^2-3x+1}\,(4x-3)$$

Considérese ahora la función $y = \log_a U$, donde U es una función diferenciable de la variable x. Se tiene entonces lo siguiente:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\log_a U\right) = \frac{\frac{dU}{dx}}{U\,\ln(a)}} \tag{7.6}$$

Ahora, si la base fuera el número de Euler e, es decir, $y = \log_e U$ o lo que es lo mismo $y = \ln(U)$ se tiene lo siguiente:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\ln U\right) = \frac{1}{U}\frac{dU}{dx}} \tag{7.7}$$

EJEMPLO 39.

Derivar la siguiente función:

$$y = \log_2\left(7x^3 - 2x\right)$$

Solución.

Aplicando la ecuación (7.6):

$$\frac{d}{dx}\left(\log_2\left(7x^3 - 2x\right)\right) = \frac{21x^2 - 2}{(7x^3 - 2x)\ln(2)}$$

EJEMPLO 40.

Derivar la siguiente función:

$$y = \ln\left(\sin x - 2e^{x+1}\right)$$

Solución.

Aplicando la ecuación (7.7):

$$\frac{d}{dx}\left(\ln\left(\sin x - 2e^{x+1}\right)\right) = \frac{1}{\sin x - 2e^{x+1}}\left[\cos x - 2e^{x+1}\right]$$

o equivalentemente,

$$= \frac{\cos x - 2e^{x+1}}{\sin x - 2e^{x+1}}$$

7.4. Diferenciación de funciones utilizando logaritmos

En muchas ocasiones nos encontramos con funciones compuestas que son complicadas de derivar por las técnicas conocidas. El uso de las propiedades de los logaritmos facilitan el proceso de derivación y simplifican considerablemente los calculos. Como ejemplo ilustrativo de lo mencionado se tiene el siguiente:

EJEMPLO 41.

Derivar la siguiente función:

$$y = \sqrt{\frac{(x^2 - 2)(x + 3)}{(x - 2)(x + 6)}}$$

Solución.

Tomando logaritmos naturales a ambos lados de la función se obtiene:

$$\ln y = \ln \sqrt{\frac{(x^2-2)(x+3)}{(x-2)(x+6)}}$$

Aplicando las propiedades de los logaritmos se llega a:

$$\begin{aligned}\ln y &= \frac{1}{2}\ln\left[\frac{(x^2-2)(x+3)}{(x-2)(x+6)}\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[\ln(x^2-2)+\ln(x+3)-\ln(x-2)-\ln(x+6)\right]\end{aligned}$$

Ahora, se deriva implícitamente ambos lados la última igualdad respecto a x,

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2}\left[\frac{2x}{x^2-2}+\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+6}\right]$$

Si despejando y':

$$y' = \frac{y}{2}\left[\frac{2x}{x^2-2}+\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+6}\right]$$

Como inicialmente $y = \sqrt{\frac{(x^2-2)(x+3)}{(x-2)(x+6)}}$, entonces reemplazando esta función en la anterior igualdad obteniendo:

$$y' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x^2-2)(x+3)}{(x-2)(x+6)}}\left[\frac{2x}{x^2-2}+\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+6}\right]$$

que es la solución buscada.

Bibliografía

[1] AYRES, F. *Teoría y Problemas de Matemáticas Financieras.* McGraw-Hill,1981

[2] BARROS ARGOTE, Victor. *Matemáticas Especiales para Ingeniería.* Pereira, 1991.

[3] HERNANDEZ, Abraham. Matemáticas Financieras, teoría y practica. 2da Edición, Ecafsa. 2000.

[4] JARAMILLO, Felipe. Matemáticas Financieras Básicas Aplicadas. Primera Edición. Editorial Alfaomega. 2004

[5] SERRANO, Javier. Matemáticas Financieras y evaluación financiera de proyectos. Alfaomega. 2001.

[6] RAMIREZ, Carlos y otros. Fundamentos de Matemáticas Financieras. Universidad Libre Sede Cartagena. 2009.

[7] SMITH, Robert. *Cálculo Tomo I.* Editorial McGrawHill, 2000.

[8] VIDAURRI, Héctor. Matemáticas Financieras. Tercera Edición. Thomson Internacional. 2001.

[9] VELEZ, Ignacio. Decisiones de Inversión, enfocado a la valoración de empresas. Segunda Edición, CEJA. 2002.

[10] White et all. Ingeniería económica. 2da Edición. LIMUSA WILEY. 2001.

[11] ZORZOLI, Gustavo. *Cálculo Diferencial e Integral con Excel*. Editorial Omicron, System, 2004.